

УДК 51-7

Компьютерное моделирование процесса стабилизации основного состояния спина $1/2$ в магнитном поле при наличии шумового воздействия

А.Ю. Ощепков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: aos57@mail.ru

Исследуется работа разомкнутой системы стабилизации основного состояния спина $1/2$ в магнитном поле при наличии узкополосного шумового воздействия вблизи резонансной частоты. Определена область робастности по амплитуде, дисперсионным и спектральным свойствам шума. Результаты получены с помощью компьютерного моделирования в пакете MATLAB.

Ключевые слова: компьютерное моделирование; система стабилизации; спин $1/2$; магнитное поле.

1. Формулировка задачи стабилизации и её цели

Спин $1/2$, помещённый в постоянное магнитное поле представляет собой двухуровневую систему. С точки зрения квантовой информации он может являться квантовым битом (кубитом). Вообще, в качестве кубита может быть избрана любая квантовая система с двумя состояниями, характеризуемыми базисными функциями [1]. Нормированная линейная комбинация этих функций (суперпозиция) описывает чистое состояние, которое и хранит квантовую информацию. Основная физическая проблема создания квантового компьютера – быстрый распад суперпозиционных состояний, приводящий к потере квантовой информации. Этот процесс называется декогеренцией. Декогеренция накладывает основное требование к физической реализации кубита: время сохранения когерентности состояний должно быть больше времени вычисления. Существует два способа избежать распада когерентности: найти квантовую систему, максимально изолированную от окружения, или увеличить время когерентности искусственно [2]. Данная работа посвящена исследованию одной из возможных реализаций второго способа.

В работе рассматривается метод стабилизации основного состояния кубита, реализованного с помощью спина $1/2$, находящегося в посто-

янном магнитном поле. Отметим, что данный пример реализации кубита остаётся весьма перспективным для проведения квантовых вычислений. Например, корпорация Intel на выставке CES 2018 (Лас-Вегас, 2018) сообщила о выпуске сверхпроводящего квантового чипа, обладающего 49 кубитами, а также о параллельной разработке другого типа – спиновых кубитов в кремнии. При этом отмечено, что последние способны иметь принципиальное преимущество будучи гораздо меньше сверхпроводящих кубитов [3].

Спином $1/2$ обладают, например, электроны и ядра атома водорода (протоны). В отсутствие магнитного поля состояния этих частиц дважды вырождены по спиновому квантовому числу. При помещении их в магнитное поле с напряженностью H_0 вырождение снимается, и появляются два уровня энергии:

$$E_1 = -\frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot H_0, E_2 = +\frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot H_0. \quad (1.1)$$

Здесь γ - гиромагнитное отношение частицы, \hbar - постоянная Планка. При проведении квантовых вычислений кубит переводится из одного состояния в другое в соответствии с требуемым алгоритмом посредством унитарных преобразований. Проблема заключается в том, чтобы стабилизировать требуемое состояние на время проведения вычислений или более.

Двухуровневая система в общем случае может быть описана всего двумя параметрами, так что ее состояние задается точкой на сфере еди-

ничного радиуса (сфере Блоха). Для спина $\frac{1}{2}$ эта точка имеет наглядный физический смысл: единичный вектор \vec{m} , проведенный из начала координат в эту точку, характеризует произвольное чистое состояние спина.

В произвольном магнитном поле \vec{H} динамика вектора \vec{m} описывается классическим уравнением

$$\dot{\vec{m}} = \gamma \vec{m} \times \vec{H}. \quad (1.2)$$

Здесь точка над символом означает операцию дифференцирования по времени, символ "x" соответствует векторному произведению. Вектор \vec{m} называют вектором спиновой поляризации.

Если поле \vec{H} в (1.2) постоянно, это уравнение описывает прецессию вектора \vec{m} вокруг направления вектора \vec{H} с частотой

$$\omega = \gamma H \quad (1.3)$$

(ларморова прецессия). Запись энергии базисных состояний в форме (1.1) означает, что постоянное поле $\vec{H}_0 = (0, 0, H_0)$ направлено по оси Z, являющейся осью квантования. Энергии E_1 (основное состояние) соответствует ориентация вектора \vec{m} по оси Z ($\vec{m} = (0, 0, 1)$, т.е. $m_z = 1$); энергии E_2 (возбужденное базисное состояние) соответствует $m_z = -1$.

Цель управления в задаче стабилизации основного состояния может быть записана в стандартном виде

$$m_z \rightarrow 1, t \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Однако, при работе реальных систем управления всегда возможны отклонения регулируемой величины от заданного значения. Для определения соответствия качества регулирования заданному критерию вводят максимально допустимое значение целевой функции [4], которое в нашем простейшем случае означает указание коридора допустимых отклонений [5].

Для уточнения цели управления (1.4) рассмотрим матрицу плотности чистого состояния спина $\frac{1}{2}$ [6]:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+m_z & im_x \\ -im_y & 1-m_z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Поскольку диагональные элементы матрицы (1.5) определяют вероятности нахождения спина в базисных состояниях, величина

$$DCH = 1 - m_z \quad (1.6)$$

может служить мерой декогеренции. Критерий качества теперь может быть определен в виде максимально допустимой величины декогеренции $DCHm$, так что цель управления может быть сформулирована в виде

$$DCH \leq DCH_m, t \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Критерию качества 5%, например, соответствует $DCHm = 0,10$.

Конкретная величина $DCHm$ определяется задачей, в которой используется кубит. При применении кубита в квантовых компьютерах

эта величина определяется предельно допустимой вероятностью ошибки вычислений [7].

2. Система стабилизации с обратной связью

Для получения алгоритма стабилизации, достигающего цели (1.7), рассмотрим задачу о поведении Z-компоненты вектора \vec{m} в системе координат, вращающейся с частотой $\omega_0 = \gamma H_0$, в присутствии магнитного поля \vec{H} , имеющего произвольную ориентацию относительно оси Z, и вращающегося с той же частотой.

Пусть в начальный момент времени вектор \vec{m} и постоянное магнитное поле \vec{H} направлены так, как указано на Рис.1.

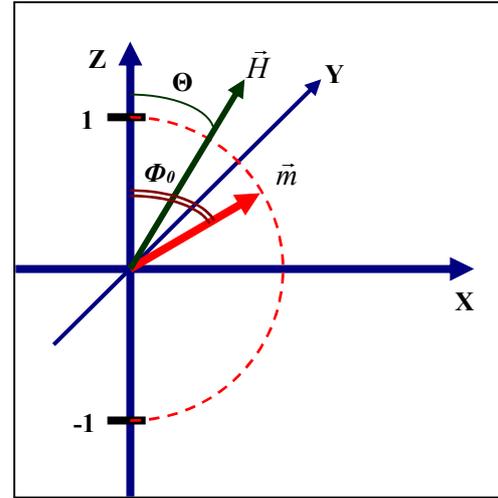


Рис. 1. Начальное расположение вектора \vec{m} относительно постоянного магнитного поля \vec{H}

Поле \vec{H} имеет координаты

$$\vec{H} = (H \sin \Theta, 0, H \cos \Theta), \quad (2.1)$$

а начальное положение вектора \vec{m}

$$\vec{m}(0) = (m \sin \Phi_0, 0, m \cos \Phi_0). \quad (2.2)$$

Вводя круговую частоту в соответствии с (1.3), уравнения (1.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= -\omega \cos \Theta m_y; \\ \dot{m}_y &= \omega \cos \Theta m_x - \omega \sin \Theta m_z; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{m}_z = \omega \sin \Theta m_y.$$

Система уравнений (2.3) легко решается путем введения новой переменной $m' = \cos \Theta m_x - \sin \Theta m_z$. Для Z-составляющей вектора \vec{m} (только ее поведение нас интересует) после решения получаем следующую зависимость от времени:

$$\begin{aligned} m_z(t) &\equiv \cos \Phi(t) = \\ &\cos \Phi_0 + 2 \sin \Theta \sin(\Phi_0 - \Theta) \sin^2 \frac{\omega t}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $\Phi_0 = 0, \Theta = \frac{\pi}{2}$ получаем известную формулу Раби [8], описывающую резонансную переориентацию спина во вращающейся системе координат:

$$\cos \Phi(t) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}. \quad (2.5)$$

Нас интересует случай $\Phi_0 > 0$, поскольку угол Φ_0 описывает уход вектора спина из основного состояния, и величина этого угла входит в формулу для декогеренции (1.6). Для $\Theta = \frac{\Phi_0}{2}$ из (2.4) получим

$$\cos \Phi(t) = \cos^2 \frac{\Phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} \cdot \cos \omega t. \quad (2.6)$$

Полученный результат и поясняет суть алгоритма стабилизации. Из (2.6) следует, что в момент времени t , удовлетворяющий условию $\cos \omega t = -1$ ($\omega t = \pi$), $\cos \Phi(t) = 1$, т.е. магнитное поле, направленное по биссектрисе угла между направлением начального положения спина и осью Z , через некоторое время возвращает спин в состояние $m_z = 1$.

Таким образом, если угол Θ в каждый момент времени t выбирать из условия

$$\Theta(t) = \frac{\Phi(t)}{2}, \quad (2.7)$$

то цель управления (1.5) будет достигнута. В работе [9] показано, что условие (2.7) может быть выполнено при включении поперечного поля управления \vec{H}_p , направленного вдоль оси X лабораторной системы координат, с амплитудой, изменяющейся по закону:

$$\begin{aligned} B_p(t) &= \gamma H_p = \omega_0 \cdot \operatorname{tg}(\Phi(t)/2) = \\ &= \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1-m_z(t)}{1+m_z(t)}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) определяет алгоритм работы системы управления с обратной связью.

Для проверки работоспособности алгоритма (2.8) в [9] было проведено моделирование в пакете MATLAB+Simulink. Математическая модель была представлена векторным уравнением:

$$\dot{\vec{m}} = \vec{A} \cdot \vec{m} + \vec{m} \times (\vec{\omega}_r(t) + \vec{B}_p), \quad (2.9)$$

где матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_0 \quad (2.10)$$

определяет прецессию вектора \vec{m} с частотой ω_0 ,

$$\vec{\omega}_r = (\omega_r \cos \omega_0 t, -\omega_r \sin \omega_0 t, 0) \quad (2.11)$$

представляет собой магнитное поле амплитуды ω_r , вращающееся в плоскости XY с резонансной частотой ω_0 (синфазная помеха),

$$\vec{B}_p = (B_p(m_z), 0, 0) - \quad (2.12)$$

поле управления, в котором составляющая $B_p(m_z)$ определяется выражением (2.8).

В ходе моделирования было установлено, что алгоритм (2.18) прекрасно справляется с задачей при малых значениях помехи

($H_r/H_0 < 0,001$), однако с увеличением H_r ошибка регулирования нарастает. Зависимость максимальной величины декогеренции DCH_{max} от амплитуды синфазной помехи H_r при управлении по цепи обратной связи в установившемся режиме приведена на Рис. 2. Граничным значением амплитуды помехи по критерию 5% является величина помехи $(0,012...0,013)H_0$. В реальных условиях величина случайных магнитных полей, создаваемых окружением кубита, много меньше указанного значения [10]. Таким образом, подтверждена работоспособность систем управления с обратной связью.

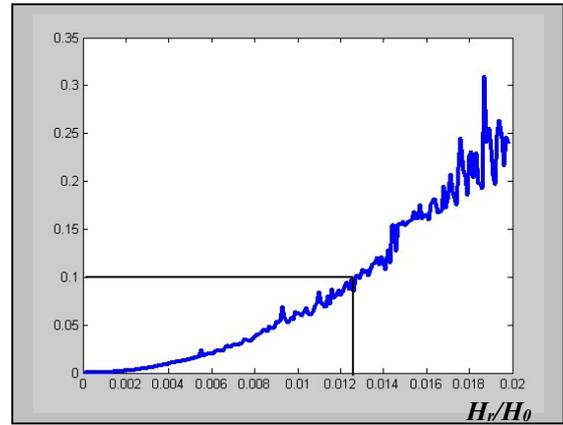


Рис. 2. Зависимость максимальной величины декогеренции (DCH_{max}) от амплитуды синфазной помехи H_r при управлении по цепи обратной связи [9]

Однако этот факт не является главным итогом моделирования, потому что создание системы с обратной связью невозможно по причине того, что состояние квантового объекта не может быть измерено без его разрушения. Важно, что в результате анализа работы модели системы управления с обратной связью был предложен алгоритм работы разомкнутой системы, которая является физически реализуемой.

3. Разомкнутая робастная система управления

3.1 Постоянная амплитуда помехи

Разомкнутая система управления предполагает выработку управляющего воздействия по заранее рассчитанной программе (циклограмме), без измерения состояния объекта управления. Моделирование замкнутой системы управления с алгоритмом (2.8) в цепи обратной связи показало, что амплитуда поля управления

$$\vec{B}_p = (B_p(t), 0, 0) \quad (3.1)$$

имеет быстро осциллирующую составляющую на частоте ν_0 с медленно изменяющейся огибающей [9]. В итоге анализа полученных результатов синтез управляющего воздействия $B_p(t)$ в

разомкнутой системе было предложено осуществлять в виде импульсов, изменяющихся по синусоидальному закону от нулевого до максимального значения:

$$B_p(t) = B_p |\sin \omega_p t|, \quad (3.2)$$

где B_p – амплитуда пульсаций, а

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} \quad (3.3)$$

период пульсаций. Амплитуда B_p и период T_p не связаны с параметрами циклограммы управляющего воздействия замкнутой системы. Циклограмма алгоритма (3.2) приведена на Рис. 3.

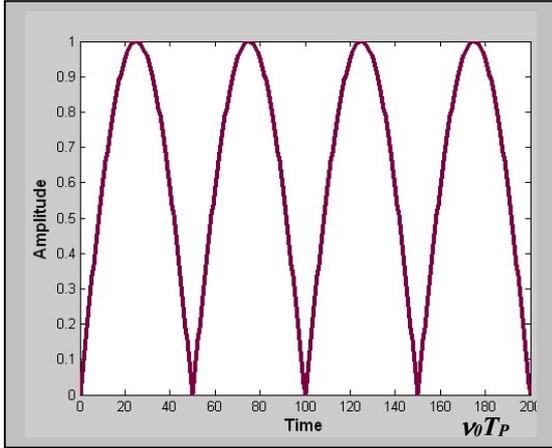


Рис. 3. Циклограмма работы разомкнутой системы управления

Проверка работоспособности алгоритма (3.2) была проведена с помощью компьютерного моделирования.

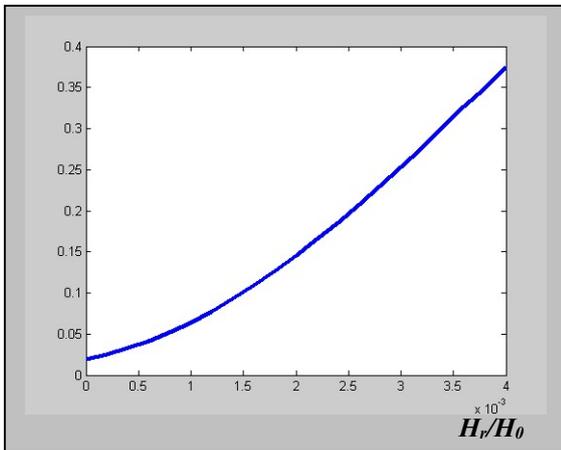


Рис. 4. Зависимость максимальной величины декогеренции (DCH_{max}) от амплитуды синфазной помехи H_r при синтезе управления в разомкнутой системе

Результаты исследований показали, что Критерий 5% выполняется для величины амплитуды B_p , составляющей 0,12...0,45 от величины постоянного поля. Минимальные значения декогеренции обеспечиваются при значениях

$$B_p = (0,15 \dots 0,20) \omega_0, \quad (3.4)$$

при этом период пульсаций поля управления T_p может иметь значение от 20 до 120 периодов спиновой прецессии.

При оптимизированных значениях параметра регулятора ($B_p = 0,2\omega_0$, $T_p = 100/v_0$) была исследована зависимость максимальной величины декогеренции от амплитуды синфазной помехи H_r аналогично тому, как это было сделано для замкнутой системы. График зависимости приведен на Рис. 4. Сравнение графиков на Рис. 2 и на Рис. 4 показывает, что область робастности разомкнутой системы по величине помехи почти на порядок меньше, чем для замкнутой. Тем не менее, разомкнутая система позволяет стабилизировать основное состояние кубита на основе спина $\frac{1}{2}$ при действии внешнего дестабилизирующего воздействия вплоть до $H_r = 0,0015 H_0$. Напомним, что разомкнутая система, в отличие от замкнутой, технически реализуема.

3.2. Узкополосный гауссовский шум

Приведённые выше результаты получены в предположении, что амплитуда помехи не изменяется во время работы системы стабилизации. На самом деле, величина воздействия подвержена случайным изменениям, причём дестабилизирующее поле может изменять как амплитуду, так и направление оси вращения. В работе [11] показано, что при моделировании случайных воздействий наклон оси вращения возмущающего поля может быть учтён изменением эффективной амплитуды ортогонального поля. Поэтому в качестве помехи рассмотрим поле вида (2.11), представляющее собой узкополосный гауссовский шум [12]:

$$\vec{\omega}_r = (\omega_r(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi), -\omega_r(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi), 0) \quad (3.5)$$

Здесь $\omega_r(t)$ гауссовский случайный процесс, спектр которого ограничен частотой много меньшей резонансной частоты ω_0 , φ – случайная фаза.

На Рис. 5 приведена S-модель системы стабилизации. Блок “SpinDynamic” моделирует динамику вектора в соответствии с (2.9). Блок “Random Field” вырабатывает поле помехи по выражению (3.5). Блок “Control Field” формирует вектор управления, амплитуда которого создаётся по закону обратной связи (2.8) (блок “FB Amplitude”) или разомкнутой системы (3.2) (блок “Pulse Amplitude”). Выбор закона управления осуществляется с помощью ключа “FB Key” Умножитель “SKey” позволяет включать (SKey=1) или выключать управление (SKey=0). Все параметры S-модели задаются в m-файле, который запускает модель и строит графики по данным, возвращаемым моделью.

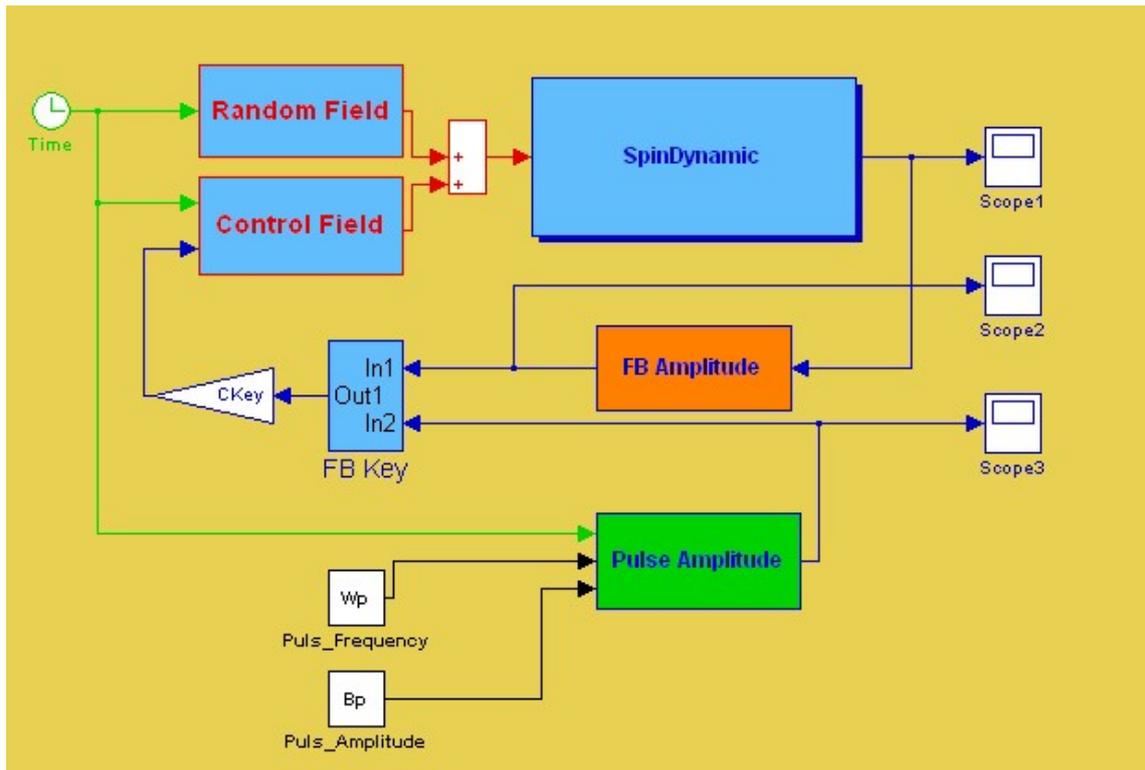


Рис. 5. S-модель для исследования работы разомкнутой системы стабилизации и системы с использованием обратной связи

В первую очередь с помощью моделирования было показано, что при случайном изменении фазы φ поля помехи в (3.5) изменения величины m_z не происходит, т.е. расфазированная помеха не приводит к декогеренции. Поэтому дальнейшие исследования проводились при постоянной фазе $\varphi = 0$.

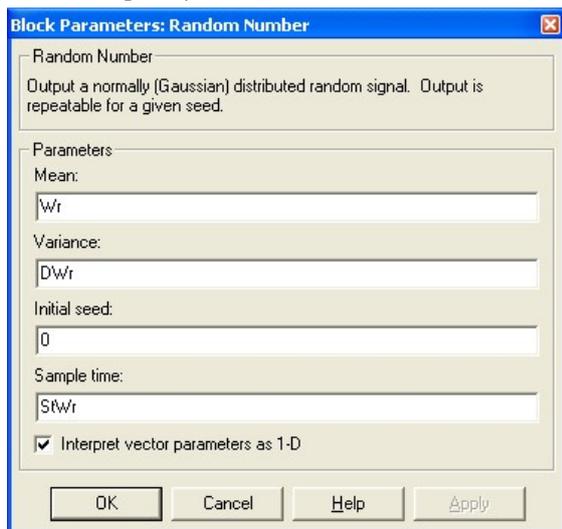


Рис.6. Параметры амплитуды случайного поля

Во всех описанных ниже численных экспериментах время измеряется в периодах лармовской прецессии, т.е. полагается

$$\nu_0 = 1, \quad \omega_0 = 2\pi. \quad (3.6)$$

Параметры случайной амплитуды $\omega_r(t)$ задаются в блоке *Random Number* библиотеки Simulink (Рис. 6).

На Рис. 7 показано поведение с течением времени величин m_z и *DCH* в отсутствие управления ($CKey=0$) при следующих параметрах помехи:

- средняя амплитуда $W_r=0,001$;
- дисперсия $DW_r/W_r^2=0,01$;
- характерное время изменения (обратная частота) $StW_r=100$.

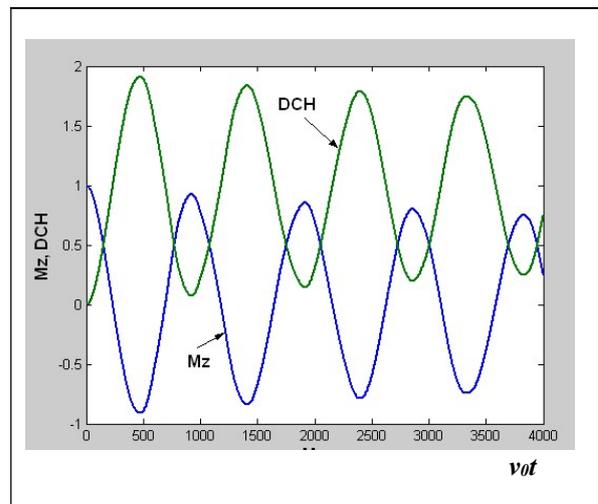


Рис. 7. Зависимость величин m_z и *DCH* от времени в отсутствие управления

Видно, что спин уходит из основного состояния в соответствии с формулой (2.5), а декогеренция изменяется от 0 до 2.

На Рис. 8 показаны результаты работы разомкнутой системы управления при тех же значениях параметров случайного поля.

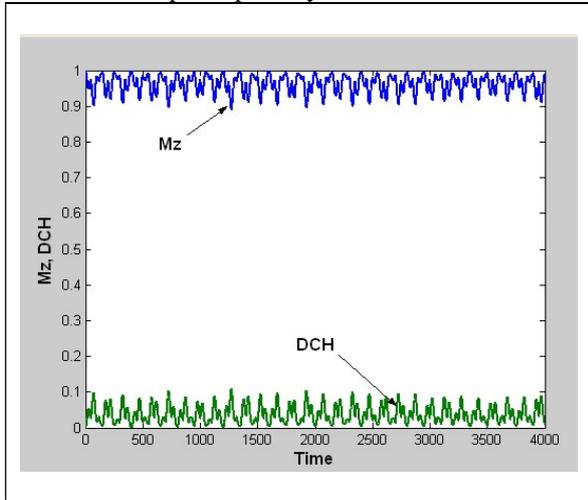


Рис. 8. Зависимость величин m_z и DCH от времени при работе разомкнутой системы управления

Максимальное значение декогеренции теперь составляет чуть более 0,1.

Для определения области робастности разомкнутой системы стабилизации в присутствии узкополосного шума была найдена зависимость максимальной величины декогеренции DCHmax от средней амплитуды помехи при различных дисперсионных и спектральных параметрах. На Рис. 9 приведены графики указанных зависимостей для различных дисперсий при времени изменения 100 (характерная частота 0,01), на Рис.10 – те же зависимости при времени изменения 10 (частота 0,1).

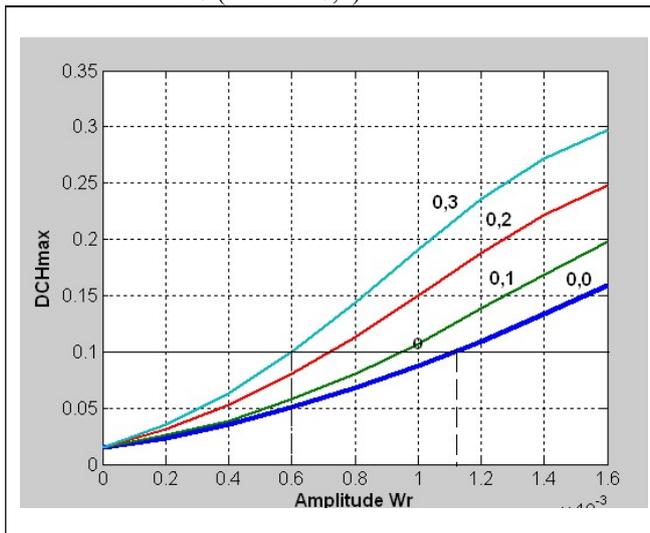


Рис. 9. Зависимость величины DCHmax от средней амплитуды помехи при различных отношениях среднеквадратичного отклонения к среднему значению (указаны на графиках). $StWr = 100$. Кружком отмечены значения параметров, соответствующие Рис. 8.

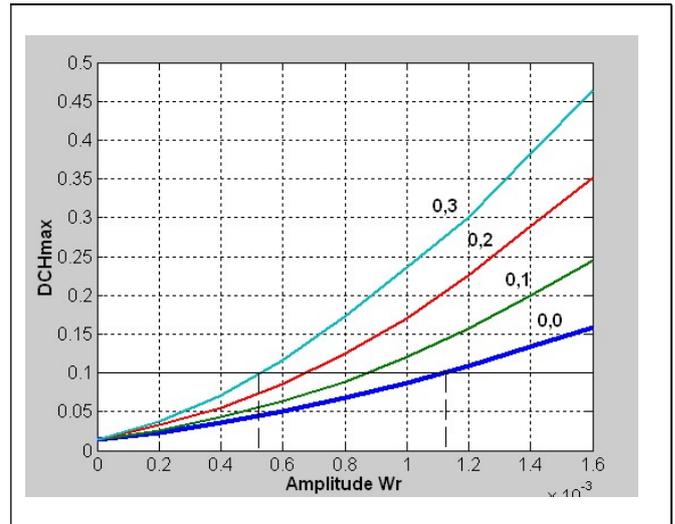


Рис. 10. Зависимость величины DCHmax от средней амплитуды помехи при различных отношениях среднеквадратичного отклонения к среднему значению (указаны на графиках). $StWr = 10$.

Из приведённых графиков следует, что спектральный состав шума не оказывает значительного влияния на ошибку. Зависимость от дисперсии более существенна: при величине СКО, составляющей 30% от среднего значения, область работоспособности по уровню 5% уменьшается почти в два раза. Тем не менее, разомкнутая система стабилизации остаётся робастной в широком диапазоне амплитуд случайного воздействия.

4. Заключение

Предложена робастная система стабилизации основного состояния кубита в виде спина $\frac{1}{2}$, находящегося в постоянном магнитном поле, основанная на включении дополнительного магнитного поля, лежащего в плоскости, перпендикулярной полю, формирующему уровни, и пульсирующему по гармоническому закону вдоль фиксированного направления. С помощью численных экспериментов в пакете MATLAB показано, что система работоспособна при периодах пульсаций поля в 100 раз меньших периода ларморовской прецессии и амплитуде пульсаций, составляющей (15...20)% величины постоянного продольного поля. Амплитуда компенсируемой помехи, представляющей собой узкополосный гауссовский шум, центрированный на резонансной частоте, при этом может составлять от 0,0007 до 0,0015 величин постоянного поля, в зависимости от дисперсии шума. Система может быть применена для стабилизации состояния кубита при проведении вычислительных операций в квантовых компьютерах.

Список литературы

1. *Валиев К.А.* Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физических наук, 2005, т. 175, № 1, с. 3 - 39.
2. *Килин С.Я.* Квантовая информация // Успехи физических наук, 1999, т. 169, № 5, с. 507 – 527.
3. 2018 CES: Intel Advances Quantum and Neuromorphic Computing Research. URL: <https://newsroom.intel.com/news/intel-advances-quantum-neuromorphic-computing-research>
4. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
5. *Ощепков А.Ю.* Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB. СПб: Лань, изд. 3 стер., 2018. – 208 с.
6. *Блум К.* Теория матрицы плотности и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 140 с.
7. *A Preview of Bristlecone, Google's New Quantum Processor.* URL: <https://ai.googleblog.com/2018/03/a-preview-of-bristlecone-googles-new.html>
8. *I.I.Rabi, N.N.Ramsey, J.Shwinger.* Use of Rotating Coordinates in Magnetic Resonance Problems //Rev. Mod. Phys., 1954, V.26, Iss. 2, P.167.
9. *Ощепков А.Ю.* Стабилизация кубита при наличии синфазной помехи// Вест. Перм. ун-та, сер. Информационные системы и технологии. - 2011. – С. 55 – 62.
10. *Александров И.В.* Теория магнитной релаксации. Релаксация в твердых и жидких парамагнетиках. – М.: Наука, 1975. – 400 с.
11. *Ощепков А.Ю.* Исследование механизмов релаксации намагниченности в мезоскопических парамагнетиках с помощью компьютерного моделирования // Вест. Перм. ун-та, сер. Физика, вып. 1 (19). - 2012. – С. 54 – 60.
12. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах. – М.: Физматлит, 2010. – 424 с.

Computer simulation of the process of stabilization of the ground state of spin 1/2 in a magnetic field in the presence of noise exposure

A.Yu. Oshchepkov

Perm State University

The operation of the open-loop stabilization system of the ground state of spin $\frac{1}{2}$ in a magnetic field in the presence of a narrow-band noise near the resonant frequency is investigated. The region of robustness by the amplitude, dispersion and spectral properties of noise is determined. The results were obtained using computer simulation in the MATLAB package.

Keywords: spin in a magnetic field; stabilization system; noise; computer simulation.