МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Л. Чечулин

СТАТЬИ РАЗНЫХ ЛЕТ

СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Пермь 2014

УДК 510.2; 330; 314.1
ББК 22.1; 65; 60.7
Ч 57

Чечулин В. Л.

Ч 57 Статьи разных лет: сборник / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2014. — Вып. 1. – 94 с.

ISBN 978-5-7944-2381-5
ISBN 978-5-7944-2382-2 (вып. 1)

В книге представлены работы В. Л. Чечулина, в том числе с соавторами, по трём направлениям: основания и история математики, математическая экономика и демография, – а также неопубликованные ранее работы разных лет из архива В. Л. Чечулина по широкой тематике.

В части 1 представлены работы о необходимости непредикативности в основаниях математики, о счётности множества подмножеств счётного множества в теории множеств с самопринадлежностью и о периодизации развития понятия предела. Эти работы продолжают цикл работ автора по основаниям и истории математики.

В части 2 содержатся работы по исследованию многомерных моделей основного логистического уравнения (описывающего денежный оборот относительно оборота общественно необходимого времени), а также описание снижения рождаемости (оценка количества нерождённых детей) в годы Второй мировой войны в некоторых странах-участницах.

Работы по описанию матричного основного логистического уравнения продолжают цикл работ по описанию безынфляционности экономики и анализу инфляционных процессов, изложенных в предыдущих книгах В. Л. Чечулина. Основной результат о совпадении одномерного и многомерного решения ОЛУ имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

Работа по демографии позволяет сопоставить демографический кризис в СССР в период Великой Отечественной войны (1941–1945) с современным демографическим кризисом (1992–…) в России, что указывает на сходность причин этих кризисов.

В части 3 приведены работы автора по основаниям теории вероятностей, а также некоторым вопросам теории графов (описаны два варианта доказательства известной теоремы четырёх красок,— четыре раскрашиваемости плоских графов), и некоторые другие работы, относящиеся к различным разделам научного знания.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

УДК 510.2; 330; 314.1
ББК 22.1; 65; 60.7

Печатается по решению кафедры прикладной математики и информатики
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: зам. директора ООО «Лаборатория Аргумент» по науч. работе, д-р физ.-мат. наук, проф. ***С. В. Русаков***; доц. каф. «Финансы и кредит» Кемеров. гос. ун-та, канд. экон. наук ***Т. А. Алабина***

ISBN 978-5-7944-2381-5
ISBN 978-5-7944-2382-2 (вып. 1)

© Чечулин В. Л., 2014

Chechulin V. L.

Articles from different years / V. L. Chechulin; Perm State University (Russia).– Perm, 2014.— Issue 1.— 94 p.

ISBN 978-5-7944-2381-5
ISBN 978-5-7944-2382-2 (issue 1)

This collection of articles represents works by Chechulin V. L. including those written with co-authors on three areas: foundations and history of mathematics, mathematical economics and demographics, as well as previously unpublished works of different years of the author's archive on a variety of subjects.

Part 1 represents works about the need of impredicativity in foundations of mathematics, the countability of a set of subsets of a countable set in the theory of sets with selfconsidering, and the periodization of the development of the concept of a limit. These works continue the author's series of works on foundations and history of mathematics.

Part 2 contains works on the study of multi-dimensional models of the main logistic equation (describing money turnover in relation to the turnover of socially indispensable time), as well as the decline in fertility (estimated number of unborn children) during the Second World War in some participating countries, as well as other works.

Works on the description of the matrix main logistic equation continue the series of works on the description and analysis of non-inflationary and inflationary processes developed in his previous books. The main result of the rencontre of the univariate and multivariate solutions of the main logistic equation has both theoretical and practical importance.

Work on demographics allow to compare the demographic crisis during the Great Patriotic War (in Russia, 1941–1945) with nowadays' (1992–…) demographic crisis in Russia, and the similarity of the causes of these crises is indicated.

Part 3 quotes the author's works on the foundations of the probability theory and some aspects of the theory of graphs (two variations of proving of the famous theorem of four colors — four-coloring of planar graphs — are described) and some other works relating to different branches of science. These works are also of interest to the scientific community.

This book is intended for researchers, postgraduates and senior students.

Printed by the decision of the applied mathematics and informatics department
of the Perm State University (Russia)

Reviewers: Deputy Director for Science of the «Laboratorya Argument», Dr. sc. math, prof., *S. V. Rusakov*; senior lecturer in "Finance and credit" department of Kemerovo State University (Russia) , PhD. Econ. Sciences *T. A. Alabina.*

ISBN 978-5-7944-2381-5
ISBN 978-5-7944-2382-2 (issue 1)

© Chechulin V. L, 2014

Оглавление

Оглавление 4
Предисловие 5
Часть 1. Основания и история математики 6
1. *Чечулин В. Л.* О необходимости непредикативности в основаниях математики 6
2. *Чечулин В. Л.* О счётности множества подмножеств счётного множества в теории множеств с самопринадлежностью 13
3. *Чечулин В. Л.* К периодизации истории понятия предела 18
Часть 2. Прикладная математика, экономика, демография 30
4. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* О правой границе области существования решения многомерного основного логистического уравнения 30
5. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* О параметре самоприменимости в многомерном основном логистическом уравнении 37
6. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* О решении многомерного основного логистического уравнения при разной инфляции в отраслях 42
7. *Чечулин В. Л., Смыслов В. И.* Изменение рождаемости в период Второй мировой войны в некоторых странах-участницах 45
Часть 3. Из архива 54
8. *Чечулин В. Л.* О некоторых естественных ограничениях уровня потребления 54
9. *Чечулин В. Л.* Об одном варианте доказательства 4-раскрашиваемости плоских графов 61
10. *Чечулин В. Л.* Теорема о стягивании конечных связных графов 63
11. *Чечулин В. Л.* Об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры 66
12. *Чечулин В. Л.* Об одном определении вероятностной меры 68
13. *Чечулин В. Л.* К возведению вероятностей в степень 79
14. *Чечулин В. Л.* О счётномерных ориентированных пространствах в теории множеств с самопринадлежностью 82
15. *Чечулин В. Л.* Вычисление норм резерва измерительного оборудования 85
16. *Чечулин В. Л.* К постановке задачи сравнительного анализа мировоззрений 88
Послесловие 92
Предметный указатель 93

Предисловие

В книге представлены работы Чечулина В. Л. 2013–2014 гг., в том числе с соавторами, по трём направлениям: 1) основания и история математики, 2) математическая экономика и демография; а также 3) неопубликованные ранее работы разных лет из архива Чечулина В. Л. по широкой тематике.

В части 1 представлены работы о необходимости непредикативности в основаниях математики, о счётности множества подмножеств счётного множества в теории множеств с самопринадлежностью, и о периодизации развития понятия предела. Эти работы продолжают цикл работ автора по основаниям и истории математики.

В части 2 содержатся работы по исследованию многомерных моделей основного логистического уравнения (описывающего денежный оборот относительно оборота общественно необходимого времени), а также описание снижения рождаемости (оценка количества нерождённых детей) в годы Второй мировой войны в некоторых странах-участницах, а также другие работы.

Работы по описанию матричного ОЛУ продолжают цикл работ по описанию безынфляционности и анализу инфляционных процессов, изложенных в предыдущих книгах Чечулина В. Л. Основной результат о совпадении одномерного и многомерного решения ОЛУ имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

Работа по демографии позволяет сопоставить демографический кризис в СССР в период Великой Отечественной войны (1941–1945) с современным демографическим кризисом в России (1992–…), что указывает на сходность причин этих кризисов.

В части 3 приведены работы автора по основаниям теории вероятностей, а также некоторым вопросам теории графов (описаны два варианта доказательства известной теоремы четырёх красок,— четырераскрашиваемости плоских графов), и некоторые другие работы, относящиеся к различным разделам научного знания.

Автор выражает благодарность Константинову Р. А. и Норину В. А. за выполнение ими предварительных расчётов, относящихся к многомерным уравнениям, описанным в части 2, а также Стафейчуку Б. Г. за указание на особенности современной теории управления.

Часть 1. Основания и история математики

В части 1 данной книги собраны работы по основаниям и истории математики.

УДК 510.2; 519.5; 164.07

1. О необходимости непредикативности в основаниях математики

Чечулин В. Л.

Рассматривается философия оснований математики. Описано в сравнении с непротиворечивой теорией множеств с самопринадлежностью (непредикативной) противоречивое строение чисто предикативной теории множеств; указано, что выделить из противоречивой предикативной теории непротиворечивую подтеорию невозможно ввиду теорем Гёделя; в итоге непротиворечивость доказуема только в непредикативной системе (теории множеств) с самопринадлежносьтью; показана необходимость непредикативных систем и теорий.
Ключевые слова: *философия оснований математики, теория множеств с самопринадлежностью; самопринадлежность; непротиворечивость теории множеств; аксиоматика теории множеств; непредикативность, предикативность, противоречивость предикативной теории; необходимость непредикативности.*

1. Предисловие

В работах [7], [9] была описана теория множеств с самопринадлежностью, обладающая непротиворечивостью (ввиду непредикативности, самоссылочности, теории доказательство непротиворечивости выполнено средствами самой теории [4], [5], [6], [15]). Сравнение с иными теориями множеств, хотя и допускающими ослабление аксиомы фундирования, но не допускающими самопринадлежность множеств, было выполнено в [11]. Ниже рассматриваются особенности чисто предикативного подхода к теории множеств, как исторически первого в формализации теории множеств.

2. Основания теории множеств

Онтологические и гносеологические основания науки подробно описаны в [10], для теории множеств с самопринадлежностью, см. [7], [9]. Онтологически имеются три уровня познания [2], [10]: i) непосредст-

венное созерцание (сфера сознания), ii) логические рассуждения (сфера информации, упорядоченной во времени), iii) материально-вещественная практика. Собственно математика относится ко второму онтологическому уровню познания, однако основания математики не могут быть произвольными,— они находятся в созерцательной области сознания. Игнорирование верхнего онтологического уровня (непредикативного — созерцательных оснований, проверяемых непосредственно) приводит к отрыву от реальности, т. е. для теорий необходима онтологическая полнота (см. [10]). Подробно основания теории множеств с самопринадлежностью описаны в[7], [9], [11], и здесь они не приводятся.

3. Попытки предикативного описания

При первоначальном (т. н. "наивном") описании теории множеств [1] (не имеющем полных онтологических оснований) предполагалось, что множества только несамопринадлежащи.

Пусть X — множество, тогда $\forall X: X \notin X$, (1)

т. е. множества задаются предикативно (несамоссылочно, без самопринадлежности).

Тогда если попытаться создать множество A, содержащее все несамопринадлежащие множества, получается следующее:

$A=\{X \mid X \notin X\}$, (2)

по (1) $A \notin A$, но по (2) $A \in A$, что противоречит (1). То есть наличие только несамопринадлежащих множеств и схемы свёртывания (выделения, конструирования множеств) приводит к противоречию[1].

Таким образом, предикативная теория множеств (без самопринадлежности) — противоречива. Доказана следующая теорема.

Теорема 1 (о противоречивости предикативной теории множеств). Предикативная теория множеств[2] — противоречива. □

Отношение принадлежности "$\in$" в рассуждениях вышеприведённой теоремы заменимо на произвольное отношение "α". Тогда пусть P — предикативная теория, т. е.

$\forall y$ из P имеет место $y \neg\alpha y$, (3)

где $\neg\alpha$ обозначает отрицание отношения α.

Тогда при выделении объекта схемой свёртывания возникают анало-

[1] Т. н. "парадокс Рассела" — это всего лишь доказательство противоречивости теории множеств без самопринадлежности.

Этот парадокс возникает из-за неопределённости того: допустимы ли самопринадлежащие множества. Если множества только несамопринадлежащи, то, как показано в тексте,— теория противоречива.

Если допустить самопринадлежность, то парадокс разрешён, см. [9].

[2] Без ограничений.

гичные противоречия: $B=\{y \mid y \neg\alpha y\}$, (4)
откуда по (3) $B \neg\alpha B$, но по (4) $B \alpha B$,— противоречие, показывающее противоречивость предикативной теории P. Доказана теорема.

Теорема 2. Предикативная теория без ограничений — противоречива. □

Теорема 2 имеет более общий вид, нежели теорема 1. Поэтому далее рассматривается предикативная теория P.

Если вся предикативная теория P противоречива (теорема 1), то можно ли из неё выделить непротиворечивую подтеорию P_1?

По теореме Гёделя, действующей только на предикативные системы (теории) [9], [8], непротиворечивость этой части P_1 недоказуема из P_1, а тем более из всей противоречивой теории P. Доказана теорема.

Теорема 3. Из противоречивой предикативной теории P невозможно выделить непротиворечивую предикативную подтеорию. □

Следствие. Из противоречивой предикативной теории множеств невозможно выделить непротиворечивую предикативную подтеорию. □

То есть для доказательства непротиворечивости подтеории P_1 требуется иметь непротиворечивую теорию L, но известна только одна непротиворечивая непредикативная теория множеств с самопринадлежностью [9] , следовательно, имеющиеся непротиворечивые предикативные фрагменты теории L непротиворечивы только ввиду непротиворечивости самой непредикативной теории L.

Таким образом, доказательства непротиворечивости предикативных фрагментов теорий — непредикативны,— нет чисто предикативной теории множеств. (Аналогично для иных предикативных теорий).

4. Исторические блуждания

Исторические тупиковые блуждания попыток построения теории множеств были как раз связаны с попытками выделить непротиворечивые фрагменты предикативной теории множеств (без самопринадлежности) из противоречивой предикативной теории множеств, посредством аксиоматики [3], что заведомо невозможно по теоремам 1–3.

Как указано в [12], периоды развития аксиоматик теории множеств таковы (см. и [3]):

1900–1924. Предложены нефундированные (самопринадлежащие) множества (Мириманов Д. и др.), попытка вписать которые в известные к тому времени теории множеств влекла парадоксы (например, парадокс Мириманова).

1925–1949. Для исключения из рассмотрения самопринадлежащих множеств предложена аксиома фундирования, и посредством её построены аксиоматики теории множеств (из которых самая известная ак-

сиоматика Цермело-Френкеля, ZF).

1950–1974. Рассматривались модели теории множеств без аксиомы фундирования.

С 1975 г. были допущены к рассмотрению не полностью фундированные множества (on-well-founded sets) [12].

Но сколько бы ни усложнялись аксиоматики, и сколь бы ни выявлялись новые связи между ними, их предикативность ничего не добавляла к обоснованию их непротиворечивости (они так и остались вне существенных самоссылочных оснований).

Типичный пример таких построений описан в [14], см. тж. [13]).

Рассматривались также и модификации аксиоматики теории множеств Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG), см. [16], [17]. Вопросы обоснования введения тех или иных основоположений теории (аксиом) в этих работах не описаны, аксиоматика вводится произвольно, также не рассматриваются вопросы непротиворечивости получаемых теорий, возможности введения понятий множества всех множеств в этих модифицированных аксиоматиках тоже не усматривается.

В зарубежной научной школе современные (2013 г.) попытки модификации аксиоматик антифундированием ничего не изменяют в смысле предикативности и недопущения самопринадлежности множеств, см. подробно [11].

5. Необходимость непредикативности

Кроме указанной выше периодизации следует отметить, что с 1993 г. были описаны множества с самопринадлежностью и множество всех множеств, о которых сказано отдельно в [4], [9].

Как было сказано в п. 3, для доказательства непротиворечивости теории множеств необходимо допущение самопринадлежности и непредикативности теорий (иначе по теоремам Гёделя непротиворечивость теории — недоказуема [9]).

Но наличие непредикативности шире, чем то казалось бы на первый взгляд. Для примера ограничились отношением выводимости. В качестве отношения α (см. п. 3) взято отношение выводимости $|=$.

Отношение выводимости $|=$ не может быть чисто предикативным, ибо для аксиом A_i: $A_i \mid= A_i$ (5)
— они сами формально выводимы из самих себя, (5) — непредикативно и самоссылочно.

Это значит, что непредикативность (в аксиоматике) первична для построения предикативного вывода. Более того, и при предикативном выводе

$(A_i, A_j) \mid= B_k$

для теоремы B_k, предикативно выведенной из аксиом A_i, A_j, имеет место непредикативность вывода $B_k \models B_k$.

Таким образом, в логическом выводе непредикативность является первичной, необходимой для построения некоторой теории S.

Следовательно, выделение чисто предикативной части S_1 теории S невозможно (ввиду свойства непредикативной выводимости аксиом (5)), значит в действительности имеется дело только с логическими системами, допускающими непредикативность. Доказана теорема.

Теорема 4 (о непредикативности). Логические системы допускают непредикативность (по крайней мере, в виде непредикативности выводимости аксиом). □

Таким образом, исторические блуждания в попытках построения чисто предикативных систем, обозначенные в п. 4., являются тупиковыми.

6. Заключение

Как показано выше, с одной стороны, чисто предикативные теории являются противоречивыми, не допускающими выделения непротиворечивых фрагментов; с другой стороны, имеется единственная известная непротиворечивая теория множеств с самопринадлежностью (непредикативная и самоссылочная); с третьей стороны, чисто предикативных систем нет, ввиду непредикативной выводимости аксиом; поэтому необходимо остаётся рассматривать теории и системы, допускающие непредикативность, без попыток исключить её из рассмотрения.[3]

Список литературы

1. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / пер. с нем., ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Изд-во АН СССР, 1985. Серия: Памятники науки.

2. *Подосетник В. М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины // Вопросы философии. 1954. №5. С. 77–81.

3. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств / пер с англ. Ю. А. Гастева, под. ред. А. С. Есенина-Вольпина. М.: Мир, 1966.— 366 с.

4. *Чечулин В. Л.* О множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика, 2005. С. 133–138.

5. *Чечулин В. Л.* О приложениях семантики самопринадлежности //

[3] Первоначальная рукопись этой работы, относящейся к августу 2011 г., была случайно найдена в конце 2013 г. в архиве автора.

Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3 (29). С. 10–17.
6. *Чечулин В. Л.* О свободе теории множеств с самопринадлежностью от известных парадоксов наивной теории множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика. 2010. Вып. 1 (1). С. 29–31.
7. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения). Пермь, Изд-во ПГУ, 2010.— 100 с.
8. *Чечулин В. Л.* О кратком варианте доказательства теорем Гёделя // Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: матер. Междунар. конф. при ИПМ ДВО РАН. Хабаровск, 2009. С. 60–62.
9. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения), 2-е изд. / монография, ПГНИУ. Пермь, 2012.– 126 с. URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_v_l_sets_with_self considering_second_edition.pdf (дата обращения 18.01.2014).
10. *Чечулин В. Л.* История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования): монография / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.– 166 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf (дата обращения 18.01.2014).
11. *Чечулин В. Л.* Самопринадлежность: около аксиомы фундирования // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №4. С. 14–18.
12. *Aczel, Peter.* Non-well-founded sets / Stanford Junior University, Printed in the United States, 1988.— 159 p.
13. *Aczel, Peter.* Local Constructive Set Theory and Inductive Definitions // Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics, ed. by G. Sommaruga, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Springer Science, Business Media B.V. 2011. P. 189–207.
14. *Aczel, Peter*. What is a set? // Leeds Logic Seminar Leeds, November 24, 2010. URL: http://www.cs.man.ac.uk/~petera/Recent-Slides/what-is-a-set-leeds-nov-2010.pdf (дата обращения 18.01.2014).
15. *Chechulin V. L.* About the selfconsidering semantic in the mathematical logic. // Bull. Symbolic Logic. 2010. Vol. 16. P. 111–112 (European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic: Logic Colloquium '09. Sofia, Bulgaria. 2009. July 31–August 5).
16. *Farmer William M., Joshua D. Guttman*. A Set Theory with Support for Partial Functions // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 59–78.
17. *Farmer William M.* A Set Theory for Mechanized Mathematics // Journal of Automated Reasoning. 2001. Vol. 26. P. 269–289.

On the necessity of the impredicativity in foundations of the mathematics

Chechulin V. L.

The philosophy of the foundations of the mathematics was considered. A contradictory structure of the purely predicative theory of sets was described in comparison with the non-contradictory theory of sets with selfconsidering (non-predicative). It is stated that it is impossible to exclude the non-contradictory sub-theory from the contradictory predicative theory due to the Gödel's theorems. As a result its non-contradictivity was provable only in the non-predicative system (the theory of sets) with self-membership. The need for impredicative systems and theories was shown.
Keywords: *philosophy of the foundations of the mathematics, theory of sets with selfconsidering, selfconsidering, non-contradictivity of the theory of sets, the axiomatics sets theory, impredicativity, predicativity, contradictivity of the predicative theory, need for non-predicativity.*

УДК 510. 2

2. О счётности множества подмножеств счётного множества в теории множеств с самопринадлежностью

Чечулин В. Л.

Описано свойство счётности множества всех подмножеств счётного множества, показано, что всевозможные степени множества подмножеств такого множества — счётны. Указано на однозначное разрешение континуум гипотезы и на трёхчастную иерархию типов бесконечности: счётная, недостижимая, мощность множества всех множеств.

Ключевые слова: *теория множеств с самопринадлежностью, счётность множества всех подмножеств счётного множества, иерархия типов бесконечности, решение первой проблемы Гильберта.*

1. Предисловие

Теория множеств с самопринадлежностью описана ранее в [6]. В [3] описывались упорядоченные структуры этой теории. Счётность десятичных обозначений действительных чисел была доказана в [5], [6], счётность последователей типа PN(.) и их, в том числе недостижимых, степеней показана в [7]. Ниже описана счётность множества подмножеств счётного множества.

2. Случай натурального ряда

Натуральный ряд N в M (множестве всех множеств) выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \varnothing)$ или $([x] = P^n(\varnothing)$, где $n \in N$ и $P(V(P(x))) = x)$ [1]$\}$.

Свойства натурального ряда

1. Натуральный ряд — не единственен.
2. N — несамопринадлежащ, $N \notin N$.
3. Внутренность[2] натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, V(N) = N, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным

[1] Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

[2] Определение внутренности см. в [6].

числам[3].

Объекты натурального ряда самопринадлежащи:

$1=\{1\}$, $1\in 1$,

$2=\{1, 2\}$, $2\in 2$,

$3=\{1, 2, 3\}$, $3\in 3$,

и т. д. $n\in n$.

Для всех чисел натурального ряда (но не для всего ряда) множество подмножеств совпадает с самим множеством [6]:

$\forall n, n\in N: Exp(n)=n$.

Множество подмножеств натурального ряда является объединением множеств: а) сам натуральный ряд, взятый как многое, и б) он же, взятый как единое:

$Exp(N) = \{\{N\}, [N]\} = \{1, 2, 3,\ldots [N]\}$,

$Exp(N)\notin Exp(N)$.

Мощность множества подмножеств натурального ряда совпадает с мощностью натурального ряда, $|N|=\omega$, $|Exp(N)|=\omega+1$, но имеется изомофизм (не структурный) между N и Exp(N) (см. [7, теорема 1]), т. е. $\omega=\omega+1$, значит, мощности этих множеств совпадают $|N|=|Exp(N)|=\omega$.

Таким образом, мощность множества подмножеств натурального ряда (счётного множества) — счётна.

Теорема 1. Мощность множества подмножества натурального ряда — счётна, $N|=|Exp(N)|=\omega$. □

3. Случай несамопринадлежащих множеств

Другой случай — счётные множества, не содержащие самопринадлежащих подмножеств, мощности больших двух (единичный объект — самопринадлежащ), т. е. состоящие только из единичных объектов. (Пример такого множества — это множество десятичных обозначений действительных чисел на отрезке [0, 1],— счётное, см. [5]).

Пусть $|D|=\omega$, $\forall d, d\in D: |d|=1$. Далее, даже если берётся подмножество F из D, $\{F\}\subseteq D$, то F принадлежит множеству подмножеств множества D как единичный объект, $[F]\in Exp(D)$, т. к. $F\notin F$, то даже при $|\{F\}|>1$, $|[F]|=1$. Если же $|\{F\}|=1$, то $|[F]|=1$. (Об алгебре скобок, брать как единое [.], брать как многое {.}, см подробнее [6]).

Схема рассмотрения множества подмножеств аналогична схеме доказательства счётности десятичных обозначений действительных чисел [5].

С одной стороны (см. рис. 1), берутся подмножества из D, состоящие

[3] Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающа и совпадает с самим натуральным рядом.

из всех объектов из D (таких подмножеств — одно), затем подмножества, в каждом из которых исключён один объект из D (таких подмножеств — ω, счётное число),— это первый слой подмножеств, их ω штук.

Затем при исключённом одном объекте имеется ω вариантов исключения второго объекта из D, и подмножеств второго слоя ω·ω штук, но ω·ω=ω, поэтому их ω штук во втором слое.

Для третьего слоя рассуждения аналогичны,— на третьем слое ω подмножеств. Итого ω слоёв с ω множествами, всего ω·ω, но (см. [7]) ω·ω=ω, значит ω штук,— счётное число.

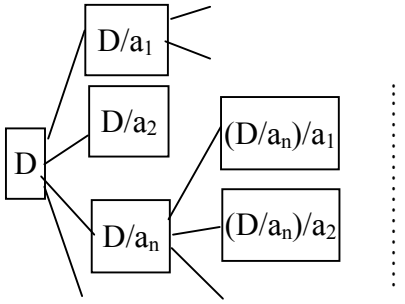


Рис. 1. Слои подмножеств при "уменьшении" подмножеств

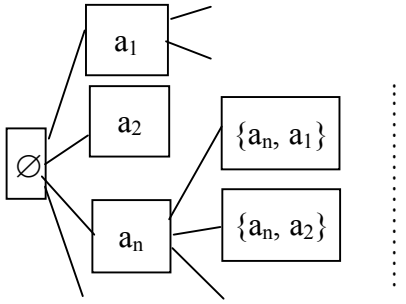


Рис. 2. Слои подмножеств при "увеличении" подмножеств

С другой стороны (см. рис. 2), берутся подмножества из D, состоящие из одного объекта из D (таких подмножеств — ω),— это первый слой; затем подмножества, в каждом из которых два объекта из D (таких подмножеств — ω·ω=ω, счётное число),— это второй слой подмножеств, их ω штук.

Затем при включенных в подмножество двух объектах имеется ω вариантов включения третьего объекта из D, и подмножеств третьего слоя ω·ω штук, но ω·ω=ω, поэтому их ω штук в третьем слое.

Для четвёртого слоя рассуждения аналогичны,— на четвёртом слое ω подмножеств. Итого ω слоёв с ω множествами, всего ω·ω=ω штук,— счётное число.

В итоге при уменьшении подмножеств — подмножеств ω штук, при увеличении же — их тоже ω, в сумме ω+ω=ω штук,— счётное число. Доказана теорема.

Теорема 2 (о счётности множества всех подмножеств счётного множества). Мощность множества подмножеств счётного множества, без неединичных самопринадлежащих подмножеств — счётна; пусть |D|=ω, ∀d, d∈D: |d|=1, тогда |D|=|Exp(D)|=ω. □

Естественно, что, по теореме 2, то же выполняется и для дальнейших

множеств подмножеств исходного множества:

$|D|=|Exp(D)|=|Exp^2(D)|=\omega$, и т. д.

3. Заключение

Смысл полученного результата таков: множество десятичных обозначений действительных чисел — счётно, и множество его подмножеств тоже счётно (ω),— в отличие от мощности множества точек прямой, равной мощности недостижимого последователя ψ; т. е. никакими комбинациями счётных множеств (даже операцией взятия множества подмножеств) не построить множество, изоморфное множеству точек на прямой (континуальному, недостижимому множеству); это есть однозначное решение т. н. 1-й проблемы Гильберта (континуум гипотезы, сформулированной Кантором в 1877 г. [1]*): из теоремы 2 следует, что никаких промежуточных мощностей между счётной мощностью ω и недостижимой мощностью ψ — нет.

Таким образом, имеется следующая иерархия мощностей множеств:

а) пустое множество ∅ (ничего нет),

б) конечные множества,

в) счётные множества, мощность ω,

г) недостижимые множества, мощность ψ,

д) множество всех множеств (наибольшая мощность).

При этом имеются три уровня бесконечности: в), г), д).

Список литературы

1. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / пер. с нем., ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Изд-во АН СССР, 1985. Серия: Памятники науки.

2. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум гипотеза: пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина / П. Дж. Коэн. М.: Мир, 1969.— 344 с.

3. *Чечулин В. Л.* Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. С. 37–46.

4. *Чечулин В. Л.* О мощности множества всех множеств в теории множеств с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4 (4). С. 18–19.

5. *Чечулин В. Л.* О счётности простых деревьев и следствиях из неё // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4 (4). 2010. С. 20–23.

6. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения), 2-е издание / монография, ПГНИУ. Пермь,

2012.–126 с. URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_v_l_sets_with_selfconsidering_second_edition.pdf (дата обращения 18.01.2014).
7. *Чечулин В. Л.* О счётности последователей типа PN и основаниях теории меры // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №1. С. 12–14.
8. *Чечулин В. Л.* Изоморфизм недостижимых последователей типа PO и основания теории меры // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №2. С. 36–37.

---

* Ранее было доказано лишь то, что в теории множеств Цермело-Френкеля континуум проблема недоказуема [2].

About the countability of a set of all subsets of a countable set in the theory of sets with selfconsidering

Chechulin V. L.

The countability property of a set of all subsets of a countable set was described. It was shown that these various degrees of a set of subsets of such a set was countable. The unambiguous resolution of the continuum hypothesis was indicated as well as the tripartite hierarchy of types of infinity: the countable, unattainable cardinality of all sets.
Keywords: *theory of sets with selfconsidering, countability of a set of subsets of a countable set, hierarchy of types of infinity, solution to the first problem of Hilbert.*

УДК 51; 510; 16

3. К периодизации истории понятия предела

Чечулин В. Л.

На основании общенаучной гносеологической закономерности описана схема шести периодов развития понятия предела,— от предыстории к развитию инфинитезимальных методов и современного понятия конструкций предела; указано, что границы периодов (переходы на следующие периоды) совпадают с таковыми для других отраслей математики; указано на связь понимания причинности и изменения понятия предела. Развитие понятия предела сопоставлено с периодами его изучения в системе образования.

Ключевые слова: *история математики; периоды развития математики; понятие предела; развитие понимания причинности; шестиуровневая структура отражения; гносеологические основания, "беспредельные" совокупности*.

1. Предисловие

Гносеологические основания отражения действительности в сознании человека описаны ранее [12], [13], также ранее описывалось проявление этой шестиуровневой структуры отражения в истории отдельных наук: физики [20], химии [14], математики [15], [16] и др. [17], а также в развитии понимания причинности [19]. Онтологическая схема действительности: а) сознание, б) время (и информация как упорядоченное время), в) материально-вещественная часть действительности,— делит науки на: а) изучающие собственно человека (такие как: философия, психология, литературоведение и др.), б) изучающие логические и информационные структуры (математика) [1], в) изучающие материально-вещественную часть действительности (естественные науки: физика, химия, биология, механика и др.).

Онтологическая иерархия постижения истины [8] (соответствующая онтологической схеме действительности): iii) непосредственное созерцание, ii) абстрактно-логические рассуждения, i) практика (в т. ч. материально-вещественная),— наличествует и в развитии науки, см. [24].

Развитие указанных видов наук связано с развитием понятия причинности [19], [24] . Ниже, на основании исторического развития понима-

[1] Экономика, как наука о сознательных социальных процессах, упорядоченных во времени и связанных с материальным производством, стоит особняком вне этой онтологической иерархии.

ния причинности, описано развитие понятия предела (с предысторией). Особенности периодизации развития понятия предела таковы, что периоды соответствуют историческим периодам общенаучного развития.

2. Методологические основания

В гносеологическом плане упомянутая последовательность усложнения понимания причинности такова (описана более подробно в [19], [24]):
1[2]) предпричинность (синкретизм);
2) ближайшая причина;
3) ряд (круг) причин (иногда сводимый к первопричине);
4) произвольная причинность (внешняя причинность природных явлений (закономерность) и отличная от неё внутренняя произвольная причинность человека);
5) социальная (массовая) причинность (обусловленность человека социальной средой, социальным положением; в описаниях явлений материального мира — статистическая причинность);
6) свобода.

Далее, в соответствии в уровнями развития причинности, рассмотрено развитие понятия предела, включая предысторию и послеисторию этого понятия.

3. Периоды развития понятия предела

Ниже, в соответствии с гносеологическими основаниями и развитием представлений о причинности, представлена схема периодов (уровней) развития понятия предела.

1.[3] (Древность, до V в. до н. э.). В предыстории (первый уровень развития, абстракции), на уровне синкретического мышления (уровня предпонятий) не выделялось каких-либо структурных понятий о пределе последовательности. Дальнейшее развитие понятия о пределе связано с переходом на следующий уровень отражения, следующий уровень осознания причинности.

2. (V – I вв. до н. э.). Известные апории Зенона (V в. до н. э.) были связаны с невозможностью представить на данном уровне абстракции (2-м) актуальную бесконечность,— бесконечность мыслилась только потен-

[2] Номера соответствуют уровням абстракции, отражения (периодам развития).
[3] Цифра соответствует номеру периода развития.

циальной,— в виде возрастающего ряда конечных величин. Примеры таковы [3, т. 1, с. 90] "дихотомия": "Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что оно должно дойти до середины, затем до середины остатка и т. д." Поскольку мыслится возможной только конечная величина "шагов" тела (нет понятия актуальной бесконечности), то за конечное число шагов оно не достигает конца пути.[4]

То же самое в рассуждениях Аристотеля о бесконечности (неограниченности) ("Физика", кн. 3, гл. 7): "Наше <Аристотеля> рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного[5] в отношении увеличения, как не проходимого до конца, не отнимает у математиков их исследования; ведь они теперь <IV в. до н. э.> не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: [математикам] надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, как им желательно, а в том же отношении, в каком делится самая большая величина, можно разделить какую угодно малую" [1, т. 3, с. 121].

Бесконечное у Аристотеля — άπειρο, приставка ά означает отрицание, πειρο — опыт, отсюда εμ-πειρ-ία (эмпирия, опыт). Поэтому более правильный перевод άπειρο — неограниченный (невоспринимаемый опытом).

Действительно, математики в тот период развития пользовались конечными последовательностями. Например, "в основе "метода исчерпывания" Евдокса лежала следующая основная лемма: если даны две величины a и b, a > b, то, вычитая из величины a больше её половины, из полученного остатка больше его половины и т. д. получится через конечное число шагов остаток $a_n < b$" [3, т. 1, с. 101].[6]

Конечные последовательности имелись и у Архимеда при описании им квадратуры параболы. Архимед доказательство проводил для конкретных величин, и не употреблял никаких общий понятий. "Общая схема рассуждения ещё не была сформулирована, она повторялась за-

---

[4] Аналогичны этой и другие апории Зенона. "Ахиллес и черепаха" [3, т. 1, с. 90]: "Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии от него." Пусть начальное расстояние есть (a) и Ахиллес бежит в несколько (k) раз быстрее черепахи, когда Ахиллес пройдёт бывшее между ними расстояние, черепаха отползёт на a/k, когда Ахиллес пробежит и это расстояние, то черепаха отползёт на a/k^2 и т. д., между ними ненулевое расстояние, но при этом во внимание принимается, как в "дихотомии", только конечное число шагов последовательности.

[5] Невозможность бесконечного (неограниченного) тела, невозможность бесконечного (неограниченного) чувственно-воспринимаемого,— см. "Физику" Аристотеля.

[6] "Отличие приведённого рассуждения от современного <XX в.> состоит в том, что <эта теорема> доказывается для любых последовательностей, имеющих предел, древние же не выделяли ни понятия последовательности, ни монотонно меняющейся величины, ни понятия предела" [3, т. 1, с. 102].

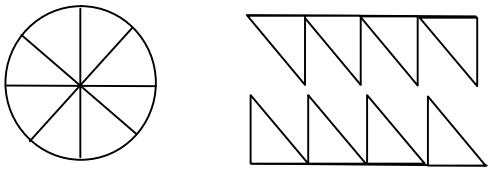


Рис. 1. Круг и схема его развёртки, для вычисления площади, через длину окружности [3, т. 1, с. 198]

ново для рассматриваемых конкретных величин" [3, т. 1, с. 101].

Переход к следующему уровню развития понятия предела связан с появлением представлений о бесконечных последовательностях (бесконечном ряде причин и следствий).

3. (I – XV вв.). На 3-м уровне развития указанные конечные рассуждения 2-го уровня становятся актуально бесконечными (в соответствии с изменением представлений о бесконечности и причинности, см. [24], [15], [16]).

Например, при вычислении числа π использовались суммы с бесконечным числом слагаемых (числовые ряды)[7].

Кроме того, бесконечные числовые ряды встречались и при операциях с прогрессиями и т. н. "треугольными" и "квадратными" числами,— вычислении суммы числовых рядов, полученных перемножением заданных исходных числовых рядов ("большое число правил суммирования <числовых рядов> приведено в работах Чжу Ши-Цзе (XIII в.), к ним относятся, например, ряды, возникающие при перемножении натуральных, треугольных и квадратных чисел с членами возрастающей или убывающей арифметической прогрессии" [28, с. 99].

Суммированием рядов занимались и индийские математики [8]. "Начиная с Арибхатты I-го суммирование арифметических рядов посто-

[7] При замене окружности вписанным многоугольником и вычислении площади этого многоугольника, при всё уменьшающейся длине его сторон, китайский математик Лю Хуэй указывал: "Чем меньше делить, тем меньше будет недостаток. Если делить всё дальше и дальше до тех пор, пока деление станет невозможным, то будет совпадение с окружностью и недостатка не будет" [28, с. 72].

[8] Например, переход от вычисления длины окружности к вычислению площади круга выражался без формализации и подробного описания, указанием на рисунок, вида "смотри", см. рис. 1. В современной записи длина прямоугольника (правая часть рис. 1, в оригинале круг делился на 12 равных секторов [3, т. 1, с. 198]), полученного из совмещения фигур, равна половине длины окружности (l / 2), высота — радиусу (r), его площадь — $r \cdot l$ / 2, с учётом того, что прямоугольник равновелик по площади кругу, площадь круга равна $r \cdot l$ / 2 = $r \cdot r \cdot \pi$ / 2.

(Для полноты изложения следовало бы упоминать предельный переход от круга к равновеликому ему прямоугольнику, но упоминаний об этом в математических работах того времени не встречалось).

янно интересовало индийских математиков. Была выработана специальная терминология и вычислены суммы многих рядов" [28, с. 149]. "В конце XIV в. индийские математики владели бесконечной убывающей геометрической прогрессией" [28, с. 151].

Этот (3-й) этап развития завершает предысторию понятия предела.[9] Появление понятия предела в современном виде связано с появлением представлений о функции.

4. (XVI–XVIII вв.). Предельный переход в том виде, в котором он используется в настоящее время (XXI в.), появился с появлением понятия функции и произвольной причинности. Произвольно задаётся приращение аргумента функции Δx и получается приращение функции Δy, которые, например, в задачах на касательную, затем соотносятся между собой.

У Ферма (XVI в.) это описано следующим образом (в современной записи): значение производной функции в точке A находится так:

$$f'(A) = \frac{f(A+E) - f(A)}{E} \text{ при } E \to 0 \quad .[10]$$

В дальнейшем представление о пределе было развито в работах Ньютона и других математиков XVII–XVIII вв. [10, с. 149 и след.].

Эйлер в работе "Дифференциальное исчисление" рассуждал аналогично: "118. Так как буква ω до сих пор означала у нас <Эйлера> при-

---

[9] Говоря об алгоритме нахождения наибольшего общего делителя у Евклида в [3, т. 1, с. 76] отмечается, что "сами древние не выделили понятия непрерывной дроби, это произошло лишь в Новое время <с 4-го периода развития науки>".

[10] "Допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину <переменную> (поверхность либо тело, или же длину в соответствии с предложенным), и выразим максимум или минимум через члены, содержащие A в каких-либо степенях. Затем возьмём первоначальной неизвестной значение A+E и снова выразим максимум или минимум через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях. Затем оба выражения для наибольшего и наименьшего приравняем, как говорит Диофант, друг другу и отбросим общие члены (после чего в каждом на обеих сторонах будет стоять либо E, либо какая-нибудь его степень). Затем разделим все члены на E или же на высшую её степень так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от E. Затем на обеих сторонах отбросим члены, содержащие E или её степени, а то, что останется положи равным друг другу или же, если на одной из сторон ничего не останется, то — что сводится к тому же — положим отрицательные члены равными положительным. Решение последнего уравнения даст A; когда же последнее известно, то максимум или минимум получится из основания ранее проделанного решения" [11, с. 154–155]. Здесь у Ферма описано нахождение аргумента A при котором имеется нуль производной, соответствующий экстремуму в A:

$$f'(A) = \frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0 \text{ при } E \to 0 \quad .$$

ращение или разность, на которую мыслится возрастающим переменное количество *x,* то теперь ω будет дифференциалом *x* и потому согласно принятому способу обозначения будет ω=*dx*; следовательно, *dx* будет бесконечно малой разностью, на которую мыслится возрастающим *x*. Подобным образом дифференциал *y* будет обозначаться *dy*, и если *y* есть какая-либо функция *x*, то дифференциал *dy* будет обозначать приращение, которое принимает функция *y*, когда *x* переходит в *x* + *dx*". [27, с. 104][11].

Это функциональное представление о пределе совершенствуется на следующем уровне развития.

5. (XIX–XX вв.). На 5-м уровне развития (переходе к осознанию массовой причинности[12]) появляются представления о формальной теории (аксиоматической), как совокупности всех выводов из аксиом,— т. е. такая теория — это результат предельного перехода от выводов из аксиом при любой длине выводов, стремящейся к бесконечности.[13]

---

[11] Далее у Эйлера рассматриваются дифференциалы разных функций, как результат отбрасывания бесконечно малых больших порядков по сравнению с первым:
"152. … Следовательно, если мы <Эйлер> положим $y=x^n$, то будет
$y^I = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + (n(n–1)/1\cdot2) \cdot x^{n–2}dx^2$ + и т. д.,
и, следовательно, $dy=(y^I – y) = nx^{n-1}dx + (n(n–1)/1\cdot2) \cdot x^{n–2}dx^2$ + и т. д.
В этом выражении второй и следующий члены исчезают <предельный переход> по сравнению с первым, следовательно, дифференциал от x^n будет $nx^{n–1}dx$, т. е. $dx^n = nx^{n–1}dx$" [27, с. 115].

[12] На 5-м уровне появляются следующие понятия:
а) Формальная система, совокупность выводов из аксиом,— теория,— как предел всех (предикативных) выводов из аксиом. Оказалось, что при таком рассмотрении рассуждениями, находящимися "внутри" такой предикативной теории ("до предела"), невозможно ничего не сказать о самой теории (что выражено в теоремах Гёделя).
б) Принцип сжимающих отображений и теоремы о неподвижных точках.
в) Сходимость по вероятности, где вероятность – (случайная величина) – аналог массовой причинности.

[13] Лобачевский Н. И. писал о неевклидовой геометрии (1835) ("Воображаемая геометрия"): "Изложив новую теорию о параллельных, я <Лобачевский> утверждал, что сумму углов прямолинейного треугольника, независимо от измерений на самом деле, можно допускать менее половины окружности, и на таком предположении основать другую геометрию, которую я <Лобачевский> назвал воображаемой, и которая если не существует в природе, по крайней мере должна быть принята в Аналитике… Воображаемая Геометрия, как новая отрасль Математики, обнята была во всей обширности, чтобы не оставить более сомнения в справедливости и достаточных её началах. … намерен я <Лобачевский> показать, что главные уравнения, которые нашёл я <Лобачевский> для зависимости сторон и углов треугольника в воображаемой Геометрии, могут быть приняты с пользою в Аналитике и никогда не приведут к заключениям ложным, в каком бы то ни было отношении" [7, т. 3, с. 16–

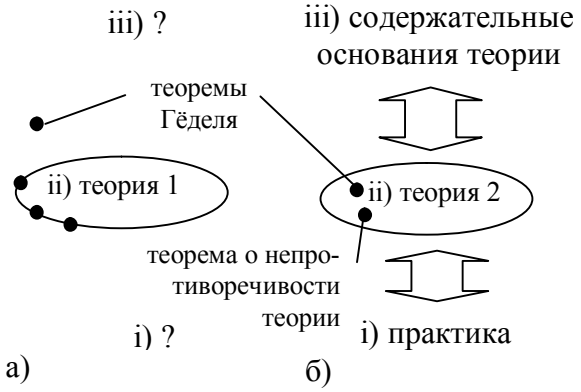


Рис. 2. Онтологическое сопоставление а) аксиоматической предикативной теории и б) непредикативной теории (на примере теории множеств); i, ii, iii — онтологические уровни (см. в тексте)

Для предикативных формальных систем имеются непреодолимые ограничения в виде теорем Гёделя (невозможность доказать непротиворечивость предикативной формальной системы средствами самой этой системы), см. рис. 2а.

При этом для предикативных теорий имеются два направления условного (ввиду недоказуемости их непротиворечивости) и мнимого развития:

а) в приложении к практике (этот подход страдает ограничениями и далеко не всегда верен, см. об ограничениях экономико-математического моделирования в [22, с. 11], ибо практика не всегда верна в нравственном смысле — электростанция и игорный дом хотя и приносят прибыль, но электростанция высвобождает общественно необходимое время, а игорный дом — поглощает).

б) формальный,— теория в самой себе в отрыве от практики ("копание" внутри теории, не выходя за рамки ограничений теорем Гёделя, в отрыве от практики, и без задумывания об основаниях теории).

Эти пути развития, а особенно формальный путь развития, приводят к кризису развития, см. [26] и параграф 4.

Следующий уровень соответствует самопричинности (непредикативным, самоссылочным конструкциям).

6. (С кон. XX в.). На 6-м уровне появляются непредикативные (самоссылочные) конструкции. Появляется понятие о бесконечности, которая

17].

Тем самым видно, что у Лобачевского имелось представление о теории, как совокупности выводов из аксиом, с наивной верой в неложность такой воображаемой теории.

не может быть достигнута предыдущими величинами при их увеличении,— это недостижимые последователи типа PO [23][14]. Мощность множества всех множеств M (самопринадлежащего) также не является пределом меньших возрастающих мощностей [23, с. 55, 72].

Эти понятия уже выходят за рамки понятия предела, являются "сверхпредельными".

4. Дополнение. Об онтологическом сопоставлении теорий

О кризисе формального пути развития науки писали не только математики [4], [5], но и практики науки.

Отмечалось "кризисное состояние теории управления" [6, с. 3]…, причины которого "заключаются не только и не столько в усложнении управляемых объектов и ужесточении предъявляемых требований, сколько в кризисе самой теории управления [6, с. 7–8]…,— "<к нач. 1980-х гг.> дифференциация научных потребностей, отрыв от практических потребностей приобрели господствующее положение в теории автоматических и автоматизированных систем" [6, с. 8]; "<в 1990-е гг.> происходит рост числа ветвей теории управления, дифференциация без интеграции, теория без практики" [6, с. 8] (см. также [9]).

Выход из теории в практику (без самоприменимости), без содержательных оснований, не допустим в области систем, содержащих самого человека.[15]

Конструктивная практика для человека — самоприменима — непредикативна,— вне (над) формальными (аксиоматическими) теориями в ценностной области[16].

Теории имеют содержательные основания в созерцательной (непредикативной) области, соответствующей онтологическому уровню сознания (непосредственного созерцания, см. п. 1, рис. 2б); затем эти содержательные основания (в соответствии с последовательностью постижения истины) формализуются, показывается непротиворечивость теории средствами самой теории (см. пример в [23, с. 14]),— затем эти

---

[14] См. также о недостижимых кардиналах в [2, с. 233, 235].

Во множестве всех множеств, при каноническом его отображении на себя все самопринадлежащие множества являются неподвижными точками этого отображения.

"Беспредельная" величина мощности множества всех множеств не является пределом мощностей последователей типа PO(.) [18], [23, с. 55].

[15] В конце XX в. в [4] описывался кризис оснований математики, предлагавшийся [5] выход сводился к приложению математики на практике и экспериментальной проверке теорий,— это отчасти применимо к системам, не содержащим человека (в физике, химии и т. п.), но совершенно ошибочно для систем, содержащих человека,— подробнее см. в книгах [24, с. 137–138], [25, с. 11–14].

[16] О 10-частной системе ценностей см. [21, с. 9], [22, с. 7–8].

содержательные основания и непротиворечивое их формальное изложение применимы на практике для упорядочения явлений действительности.

(Формальные теории сами по себе — бесплодны для практики).

Таблица 1. Периоды развития понятия предела

№ уровня	Содержание периода развития	Исторический период
1	Синкретизм, отсутствие структурных представлений о пределе, наглядность	Древность
2	Конечный ряд рассуждений, отсутствие единой схемы при исчерпывании	С IV в. до н. э.
3	Бесконечный ряд при исчерпывании, суммирование бесконечных числовых рядов	С первых веков н. э.
4	Появление понятия предела (Ферма), бесконечные функциональные ряды и их суммы	С кон. XVI в. н. э.
5	Предикативная формальная (аксиоматическая) система как предел выводов из аксиом	С нач. XIX в.
6	Непредикативные, недостижимые ("сверхпредельные") конструкции, онтологическая полнота теорий	С кон. XX в.

5. Заключение

Рассмотренная периодизация развития *понятия предела* соответствует периодизации общенаучного развития и периодам в истории математики. Содержание периодов предыстории и истории развития *понятия предела* сведено в табл. 1.

При изучении понятия предела в системе образования понятии усложняются в той же гносеологической 6-уровневой последовательности.

(Автор благодарит проф. Стафейчука Б. Г. за обсуждение особенностей развития теории автоматического управления).

Список литературы

1. *Аристотель.* Сообрание сочинений. В 4 т. М.: Мысль, 1978–1984.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств / ред., пер. с фр. В. А. Успенский. М.: Мир, 1965.— 458 с.
3. История математики. В 3 т. АН СССР. М.: Наука, 1970–1972.
4. *Клайн М.* Математика. Утрата определённости / пер. с англ. Данилов Ю. А. М.: Мир. 1984.— 434 с.
5. *Клайн М.* Математика. Поиск истины[17] / пер. с англ. Данилов Ю. А. М.: Мир. 1984.— 434 с.
6. *Красовский А. А.* Науковедение и состояние теории процессов управления // Автоматика и телемеханика. 2000. №4. С. 3–19.
7. Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. В 5 т. / гл. ред. В. Ф. Каган. М.–Л.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1951.
8. *Подосетник В. М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины // Вопросы философии. 1954. №5. С. 77–81.
9. *Ротач В. Я.* Теория автоматического управления: соответствуют ли ее основные положения действительности? // Промышленные АСУ и контроллеры. 2007. №3. С. 1–5.
10. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики / пер. с нем. М., 1984.
11. *Ферма П.* Метод отыскания наименьших и наибольших значений // Декарт Р. Геометрия, М.–Л., 1938. С. 154–157.
12. *Чечулин В. Л.* Теорема об одном свойстве гносеологического отражения // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика)
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/59_28971.doc
13. *Чечулин В. Л.* Периодичность в строении материи и её отличие от иных структурных закономерностей // Университетские исследования, 2009 (раздел: философия)
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/48_51145.doc
14. *Чечулин В. Л.* К философии истории химии // Вестник Пермского университета. Серия: Философия. Психология. Социология. 2011. Вып. 4 (8). С. 38–43.
15. *Чечулин В. Л.* О последовательности 6 исторических этапов появления основных математических понятий // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2 (2). С. 115–124.
16. *Чечулин В. Л.* Иерархия 6-ти уровней основных математических понятий // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика)

[17] Английское название Mathematics and the search for knowledge — буквальный перевод — "математика и поиски для знания".

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/191_31748.doc
17. *Чечулин В. Л.* О гносеолого-психологических основаниях философии права // Философия права. 2010. №1. С. 101–106.
18. *Чечулин В. Л.* О мощности множества всех множеств в теории множеств с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета, сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4 (4). 2010. С. 18–19.
19. *Чечулин В. Л.* Развитие понятия причинности в истории науки // Актуальные проблемы Российской философии, сб. трудов Всеросс. конф., Пермь. 2011. С. 213–216.
20. *Чечулин В. Л.* К периодизации истории физики // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. С. 110–121.
21. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография; Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.– 112 с.
22. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.– 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf
23. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография, изд. 2-е, испр. и доп., Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2012. — 126 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_teoriya_mnozhestv2_2012.pdf
24. *Чечулин В. Л.* История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013. — 166 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf
25. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р.* Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала: монография; Перм. гос. нац. исслед. ун т. – Пермь, 2013. – 162 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf
26. *Чечулин В. Л.* Самопринадлежность: около аксиомы фундирования // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №4. С. 14–18.
27. *Эйлер, Леонард.* Дифференциальное исчисление / пер. с лат. М. Я. Выготский. М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949.— 580 с.
28. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Гиз. ф.-м. лит., 1961.— 448 с.

To the periodization of the concept of limit history

Chechulin V. L.

On the basis of the general scientific epistemological pattern, the chart of six periods of the development of the concept of limit was described — from prehistory to the development of infinitesimal methods and modern concepts on the structure of limit. It was indicated that the boundaries of periods (transitions to the following periods) coincide with those for other sectors of mathematics. The linkage between the understanding of causality and changes of the concept of limit was specified. The development of the concept of limit was compared with periods of its study in the educational system.

Keywords: *history of mathematics; periods in the development of mathematics; concept of a limit, development of understanding of causality, six-level structure of reflection, epistemological foundations, "limitless" sets.*

Часть 2. Прикладная математика, экономика, демография

В этом разделе собраны текущие работы по экономико-математическому моделированию, основаниям экономики, а также работы, содержащие описание демографических процессов.

УДК 519.7; 330.4

4. О правой границе области существования решения многомерного основного логистического уравнения

Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.

В статье описано совпадение правой границы области существования решения для многомерного и одномерного основного логистического уравнения (описывающего инфляционные и долговые параметры экономики государства),— это указывает на единые закономерности экономики государства в целом (одномерный случай) и взятой как совокупность пропорциональных отраслей (многомерный случай).
Ключевые слова: *основное логистическое уравнение, денежный оборот относительно оборота общественно необходимого времени, область существования решения, итерационный процесс, многомерное основное логистическое уравнение.*

Безынфляционное состояние экономики описывается основным логистическим уравнением и схемой оборота общественно необходимого времени (ОНВ) [3], [4]. Безынфляционный случай основного логистического уравнения (ОЛУ):

$$x = 1 - x^x . \qquad (1)$$

Производство инфляции описывается введением параметра β, который означает изменение стоимости денег относительно ОНВ [2]:

$$x = 1 \cdot \beta - x^x . \qquad (2)$$

С учётом того, что экономические субъекты (государство) могут иметь отложенный (запрошенный вперёд) взаимозачёт ОНВ посредством денег, допустимо использование комплекснозначного параметра β:

$$\beta = a + i \cdot b ,$$

где $a = \mathrm{Re}(\beta) = 1 + \dfrac{инфляция}{100}$ – уровень инфляции (инфляция в процентах к предыдущему году),

$b = \mathrm{Im}(\beta) = -\dfrac{внешний\ \ долг}{\text{ВВП}}$ – отношение внешнего долга к ВВП.

Установлена неустойчивость безынфляционного состояния при вещественнозначном параметре инфляции и найдена область устойчивости решения ОЛУ при комплекснозначном параметре [3].

Необходимо найти область устойчивого решения многомерного случая ОЛУ:

$$X = E \cdot \beta + X^X, \tag{3}$$

где X – матрица размера $m \times m$, E – единичная матрица.

Ввиду невозможности непосредственного использования операции X^X в матричном виде, формула (3) представима следующим образом:

$$X = E \cdot \beta + e^{X \cdot \ln X}, \tag{4}$$

при этом для нахождения экспоненты матрицы используется разложение в ряд [1]:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}; \tag{5}$$

для вычисления логарифма рассматривались два варианта разложения в ряд [1], [2]:

$$\ln X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{X-1}{X+1} \right)^{2k-1}; \tag{6'}$$

$$\ln X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (X-E)^k}{k}. \tag{6"}$$

Область устойчивого решения уравнения (3) находится следующим образом. Решение исследуемого уравнения при заданных значениях действительной и мнимой части параметра β ищется методом простой итерации, который заключается в том, что уравнение преобразуется к виду $y = \varphi(y)$ и решается методом последовательных приближений

$$y^{(n+1)} = 1 \cdot \beta - y^{(n)} y^{(n)}, n = 1,2,\cdots.$$

Последовательность приближений имеет следующий вид:

$$X^{(n+1)} = I \cdot \beta + e^{X^{(n)} \cdot \ln X^{(n)}}, n = 1,2,\ldots \tag{7}$$

Итерационный процесс завершается, если сходятся обе нормы:

$$\| X^{(n)} - X^{(n+1)} \| < \varepsilon \text{ и } \| \beta \cdot E - X^{(n+1)} - (X^{(n+1)}) X^{(n+1)} \| < \varepsilon, \tag{8}$$

то есть $X^{(n+1)}$ – считается решением, если для него выполняются оба эти условия. При этом Эвклидова норма выражается формулой

$$\| A \| = \sqrt{\sum_i \sum_j | a_{ij} |^2}.$$

Также вводится ограничение на количество итераций. Если за заданное количество итераций не удаётся найти решение, считается, что при

заданном параметре β метод, последовательность приближений $X^{(n)}$, не сходится (решение отсутствует).

Таким образом, перебираются все значения $\mathrm{Re}(\beta)$ на промежутке [0, 2] и $\mathrm{Im}(\beta)$ — на промежутке [–2, 2], и для каждого значения β проверяется сходимость описанного выше метода. Находится область точек, на которой метод не сходится.

Для вычисления логарифма используется разложение в ряд (6'). Тогда при N=2 получается область сходимости решения уравнения (3), представленная на рис. 1 (область сходимости пуста, не имеет точек расходимости,— в центре рисунка).

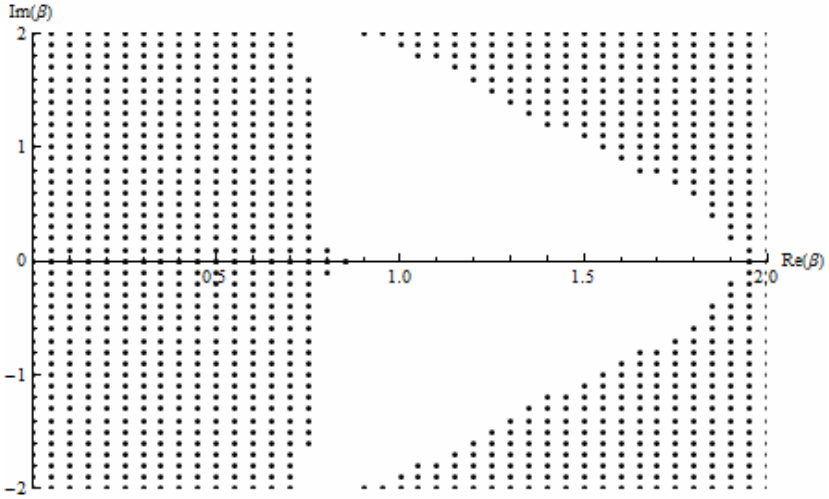


Рис. 1. Область сходимости решения при N=2

При N=3 получается область сходимости решения уравнения (3), представленная на рис. 2.

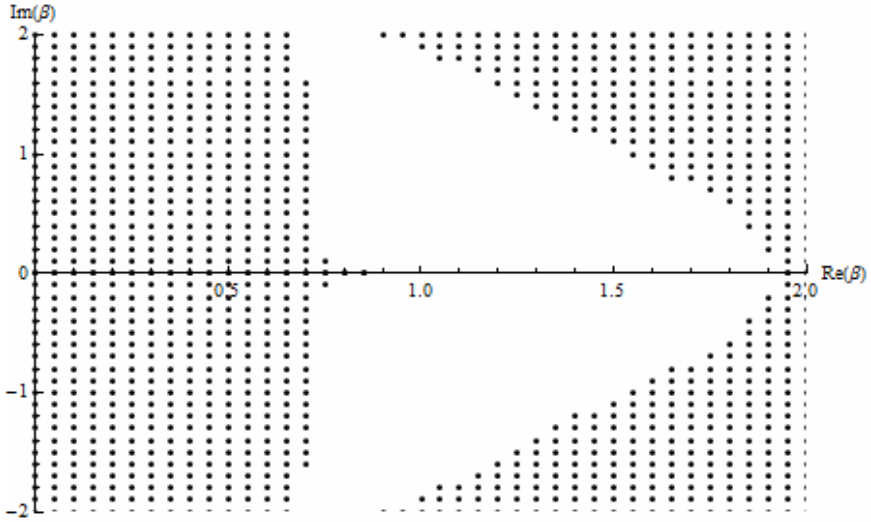


Рис. 2. Область сходимости решения при N=3

При N=4 получается область сходимости решения уравнения (3), представленная на рис. 3.

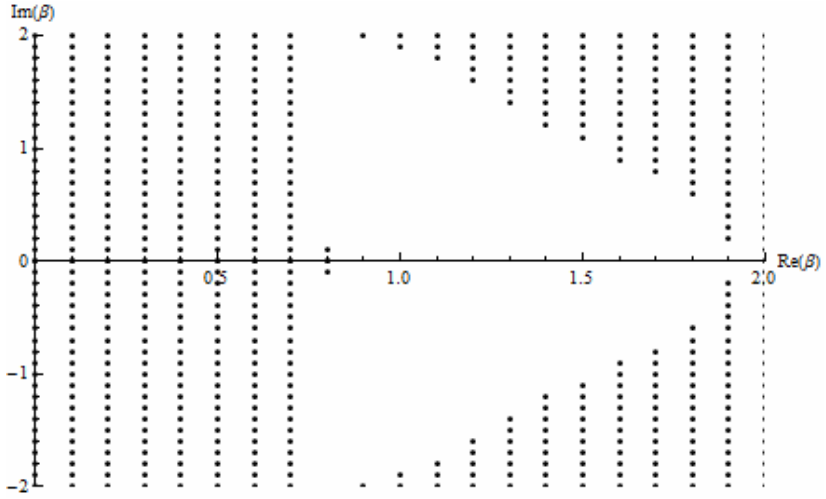


Рис. 3. Область сходимости решения при N=4

При N=5 получается область сходимости решения уравнения (3), представленная на рис. 4.

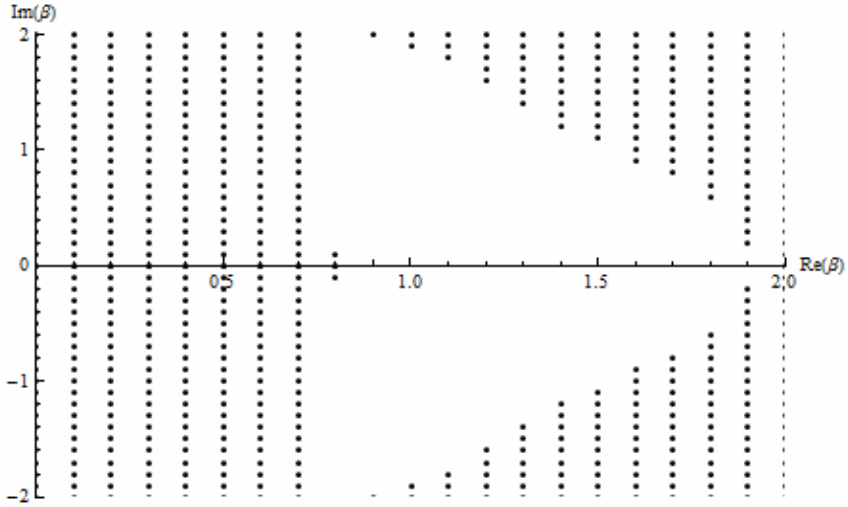


Рис. 4. Область сходимости решения при N=5

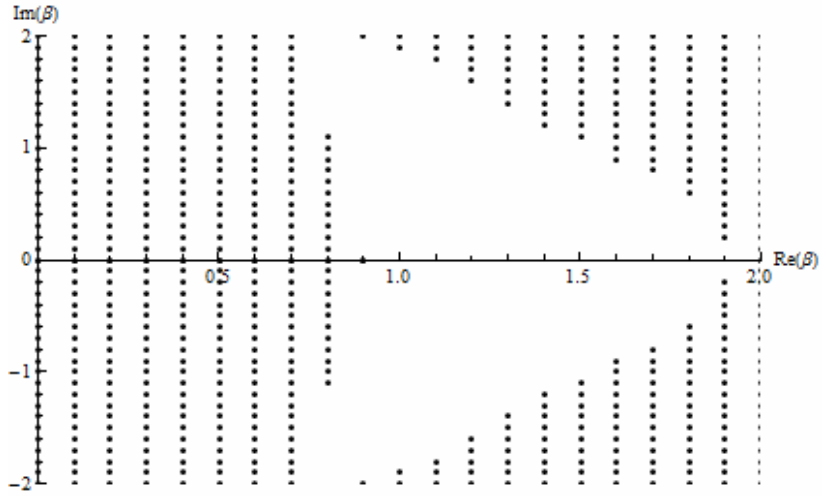


Рис. 5. Область сходимости решения при N=6

При N=6 получается область сходимости решения уравнения (3), представленная на рис. 5.

Таким образом, области решения для различных размерностей матрицы X являются похожими. Кроме того, из сравнения построенных областей с областью сходимости, полученной для одномерного логистического уравнения (2) (см. рис. 6), видно, что правая граница областей совпадает.

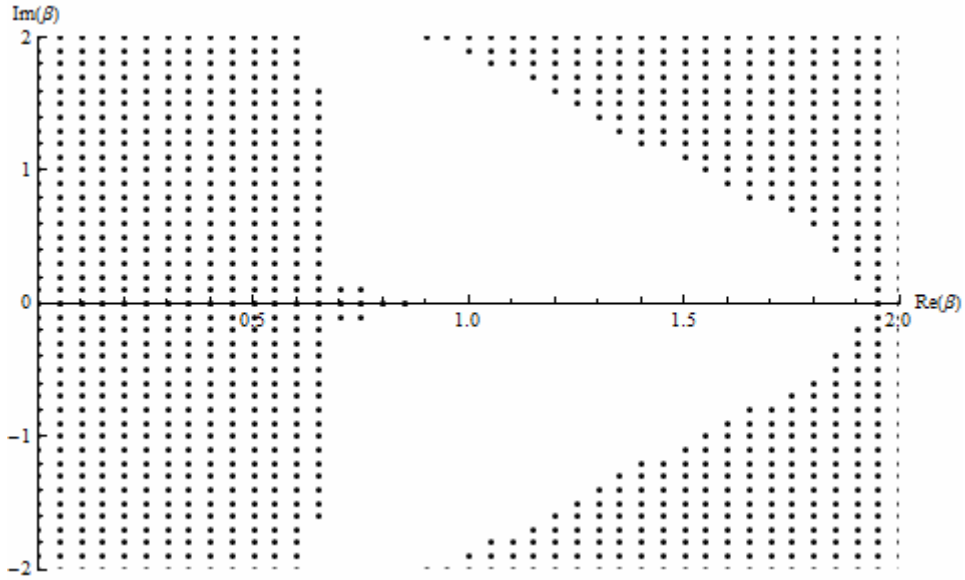


Рис. 6. Область сходимости решения ОЛУ (2) (N=1)
при использовании ряда (6') для вычисления логарифма

При использовании ряда (6") для вычисления логарифма получается область сходимости решения для одномерного логистического уравнения (2) (N=1), представленная на рис. 7.

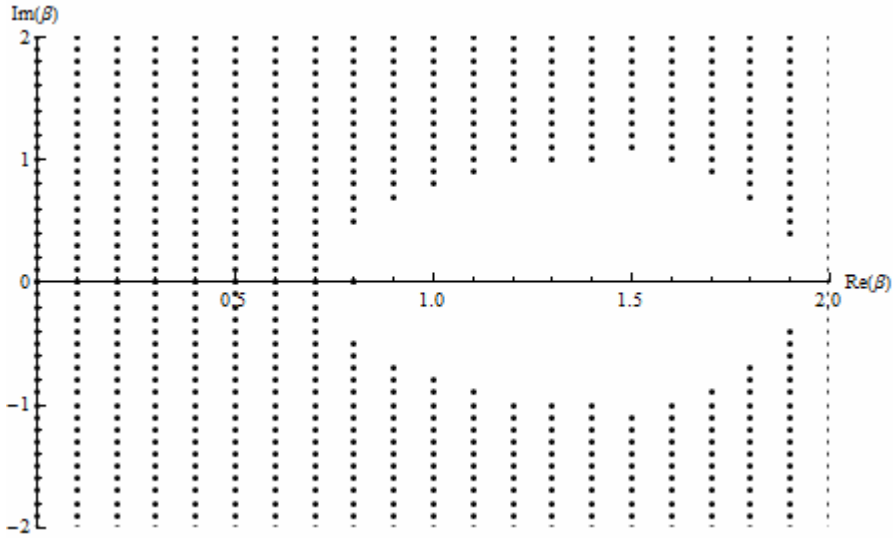


Рис. 7. Область сходимости решения ОЛУ (2) (N=1)
при использовании ряда (6") для вычисления логарифма

Для многомерного уравнения (3) при использовании ряда (6") для вычисления логарифма области сходимости решения похожи, для размерности N=2 область представлена на рис. 8.

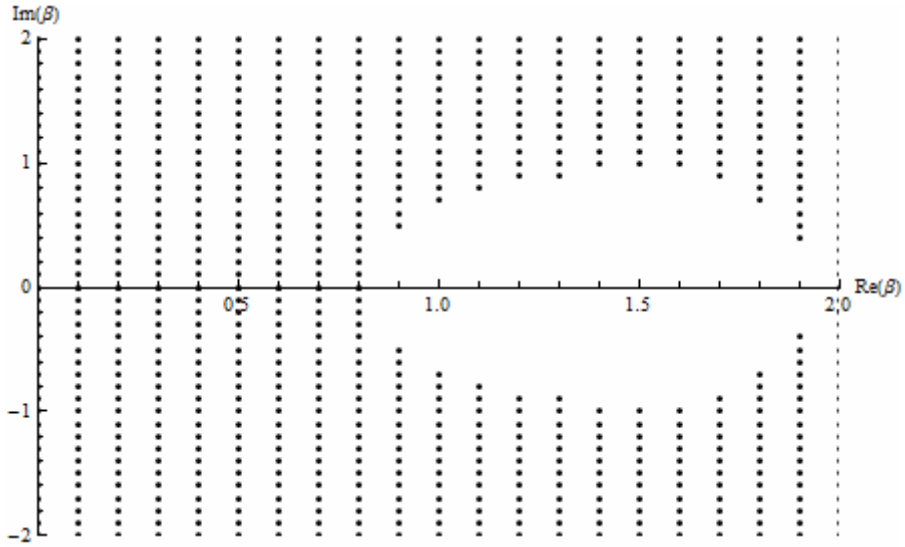


Рис. 8. Область сходимости решения многомерного ОЛУ (3) для N=2 при использовании ряда (6") для вычисления логарифма

Как видно из рис. 7 и 8, области практически совпадают для одномерного и многомерного уравнений. Для дальнейших вычислений ряд (6") не подходит, так как в этом случае правая граница полученной области не совпадает с этой границей области, полученной в работе [4].

Таким образом, описано совпадение правой границы области существования решения для многомерного и одномерного основного логистического уравнения (описывающего инфляционные и долговые параметры экономики государства),— это указывает на единые закономерности экономики государства в целом (одномерный случай) и взятой как совокупность пропорциональных отраслей (многомерный случай).

Список литературы

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / пер. с англ. М.: Наука, 1966.
2. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.– 832 с.
3. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография; Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.— 112 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
4. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм.

гос. нац. исслед. ун т. Пермь, 2012.— 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf

On the right-hand boundary of the existence of solutions of multidimensional basic logistic equation

Chechulin V. L., Cherepanova Yu. A.

The article describes the rencontre of the right boundary of domain of existence of the solution for the one-dimensional and multidimensional main logistic equation (describing inflation and debt indexes of a state economy), which indicates common patterns between a state economy as a whole (one-dimensional case) and the economy taken as a set of proportional industries (multidimensional case) .
Keywords: *main logistic equation, money turnover relative to the turnover of the socially necessary time, domain of existence of solutions, iterative process, multidimensional basic logistic equation.*

УДК 519.7; 330.4

5. О параметре самоприменимости в многомерном основном логистическом уравнении

Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.

Описано многомерное основное логистическое уравнение с параметром самоприменимости; указано, что параметр самоприменимости, при его малом отклонении от 1 слабо влияет на решение уравнения, поэтому им можно пренебречь.

Ключевые слова: *основное логистическое уравнение в многомерном случае, параметр самоприменимости, малое влияние параметра на решение.*

Модель безынфляционного состояния экономики и производства инфляции описана в работах [2], [3]. Рассматривается многомерный случай основного логистического уравнения (ОЛУ):

$$X = E \cdot \beta + X^X, \qquad (1)$$

где X – матрица размера $m \times m$, E – единичная матрица, β – комплекснозначный параметр:

$$\beta = a + i \cdot b,$$

где $a = \mathrm{Re}(\beta) = 1 + \dfrac{\textit{инфляция}}{100}$ – уровень инфляции (инфляция в процентах к предыдущему году),

$b = \mathrm{Im}(\beta) = -\dfrac{\textit{внешний долг}}{\text{ВВП}}$ – отношение внешнего долга к ВВП.

Находится решение многомерного ОЛУ (1) при $\beta = 1$, когда в уравнение вводится параметр самоприменимости α:

$$X = E + (\alpha \cdot X)^{(\alpha \cdot X)}, \qquad (2)$$

где X – матрица размера $m \times m$, E – единичная матрица, α – параметр самоприменимости.

Для проведения расчетов уравнение (2) преобразуется к виду:

$$X = E + e^{(\alpha \cdot X) \cdot \ln(\alpha \cdot X)}, \qquad (3)$$

при этом для нахождения логарифма и экспоненты матрицы используется разложение в ряд [1]:

$$e^{(\alpha \cdot X)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \cdot X)^k}{k!}; \ln(\alpha \cdot X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{((\alpha \cdot X) - I)^k}{k}. \qquad (4)$$

Как видно из уравнения (3) при $\alpha = 1$ получается исходное ОЛУ (1).

Решение исследуемого уравнения ищется методом простой итера-

ции, который заключается в том, что уравнение преобразуется к виду $y = \varphi(y)$ и решается методом последовательных приближений. Последовательность приближений имеет следующий вид:

$$X^{(n+1)} = I \cdot \beta + e^{X^{(n)} \cdot \ln X^{(n)}}, n = 1, 2, \ldots \quad (5)$$

Итерационный процесс завершается, если сходятся обе нормы:

$$\| X^{(n)} - X^{(n+1)} \| < \varepsilon \text{ и } \| \beta \cdot E - X^{(n+1)} - (X^{(n+1)})^{X^{(n+1)}} \| < \varepsilon, \quad (6)$$

то есть $X^{(n+1)}$ – считается решением, если для него выполняются оба эти условия. При этом норма Эвклидова выражается формулой

$$\| A \| = \sqrt{\sum_i \sum_j | a_{ij} |^2}.$$

Необходимо учесть, что параметр α лежит в комплексной плоскости, тогда в качестве его значений берётся следующая окружность:

$$\alpha = 1 + r \cdot e^{i \cdot t}, \quad (7)$$

где r – радиус окружности (т. е. отклонение от 1),
t – параметр $t \in [-\pi, \pi]$.

Рассматриваются случаи, когда α отклоняется от 1 на 10%; 1%; 0,1%, т. е. в уравнении (7) для каждого значения радиуса окружности r=0,1; 0,01; 0,001 перебираются значения параметра t на промежутке от $-\pi$ до π с шагом 0,1. Для полученных точек окружности методом простой итерации с применением разложения в ряд (4) находятся решения многомерного ОЛУ (3), обозначим их $X^{(\alpha)}$. Берется первый диагональный элемент полученного решения — $X_{11}^{(\alpha)}$, он сравнивается с X_{11} – первым диагональным элементом решения ОЛУ (3) при $\alpha = 1$, находится относительное отклонение $X_{11}^{(\alpha)}$ от X_{11}, т. е. $\Delta = \dfrac{\left| X_{11}^{(\alpha)} - X_{11} \right|}{X_{11}}$. Считается, что все остальные диагональные элементы решения уравнения (3) совпадают с первым ввиду закономерности, описанной в [4].

Одномерный случай уравнения с параметром самоприменимости был рассмотрен в [3, с. 97].

На рис. 1 представлен график отклонения результатов решения стационарного ($\beta = 1$) многомерного ОЛУ (3') при N=2 от решения уравнения (3) при отклонении α от 1 на 10% (r=0,1).

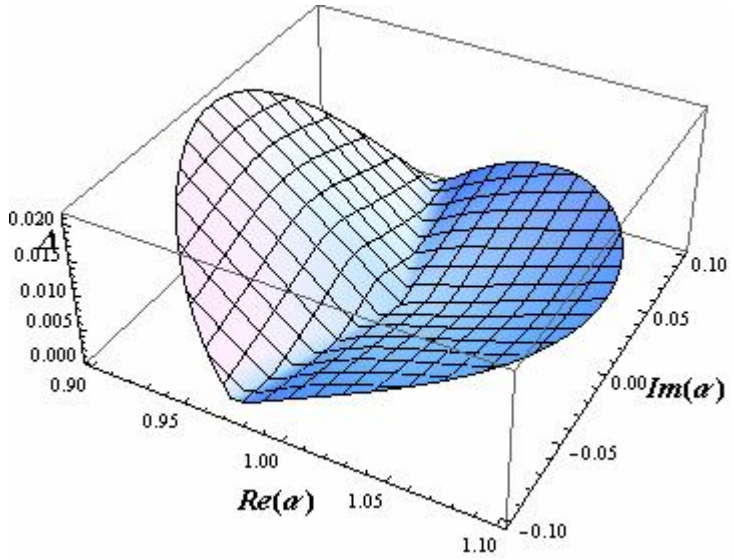


Рис. 1. Отклонение результатов при *N*=2

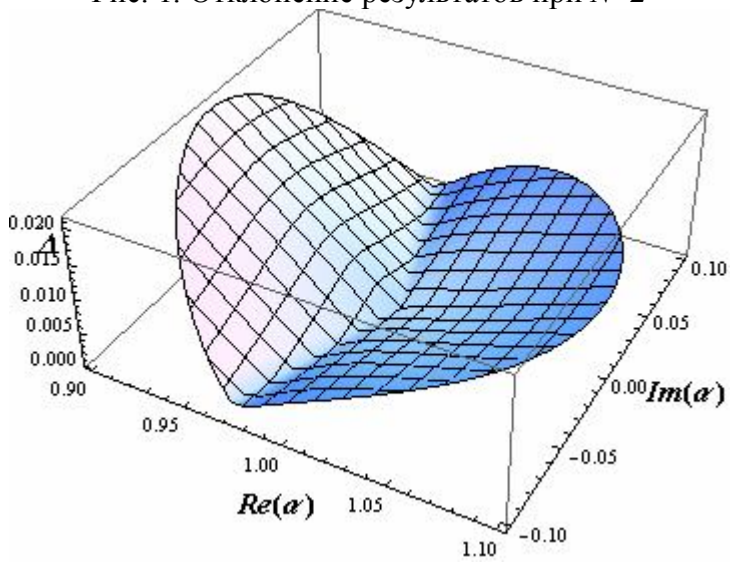


Рис. 2. Отклонение результатов при *N*=3

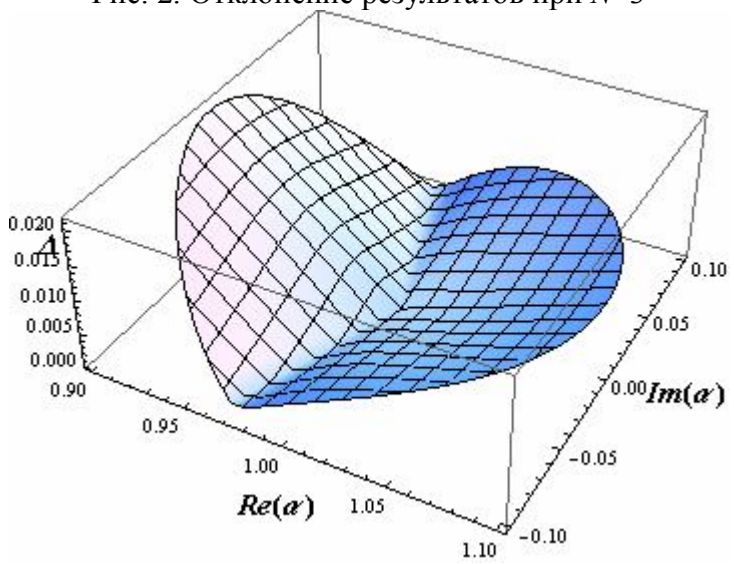


Рис. 3. Отклонение результатов при *N*=4

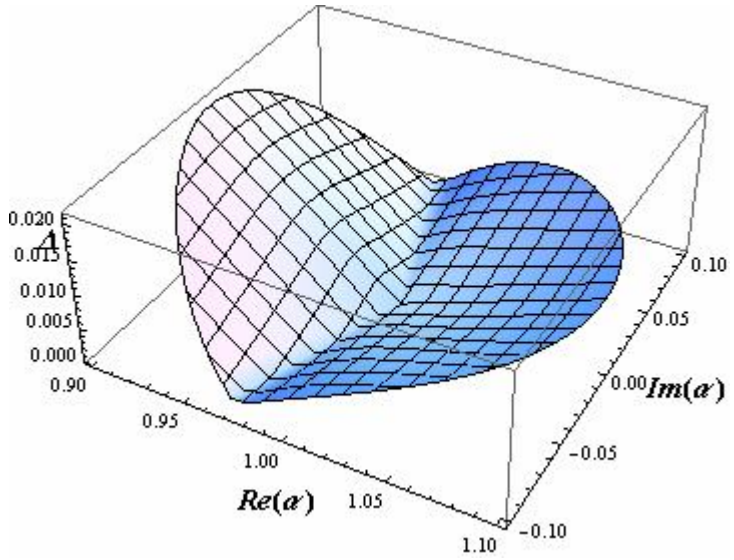


Рис. 4. Отклонение результатов при *N*=5

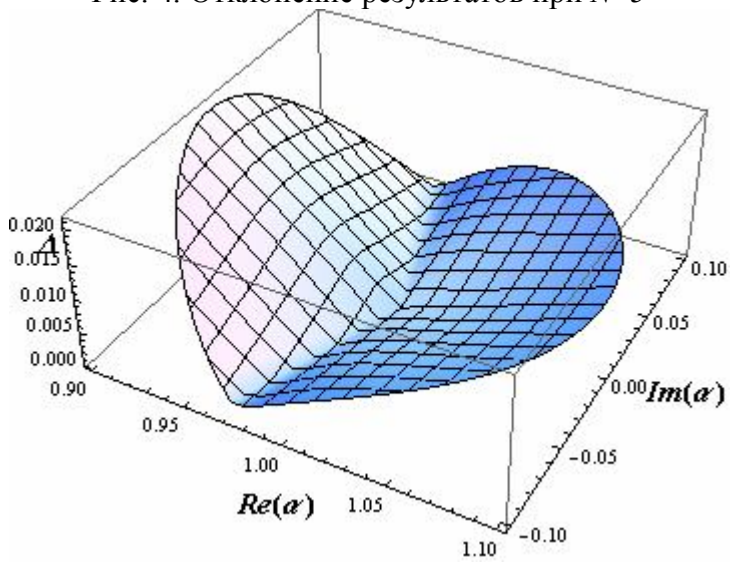


Рис. 5. Отклонение результатов при *N*=6

Среди отклонений, представленных на рис. 1, максимальным является отклонение в 0,0211%. Аналогично находятся максимальные отклонения решения при размерах матрицы *X*: *N*=3, …, 6 и $r = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1. Отклонение решения в круге разного радиуса r, при *N*=2…6

r \ N	2	3	4	5	6
0,1	0,0211	0,0212	0,0212	0,0212	0,0212
0,01	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016
0,001	0,00016	0,00016	0,00016	0,00016	0,00016

Отклонение решения (от стандартного при α=1) примерно в 5 раз меньше отклонения коэффициента самоприменимости α от 1.

Анализ результатов показывает, что отклонение решений практически не зависит от размера матрицы X, что объясняется свойством многомерного уравнения[1]. При отклонении параметра самоприменимости α от 1 на 10% максимальное отклонение решения составляет приблизительно 0,02, отклонение параметра α на 1% дает отклонение в решении 0,0016 (0,16%); следовательно, при дальнейших вычислениях параметром α можно пренебречь.

Список литературы

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / пер. с англ. М.: Наука, 1966.
2. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография; Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.— 112 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
3. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf
4. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* Решение многомерного уравнения модели экономики в случае инфляции // Университетские исследования (раздел: математика). URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/712_96033.doc

On the parameter of self-applicability in the multidimensional main logistic equation

Chechulin V. L., Cherepanova Yu. A.

The multidimensional main logistic equation with the parameter of self-applicability was described, given that the parameter of self-applicability, with its small divergence from 1has a weak influence on the solution of the equation, so it can be neglected.
Keywords: *main multivariate logistic equation, parameter of self-applicability, little influence of the parameter on the decision.*

[1] Решение многомерного ОЛУ является суперпозицией одномерных решений, см. 4].

УДК 519.7; 330.4

6. О решении многомерного основного логистического уравнения при разной инфляции в отраслях

Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.

Описано решение многомерного основного логистического уравнения при разной инфляции в отраслях, на примере трёхмерной модели; показано, что при в среднем безынфляционности но при разной инфляции в отраслях, решение не совпадает с безынфляционным случаем, указывая на меньшую в этом случае долю высвобождения общественно необходимого времени, чем при безынфляционности (меньшую эффективность экономики при частных отклонениях от безынфляционности); наиболее эффективной является безынфляционная экономика.
Ключевые слова: *основное логистическое уравнение в многомерном случае, параметр инфляции, разная инфляция в отраслях, наибольшая эффективность безынфляционной экономики.*

Модель безынфляционного состояния экономики и производства инфляции описана в работах [2], [3]. Рассматривается многомерный случай основного логистического уравнения (ОЛУ), см. [4]:

$$E - X^{=} E \cdot B - X^{X}, \qquad (1)$$

где X – матрица размера $m \times m$, E – единичная матрица $m \times m$, B – (в отличие от [4]) матрица параметра инфляции $m \times m$, по диагонали которой стоят коэффициенты инфляции в отраслях β_i.

Уравнение (1) решается методом последовательных приближений, аналогично тому, как описано в [5], при этом условие сходимости итерационного процесса (для Евклидовых норм) выглядит так:

$$\| X^{(n)} - X^{(n+1)} \| < \varepsilon \text{ и } \| E \cdot B - X^{(n+1)} - (X^{(n+1)})^{X^{(n+1)}} \| < \varepsilon . \qquad (2)$$

При выполнении вычислений решения задавалось три варианта коэффициентов инфляции в отраслях (отрасли принимаются равными по объёму обращаемого времени), для трёхмерного случая:

1. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ (безынфляционность отраслей),
2. $\beta_1 = 0{,}9$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1{,}1$ (дефляция в отрасли 1, инфляция в отрасли 3, в среднем — безынфляционность),
3. $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}9$, $\beta_3 = 1{,}2$ (дефляция в отраслях 1 и 2, инфляция в отрасли 3, в среднем — безынфляционность).

Полученные решения приведены ниже:

1. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, решение: $X=\begin{pmatrix} 0{,}30366 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}30366 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}30366 \end{pmatrix}$, $\overline{x_i}=0{,}30366$.

2. $B=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$, решение: $X=\begin{pmatrix} 0{,}14252 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}30366 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}40644 \end{pmatrix}$, $\overline{x_i}=0{,}28421$.

3. $B=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{pmatrix}$, решение: $X=\begin{pmatrix} 0{,}14252 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}14252 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}49414 \end{pmatrix}$, $\overline{x_i}=0{,}25967$.

Как видно из полученных решений, даже если в экономике была в среднем безынфляционность (средний коэффициент инфляции в разных отраслях был равен 1, $\overline{\beta_i}=1$), то в случае несбалансированных по инфляции отраслей (случаи 2, 3) доля финансового оборота, соответствующего высвобождаемому общественно необходимому времени [1] (0,28421 и 0,25967 соответственно), меньше, чем в случае 1 совершенной безынфляционности (0,30366).

Это означает максимальную эффективность (по доле высвобождаемого общественно необходимого времени) совершенно безынфляционной (в том числе и внутри отраслей) экономики. (Такое рассуждение распространимо и далее,— на отдельные экономические субъекты, т. е. максимально эффективная, в указанном смысле, экономика необходимо такова, что все её экономические субъекты безынфляционны,— не производили инфляцию[2]).

Список литературы

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / пер. с англ. М.: Наука, 1966.
2. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография; Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.— 112 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
3. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 112 с.

[1] Интерпретируемая как: а) сбалансированные доходы безынфляционного бюджета, б) сбалансированная в среднем по такой безынфляционной в среднем экономике средняя прибыль экономических субъектов (предприятий).

[2] Конкретный анализ производства инфляции в экономических субъектах приведён в [6], [7].

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf
4. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* Решение многомерного уравнения модели экономики в случае инфляции // Университетские исследования (раздел: математика). URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/712_96033.doc
5. *Чечулин В. Л., Черепанова Ю. А.* О параметре самоприменимости в многомерном основном логистическом уравнении // Чечулин В. Л. Статьи разных лет, 2014, №1. С. 36–40.
6. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2011. – 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
7. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р.* Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун т. – Пермь, 2013.– 162 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf

The solution of the multivariate main logistic equation with different inflation in economic sectors

Chechulin V. L., Cherepanova Yu. A.

The solution of the multivariate main logistic equation with different inflation in economic sectors is described on the example of a three-dimensional model. It is shown that on the average in a non-inflation environment but with different inflation in economic sectors, the decision does not coincide with the non-inflation case, pointing to a lower release of socially necessary time in this case, than in a non-inflation environment (less efficient economy with individual divergences from the non-inflation case). It proves that a non-inflation economy is the most effective.
Keywords: *main logistic equation in multidimensional case, inflation index, different inflation in economic sectors, highest efficiency of a non-inflation economy.*

УДК 94(100)"1939/45"; 314.3

7. Изменение рождаемости в период Второй мировой войны в некоторых странах-участницах

Чечулин В. Л., Смыслов В. И.

В работе описано изменение рождаемости в период Второй мировой войны в выборке стран-участниц (Европа и СССР). Использован косвенный метод оценки по данным более поздних, чем война, половозрастных диаграмм. Такие оценки позволяют определить меру геноцида участвовавших в войне и пострадавших от войны народов.
Ключевые слова: *Вторая мировая война, изменение рождаемости, половозрастная диаграмма, геноцид.*

К 2013 г. имелось несколько исследований, связанных с определением потерь населения во время Второй мировой войны [5], [6], [2], [7]. В этих работах дана оценка численности людских потерь, но совершенно отсутствуют оценки снижения рождаемости в период войны. Так, в [5, с. 227–228] приводятся цифры потерь без оценки снижения рождаемости; в [2, с. 150] имеется попытка сказать о демографических последствиях войны, но опять же без оценки снижения рождаемости, то же и в [7]. В [6] приведена попытка приближённой оценки снижения рождаемости в войну, не использующая достоверных статистических данных (аналогично в [4, с. 78]). Для получения более точных оценок необходимо учесть данные половозрастных диаграмм переписей населения послевоенных лет.

Ниже произведена оценка снижения рождаемости во время войны и послевоенного времени, использующая данные половозрастных диаграмм.

Для того чтобы провести анализ изменения рождаемости во время Второй мировой войны, а также в послевоенное время, необходимо иметь данные о рождаемости. В связи с тем, что точных данных о рождаемости не существует (ввиду бывшей оккупированности части территорий и утрате учётных данных), использовались половозрастные диаграммы послевоенных лет, отстоящие от военного периода на 35–40 лет, это позволяет использовать данные о численности населения для оценки изменения рождаемости в военный период. Половозрастные диаграммы представляют собой графическое изображение распределения людей по возрасту и полу. Для стран Европы анализировались диаграммы, представленные в Демографическом энциклопедическом словаре [1], а для стран постсоветского пространства – данные всесоюзной

переписи 1970 года [3].

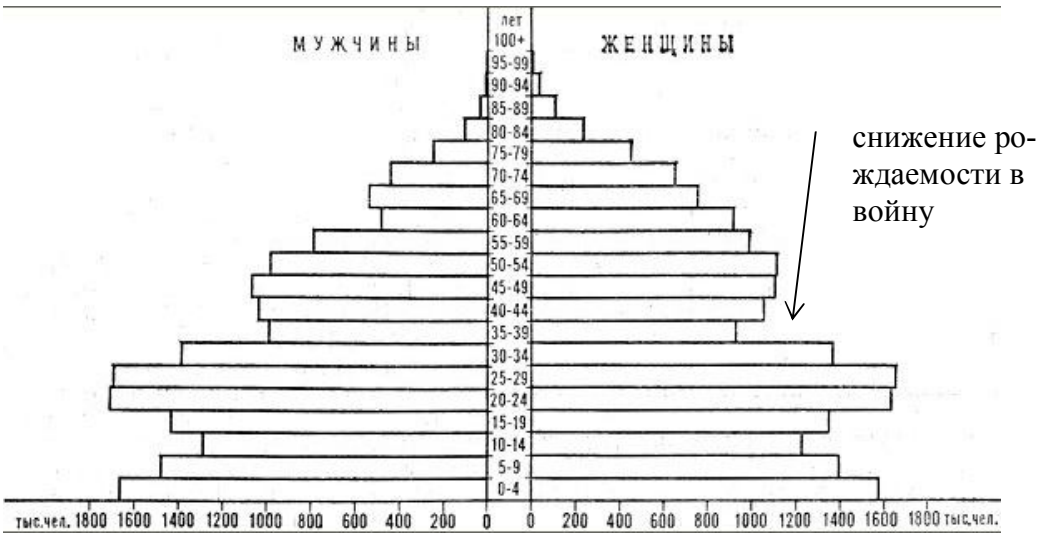


Рис. 1. Половозрастная диаграмма населения Польши, 1980 г.

В качестве примера на рис. 1 изображена половозрастная диаграмма населения Польши на 1980 год (по данным [1]). Из этой диаграммы устанавливается количество родившихся людей в тот или иной период. В связи с тем, что возрастная шкала содержит пятилетние интервалы, т. е. 0–4 лет, 5–9 лет и так далее, то результаты будут приближенными. Так как для оценки снижения рождаемости не важен пол человека, то количество мужчин и женщин просуммировано. По возрасту человека определяется год рождения, таким образом приближённо заменяется шкала с возрастом на шкалу с годом рождения (0–4 лет — на 1976–1980 гг., 5–9 лет — на 1971–1975 гг., 35–39 лет — на 1941–1945 гг. рождения и т.д.).

Для стран постсоветского пространства имелись данные не для пятилетнего периода, а отдельно для каждого года возраста [3], тем самым результаты анализа несколько точнее, см. например, рис. 2.

На рис. 3 изображен график распределения людей по годам рождения, для России в период с 1930 по 1960 г. Из графика хорошо заметно изменение рождаемости в период с 1938 по 1950 г. Для оценки изменения рождаемости предположим, что данного «провала» рождаемости не произошло, и линейно аппроксимируем рождаемость между точками x_1 и x_2. Прямая показывает предполагаемый уровень рождаемости без ухудшения условий. Тогда из уравнения прямой, проходящей через две точки, вида:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (1)$$

(где координата x — это рождаемость, а y — год) определяется предполагаемое количество родившихся в точке x_3^* (1944 г.).

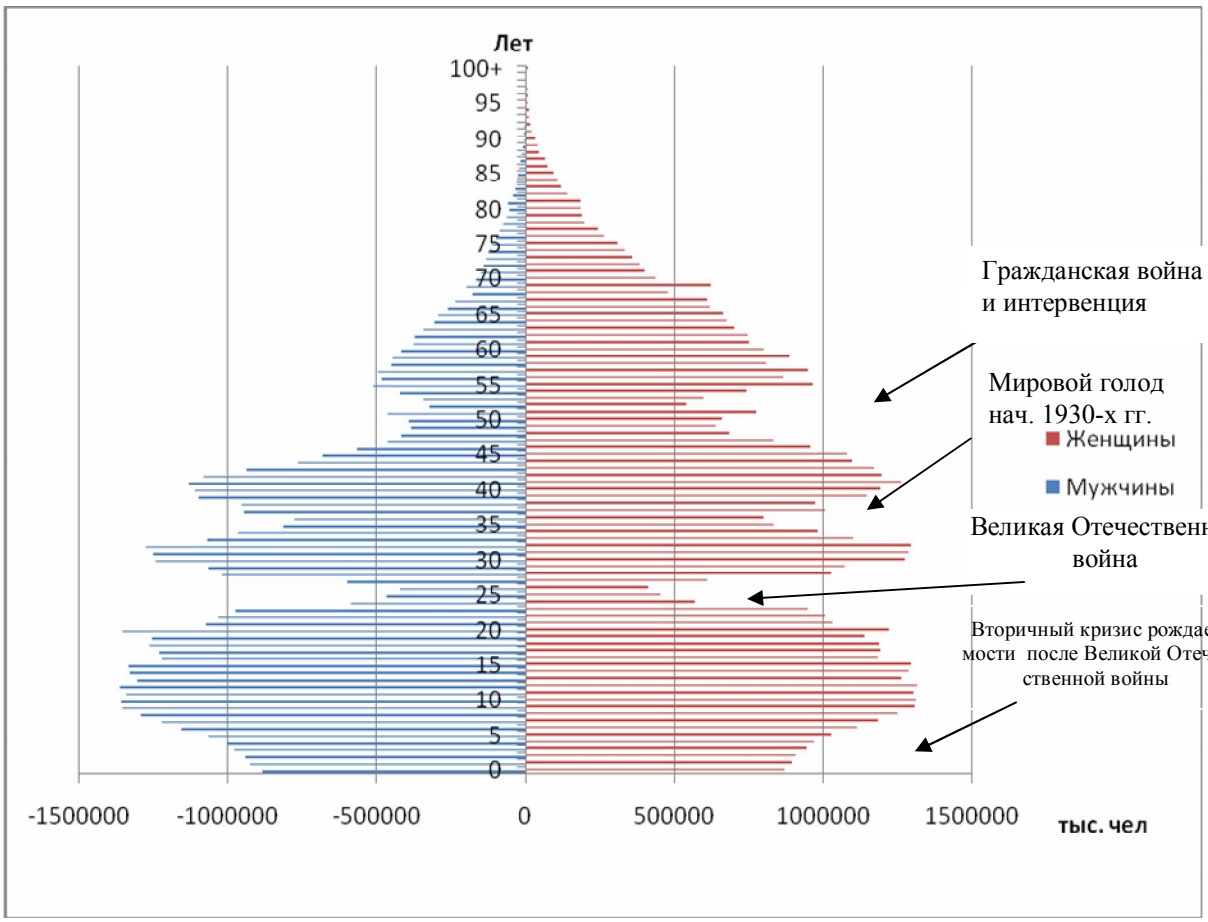


Рис. 2. Половозрастная диаграмма населения России, 1970 г.

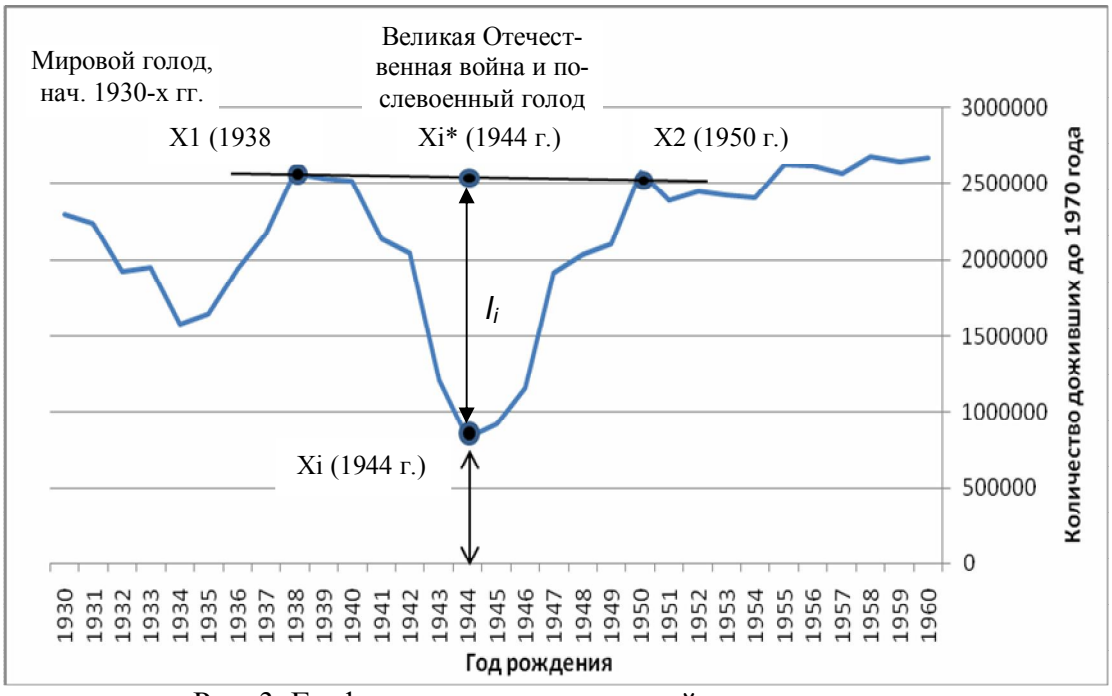


Рис. 3. График распределения людей по годам рождения,
для России в период с 1930 по 1960 гг.

Для определения числа неродившихся людей (l_i) воспользуемся следующей формулой:

$$l_i = x_i - x_i^* , \quad (2)$$

где x_i — уровень рождаемости в *i*-ый год (период),

x_i^* — предполагаемый уровень рождаемости в *i*-ый год (период)

$i \in I$, где I — это годы интервала снижения рождаемости (военные и послевоенные 1938–1950 гг.).

Для определения относительного изменения рождаемости, в виде не родившихся детей относительно предполагаемого уровня рождаемости (d), воспользуемся следующей формулой:

$$d_i = \frac{x_i - x_i^*}{x_i^*} = \frac{l_i}{x_i^*} , \quad (3)$$

где l_i – число неродившихся людей, относительно предполагаемого уровня рождаемости в *i*-ый год (период), $i \in I$, где I — это годы интервала снижения рождаемости (военные и послевоенные 1938–1950 гг.).

Таким образом определяется доля изменения рождаемости для каждого года для *i*-го интервала. В случае с европейскими странами, где имеются пятилетние периоды данных половозрастных диаграмм, определяется только лишь максимальная доля изменения рождаемости (d_{max}),— приближенное значение снижения рождаемости, адекватно отображающее реальное снижение рождаемости за пятилетний период войны.

Кроме того, вычисляется интегральная сумма изменения рождаемости населения (S),— население, которое могло бы родиться в случае, если бы войны не было. Для этого определяется сумма числа неродившихся людей, относительно предполагаемого уровня рождаемости по формуле:

$$S = \sum_{i=x_1}^{x_2} l_i \quad (4)$$

где l_i — число неродившихся людей в *i*-ый год,

$i \in I$, где I — это годы интервала снижения рождаемости (военные и послевоенные 1938–1950 гг.).

Оценки снижения рождаемости приведены в табл. 1–3.

Таблица 1. Оценка изменения рождаемости в период войны для некоторых стран постсоветского пространства (на территории которых шли военные действия)

Страна:	Россия		Украина		Белоруссия	
Год, i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд. d_i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i
1949	-468436	-18,22%	-121780	-14,92%	-19874	-12,99%
1948	-533329	-20,74%	-215166	-25,84%	-25119	-16,42%
1947	-649366	-25,25%	-235540	-27,74%	-42356	-27,69%
1946	-1415484	-55,05%	-469497	-54,24%	-77083	-50,41%
1945	-1651495	**-64,23%**	-410601	-46,55%	-64037	-41,89%
1944	-1740340	**-67,69%**	-461735	**-51,38**%	-78127	**-51,11**%
1943	-1360752	-52,93%	-364300	-39,81%	-56706	-37,11%
1942	-528161	-20,54%	-188608	-20,24%	-30698	-20,09%
1941	-430498	-16,75%	-173198	-18,27%	-24110	-15,78%
1940	-54043	-2,10%	-65634	-6,80%	-5852	-3,83%
1939	-33948	-1,32%	-52037	-5,30%	-3842	-2,52%
Суммарн. результаты	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$
	-8865852	-31,35%	-2758096	-27,90%	-427804	-25,44%

Продолжение таблицы 1

Страна	Молдова		Литва		Латвия	
Год, i	Число не род. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i
1949	-9390	-13,89%	-3629	-7,65%	-2721	-7,24%
1948	-25062	-37,59%	-5674	-11,93%	-4857	-12,83%
1947	-27208	-41,38%	-7247	-15,21%	-7527	-19,75%
1946	-39047	**-60,23%**	-3735	-7,82%	-10014	-26,09%
1945	-27170	-42,52%	-8677	-18,14%	-7990	-20,67%
1944	-24503	-38,90%	-3753	-7,83%	-6456	-16,58%
1943	-13971	-22,51%	1665	3,47%	-3533	-9,01%
1942	-2998	-4,90%	1282	2,66%	555	1,41%
1941	-11279	-18,73%	-2118	-4,39%	-803	-2,02%
1940	-5480	-9,24%	-343	-0,71%	1405	3,51%
1939	-3396	-5,82%	-1139	-2,35%	514	1,28%
Суммарн. результаты	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср.}$
	-189503	-27,35%	-33368	-6,33%	-41427	-9,67%

Продолжение таблицы 1

Страна	Эстония	
Год, i	Число нерод. людей, l_i	Относ. изм. рожд., d_i
1949	-1521	-6,62%
1948	-2670	-11,60%
1947	-3528	-15,31%
1946	-6956	-30,14%
1945	-7222	-31,24%
1944	-7324	-31,64%
1943	-4318	-18,63%
1942	301	1,30%
1941	-2197	-9,45%
1940	-338	-1,45%
1939	-710	-3,04%
Суммарн. результаты	Интегр. сумма изм. рожд., тыс. чел.	Средние относ. изм. рожд., $d_{ср}$
	-36483	-14,33%

Таблица 2. Пример оценки уменьшения рождаемости для Польши, по половозрастной диаграмме на 1970 г.

на 1970 г.		Польша, тыс. чел.				
X	Возраст	Мужчины	Женщины	Сумма		
1	0-4	1669,21	1576,87	3246,08		
2	5-9	1476,90	1392,25	2869,15		
3	10-14	1284,59	1230,76	2515,35		
4	15-19	1430,76	1353,80	2784,56		
5	20-24	1707,66	1638,45	3346,11		
6	25-29	1692,28	1653,83	3346,11	Прогноз	Потери
7	30-34*	1384,56	1361,49	2746,05	3113,80	367,75
8	35-39**	992,25	861,52	1853,77	2881,49	1027,72
9	40-44***	1038,45	1061,52	2099,97	2648,18	548,21
10	45-49	1069,21	1115,35	2184,56	Итого	**1943,68**
11	50-54	984,56	1123,04	2107,60		
12	55-59	784,56	1000,00	1784,56		
13	60-64	484,69	915,35	1400,04		
14	65-69	538,42	761,48	1299,90		
15	70-74	446,14	653,83	1099,97		
16	75-79	246,14	453,83	699,97		
17	80-84	99,97	238,45	338,42		

* 1936–1940 гг. рождения, ** 1941–1945 гг. рожд., *** 1946–1950 гг. рожд.

Таблица 3. Оценка изменения рождаемости в период войны для иных стран

Страна	Интегр. сумма изменения рожд. за время войны, тыс. чел.	Макс. относит. изм. рожд., d_{max}
Бельгия	–208	–18,13%
Болгария	–33	–3,52%
Великобритания	–143	–5,77%
Венгрия	–299	–11,62%
Германия	+291	+2,42%
Греция	–43	–10,73%
Испания	–486	–14,86%
Италия	+85	–6,71%
Норвегия	–7	–2,24%
Польша	–1944	–35,67%
Румыния	–395	–19,20%
Финляндия	+31	–3,37%
Франция	–1453	–23,62%
Израиль*	–168	–30,28%
Россия**	**–8866**	**–67,69**%
Украина**	**–2758**	**-51,38**%
Белоруссия**	**-427**	**-51,11**%

* Косвенная оценка для еврейского населения Европы, переехавшего в Израиль.
** Для сравнения (см. табл. 1).

Максимальное снижение рождаемости во время войны в России (67,69% от среднеожидаемого уровня), Украине (51,38%), Белоруссии (51,11%) в 1944 г., что указывает на тяжёлую ситуацию 1943 г. (голод середины войны не только на оккупированных, но и на тыловых территориях). В послевоенный период максимальное снижение рождаемости в Молдавии (–60,23%, 1946 г.). Меньшие потери от снижения рождаемости поляков (35,67%, 1944 г.) и евреев (ок. 30,28%).[1]

Выполненные оценки табл. 1, 2, 3 позволяют оценить масштаб геноцида в странах (и народах), пострадавших от войны, а также служат сопоставительной оценкой для некоторых современных демографических процессов.

(Сравнение современного демографического кризиса в России (1992–…) с демографическим кризисом Гражданской войны и интервенции (1918–1922 гг.) проведено в [8, с. 114]).

Список литературы

1. Демографический энциклопедический словарь / Гл. ред. Д. И. Вален-

[1.] Эти цифры снижения рождаемости служат количественной оценкой геноцида народов (стран), в современном его понимании (см. Уголовный кодекс РФ, 2013 г.).

тей. М.: Сов. энциклопедия, 1985.— 608 с.
2. История Второй мировой войны 1939–1945. Т. 12. Итоги и уроки войны. М.: Мин. обороны СССР, 1982.
3. Демоскоп Weekly. Данные всесоюзной переписи 1970 года, URL: http://demoscope.ru/weekly/ssp/sng_age_70.php?reg=2
4. Население Советского Союза: 1922–1991. / РАН, ред. А. Г. Вовков. М., 1993.— 144 с.
5. Россия и СССР в войнах XX в. Статистические исследования / ред. Кривошеев Г. Ф. М.: ОЛМА-Пресс, 2001.— 606 с.
6. *Рыбаковский Л. Л.* Людские потери СССР и России в Великой Отечественной войне. М.: Каталог, 2001. – 192 с.
7. *Урланис Б. Ц.* История военных потерь (Войны и народонаселение Европы…). М.–СПб.: Полигон–Аст, 1995.— 560 с.
8. *Чечулин В. Л., Смыслов В. И.* Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года: монография; Перм. гос. нац. исслед. ун т.– Пермь, 2013.– 194 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_Smyslov_modeli_2013.pdf

Changing fertility rates in the period of the Second World War in some participating countries

Chechulin V. L., Smyslov V. I.

This paper was described the evaluation of fertility change during the Second World War in the sample of countries participating in the war (Europe and the USSR). The indirect estimating method was used according to the data from later than war age and sex diagrams. These estimates allow us to determine the extent of genocide of involved in the war and war-torn nations.
Keywords: *World War II, changes in fertility, sex and age chart, genocide.*

Currently, there are few studies related to the research of population losses during the Second World War [5], [6], [2], [7]. These studies assessed the number of casualties, but there are no estimates as to the fertility decline during the war. For example in [5, p. 227–228] the figures are given without the assessment of fertility decline; in [2, p. 150] there is an attempt to say about the demographic consequences of the war, but then again fertility decline is not rated , and the same in [7]. In [6] there is an attempt to approximately estimate fertility decline in the war without using reliable statistical data (similar in [4, p. 78]). To obtain more accurate estimates one should take into account age and sex data charts of postwar years' census.

Below you can see the fertility decline assessment during the war and

post-war period, using age and sex data charts.

In order to carry out the analysis of fertility change during the Second World War, as well as in the post-war period, it is necessary to have data on fertility. Due to the fact that accurate data on fertility does not exist (because the former invaded territories and accounts data losses) , in this paper the decline in fertility during the war and post-war period was evaluated, using age and sex data charts, 35-40 years later than the military period , which allows to use population figures data to estimate the change in fertility during the war.

The maximum decrease in the birth rate during the war is in Russia (67.69%), Ukraine (51.38%), Belarus (51.11%) in 1944, which indicates that the difficult situation in 1943 (the middle of the war, hunger is not only in the invaded but in rear territories). Less loss of fertility decline is found among Poles (35.67%, 1944) and Jews (30.28%).

The estimates, Table. 1–3 allow us to determine the scale of the genocide in countries (and the people) affected by the war, and also serve as a comparative evaluation of some current demographic processes.

Часть 3. Из архива

В третью часть книги вошли статьи и заметки из архива Чечулина В. Л., ранее не публиковавшиеся, а также две работы по теории графов, содержащие два варианта доказательства теоремы о 4-ракрашиваемости плоских графов (решение известной проблемы 4-х красок), опубликованные в малотиражных, недоступных в Интернете изданиях.

УДК 314.3; 331.2

8. О некоторых естественных ограничениях уровня потребления

Чечулин В. Л.

Описаны естественные ограничения уровня потребления, проявляющиеся в снижении коэффициента рождаемости до величины, не обеспечивающей количественное воспроизводство населения при его повышении.
Ключевые слова: *потребление, уровень рождаемости, децильные группы.*

Связь экономических показателей с демографическими, на первый взгляд, кажется очевидной; и действительно, при анализе потребления, находящегося вблизи нижней физиологической границы, обеспечивающей воспроизводство (вынашивание, вскармливание, воспитание и образование детей), рост достатка позитивно влияет на коэффициент рождаемости (см. напр. [3]). В России уменьшение доходов в начале 90-х гг. привело к снижению рождаемости почти вдвое (см. половозрастную структуру населения [2, с. 157]). Для нормального вынашивания плода калорийность дневного рациона должна быть не менее 2800 ккал [7], при уменьшении калорийности питания (обусловленной экономическими факторами) естественно ожидать снижения коэффициента рождаемости. Достаточная, для нормального вынашивания и грудного вскармливания, калорийность питания в России (на 2000 г.) — лишь у 30% семей (см. табл. 1 — 8–10 децильные группы населения по доходам).

Однако в целом тенденция увеличения рождаемости при увеличении калорийности рациона (достатка семьи) не выполняется,— при изобилии потребления вступают в силу более глубинные факторы.

В [12] приведены результаты исследования влияния состава питания на демографические показатели (коэффициент рождаемости и коэффициент прироста населения),— результаты свидетельствуют о естественной границе максимизации потребления: при максимизации потребле-

ния, выражающейся в увеличении доли в питании высококалорийной животной пищи — уменьшается коэффициент рождаемости, вплоть до величины, не обеспечивающей количественного воспроизводства слоя населения с такой структурой потребностей. Таким образом, (при ориентации на неограниченно продолжающееся во времени количественное воспроизводство человечества при примерно постоянной численности населения) объективно существуют ограничения тенденции максимизации потребления. Рассмотрим это подробнее.

Таблица 1. Состав и калорийность питания в некоторых децильныхь группах в РФ 2000 г. (обработанные данные из [1, с. 599]).

Номер децильной гуппы населения по доходам		1		8		10	
	ккал/ 100 г.	г/ день	ккал/ день	г/ день	ккал/ день	г/ день	ккал/ день
Хлеб и хлебные продукты	220	181,9	400,2	342,2	752,8	435,6	958,4
Картофель	60	152,6	91,6	284,7	170,8	359,5	215,7
Овощи и бахчевые	25	88,5	22,1	284,9	71,2	381,4	95,3
Фрукты и ягоды	30	17,3	5,2	98,9	29,7	167,7	50,3
Мясо и мясные продукты	280	43,6	122,0	177,5	497,1	266,0	744,9
Молоко и молочн. продукты	70	216,7	151,7	672,6	470,8	910,4	637,3
Яйца, шт.	60	10,6	10,3	26,8	65,8	34,1	106,0
Рыба и рыбные продукты	180	14,8	26,6	46,0	82,8	67,4	121,3
Сахар и кондит. изделия	400	33,2	132,6	102,5	409,9	152,9	611,5
Масло растит. и др. жиры	900	15,9	143,0	31,8	286,0	42,5	382,2
Итого, ккал в день			1105,3		2837,0		3922,8
В т. ч. негэнтропия, ккал в день			789,5		1690,7		2263,1
% негэнтропии			71,4%		59,6%		57,7%
Итого, руб./мес. (цены 2006 г.)		515,22		1514,55		2081,52	

Хотя в [4] и указано, что «однозначного подтверждения гипотезы о сниженной потребности в детях у людей с высокими доходами <…они …> не получили», однако, поскольку исследовались семьи с доходом (в ценах 2005 г.) около 2000 рублей в месяц и более, то эта часть населения принадлежит, очевидно, верхушке децильных групп (см. табл. 1), обеспеченных достаточно калорийным питанием (калорийнее 2800 ккал в день),— 8–10 децильные группы (30% — наиболее обеспеченное население), и тенденция к уменьшению количества детей в семье как фактического, так и ожидаемого, (см. рис. 1) не объяснима экономическими параметрами, зато, очевидно, коррелирует с составом рациона питания, (см. табл. 1), что является частью общей тенденции, показанной по вариативности мировой статистики потребления и коэффициента рождаемости в [12]. Объяснение этой тенденции снижения рождаемости при изменении рациона питания основывается на теории информации.

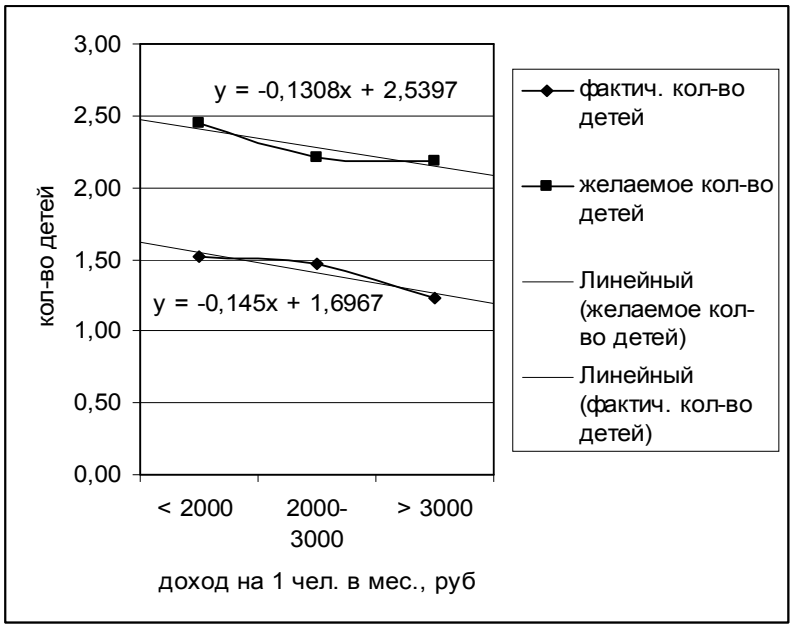


Рис. 1. Тенденция изменения количества детей в семье, в РФ, 2006 г., по [4]

Воспитание нового поколения в письменной культуре предполагает передачу ему навыков информационной деятельности (в широком смысле,— коммуникативных, профессиональных, навыков самообслуживания); по известной теореме Алесковского о связи информации и энтропии, о том, что сумма величин информации и энтропии (в их вероятностной перенормировке — единичная), $I + S = 1$ [1], размножение информации ($I > 1$) возможно лишь при наличии отрицательной энтропии ($S < 0$); в свою очередь отрицательная энтропия в живой природе производится только в растительном мире, поэтому очевидно предполагать (статистическую, в пределах социума) связь рациона питания (относительной доли растительной пищи в рационе) с успешностью воспроизводства следующего поколения (в материальном выражении — со средней рождаемостью и коэффициентом прироста населения в стране).

В качестве конкретного примера исследованию подвергались выборочные данные об усреднённом рационе питания в России с 1913 по 2000 г. (пересчитанные на долю калорийности питания, производящего негэнтропию в рационе) и данные об усреднённой рождаемости за этот же период, [2; 3; 6; 8; 9; 5]. Продукты, производящие положительную энтропию,— мясо, молоко, птица, яйцо, рыба, нейтральные — древесные плоды и ягоды, отрицательную энтропию — зернобобовые и корнеплоды (одно–двухлетние).

Результаты исследования отображены на диаграммах, рис. 2–4, — невозможно отрицать наличия предполагаемой связи обусловленности высокой рождаемости с преимущественно растительным (1–2-летние растения и хлеб) рационом питания.

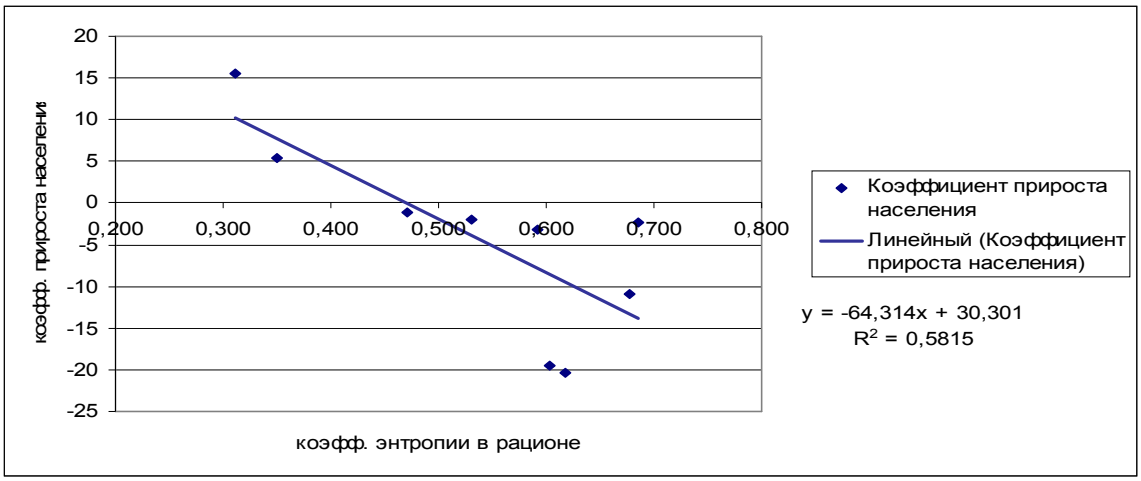


Рис. 2. Данные по России, СССР (1913–2004 гг.)

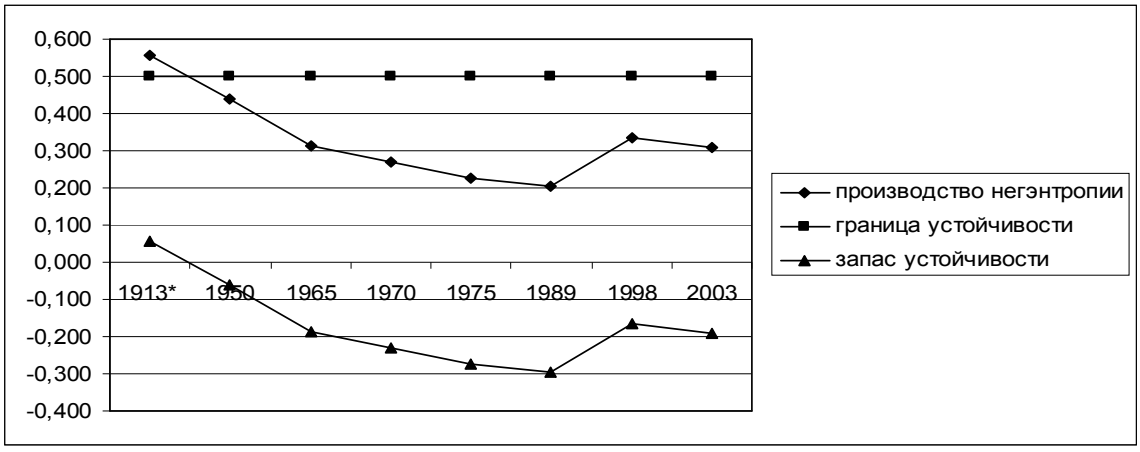


Рис. 3. График потребления негэнтропии по России, СССР за период 1913–2004 гг.

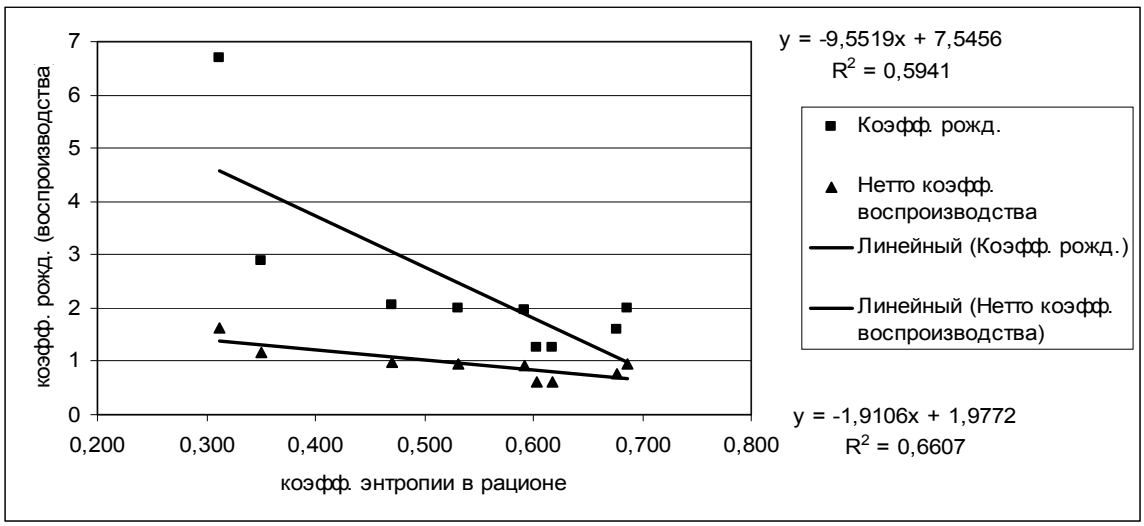


Рис. 4. Данные по России, СССР (1913–2004 гг.) [1]

[1] По горизонтали отложена относительная мера доли калорийности продуктов в рационе, связанных с производством положительной энтропии (средняя за год доля калорийности рыбных продуктов, птицы, животных продуктов относительно общей калорийности дневного рациона).

Совместно с этим исследованы те же самые закономерности по выборке данных по иным странам, нежели Россия (усреднённые данные периода кон. XX – нач. XXI века [5; 8; 10]),— опять же и в современности невозможно отрицать наличия связи рациона питания со средним коэффициентом прироста населения, рис. 5.

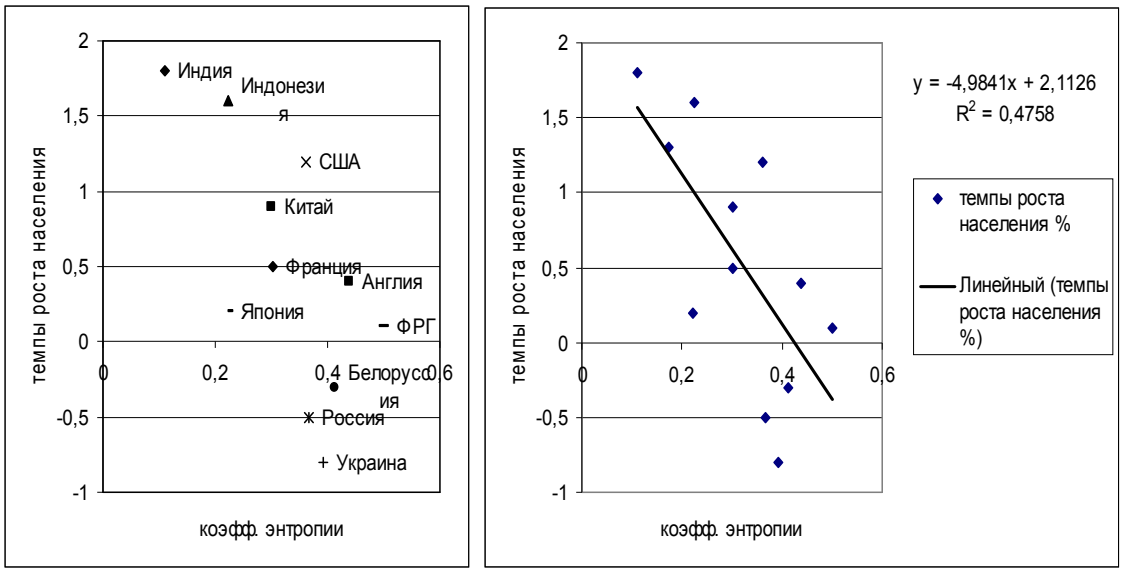


Рис. 5. Данные по выборке стран[2]

Причём по регрессионным оценкам (приближённым) коэффициент прироста населения больше единицы (см. рис. 2, 3, 5), если суммарная энтропия питания отрицательна,— т. е. доля положительной энтропии в общей энергии питания — меньше половины.

Итог интерпретации статистических данных таков, что коэффициент рождаемости в среднем обусловлен более глубинными факторами, наблюдаемыми не только у нас в стране, но и в общемировом масштабе, (физически интерпретируемым как свойство состава рациона питания[3]), нежели степенью общего материального достатка семьи[4].

Таким образом, показано, что при увеличении материального достатка, с одновременным изменением структуры пищевого рациона, тен-

[2] Отклонение от линии регрессионной связи — завышенный прирост населения в США относительно линии прогноза обусловлен значительной долей в приросте населения США приезжих мигрантов.

[3] Причём естественнонаучное объяснение этой связи представляется в научном плане приемлемым, как и религиозное объяснение о том, что была благословлена в снедь только определённая 1-2-х летняя растительная пища (Библия, кн. Бытия, гл. 1, ст. 28–30).

[4] См. исследование с упоминанием связи меры оплаты труда и коэффициента рождаемости [11].

денция снижения коэффициента рождаемости объясняется из соображений связи меры энтропии и меры информации, что позволяет делать обоснованные выводы о наличии естественной границы увеличения меры потребления, определяющей состав рациона питания, а затем уже и среднестатистическую рождаемость.

Список литературы

1. *Алесковский В. Б.* Путь разработки технологии, не вредящей природе. // Журнал прикладной химии. 2002. Т. 75. Вып. 5. С. 706–713.
2. Большая Российская энциклопедия: в 30 т. Том: «Россия». М.: БРЭ, 2005–….
3. Большая Советская энциклопедия: в 30 т. 3-е изд., М.: БСЭ, 1970–1977.
4. *Вовк Е.* Количество детей в семье: установки и репродуктивное поведение // Социальная реальность. 2007. №1. С. 20–26.
5. Мир в цифрах, статистический сборник, 1992. (Статистический комитет содружества независимых государств). М.: Финансовый инжиниринг, 1992.— 456 с.
6. Новая Российская энциклопедия. Т. 1. «Россия». М.: Энциклопедия, 2004.— 960 с.
7. *Новодержкина Ю. Г., Дружинина В. П.* Диетология. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004.— 380 с.
8. Российский статистический ежегодник. 2005. М.: Росстат, 2006.— 820 с.
9. Социальное положение и уровень жизни населения России. 2005. М.: Росстат, 2006.— 528 с.
10. Страны и регионы, 2002. (Статистический справочник Всемирного банка). М.: Весь мир, 2003.— 240 с.
11. *Чечулин В. Л.* К определению минимальной заработной платы (относительно доходов бюджета) // Современный финансовый рынок Российской Федерации, матер. IV междунар. науч.-практ. конф. ПГУ, Пермь, 2006. С. 106–110.
12. *Чечулин В. Л.* О статистически наблюдаемой связи коэффициента рождаемости и состава питания // Социально-экономические преобразования в России. Сборник науч. трудов экономич. ф-та КемГУ. Вып 4. Кемерово, 2007.— С. 352–355.

Примечания

Статья написана в 2008 году, до настоящей публикации находилась в архиве Чечулина В. Л.

About the natural limitations of the consumption level

Chechulin V. L.

The natural limitations of the consumption level, showing themselves in the birth-rate decrease to the value, that doesn't provide the reproduction, at the consumption's increase, was described.
Keywords: *consumption level, birth-rate, decimal groups.*

УДК 519.17

9. Об одном варианте доказательства 4-раскрашиваемости плоских графов

Чечулин В. Л.

Описан вариант доказательства известной теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов.
Ключевые слова: *теорема четырёх красок, четыре раскрашиваемость плоских графов.*

Как известно, каждый связный 4-раскрашиваемый граф стягиваем к K_4 [1, с. 264, теорема 60.1], выберем в произвольном 5-раскрашиваемом графе (G, $\chi(G) \geq 5$) произвольную 5-раскрашиваемую область (G_5), часть которой (вся 4-раскрашиваемая, G_4) стягиваема в K_4, тогда, поскольку эта стянутая область (G_5*, содержащая G_4, стянутую в K_4) 5-раскрашиваема, то, очевидно, в ней можно выделить подграф K_5 [1], однако граф K_5 — не плоский, значит, 5-раскрашиваемый граф (G) тоже не плоский; ввиду произвольности выбранного 5-раскрашиваемого графа получаем утверждение:

Теорема 1. Всякий минимально 5-раскрашиваемый граф — не плоский ($\chi(G) \geq 5, \Rightarrow$ G — не плоский);

из которого следует решение проблемы 4-х красок:

Теорема 2. Всякий плоский граф 4-раскрашиваем
(G — плоский, $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$).[2] □

---

[1] Предположения о стягиваемости 5-раскрашиваемой области (G_5) в K_5 — не требуется (гипотезы Хадвиггера не требуется, см. [1, с. 264], [2, с. 161-162]).
5-раскрашиваемая область (G_5) выбирается так, что в ней есть некоторая вершина, раскрашенная 5-м цветом, соединённая рёбрами с вершинами связной 4-раскрашиваемой области (G_4), которая и стягиваема в K_4. (Если такого выбора сделать нельзя, то изначальный граф (G) — менее чем 5-раскрашиваем, и проблема уже решена).

[2] Исторически попытки доказательства теоремы 4- красок (Мёбиус, 1840, Кемпе, *Kempe A. B.* On geographical problem of four colors, Amer. J. Math., 2 (1879), 193–204; Хивуд, *Heawood P. J.* Map color theorems, Quart. J. Math., 24 (1890), 332–338 (ссылки по [2])) заключались в прямом способе доказательства: попытке установить достаточное условие,— сколько цветов достаточно для раскрашивания плоской карты (получалось не менее 5-ти), позже Хееш Х. и др. (1969), поступая так же (пытаясь напрямую раскрасить граф четырьмя цветами), свели исследование проблемы к исследованию сложных, т. н. неустранимых, 1492-х конфигураций, а в 1976 г. посредством ЭВМ коллективу математиков при руководстве *Аппеля К. и Хейкена В.* удалось раскрасить все эти конфигурации 4-мя цветами, на что потребовалось ок. 2000

Список литературы

1. Лекции по теории графов / *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 384 с.
2. *Харари Ф.* Лекции по теории графов / пер. с англ. Козырев В. В., ред. Гаврилов Г. П. М.: Мир, 1973.— 304 с.
3. *Самохин А. В.* Проблема 4-х красок: неоконченная история доказательства // Соросовский образовательный журнал. 2000. №7. С. 91–96.

Примечания

Статья написана в 2005 году.

Для обеспечения свободного доступа к статье воспроизводится публикация автора в малотиражном журнале, не доступном в Интернете, оригинальный печатный текст:

Чечулин В. Л. Об одном варианте доказательства теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2006. Вып. 3 (4). С. 86–87 (прореферировано в РЖ Математика, РАН, реферат № 07.08.-13В.231).

Статья содержит решение известной проблемы четырёх красок, более короткое, чем в работах Горбатова В. А., не известных автору на момент написания статьи (см. напр.: Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Физматлит, 2000.— 544 с.).

часов компьютерного времени (*Appel K.*, *Haken W.* Every Planar Map Is Four Colorable., Contemporary Mathematics. Providense (R. I.): Amer. Math. Soc., 1989., Vol 98. 308 p.). Ссылки по [1], [3], там же указывалось на сложность проверки такого "доказательства", см. тж. краткий исторический обзор в [3]); логический же ход доказательства необходимости 4-х красок для раскраски плоского графа: 5-ть раскрашиваемый граф необходимо не плоский (см. текст),— прежде не использовался.

About a one proof of a planar's graphs 4-chromatically

Chechulin V. L.

The proof of the "4-colors" theorem in a graph theory about a planar's graphs 4-chromatically was described.

Keywords: *four color theorem, planar's graphs four chromatically.*

УДК 519.17

10. Теорема о стягивании конечных связных графов

Чечулин В. Л.

Описано доказательство теоремы о стягивании конечных связных n-раскрашиваемых графов к графам K_n; показано, что из этой теоремы следует терема о 4-раскашиваемости плоских графов.
Ключевые слова: *конечные связные n-раскрашиваемые графы, графы вида K_n, стягивание, терема о четыре-раскрашиваемости плоских графов, решение проблемы четырёх красок.*

Как известно, всякий 4 и менее раскрашиваемый связный граф G, $\chi(G)\le 4$, стягиваем[1] в граф K_n, где $n=\chi(G)$, [2].

Рассмотрим 5-раскрашиваемый граф G_5, $\chi(G_5)=5$. Выделим в G_5 максимальный 4-раскрашиваемый подграф G_4, выберем в (несвязной) области $G_5\backslash G_4$ вершину v_5, раскрашенную 5-м цветом, и стягиваем G_4 в K_4, причём сначала стягиваются вершины из G_4 не соседние (несоединённые рёбрами) с вершинами 5-го цвета, затем соединённые с вершинами 5-го цвета, но несоединённые с v_5, и, наконец, соединённые с v_5, при этом вершина v_5 остаётся соединённой 5-ю рёбрами со всеми вершинами полученного графа K_4 (такое стягивание выполнимо ввиду вышеупомянутой теоремы). Вместе с G_4 стягивается и G_5, получается граф G_5^*, вершины (кроме v_5), раскрашенные первоначально 5-м цветом, соединены с K_4 от 1 до 5 ребрами, они стягиваемы к вершинам K_4, в результате получается граф K_5. Остальные вершины, ещё не стянутые к этому графу, стягиваются к K_5. Доказана теорема.

Теорема 1. Всякий 5-ть раскрашиваемый граф стягиваем в K_5. □

По индукции, при n=6, и далее доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Всякий n-раскрашиваемый граф стягиваем в K_n.

Доказательство. Рассмотрим n-раскрашиваемый граф G_n, $\chi(G_n)=n$. Выделим в G_n максимальный (n–1)-раскрашиваемый подграф G_{n-1}, выберем в (несвязной) области $G_n\backslash G_{n-1}$ вершину v_n, раскрашенную n-м цветом, и стягиваем G_{n-1} в K_{n-1}, причём сначала стягиваются вершины из G_{n-1} не соседние (несоединённые рёбрами) с вершинами n-го цвета, затем соединённые с вершинами n-го цвета, но несоединённые с v_n, и,

[1] Стягивание — отождествление смежных вершин (по ребру между ними). Вообще всякий связный граф G стягивается до графа K_1, содержащего одну-единственную вершину. Описанные теоремы указывают на то, что на пути этого стягивания из G в K_1 имеются определённые промежуточные графы, структура которых определяется хроматическим числом исходного графа G.

наконец, соединённые с v_n, при этом вершина v_n остаётся соединённой n рёбрами со всеми вершинами полученного графа K_{n-1} (такое стягивание выполнимо ввиду вышеупомянутой теоремы). Вместе с G_{n-1} стягивается и G_n, получается граф G_n^*, вершины (кроме v_n), раскрашенные первоначально n-м цветом, соединены с K_{n-1} от 1 до n ребрами, они стягиваемы к вершинам K_{n-1}, в результате получается граф K_n. Остальные вершины, ещё не стянутые к этому графу K_n, стягиваются к K_n.

Рассуждения повторяем от n=6, далее при n=7, 8 и т. д. Теорема доказана для всех натуральных n. □

Из теоремы 1 следует теорема о 4-раскрашиваемости плоских графов [5] ввиду того, что 5-раскрашиваемый граф — не плоский. Это доказательство более короткое, чем описанное в кон. XX в. Горбатовым В. А. [1].

Рассуждения теоремы 1 проделываемы последовательно и для 2-, 3-, 4-раскрашиваемых графов, чем получается иное, чем в [2] доказательство теоремы о стягиваемости в K_4 4-раскрашиваемых графов.

(Кроме того, теорема 2 иллюстрируется химическим приложением. Пусть имеется n-компонентная система (раствор), в которой молекулы (ионы) оказывают влияние на иные молекулы (ионы), но не самих себя, тогда множество связей между отдельными молекулами, изображаемое n-раскрашиваемым графом, стягиваемо к графу K_n. То есть множество связей (очень большой мощности) проецируемо на n-мерное пространство (в барицентрических координатах) граф K_n построим на вершинах n базисных векторов. Это построение лежит в основе принципа соответствия состояния n-компонентной системы образу в n-компонентных барицентрических координатах, введённого Курнаковым Н. С. в 1930-е гг. [3], [4]).

Список литературы

1. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986.— 311 с.
2. Лекции по теории графов / Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. М.: Наука, 1990.— 384 с.
3. *Курнаков Н. С.* Введение в физико-химический анализ. Л., М., Изд-во АН СССР, 1940.
4. *Мазунин С. А.* Основы физико-химического анализа, в 2-х ч. Пермь, изд-во ПГУ, 1999–2000.
5. *Чечулин В. Л.* Об одном варианте доказательства теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2006. Вып. 3. С. 86–87.

Contraction of finite connected graphs theorem

Chechulin V. L.

The proof of the theorem of contraction of finite connected n-colorable graphs to graphs K_n was described and it was shown that from this theorem results another theorem of 4-coloring of planar graphs.
Keywords: *finite connected n-colorable graphs, graphs type K_n, contraction, theorem of the four-coloring of planar graphs, four-color problem's solution.*

УДК 510; 519.2

11. Об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры

Чечулин В. Л.

Описано философско-математическое утверждение об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры.
Ключевые слова: *вероятностная мера, вероятность, алгоритмическая неопределимость.*

<Алгоритмическая неопределимость понятия вероятностной меры> — это философско-математическое утверждение <и оно> по сути просто: алгоритм задаёт строго детерминированный процесс (начальными и граничными условиями), а события бывают и недетерминированными ввиду того, что такое событие свободно определяет человек, обладающий свободой (недетерминированной), и по содержанию события, относящемуся к самому человеку (непредикативности этого определения события),— это определение события неалгоритмизуемо. То есть невозможно построить алгоритм, определяющий формально (в некоторой формальной системе),— что есть по содержанию вероятностное событие, и определяющий, соответственно, вероятностную меру.

Этот результат более основателен, чем известная теорема Гёделя о неполноте, ибо он касается онтологических уровней: а) сознания, б) абстрактного мышления[1] <из трёх уровней а) сознание, б) абстрактное мышление, в) материально-вещественный уровень>.

Таким образом, определение вероятной меры требует присутствия наблюдателя,— самого человека, эту меру определяющего недетерминированно (а алгоритм — это лишь средство наблюдения событий). Уровень вероятностного мышления — 6-й уровень, уровень алгоритмического мышления — 5-й уровень.

(27 ноября 2007 г.)[2]

Примечания

Заметка написана в 2007 году и по смыслу связана с двумя последующими работами о непредикативности (а значит, и о неалгоритмизуемости) обозначений [1], и

[1] Теорема Гёделя о неполноте касалась уровней онтологических: б) абстрактное мышление (математические рассуждения) и в) вещественность (представления математических понятий в формальном материальном языке, в некотором алфавите).

[2] В оригинале рукописи дата: (27 ноября 2007/7516 г.).

описанием шестиуровневой иерархии абстрактных понятий [2]. См. также работу [3] в настоящем сборнике.

Список литературы

1. *Чечулин В. Л., Чирков М. Ю*. О непредикативности символов и обозначений // Университетские исследования, 2013 (раздел: философия) URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/680_62393.doc
2. *Чечулин В. Л.* История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. — 166 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf
3. *Чечулин В. Л.* О необходимости непредикативности в основаниях математики // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2014.— Вып. 1. С. 6–13.

On algorithmical indeterminacy of the concept of the probability measure.

Chechulin V. L.

The philosophical and mathematical statement of algorithmic indeterminacy of the concept of the probability measure was described.
Keywords: *probability measure, probability, algorithmic indeterminacy.*

УДК 510; 519.2

12. Об одном определении вероятностной меры

Чечулин В. Л.

Описан вариант построения вероятностных мер, уточняющий аксиоматику теории вероятностей, объединяющий в определении интегральной вероятностной меры вещественнозначные и комплекснозначные меры, с использованием классического определения вероятностной меры, тройки (X, B, μ).
Ключевые слова: *вероятностные меры, интегральное определение вероятностных мер, перенормировка, нормирующая функция.*

Предисловие

Объекты математики, в их приложении к внешнему миру, являются либо обозначением вещественных мер предметов (длина, вес и т. п.), либо мер промежутков времени, либо мер, описывающих события, происходившие во времени с некоторыми объектами, по отношению к полной совокупности объектов, за некоторый промежуток времени,— т. н. вероятностные меры; при конструировании информационных систем управления значимо содержательно точное определение вероятностной меры.

Пусть тройка (X, B, μ) — вероятностное пространство (см. [2, с. 79]), совокупность B множеств[1] A_i образует σ-алгебру и μ(X) = 1, причём отображение, ставящее каждому множеству (событию) A_i меру $\mu(A_i)$, дополнено условием отнесения событий к определённому периоду времени,— множества X и A_i определимы как интегралы (площади), ограниченные соответствующими функциями, область возможности X ограничена парой функций: $f_{0+}(t)$ и $f_{0-}(t)$, причём $f_{0+}(t) > f_{0-}(t)$,— в области событий каждому событию A_i, соответствует область, ограниченная сверху и снизу парой функций $f_{i+}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$, $f_{i-}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$,— события наблюдаемы на промежутке меры времени $[t_1, t_2]$ (мнимозначной) в области возможностей X; итак, мера μ такова, что

$$\mu(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \frac{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\, dt}{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\, dt}. \qquad (1)$$

[1] Множества совокупности B измеримы по Борелю.

Ниже приведены пространные наглядные рассуждения, поясняющие вышесказанное.

Простейший случай области событий

Пусть имеется пространство событий X, описываемых функцией (не обязательно непрерывной), ограниченной, причём (в частном случае при простейшей перенормировке) ограниченное снизу 0 (нулём), сверху нормирующей функцией $f_0(t)$, тогда вероятностная мера событий за меру периода времени $[t_1, t_2]$ составляет отношение интегралов нормирующей функции и функции $f_1(t)$, описывающей событие A, по мнимому промежутку $[t_1, t_2]$[2]:

$$p(A \mid [t_1, t_2]) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, dt}, \qquad (2)$$

Пример (почти гипотетический): длительность периода между бодрствованиями f_0 и длительность сна f_1 при переходе от 24-х часового режима к 48-ми часовому; здесь вероятностная мера — мера события "сна" относительно периода "суток". На рис. 1 изображены почти гипотетические графики, с сохранением меры сна в 1/3 от общей меры времени "суток"[3] (по горизонтали здесь и далее на рисунках отложено время).

Рис. 1

То же самое пригодно и для описания функциональных показателей экономики, например[4]:

---

[2] Функция f_0 границу возможной области событий, в действительности описываемых функцией f_1, причём иногда действительность может превозмогать наличную возможность, может быть, что $f_1 > f_0$ (границы возможности — "мягкие") и меры являются, строго говоря, информационно-вероятностными, см. далее по тексту.

[3] В данном случае мера времени может быть и дискретной, минимальное "ядро меры" — это одни сутки, тем не менее интегралы по таким ядрам меры совершенно корректны (как практически корректны интегралы за отчётный период времени по суммам суточных доходов и расходов в бухгалтерском учёте).

[4] Денежная мера в современности привязана к перераспределению меры общественно необходимого времени, см. подробнее [5].

f_0 — объём продаж (объём ВВП)[5],

f_1 — себестоимость затрат,

f_2 — валовая прибыль ($f_2 = f_0 - f_1$)[6], включающая налоги, акцизы, пошлины, зарплаты, дивиденды и т. п. (прибыль бюджета)[7].

Сложный случай перенормируемости

Пусть имеются две функции, описывающие верхнюю и нижнюю границу X меры событий, $f_{0+}(t) > f_{0-}(t)$, и по две функции, описывающих меру событий A_i:

$f_{i+}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$,

$f_{i-}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$, причём $f_{i+}(t) > f_{i-}(t)$ на всём учитываемом интервале времени $[t_1, t_2]$. (В случае $f_{0+}(t) > f_{0-}(t)$ — нет области для событий, сплетения вида $f_{i+}(t) < f_{i-}(t)$ для простоты не рассматриваются[8]).

Тогда вероятностная мера события A_i в пространстве возможных событий X, "мягко" ограниченных промежутком $[f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$, за промежуток меры времени $[t_1, t_2]$ определяема отношением интегралов (мер области возможности и действительности событий, см. рис. 2):

$$p(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\, dt} \quad . \qquad (3)$$

То есть практически каждая такая мера является в достаточной степени условной, ибо вероятность события X, нормирующего вероятность события A, также может быть обусловлена более широкой областью Y, G: $[g_{0-}(t), g_{0+}(t)]$.

Практический пример использования аналогичного построения мер — системы автоматизации в химической промышленности,— область технологически допустимых (аварийно допустимых) пределов — область X, область действительных значений i-го технологического па-

---

[5] Эта функция описывает область возможностей X.

[6] Эти функции описывают области событий A_i, для экономического анализа важна ещё одна функция f_3 — объём средств, вкладываемый в обновление основных фондов производства (см. [5]).

[7] Дело в том, что процесс финансового оборота весьма и весьма разрывен и ступенчат, приближение его непрерывными функциями с попытками писать дифуравнения (с гладкими решениями) — некорректно,— для описания процессов оборота общественного времени как раз более пригодны описанные интегральные вероятностные меры.

[8] Если есть такие сплетения, то интервал на времени разбивается на подынтервалы, для которых выполнятся одно из условий: $f_{i+}(t) > f_{i-}(t)$ либо $f_{i+}(t) < f_{i-}(t)$,— и далее рассуждения аналогичны.

раметра (температуры, давления в аппарате, массопотока реагента) — область A_i; причём технологические границы в общем случае — величина переменная, в зависимости от характеристик качества процесса и состава сырья (качество удержания параметров в заданных пределах отслеживается автоматически, посредством информационной системы управления процессом).

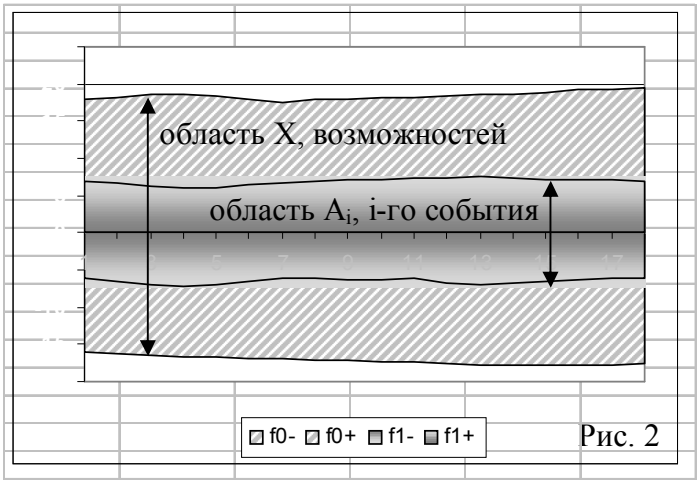


Рис. 2

Общий случай перенормируемости, с комплекснозначной мерой времени

В общем случае мера времени — мнимая величина (ось, изображающая время,— мнимозначная ось комплекснозначной плоскости), и интеграл от веществennозначной функции по мере времени — мнимая величина:

$In' = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ — мнимозначный, т. к. t — чисто мнимая величина, однако при перенормировке интеграла к мере промежутка интегрирования получаемо число уже не мнимое, т. к. результат деления мнимой единицы самой на себя — вещественная единица, i / i = 1:

$$In = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt\,, \qquad (4)$$

интеграл In — средняя мера потока, при описании материального потока функцией f(t) во времени, тогда вероятностная мера, формулы (3) корректно переписываема, с учётом мнимозначности меры времени и перенормировки, как отношение интегралов области возможности X и действительности A_i событий, перенормированных к промежутку меры времени, определяющей вероятностную (информационную) меру:

$$p(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\,dt}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\,dt}\,. \qquad (5)^{9}$$

[9] При этом отношение комплекснозначных интегралов мер (3) тождественно отно-

Так образуются три, составляющие полную совокупность мер, меры:

1. вещественная (применимая для описания вещей),
2. комплексная (мнимая) (для описания процессов во времени),
3. вероятностная (информационная) (для описания структурных, может быть и неявных, по теореме о неявной функции, связей[10]). И эти три меры: вещественная, комплексная и вероятностная оказываются взаимосвязаны корректным определением вероятностной меры (5)[11].

Вышеописанное определение вероятностной меры совпадает с определением аксиоматики Колмогорова А. Н., предполагавшего, что вероятностная мера строго принадлежит промежутку [0, 1].

Общая мера, индексы

Более общий случай, когда функциональная область, описывающая события, распространяется за пределы нормирующей области[12]; например:

функция $f_0(t)$ — описание меры наличной возможности подготовки специалистов,

функция $f_1(t)$ — описание меры объективной общественной (государственной) потребности в специалистах (в некоторой области техники, хозяйства, науки).

Обычно возможности превышают потребности, но если на некотором промежутке времени потребности превышают возможности, то вероятностное описание в этом случае неприменимо, мера — за границами единичного промежутка; индексная же мера в общем случае — логарифм выражения (5), в частном случае примера такова:

$$\mu(A_1 \mid X, [t_1, t_2]) = \ln \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, dt}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_0(t)\, dt}. \qquad (6)$$

шению перенормированных интегралов мер, что обусловлено равномерностью и однородностью меры времени (определение меры времени через себя само — непредикативно).

В связи с тем, что переномирующие дроби $1/(t_2 - t_1)$ сокращаются при делении в формуле (5), ранее этой особенности определения вероятностной меры не замечалось.

[10] Вероятностная мера не просто вновь вещественно-значная, но собственно вероятностно-значная.

[11] См. также содержательную интерпретацию теоремы об ограничении размерности, в самопринадлежащих упорядоченных структурах, качественным 3-х мерием [4].

[12] Экономические примеры описаны отдельно [5].

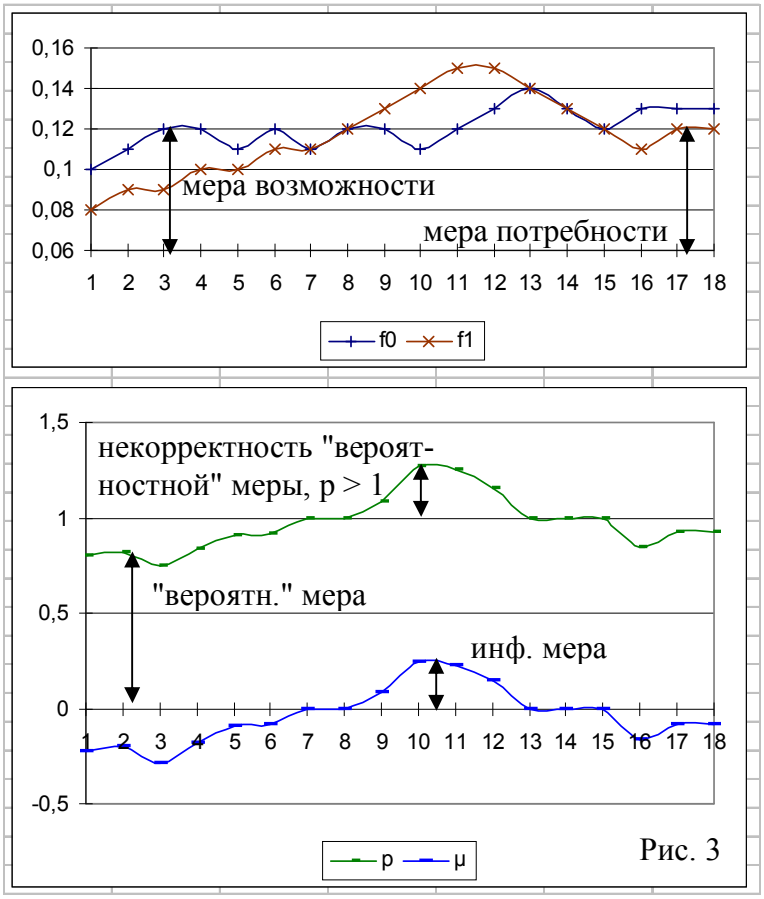


Рис. 3

Возможные случаи (см. рис. 3):

а) совпадение возможностей и потребностей $\mu(A_1 \mid X, [t_1, t_2]) = 0$, $f_0(t) = f_1(t)$, ($[t_7]$, стационарный случай, минимизирующий избыточные затраты),

б) возможности больше потребностей $\mu < 0$ ($[t_1, t_2]$, т. е. имеется некоторый резерв для внепланового маневрирования, подготовки специалистов более широкого, чем сегодняшние потребности профиля, что обеспечивает долговременную качественную отдачу),

в) возможности меньше потребностей $\mu > 0$, ($[t_9, t_{13}]$, деградация системы[13], предотвращаемая увеличением меры возможностей, превозмоганием).

Мера μ подобна мере энтропии в известной теореме Алесковского:

$$I + S = 1, \qquad (7)$$

где I — мера информации (порядка), S — мера энтропии (беспорядка, хаоса);

если $\mu < 0$ ($S < 0$), то в системе наличествует полный порядок, т. е. информация копируется и возможно планомерное, согласованное, принимаемое общественностью постепенное структурное улучшение системы в целом;

[13] Нередко провоцируемая разжиганием ложных массовых потребностей при ограниченности ресурсов системы в целом.

если же $\mu > 0$ ($S > 0$), то необратимо происходит неупорядочиваемый распад информационной структуры.

Оценка меры необходимого резерва (меры свободы приложения возможностей, над наличными текущими потребностями),— вне этой работы.

Таким образом, мера (6) является информационно-вероятностной мерой, несколько более общей, чем известные обычные вероятностные меры.

Заключение

Указанное выше определение вероятностной меры (5) включает в определение интеграл только по прошлому, существовавшему времени[14], становясь совершенно корректным и соответствующим аксиоматике Колмогорова, уточняя первую аксиому теории вероятностей ("1. каждому событию A отвечает число $p \in [0,1]$ …", [3, с. 13]), остальные аксиомы (2. о вероятности несовместных событий и 3. о вероятности достоверного события) очевидно следуют из свойств интеграла.

Индексная мера (6) дополняет аксиоматику теории вероятностей, видоизменяя по свойствам логарифма пункты классической аксиоматики:

1. Каждому событию A_i, в области, ограниченной сверху и снизу парой функций
$f_{i+}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$, $f_{i-}(t) \in [f_{0-}(t), f_{0+}(t)]$, причём $f_{i+}(t) > f_{i-}(t)$, наблюдавшемуся на промежутке меры времени $[t_1, t_2]$, в области возможностей X, ограниченной парой функций $f_{0+}(t) > f_{0-}(t)$, соответствует мера μ ($\mu \in [-\infty, +\infty]$), равная логарифму отношения интегралов области события (действительности) к области возможностей, перенормированных относительно длительности промежутка времени:

$$\mu(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \ln \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\, dt}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\, dt}. \qquad (8)$$

2. Если A_1 и A_2 несовместные события, т. е. если области, соответствующие этим событиям не пересекаются, то по свойствам интеграла и логарифма

$$\mu(A_1 + A_2) = \ln\left(\exp(\mu(A_1)) + \exp(\mu(A_1))\right). \qquad (9)$$

[14] И исключает некорректные, с научной точки зрения, предположения о ещё несуществующем, ещё неизмеренном будущем.

3. Мера достоверного события $\mu = 0$, мера невозможного события $\mu = -\infty$, мера сверхвозможного (необходимого[15]) события $\mu > 0$.

Описанным способом построения вероятностной меры[16] содержательно обоснованы, применительно к практике вероятностного анализа в экономике, аксиоматизированные ранее (Колмогоровым А. Н.) положения теории вероятностей.[17]

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей // Теория вероятностей и её применения. 2003. Т. 48. Вып. 2. С. 211–220.

[15] Таким образом, категория необходимости пересмотра наличных условий, определяющих текущую вероятностную меру, формализована в математике.

[16] Возможны и иные варианты построения аналогичных мер:

1а. $$\mu(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \exp\left(- \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\, dt}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\, dt} \right).$$

2а. Аддитивность не сохраняется.

3а. Мера достоверного (упорядоченного) события $\mu = e$, мера невозможного события $\mu = 0$, мера сверхвозможного события $\mu > e$.

Сохранение аддитивности при определении меры аналогичном классическому определению:

1б.

$$\mu(A_i \mid X, [t_1, t_2]) = \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{i+}(t) - f_{i-}(t))\, dt}{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f_{0+}(t) - f_{0-}(t))\, dt}.$$

2б. Если A_1 и A_2 несовместные события, т. е. если области, соответствующие этим событиям не пересекаются, то, по свойствам интеграла, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

3б. Мера достоверного (упорядоченного) события $\mu = 1$, мера невозможного события $\mu = 0$, мера сверхвозможного (необходимого) события $\mu > 1$.

[17] Кроме того, теоретические (гипотетические границы) мер: веществennозначной, мнимозначной (меры времени), и вероятностнозначной (преимущественно меры энергии),— таковы: 1) веществennозначная — гипотетически $[-\infty, +\infty]$, практически — конечная, 2) мера времени — гипотетически $[-\infty, +\infty]$, практически $[-\infty, 0]$, (только прошлый, конечный измеримый период времени до настоящего), 3) мера энергии, вероятностная,— гипотетически $[-\infty, +\infty]$, практически $[0, 1]$,— перенормируема по отношению к интегралу по полной энергии описываемой системы.

2. *Партасарати К. Р.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры / пер. с англ. Прохоров А. В., ред. пер. Сазонов В. В. М.: Мир, 1983.— 344 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбич А. Ф. М.: Наука, гл. ре. физ.-мат. лит-ры, 1985.— 640 с.
4. *Чечулин В. Л.* Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 4 (20). С. 37–45.
5. *Чечулин В. Л., Мясникова С. А.* К теоретико-вероятностному описанию закономерности оборота общественно необходимого времени // Проблемы и перспективы развития Верхнекамского региона. Материалы региональн. конф. при БФ ПГУ, Березники, 2006, С. 65–69.

18 дек. 2005 — 18 мая. 2006

Дополнение 1. К уточнению определения вероятности непрогнозируемых событий

Наблюдение событий предполагает вещественную измеримость свойств событий и упорядоченность процесса наблюдений (именно процесса наблюдений) за событиями во времени. При этом события могут быть и детерминированными, однако полный учёт факторов, определяющих начальные и граничные условия детерминированного процесса, вряд ли возможен (как в случае примера с перегоранием лампы[18], факторов, влияющих на срок службы, очень много: и качество изготовления, толщина спирали, функция напряжения в электросети, пиковые перенапряжения, вибрации, температура окружающего воздуха и т. п.,— детерминированные, измеримые факторы, а также фактор свободной причинности — возможность свободного включения и выключения лампы человеком в действительных условиях и т. п.), составить модель и решить дифуравнение, описывающее срок службы лампы, вряд ли возможно, а если возможно, то вряд ли целесообразно (из-за неоправданных затрат времени и труда математика),— процесс может быть и детерминированным, но не предсказуемым (например, по указанным выше соображениям), поэтому на практике ввиду стационарности процесса событий (на производстве) и ограничиваются статистическими наблюдениями.

То есть основное в определении вероятности — это непредсказуе-

[18] В примере с вероятностью события перегорания электрической лампы накаливания речь идёт о том, что для того чтобы вычислить, когда точно (детерминированно) эта конкретная лампа перегорит, недостаточно информации.

мость[19], невозможность установления непосредственной, однозначной (точно функционально выраженной), детерминированной связи между двумя факторами (между периодом времени эксплуатации множества ламп и частотой отказов), установление этой связи опосредовано процессом наблюдения событий и определением функции связи с некоторой точностью к текущему моменту времени, с уточнением в следующий период времени.

Возвращаясь к классическому примеру рассмотрения события срока службы ламп, заметим, что в действительных условиях, в 1-м приближении, важно количество ламп, подлежащих закупке в следующий планируемый период, для замены перегоревших; и практически с вероятностной мерой оперируют как с интегральной величиной, определённой выше; например, если за отчётный период в цехе предприятия заменяли некоторое количество ламп каждую неделю (при общем неизменном количестве светильников), то количество перегоревших ламп (по неделям) — измеримая функция, дающая при интегрировании (отчёте за год) меру, посредством которой практически определимы (с некоторым запасом) планы закупок на следующий год[20].

Таким образом, вероятностно-статистические рассуждения позволяют избежать массы ненужных вычислений[21] (при отказе от попыток предсказывать непрогнозируемое[22]) при действии с потоком одинаковых событий.

Подобно этому в сложных системах управления технологическими процессами меры, описывающие качество химико-технологического процесса, определимы интегральным образом (5)[23].

Вероятностные меры 3-х видов, соответствующие 3-м уровням раз-

[19] А не "случайность", как в определении Колмогорова [1].

[20] Причём составители планов закупок зачастую и не предполагают, что занимаются вероятностными рассуждениями.

[21] В условиях примера не требуется письменно фиксировать период службы для каждой лампы (которых в цехе иного предприятия бывает и более тысячи штук).

[22] В условиях примера при отказе от прогноза срока службы каждой лампы и отказе от составления детерминированных планов замены, при действительной процедуре замены, основанной на сборе сведений о состоянии системы (заявках на замену и периодических обходах производственного участка, обнаруживающих неисправные объекты); таким образом при установлении наблюдаемости граничных условий системы (горения ламп) система становится управляемой (попытка же прогноза, срока службы ламп, очевидно, скорости замены перегоревших ламп не увеличивает).

[23] Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография, Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2011. – 114 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_metod_2012.pdf

вития науки <номера — номера уровней абстракции>:

4. интегральные вероятностные меры (5),

5. измеримые (по внешней мере) меры для неинтегрируемых, изменчивых во времени систем,

6. меры, соответствующие системе ценностей (включающие самого субъекта).

Примечания

(Рукопись от 18 дек. 2005 года)[24].

Первоначальный вариант рукописи относится к 2005 году, в 2008 году текст рукописи был дополнен для журнала "Живая математика", но в связи с закрытием этого журнала не был тогда опубликован.

On a defenition of the probability measure

Chechulin V. L.

A variant of defenition of probability measures was described that specifies the axiomatic of the theory of probability, combining in the definition of the integral probability measure real-valued and complex-valued measures with the use of the classical definition of the probability measure, the triple (X, B, μ).

Keywords: *probability measures, integral definition of probability measures, renormalization, normalizing function.*

---

[24] В оригинале рукописи дата:
(18 дек. 2005/7514 — 18 мая. 2006/7514, четверг, ок. 18 час. 13 мин.).

УДК 519.2

13. К возведению вероятностей в степень

Чечулин В. Л.

Описано содержательное обоснование необходимости операции возведения вероятности в степень для самопричинных событий.
Ключевые слова: *вероятность, самопричинное событие, возведение вероятностей в степень.*

Хорошо известны теоремы о сложении и умножении вероятностей [2, 3], описывающие вероятностные законы, относящиеся к несовместным, совместным (но различимым событиям); однако в практике встречаются такие события, которые при описании состоят из самих себя и своей противоположности,— таковы события, относящиеся к описанию закономерностей финансового оборота: единичная область — выручка A, прибыль B противоположна себестоимости C, A=B+C, на самом деле события B (получение прибыли) и C (оплата себестоимости) взаимосвязаны — на полученную прибыль приобретается товар и оплачивается часть себестоимости. При усреднении картины по совокупности всех предприятий государства (целостной макроэкономической единицы) связанность противоположных событий денежным оборотом ещё более очевидна (см. рис. 1). Для описания таких событий теорем сложения и умножения вероятностей — недостаточно, поскольку в обобщённом денежном обороте событие неразличимо от своей противоположности, более того, является (говоря философски) ещё и собственной причиной[1].

$p(a+b) = p(a) + p(b)$ — теорема сложения (для несовместных, различимых[2] событий),

$p(a \cdot b) = p(a) \cdot p(b)$ — теорема умножения (для независимых, различимых событий),

возведение в степень для связанных, различимых событий: если событие a является причиной события b, то $p(a^b) = p(a)^{p(b)}$.

Применительно к вышеизложенному примеру, получение доли прибыли (высвобождение общественного времени) x является причиной дальнейшего получения прибыли (высвобождения общественного вре-

[1] Экономическое высвобождение времени ценно само по себе, смысл же этого высвобождения — над областью временных причин,— в сфере самоосознаваемого смыслообразования.

[2] События не связаны, если одно из них не является причиной другого, различимы — если не тождественны.

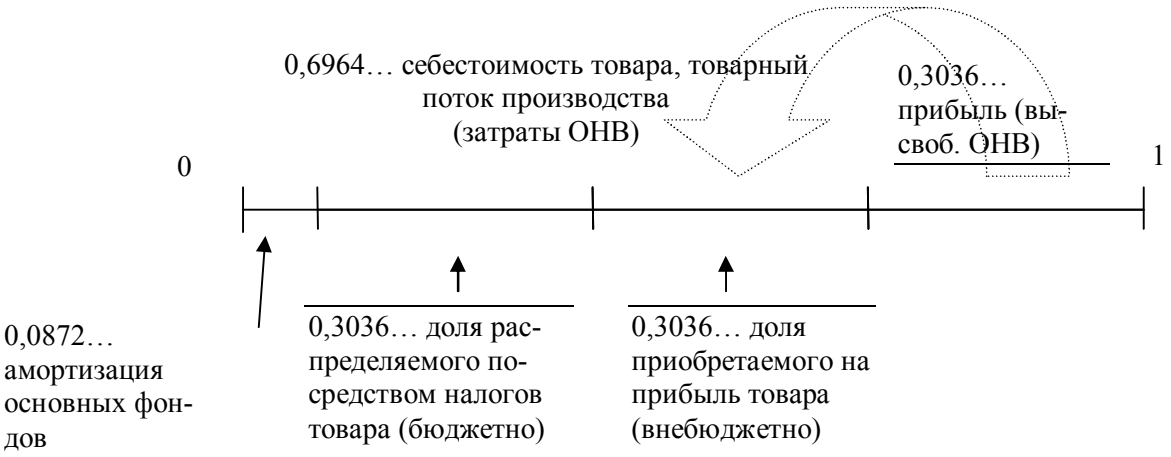


Рис. 1. Схема стационарного режима оборота общественно необходимого времени

мени) x (обусловленность производства извлечением прибыли, высвобождением общественного времени[3]), однако событие обращения прибыли (общественного времени) x^X (потребление произведённого продукта) противоположно событию получения прибыли,— получаем полную сумму событий:
$1 = x + x^X$, или $x = 1 - x^X$ (иной, вероятностный, способ вывода описанных ранее [1] закономерностей)[4].

Таким образом, для события a, являющегося причиной самого себя, и противоположного самому себе получаем уравнение $p(a) = 1 - p(a^a)$, $p(a) = 1 - p(a)^{p(a)}$, имеющее, несомненно, одно решение[5].

Список литературы

1. *Чечулин В. Л.* О предельной норме прибыли // Социально-экономическая ситуация развития региона: Матер. региональн. конф. при БФ ПГУ, Березники, 2005. С. 270–283.
2. *Королюк В. С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, гл. ред физ.-мат. лит., 1985.— 640 с.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2004.— 479 с.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.— 928 с.

январь-март 2006 г.

[3] Основной экономический закон, см. БСЭ-3.
[4] Использование вероятностных мер для описания обобщённых потоков общественного времени позволяет строить простые прогностические модели экономической системы государства в целом (содержательно описывать причины возникновения инфляции).
[5] Решение этого уравнения единственно не только в вещественной области **R**, но и в комплексной области **C**.

Дополнение 1. Об общем виде уравнения с возведением события в степень

Уравнение $p(a) = 1 - p(a)^{p(a)}$ описывает действие с двумя составляющими: производством и потреблением, являющимися причиной друг друга; в воображаемом случае трёх взаимно обуславливающих, замкнутых в круг причин, повлечённых событием a, уравнение таково: $p(a) = 1 - (p(a)^{p(a)})^{\wedge p(a)}$, с трёхкратным возведением в степень, однако такое уравнение имеет только тривиальное решение: $p(a) = 0$, ($0^0 = 1$) *[1]. Уравнение с возведением вероятности события в степень, с нетривиальным решением, в достаточной мере единственно.

*[1] Иной вид уравнения: $p(a) = 1 - p(a)^{(p(a)\wedge p(a))}$, имеет нетривиальное решение, равное приблизительно 0,437366…

Дополнение 2. Пример событий, зависящих от себя самих

Пример событий, зависящих от себя самих: элементы диагонали матрицы Леонтьева (матрицы межотраслевого баланса), каждая отрасль потребляет и собственный продукт (от земледелия — на семена и на питание, до информатики — для электронной связи). То есть событие потребления продукта самообусловлено[6] (долговременными потребностями субъекта практической деятельности, направленными на воспроизводство следующего поколения).

Примечания

(Рукопись 2006 г., январь-март).[7]

Заметка устраняет пробел теории вероятностей, оперировавшей ранее только независящими от самих себя событиями. Обоснования и приложения уравнения оборота общественно необходимого времени (основного логистического уравнения) изложены в монографиях автора по математической экономике.

On a raising probabilities to a power

Chechulin V. L.

A meaningful poof of the need to raise the probability to a power for self-causality of events was described.

Keywords: *probability, self-causality event, raising the probability to the power.*

---

[6] Классическая теория рассматривает преимущественно события, независимые от самих себя, см. [4, с. 531 и след.].

[7] В оригинале рукописи дата: январь-март 2006/7514 г.

УДК 510.2

14. О счётномерных ориентированных пространствах в теории множеств с самопринадлежностью

Чечулин В. Л.

Описано ограничение для пространств с ориентированными друг относительно друга осями (ориентированными пространствами),— допустимость только конечного числа измерений в них.
Ключевые слова: *теория множеств с самопринадлежностью, ориентация пространств, конечномерность ориентированных пространств, граф ориентации.*

<Рассматриваются пространства с ориентированными осями, описание которых впервые опубликовано в [2]>.

<При построении ориентации k осей, при ориентированных k–1 осях> концы осей, бывшие в k–1 осях соединены каждая одной линией с k–ой осью, степень вершины графа — k, см. рис. 1.
Вершины k–ой оси соединены с k–1 осями в началах осей, и с k–1 осями в концах осей, т. о. степень вершины «начала координат» — k, и вершины k–ой оси — k; построен граф степени k; и т. д. для сколь угодно большого счётного (конечного) числа осей.

Таким образом, по структуризации (обозначению осей) n–мерное пространство представляет собой…, обозначение точек…, построение обозначения точек n–мерного пространства представляет собой (n + 1)-раскрашиваемую регулярную (изотропную) структуру («элемент» которой изоморфен графу K_n (обозначение по [1])).

Отсюда доказуема теорема: более чем счётно (конечно) –мерных пространств (в виде упорядоченных числовых структур) выделить в M — невозможно.

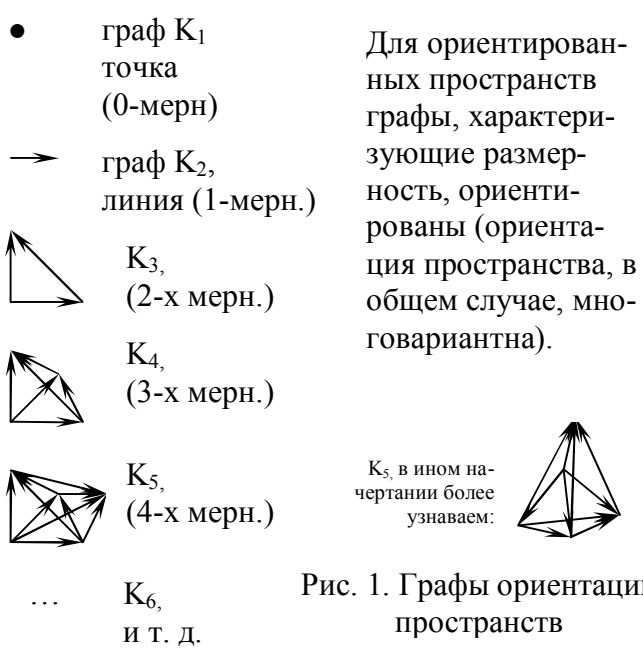


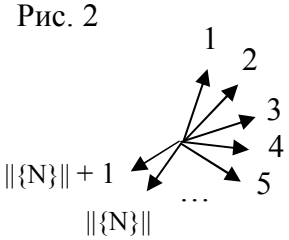
Рис. 1. Графы ориентаций пространств

Теорема 1. (тезис:*) Более чем счётно-коечно-мерных числовых пространств (в виде совокупности построений упорядоченных числовых структур) в М-теории <теории множеств с самопринадлежностью> выделить невозможно.

Доказательство.

Для бесконечномерного ||{N}||–мерного числового пространства неопределима структура ориентировки осей. (Пространство получается неизотропным по структуре, оси с номерами ||{N}||, ||{N}|| + 1,— качественно иные, чем оси со счётными номерами и изменить порядок счёта (осей при построении ориентирующей структуры) невозможно, см. рис. 2).

Рис. 2



Пока число осей счётное-конечное, пересчитывать их можно в произвольном порядке. Попытка построить бесконечномерную структуру влечёт невозможность построения ориентировки, т. к. при построении ориентировки требуется последовательно соединить вершины осей и в бесконечно мерном случае (абстракции бесконечности 1-го уровня) невозможно соединить наибольшую (по счёту) конечную по номеру ось с бесконечной, т. к. наибольшей — нет. □

Раскраска подразумевает счётность: каждый цвет — добавление единицы, добавлением единиц превысить счётную бесконечность ||{N}|| — невозможно (по построению).

Если пространство неориентировано, то его самоподобная структура — неопределённа; в случае бесконечного числа осей получается дерево с ветвлением бесконечной степени: в каждой вершине дерева бесконечное число ответвлений[1].

Свойство ориентаций: для ориентации n–мерного пространства дополнительной (ориентирующей) структурой является (n – 1)-мерное пространство (в случае канонической ориентации).

Утверждение 1. Из всех ориентаций n–мерных пространств только в 3-мерных пространствах допускается циклическая ориентирующая структура (при неканонической ориентации).

Доказательство — очевидно. □

[1] (Ср. с картиной бифуркаций (на плоскости)).

Список литературы

1. *Харари Л.* Теория графов. М.: Мир, 1981.
2. *Чечулин В. Л.* Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4 (20). С. 37–45.

Примечания

(Рукопись 2005 г., лето).

Материалы ранее не публиковались.

В рукописи указано свойство конечномерности канонически ориентированных пространств.

* Так в рукописи.

On countably dimensional oriented spaces in the theory of sets with self-considering

Chechulin V. L.

The limit for spaces with axes oriented relative to each other (oriented spaces) and the admissibility of only a finite number of changes in them was described.

Keywords: *theory of sets with selfconsidering, oriented spaces, finite dimensionality of oriented spaces, orientation graph, finite-oriented spaces.*

УДК 519.2

15. Вычисление норм резерва измерительного оборудования

(Об организации планирования заказов оборудования при определении норм запаса)

Чечулин В. Л.

Описан способ решения задачи об определении норм запаса приборов для выполнения текущей периодической калибровки и восполнения естественной убыли приборов при списании неисправных. Предложен способ организации учёта оборудования для вычисления норм запаса и определения количества планируемого для заказа на следующий год оборудования.

Ключевые слова: *измерительное оборудование, резерв оборудования с учётом поверок.*

Описан способ планирования закупок оборудования (при естественной убыли неисправных); причём убыль приборов описывается вероятностными закономерностями (в общем гарантируемыми от поставщиков оборудования) и не может быть предсказана интуитивно, поэтому, при естественной организации текущего запаса оборудования (для замены неисправных), достаточно ясно формулируется задача моделирования процесса убыли приборов для определения нормы запаса, нормы резервирования оборудования.

Способ расчёта норм запаса единиц оборудования

Общее выражение оценки увеличения нормы количества оборудования при наличии оборота (например периодической поверки приборов), относительно количества приборов на точках измерения, таково:

$$m = n\left(1+\left|(-1)\frac{T_1}{T_2}\right|\right),$$

где n — мера количества (единиц оборудования), T_1 — срок задержки при обороте, T_2 — период оборота, в общем выражении n, T_1, T_2 — произвольные величины.

Трансцендентная запись, получаемая логарифмированием, такова:

$$m=n\left(1+\left|e^{-j\pi\frac{T_1}{T_2}}\right|\right),$$

в этом приближении T_1, T_2 — комплексные величины.

Тригонометрическое разложение (по формуле Эйлера) таково:

$$m=n\left(1+\left|\sin(\pi\frac{T_1}{T_2})\right|\right),$$

где T_1, T_2 — вещественные числа, и $T_1 < \frac{1}{2}T_2$.

Приближённое значение:

$$m=n\left(1+\frac{T_1}{T_2}\right),$$

где $T_1 < \frac{1}{10}T_2$.

Для расчёта норм резерва оборудования, при периодической поверке части оборудования, необходимы следующие сведения:

n — наименьшее потребное число единиц оборудования (количество точек измерения);

T_1 — период, на который оборудование изымаемо из эксплуатации (период выполнения калибровки);

T_2 — период между очередными изъятиями единицы оборудования (межкалибровочный период).

Пример 1.

При 10-ти точках измерения и межкалибровочном периоде 12-ти месяцев, при выполнении калибровки в течение 1 (одного) месяца, оценка общего потребного для беспрепятственного выполнения плана калибровок (при возможно более равномерном распределении калибруемых приборов по месяцам года) числа приборов на данный предел измерения такова:

$$m=10\cdot\left(1+\sin\left(\pi\frac{1}{12}\right)\right)=12{,}588\ldots\approx 12{,}6\approx 13 \text{ шт.},$$

— запас для калибровки — 3 штуки.

Оценка количества запаса для восполнения естественной убыли

Оценка количества запаса приборов, потребного для восполнения естественной убыли исправных средств измерения, вычисляема подобно. В общей записи:

$$m=n\cdot\left(1+\left|(-1)\frac{T_1}{T_2/0{,}5}\right|\right),$$

где n — мера количества, T_1 — срок, на который рассчитываем запас (больший срока поставок оборудования), T_2 — средний срок эксплуатации оборудования (в первом приближении — гарантированный изготовителями, уточняемый по опыту эксплуатации).

Пример 2

В условиях примера 1, при годовом сроке резервирования и среднем гарантированном сроке эксплуатации прибора в 6 лет, минимальная оценка общего числа приборов такова:

$$m=12,6*\left(1+\sin(\pi\frac{1}{6/0,5})\right)=15,86\ldots\approx 16 \text{ шт.},$$

из этих: 3 штуки — запас для калибровки, 3 штуки — запас для восполнения убыли по списанию неисправных.

30 сентября 2003 г.

Примечания

(Рукопись от 30 сент. 2003 г.)[1]

В работе изложен общий способ решения производственной задачи планирования закупок измерительного оборудования. Ранее материалы находились в архиве автора и не публиковались.

Calculation rules to reserve measure equipment

(The organization of planning of equipment orders in determining standard inventory)

Chechulin V. L.

The method for solving the problem of determining the standard inventory of instruments for the current periodic calibration and replacement of the natural loss of instruments when writing off defective ones was described. The method of organizing equipment accounting to calculate standard inventory and determine the amount of the equipment' planned order for the year to follow was offered.

Keywords: *measuring equipment, equipment provision in the light of verifications.*

[1] В оригинале рукописи дата: 30 сентября 2003/7511 г.

УДК 141.2

16. К постановке задачи сравнительного анализа мировоззрений

Чечулин В. Л.

Описана постановка задачи сравнительного изучения мировоззрений как религиозных, так и включая психологическую нормативность и светское мировоззрение.
Ключевые слова: *сравнительный анализ мировоззрений, структура мировоззрений, религиоведение.*

Элементы психологически нормативного мировоззрения включают в себя получение осознанных ответов на три вопроса: 1. происхождение мира и самого человека[1], 2. критерии справедливого воздаяния за дела (за добро и зло)[2], 3. цели совершенного устройства мира и семьи[3]. Эти же составляющие в той или иной форме наблюдаются в разных видах (и практиках) религиозного мировоззрения, а также закрепляются в светской системе законодательства (прежде всего конституционного). Сравнительное религиоведение и заключается в выявлении указанных составляющих, свойственных каждой конфессии (по крайней мере древнейшим и крупнейшим конфессиям): традиционному народному мировоззрению, закреплённому в народном творчестве (пословицах, поговорках, сказках, былинах и т. п.), иудаизму, восточным культам: буддизму (даосизму), индуизму, христианству (древнему), исламу, католицизму, протестантизму, а также позитивной философии новейшего времени. Для сравнительного анализа конфессиональных мировоззренческих особенностей осознания целей отдалённого будущего, предназначения человека, свойственного тому или иному мировоззрению, для выделения общих конструктивных составляющих мировоззрений и обозначения деструктурирующих общественное сознание и воспроизводство общества в целом дефектов. Подробный детальный анализ — вне рамок этой работы, общие составляющие психологической нормативности, религиозных мировоззрений и светского мировоззрения изображены в таблице 1 [4], соответственно онтологических составляющих мыш-

[1] Такими вопросами дети, как правило, начинают задаваться в дошкольном возрасте (3–7 л., 2-й психологический возраст, $Я_{суб}$).

[2] Эти вопросы своевременны в подростковом возрасте (12–16 л., 4-й возраст, $(Я–Они)_{суб}$), этот возраст — возраст начала формирования правосознания [3].

[3] Содержание самоосознания взрослого возраста (ст. 21 г., 6-й возраст $(Я–(Они+Я))_{суб}$).

[4] Составляющие анализа связаны в психологическом плане со структурой самоосознания, последовательностью психологических возрастов (описано отдельно, см. [8],

ления человека.

Таблица 1. Составляющие сравнительного анализа мировоззрений

№ Онтологической составляющей	Психологическая нормативность	Религиозное мировоззрение[5]	Светское мировоззрение
i (вещное мышление)	Осознание возникновения себя и мира	Объяснение возникновения мира и человека	Научная картина описания мира
ii (процессное, во времени, мышление)	Осознание правилосообразности воздаяния за добро и зло	Объяснение неизменных правил воздаяния за дела (закон воздаяния)	Наличные законодательные нормы и правоприменительная практика
iii (структурное мышление)	Осознание потребности в общественно полезном труде, создании семьи	Объяснение целей совершенного устройства будущего	Содержание господствующей идеологии

Список литературы

1. *Богданович Н. В.* Субъект как категория отечественной психологии: дисс. … канд. психол. наук. Ин-т психологии РАН, 2004.— 170 с.
2. Дао-де-цзин, пер с. кит. Ян Хин-Шун // Дао: гармония мира. М.: Эксмо-пресс, Харьков: Фолио, 2000.— 864 с. С. 9–36.
3. *Кудрявцев И. А., Дозорцева Е. Г.* Психологический возраст: методологические проблемы и судебная экспертная практика // Психологический журнал. 1988. Т. 9. №6. С. 103–115.
4. Сидур / ред. Брановер Г., Иерусалим: Шамир, 1999.— 928 с.
5. Часослов (на славянском языке). М.: Афонское подворье, 1995.— 352 с.

---

[7], [1]); в плане онтологическом с наличием трёх составляющих бытия: 1) вещества, 2) организованной во времени информации, 3) сознания, организующего как самое себя и общество, так и упорядочивающего вещество и информационные процессы; в плане же практической деятельности с тремя составляющими деятельности (труда): 1) вещная деятельность, 2) организационно-процессная (функциональная) деятельность, 3) личностно-общественная, структурирующая деятельность; в плане экономическом с наличием трёх групп потребностей 1) необходимые потребности, 2) обязательственно-правовые потребности, 3) потребности осуществления свобод.

[5] Так, например, эти три составляющие, при их содержательном различии, наблюдаются у таких разных конфессий, как иудаизм (в символе веры [4]), и в христианстве (в символе веры [5]), эти же составляющие описаны и в даосизме [2]; подробное описание этих составляющих, осознание которых влечёт проявления определённых сторон практической деятельности весьма пространны и вне этой работы (см. [6]). Примечательно также, что описание возникновения мира в упомянутых конфессиях, иудео-христианской традиции и в даосизме практически совпадают, при всей разности языка описания.

6. *Чечулин В. Л.* Программа курса "Религиоведение" (для студентов специальности "Психология"), г. Березники, 2006 г., 10 с., вх. БФ ПГУ №16 от 22 июня 2006 г.
7. *Чечулин В. Л.* Структурирование сознания… и структура АСУТП, АСУП // Материалы научной сессии БФ ПГТУ, 2005.
8. *Чечулин В. Л. и др.* О структурной организации информационно-промышленных систем управления … // Сб. тр. конф. "Молодёжная наука Верхнекамья" при Березниковском филиале Пермского гостехуниверситета, 2006. С. 126–131.

Примечания

(Рукопись около 2006 г.)

Первоначальное название рукописи "К постановке задачи сравнительного религиоведения, включая психологическую нормативность и светское мировоззрение". Основания такого подхода к анализу мировоззрений связаны с их определённой онтологической (3-частной) структурой (вещь–время–сознание). Ранее материалы не публиковались.

Нижеследующие тезисы (2009 г.) примыкают к этой работе.

О сравнительном религиоведении

Чечулин В. Л.

При описании развития когнитивных структур самосознания выявляются три обобщённых стадии развития личности. Содержание разрешаемых мировоззренческих вопросов на этих стадиях, относящихся и к сфере религии, таково: i) объяснение возникновения мира и человека (сравним с этим и детский вопрос «откуда я появился?»), ii) понимание правилосообразности воздаяния за поступки (связанное с наступлением юридической ответственности), и iii) осознание отдалённых последствий целеполагания и его реализации (осознание, связанное с созданием семьи). Особенности понимания означенных аспектов мировоззрения в светской этике и религиозных конфессиях имеют общую часть и отличия. Это позволяет, сравнивая «символы веры» конфессий, выявлять общие моменты и различия мировоззрений. Кратко говоря:

i) В светской этике, как и в религиях, говорится о возникновении мира из ничего. Рождающийся человек в иудео-христианской традиции творится заново, в отличие от постулируемого в восточных религиях предсуществования душ.
ii) Понимание воздаяния также имеет как общую часть (поощрение правильных поступков и наказание за неправильные как в светской этике, так и в большинстве традиционных конфессий); так и отличия: например, в христианстве предполагается, что за неправедные поступки человека для его исправления пострадал кто-то другой (искупитель), а не он сам.
iii) Понимание отдалённых последствий принимаемых человеком целей в конфессиях наиболее разнится. Нормативные конфессии, полагающие целью и

сохранение человечества, воспроизводят семейные ценности (не имеют монашества). Если целью жизни ставится, в конце концов, не воспроизводство и воспитание следующих поколений,— то имеется институт монашества.

Таким образом, подробный анализ мировоззренческих особенностей, в указанных трёх психологических аспектах, имеет прикладное значение как в плане образовательном, так и в более широком, позволяющем представлять отдалённые последствия деятельности в рамках той или иной конфессии или светского мировоззрения.

By formulating the problem of comparative analysis of worldviews

Chechulin V. L.

Formulation of the problem described in the comparative study of philosophies, both religious and psychological including regulatory and secular outlook.

Keywords: *comparative analysis of ideologies, worldviews structure, religious studies.*

Послесловие

Работы части 1 продолжают работы Чечулина В. Л. по основаниям и истории математики, написаны в 2013–2014 гг. История понятия предела рассмотрена в сопоставлении с формальными теориями, ограниченность формальных теорий упоминалась автором и ранее, но пример в виде теории автоматического управления описан в связи с содержательной беседой об ограничениях этой теории в апреле 2014 г. с проф. Стафейчуком Б. Г.

Работы части 2 выполнены в 2013–2014 гг. совместно с указанными в них соавторами: Черепановой Ю. А., Смысловым В. И. Эти работы продолжают соответствующие циклы работ автора. Впервые многомерные модели были рассмотрены автором в 2008 г., затем первые предварительные расчеты были получены совместно с Константиновым Р. А. в 2011 г., окончательные результаты 2014 г. приведены в статьях этого сборника в соавторстве с Черепановой Ю. А.

Работы части 3 представляют собой материалы разных лет (2003–2011 гг.) разной тематики из архива автора.

Особняком стоят две работы автора, излагающие два варианта доказательства известной теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов (решение проблемы четырёх красок). Первые наброски доказательства (1-й вариант) получены автором до 2005 г., 2-й вариант доказательства, посредством общей теоремы о стягивании n-ракрашиваемого графа в граф K_n, был получен автором в начале 2009 г.

Отзывы о содержании книги направлять автору на электронный почтовый адрес chechulinvl@mail.ru .

Предметный указатель

безынфляционность
  максимальная эффективность экономики, 43
бесконечность
  актуальная, 21
  потенциальная, 20
благословление, 58

вероятностная мера, 66
  интегральное определение, 69
выбытие оборудования, 86

геноцид, 51

демографический кризис, 48
децильные группы, 55

иерархия мощностей множеств (бесконечностей), 16
индексы, 72

мера времени (комплекснозначная), 71

негэнтропия, 58
непредикативность, 8, 25
  в логическом выводе, 10
непредсказуемость событий, 77

онтологические составляющие мышления, 89
онтологическое сопоставление теорий, 25
основное логистическое уравнение, 30
  безынфляционность, 30
  многомерный случай, 31
  параметр инфляции, 31
  параметр самоприменимости, 37
  разная инфляция в отраслях, 42

поверка, 86
половозрастная диаграмма, 46
предел, 23
предикативноть, 7
принцип соответствия (в физической химии), 64
причинность, уровни понимания, 19
проблема Гильберта, 1-я, решение, 16

рождаемость, 48, 58

самопричинность, 80
события
  несовместные, 74
  самопричинные, 80
счётность множеств, 14

теорема
  Алесковского, 56
  Гёделя, 8
  о 4-раскрашиваемости плоских графов, 61, 64
  о конечномерности ориентированных пространств, 83
  о непредикативности, 10
  о противоречивости предикативной теории множеств, 7
  о стягивании графов, 63
  о счётности множества всех подмножеств счётного множества, 15
  о циклической ориентации, 83
теория формальная, аксиоматическая, 23

Научное издание

Чечулин Виктор Львович

СТАТЬИ РАЗНЫХ ЛЕТ

СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается в авторской редакции
Корректор *Е. Н. Пермякова*
Перевод на англ. яз. *Е. Н. Баданина*
Компьютерная вёрстка *В. Л. Чечулина*

Подписано в печать 29.10.2014. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,46. Тираж 100 экз. Заказ №_____

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного национального
исследовательского университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в ООО "Учебный центр "Информатика""
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Предыдущие книги Чечулина В. Л.

1. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Перм. гос. ун-т.– Пермь, 2010.– 100 с.
ISBN 978-5-7944-1468-4 URL:
http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_teoriya_mnozhestv.pdf

2. Чечулин В. Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография. Перм. гос. ун-т.– Пермь, 2011.– 112 с. ISBN 978-5-7944-1621-3 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf

3. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2011.– 114 с. ISBN 978-5-7944-1774-6 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_metod_2012.pdf

4. Чечулин В. Л., Мазунин С. А., Моисеенков М. С. Плоскостность линий моновариантного равновесия в водно-солевых системах и её приложение / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. — Пермь, 2012.— 116 с. ISBN 978-5-7944-1922-1 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_mazunin_moiseenkov_ploskostnost_2012.pdf

5. Мазунин С. А., Чечулин В. Л. Высаливание как физико-химическая основа малоотходных способов получения фосфатов калия и аммония / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.— Пермь, 2012.— 114 с. ISBN 978-5-7944-1860-6 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Mazunin_Chechulin_vysalivanie_2012.pdf

6. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В. Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун т.– Пермь, 2012.– 112 с. ISBN 978-5-7944-2012-8 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf

7. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. изд. 2-е, испр. и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2012.— 126 с. ISBN 978-5-7944-2061-6 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_teoriya_mnozhestv2_2012.pdf

8. Чечулин В. Л. История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.— 166 с. ISBN 978-5-7944-2116-3 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf

9. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.– 162 с. ISBN 978-5-7944-2191-0 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf

10. Чечулин В. Л., Смыслов В. И. Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун т.– Пермь, 2013.– 194 с. ISBN 978-5-7944-2273-3 URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_Smyslov_modeli_2013.pdf