МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Л. Чечулин

Теория множеств с самопринадлежностью и теория меры (основания и приложения)

МОНОГРАФИЯ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2017

УДК 519.50
ББК 22.10
Ч 57

Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью и
Ч57 теория меры (основания и приложения) / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – 92 с.

ISBN 978-5-7944-2926-8

В книге описаны результаты теории множеств с самопринадлежностью, связанные с основаниями теории меры и имеющие приложения,— это результаты следующие по отношению к предыдущей монографии автора по данной теме.

Подробно рассмотрена история попыток доказательств непротиворечивости математики (от оснований геометрии до теории множеств) и доказательство непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью; указано, что доказательство непротиворечивости имеется только для самоссылочных (непредикативных) теорий); описаны свойства и приложения непредикативности.

Описана иерархия уровней бесконечности: конечные множества, счётные множества, недостижимые множества и множество всех множеств (которое не является недостижимым); указано, что эти уровни замкнуты, из конечных множеств конечными комбинациями получаются конечные, из счётных счётными и недостижимыми комбинациями — счётные, из недостижимых — недостижимые (мощность множества всех множеств не выразима мощностью упорядоченных структур).

Указано на структурный изоморфизм цепи 10-деревьев (обозначений десятичных чисел), покрывающий структурный изоморфизм нити недостижимых последователей (точек на прямой),— что служит одним из оснований теории меры. Доказаны теоремы о счётной (конечной) вычислимости неподвижной точки, связывающие математику непрерывных величин и вычислительную математику.

Описаны основания теории меры, необходимость эталона меры, его воспроизводимость и самоизмеримость. На этом основании очевидно строится классический математический анализ, теории дифференциала и интеграла (где бесконечно-малые величины — это убывающие до 0 переменные).

Приложения результатов теории множеств с самопринадлежностью и теории меры относятся к теории управления, теории вероятностей, решению проблем обоснования математики.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов, интересующихся основаниями и приложениями математики.

(92 стр., 3 табл., 18 рис., библиография 131 наимен.)

УДК 519.50
ББК 22.10

Печатается по решению кафедры прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: В .В. Морозенко, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Информационные технологии в бизнесе» Пермского филиала ГУ ВШЭ; *Т. А. Алабина,* доц. каф. «Финансы и кредит» Кемеровского государственного университета, канд. экон. наук.

ISBN 978-5-7944-2926-8

Chechulin V. L., Set theory with selfconsidering and measure theory (foundations and applications); Perm State University (Russia).— Perm, 2017.— 92 p.

ISBN 978-5-7944-2926-8

In the book it was described the results of the theory of sets with selfconsidering, connected to the bases of the theory of a measure and having appendices, its results was following to relation to the previous monograph of the author on a this subject.

Explicitly history of attempts of proofs of consistency of mathematics (from the geometry bases to the theory of sets) and the proof of consistency of the theory of sets with selfconsidering was considered; it was specified that the proof of consistency was available only for self-referential (impredicative) theories); properties and applications of not predicativity were described.

The hierarchy of levels of infinity was described: finite sets, countable sets, unattainable sets and a set of all sets (which isn't unattainable); it was specified that these levels are closed, from finite sets finite combinations turn out finite, from calculating —calculating and unattainable combinations — calculating, from unattainable — unattainable (power of a set of all sets not a described by the power of the arranged structures).

It was specified the structural isomorphism of a circuit of 10-trees (designations of decimal numbers) covering a structural isomorphism of thread of unattainable followers (points on a straight line) — that serves one of the bases of the theory of a measure. Theorems of calculating (finite) computability of a fixed point, the connecting mathematics of the continuous values and calculus mathematics were proved.

The bases of the theory of a measure, need of a standard of a measure, its reproducibility and self-measurability were described. On this base the classical mathematical analysis, theories of differential and integral was obviously built (where infinity-small values are decreasing to 0 variables).

Applications of results of the theory of sets with selfconsidering and theories of a measure belong to the theory of control, probability theory, the solution of problems of reasons for mathematics.

The book was intended for scientists, teachers, graduate students and students of the higher education institutions which are interested in the bases and applications of mathematics.

(92 p., 3 tab., 18 fig., bibliography 131 nomen.)

Printed by the decision of the applied mathematics and informatics department of the Perm State University (Russia)

Reviewers: V. V. Morozenko, docent of subfuculty «Information technologies in business» of Hihg economic school Perm filial (Russia), Candidate of Phisico-mathematical Sciences; *T. A. Alabina* Senior Lecturer in «Finance and Credit» Department of Kemerovo State University (Russia), Candidate of Economical Sciences.

ISBN 978-5-7944-2926-8

Ключевые слова: теория множеств с самопринадлежностью, непротиворечивость теории, автомодельность теории, основания математики, теория меры, эталон меры, связь теории меры с классическим математическим анализом, теорема о размерности, теоремы Гёделя, счётная вычислимость неподвижной точки, отсутствие первой проблемы Гильберта, разрешение парадокса Банаха-Тарского, непредикативный вывод уравнения экономического равновесия.

Keywords: the theory of sets with selfconsidering, consistency of the theory, automodelness of the theory, foundations of the mathematics, the theory of a measure, a measure standard, communication of the theory of a measure with the classical mathematical analysis, the theorem of dimensionality, Godel theorems, calculating computability of a fixed point, absence of the first problem of Gilbert, permission of a paradox of Banakha-Tarsky, an impredicative output of the equation of economic equilibrium.

Оглавление

Предисловие

Эта книга является продолжением и в некотором смысле завершением предыдущей книги автора по основаниям математики «Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения)» [77], — знакомство с которой необходимо для понимания основного содержания данной книги.

Части книги имеют содержательную завершённость: в первой части дополнительно, по отношению к [77], описываются методологические основания и ограничения теории множеств и теории меры. Во второй части изложены результаты, относящиеся к непротиворечивости и самоссылочности (непредикативности теории множеств). В третьей части даны описания порядковых структур, необходимых для теории меры. В четвёртой части приведены основания теории меры и их связь с классическим математическим анализом. В пятой части описаны приложения основных результатов.

Автор благодарит А. А. Лопатина за идею обращения теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости, С. В. Русакова за предварительный просмотр рукописи §4 и высказанные конструктивные замечания.

Часть 1. Методологические основания

Глава 1. Методологические основания

§1. Онтологические основания построения теории меры

Методологические основания описания оснований математики шире, чем упоминавшееся в [61] и [77] гносеологическое обоснование допустимости самопринадлежности множеств. Отчасти методологические основания описания структуры научного знания обозначены в [79], [95]; здесь же при описании теории множеств с самопринадлежностью и теории меры основания связаны с наличием 3-частной онтологической структуры:

iii) сознание (самосозерцательно),
ii) время (самотекуще) (во времени проходят логические рассуждения),
i) материя (самопритягиваема[1]).

Между сознанием и временем (iii-м и ii-м онтологическими уровнями) наличествует естественный язык, обладающий самоописательностью (язык описывается посредством самого языка),— отсюда прозрачно вытекает наличие самоссылочных конструкций (в том числе самопринадлежности); теория множеств с самопринадлежностью обладает самоописательностью (см. [77, с. 32–33]).

Между временем и материей (ii-м и i-м онтологическими уровнями) наличествует техника, материально выражающая информацию, — техника, воспроизводимая человеком, посредством самой техники, т. е. тоже обладающая опосредованно свойством самоприменимости.

В описании теории меры указанная онтологическая структура присутствует следующим образом:

iii) сознание (самосозерцательно),
ii) самоссылочные (непредикативные) логические конструкции,— доказательство непротиворечивости теории множеств,
i) материально выражаемый эталон меры (самоизмеримый и воспроизводимый, подробнее — в §20).

Эталон меры (задающий количество и направление меры) находится в материальном мире, а логические построения теории меры его лишь используют при создании математических конструкций, направленных на описание материального мира и внесения в него (в мир) порядка.

Время — нематериально, измеряется фактически не время, а мера равномерного (во времени) механического движения (стрелок часов и т. п.),— «эталон времени» — (это не эталон времени как такового),— это материальная мера равномерного движения.

---

[1] Подробнее о свойствах материи и нелокальности массы см. в [56], [97], [101].

Сознание — нематериально, но относительные меры, касающиеся народонаселения и т. п. (% сытых, % голодных и т. д.) относятся к доле (количеству) материально (телесно) живущих людей.

Таким образом, мерою (измерением) подменены содержания явления (наблюдаемые на среднем и верхнем онтологических уровнях: ii) времени, iii) сознания),— вместо них выступают бессодержательные формальные (численные) выражения, а формальные выражения уже не создают сознательного содержательного целеполагания (соответствующего системе ценностей), остаются (сами по себе в отрыве от сознательного содержания) мёртвыми и бездейственными. Таково основное ограничение теории меры, касается ли это экономики [68], [76], [87], социологии [80], [118] или психологии [92].

Часть 2. О непротиворечивости и непредикативности

Во второй части описаны результаты о непротиворечивости и непредикативности (самоссылочности) рассматриваемых теорий.

Глава 2. О непротиворечивости теории множеств

§2. Обращение теоремы Гёделя о непротиворечивости

В этом параграфе рассмотрено обращение теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости в предикативных формальных системах; показано, что непротиворечивость доказуема только для непредикативных (самоссылочных) теорий. В качестве примера такой теории выступает теория множеств с самопринадлежностью (непредикативная теория), для которой её непротиворечивость доказана средствами самой теории. Указано на нецелесообразность построения предикативных теорий ввиду недоказуемости их непротиворечивости. Изложено по [26].

В основаниях математики хорошо известна теорема Гёделя о недоказуемости непротиворечивости формальной системы [44]. Теорема была доказана впервые (в первоначальной форме) К. Гёделем в 1931 году. Однако в рассуждениях Гёделя имелось неявное предположение,— им, а также следовавшими за ним другими математиками, рассматривались только предикативные формальные системы (предикативные теории), в которых не допускалось круга логических следований [88][2], см. тж. §7.

В более формальной записи предикативная теория T – это такая теория, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i и выводимые утверждения B_j:

$$(A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1}, \ldots, B_{jm}) \models B_{j0}, \quad (1)$$

причём при определённых правилах вывода общее свойство этих правил вывода по условию предикативности системы таково, что выводимое утверждение не содержится в том наборе утверждений, из которых оно выводится, не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в формуле (1),

$$B_{j0} \notin \{A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1}, \ldots, B_{jm}\}, \quad (2)$$

и утверждения, из которых выводимо B_{j0}, невыводимы из него (т. е. по условию предикативности — отсутствие круга в выводе), неполучаемы с участием B_{j0},

$$D_0 = \{A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1}, \ldots, B_{jm}\},$$

$$\forall D_k \in D_0,\ B_{j0} \not\models D_k. \quad (3)$$

Более подробно о предикативных теориях см. [77, с. 37–38].

Для таких предикативных формальных теорий (систем) обобщён-

[2] Хотя очевидно, что любая аксиома A_i выводима из себя самой $A_i \models A_i$,— здесь круг логического следования (самоссылочность) налицо.

ная формулировка теоремы Гёделя такова [77, с. 38]:

Теорема 1 (теорема Гёделя, о недоказуемости непротиворечивости). В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость.

Доказательство приведено в [77, с. 38–39]. □

Данная теорема выглядит как заключение вида «А, следовательно, В», $A \Rightarrow B$, где А — это утверждение о предикативности формальной системы, а В — утверждение о недоказуемости её непротиворечивости.

Как известно, по правилу modus tollens, импликация обратима: из $A \Rightarrow B$ следует $\neg B \Rightarrow \neg A$ (не-В, следовательно, не-А). Применительно к указанной теореме её обращение выглядит следующим образом:

Теорема 2 (о непредикативности непротиворечивой теории). Если в формальной системе доказана её непротиворечивость, то она непредикативна. □

Пример непротиворечивой непредикативной теории — это теория множеств с самопринадлежностью. Доказательство непротиворечивости этой теории приведено в [77]. На основании приведённого примера объединение теорем 1 и 2 даёт следующее заключение:

Теорема 3 (о непротиворечивости только непредикативных теорий). Доказательства непротиворечивости формальной системы имеют место только для непредикативных формальных систем.

Доказательство очевидно. □

Прикладной смысл теоремы 3 таков: детальная проработка предикативных формальных систем не имеет смысла ввиду того, что доказать их непротиворечивость невозможно. С другой стороны, поскольку непротиворечивость теорий доказуема для непредикативных формальных систем, то именно они подлежат обоснованному рассмотрению (в плане наличия доказательства их непротиворечивости). То есть если для теории доказана её непротиворечивость, то она подлежит дальнейшему рассмотрению.

§3. Обращение теоремы Гёделя о неполноте

В третьем параграфе рассмотрено обращение теоремы Гёделя о неполноте предикативных формальных систем; показано, что полнота доказуема только для непредикативных (самоссылочных) теорий; однако и примера такой непредикативной теории с бесконечной областью объектов нет,— теория множеств с самопринадлежностью является неполной теорией, что содержательно совпадает с ограничениями о неразрешимости теорий (теоремой Чёрча-Россера о неразрешимости). Имеется частный результат о полноте непредикативной теории с конечным числом объектов — моделью лямбда-исчисления. Изложено по [109].

В основаниях математики хорошо известна теорема Гёделя о неполноте формальной системы [44]. И эта теорема была доказана первоначально Гёделем в 1931 году. Однако в рассуждениях Гёделя имелось неявное предположение,— им, и его последователями, рассматривались только предикативные формальные системы (предикативные теории), в которых не допускалось круга логических следований [88].

Для таких предикативных формальных теорий (систем) обобщённая формулировка теоремы Гёделя о неполноте такова [77, с. 39]:

Теорема 4 (Гёдель, о неполноте предикативной теории). Предикативная теория неполна.

Доказательство приведено в [77, с. 38–39].

Данная теорема, как и предыдущая теорема 1, выглядит как заключение вида «A, следовательно, B», $A \Rightarrow B$, где A — это утверждение о предикативности формальной системы, а B — утверждение о неполноте формальной системы (о недоказуемости её полноты).

Как известно, по правилу modus tollens, импликация обратима: из $A \Rightarrow B$ (A, следовательно, B) следует $\neg B \Rightarrow \neg A$ (не-B, следовательно, не-A). Применительно к указанной теореме её обращение выглядит следующим образом.

Теорема 5 (о непредикативности полной теории). Если в формальной системе доказана её полнота, то она непредикативна. □

По аналогии с обращением теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости в формальной системе, см. [26] и §2, рассматриваема в качестве примера непредикативная (самоссылочная) теория множеств с самопринадлежностью.

Теория множеств с самопринадлежностью непротиворечива [77], в доказательстве её непротиворечивости используется то, что выражения этой теории — это описания имеющихся в ней (во множестве всех множеств) множеств, отличных от пустого множества. Тогда, поскольку мощность $|M|$ множества всех множеств M больше, чем счётная (и даже больше, чем мощность недостижимых последователей, см. [77], [63], [90]), то, для описания всех объектов из M, счётного количества слов в конечном алфавите недостаточно. А в теории имеется, конечно же, только конечный алфавит, и количество слов в этом алфавите (см. [90] и §12) не более чем счётно. Таким образом, организовать формальное перечисление в некотором конечном алфавите всех объектов из M невозможно (невозможно построить алгоритм вывода новых утверждений теории,— эта теория алгоритмически неразрешима).

Наличие такого примера и объединение теорем 4 и 5 дают следующее утверждение.

Теорема 6 (о доказательстве полноты только конечной теории). Доказательство полноты формальной системы имеет место только для фрагмента непредикативной теории множеств с конечным числом объектов.

Доказательство очевидно. □

Пример такого фрагмента непредикативной теории — это модельная область для лямбда-исчисления[3] [77, с. 35].

Теорема 7 (о модели лямбда-исчисления). В теории множеств с самопринадлежностью модельными областями для λ-исчисления являются только конечные натуральные числа [77].

Для теорий с бесконечным числом объектов показанный результат (теорема 6) содержательно совпадает с известными теоремами о неразрешимости формальных предикативных теорий (в том числе с теоремой Чёрча-Россера)[4].

Отличие изложенного результата от обращения аналогичной теоремы Гёделя (теоремы о недоказуемости непротиворечивости, [26] и §2) ещё раз показывает невозможность формального вывода теорем теории,— необходимы содержательные, надформальные рассуждения.

§4. Исторические периоды развития доказательств непротиворечивости

В этом параграфе описана периодизация развития доказательств непротиворечивости математических теорий,— описанные периоды являются подпериодами общего 5-го периода развития математики, связанного с появлением понятия формальных (аксиоматических) систем. Периоды развития доказательств непротиворечивости выстраиваются соответственно развитию представлений о причинности (аналогично периодам развития методов оптимизации, теории вероятностей, формальных систем); это следующие периоды: 1) предыстория, непосредственно верные аксиомы, 2) предположение, что если теория имеет модель, то она непротиворечива, 3) ограничение области рассмотрения выводами из аксиом для ликвидации парадоксов, 4) ограничительные теоремы Гёделя и условные доказательства Генцена (непротиворечивость доказуема при некотором, внешнем по отношению к исходной теории предположении), 5) предположительные алгоритмические надстройки над теорией,— для доказательства непротиворечивости только исходной теории, 6) непредикативное доказательство непротиворечивости средствами самой теории (автомодельность), имеющее окончательный вид.

Периодизация всей истории математики, а также периодов развития отдельных математических понятий (совпадающих в целом с пе-

---

[3] О лямбда-исчислении и постановке задачи построения его модели см. [4, с. 99].

[4] Это следующие теоремы о предикативных теориях: «Теорема Чёрча о неразрешимости: функциональное исчисление первого порядка неразрешимо. Теорема Чёрча-Россера о неразрешимости: элементарная арифметика существенно неразрешима» [44, с. 372].

риодами общего развития науки и культуры) была рассмотрена подробно в [79] и [95]; более того, указывалось, что внутренние структуры теории множеств совпадают с уровнями развития абстрактных представлений [77, с. 36 и след.],— подобная самоописательность теорий соответствует критерию истинности и 5-му уровню отражения действительности в сознании человека [79]. В связи с тем, что на данный момент имеется единственная теория, непротиворечивость которой доказана средствами самой теории,— теория множеств с самопринадлежностью [77],— ниже прослежена периодизация развития попыток доказательств непротиворечивости математических теорий.

Таблица 1. Периоды развития доказательств непротиворечивости

№ подуровня	Тип причинности	Содержание периода развития	Исторический период
1	Синкретизм (**5.1**)	Непосредственно наглядные аксиомы	до XIX в.
2	Ближайшая причина (**5.2**)	Погружение теории в модель (одношаговое)	XIXв.
3	Ряд последовательных причин (**5.3**)	Вывод из «обоснованных» аксиом (сужение области рассмотрения только выводами из аксиом)	с нач. XX в.
4	Естественная причинность и произвольная (человеческая), гипотезы (**5.4**)	Логика теории (1-я причинность) и логика метатеории (2-я, «параллельная» 1-й причинности, причинность)	1930-е гг.
5	Массовая причинность (**5.5**)	Алгоритмические построения над исходной теорией	2-я пол. XX в.
6	Самопричинность (**6**)	Непредикативное доказательство непротиворечивости	кон. XX в.

Методологические основания периодизации

Подробно методологические основания периодизации развития математических понятий описаны в [79] и [95]. Периодизация развития доказательств непротиворечивости теорий естественно берёт отсчёт с появления самого понятия *теории*[5], или *формальной (аксиоматической)*

[5] Математическая теория не всегда есть аксиоматическая система, например: математический анализ, построенный по типу исчисления над некоторой совокупностью объектов (функций и т. п.); такова же (построена по типу исчисления) и теория множеств с самопринадлежностью.

системы,— что произошло на 5-м этапе развития математики, в начале XIX века.

Доказательства непротиворечивости как причинно-следственные рассуждения развиваются по стадиям развития понятия причинности, см. табл. 1; о развитии же понятий о причинности см. [79], [95], [69].

Далее схема периодов развития доказательств непротиворечивости из таблицы 1 развёрнута с примерами рассуждений математиков.

Периоды развития попыток доказательств непротиворечивости

Периоды развития попыток доказательства непротиворечивости показаны с немногими характерными примерами (перечисление всех однотипных доказательств заняло бы слишком много места).

5.1.[6] Синкретизм. *Непосредственно наглядные аксиомы*

Начиная с Евклидовой геометрии, математика оперировала непосредственно наглядными аксиомами [13]. Попытки доказать 5-й постулат (о параллельных) [45] не касались оценки совместности (непротиворечивости) системы аксиом в целом; взгляд в целом на теорию как на совокупность аксиом и выводов из них наступает с 5-го периода развития математики, с начала XIX в., см. [79, с. 19].

5.2. Ближайшая причина («погружение» в модель). *Непротиворечивость теории через её модель в другой непротиворечивой теории*

Н. И. Лобачевский (1792–1856) прежде своей основной работы о неевклидовой геометрии «Воображаемая геометрия» (1835) [25] в работе «О началах геометрии» (1823) рассматривал геометрию на предельной сфере, фактически используя аналитическую (математичекую) модель геометрии: «Итак, если в природе существующая Геометрия такова, что две параллельные линии должны быть наклонены к третьей линии под углами, которых сумма <π, то Геометрия, употребительная нами <Лобачевским>, будет геометрия чрезвычайно малых линий в сравнении с теми, при которых сумма углов треугольника может приметно разниться от π» [24, с. 196]. То есть Лобачевский оперировал математической моделью геометрии, чем и показывал допустимость существования (непротиворечивость) неевклидовой геометрии.[7]

---

[6] Цифры соответствуют подпериодам развития попыток доказательств непротиворечивости математики.

[7] Допуская в геометрии неединственность параллельных линий, Я. Больаи не занимался обоснованием непротиворечивости геометрии [7]; К. Ф. Гаусс, хотя и переписывался с Больаи о неевклидовой геометрии [9, с. 105], но по неевклидовой геометрии работ сам не публиковал, признавая преимущество работ Лобачевского. Гаусс писал (письмо Шумахеру от 27 ноября 1846 г.): «Недавно у меня <Гаусса> был повод заново просмотреть брошюру Лобачевского, <[23] переведённую на немецкий

см. след. стр. ⟶

Впоследствии модели для геометрии Лобачевского были описаны Б. Риманом (опубликованы в 1866) и Э. Бельтрами (1864) в виде поверхности отрицательной кривизны [1, с. 262–264]. Позже в 1971 г. Ф. Клейн (указывая на работу А. Кэли 1859 г.) привёл простую модель внутри круга и шара (модель Кэли—Клейна) [1, с. 264]. Наличие модели неевклидовой геометрии в части геометрии Евклида позволяло сравнивать непротиворечивость геометрии Лобачевского с непротиворечивостью геометрии Евклида,— как указывал Ф. Клейн: «Таким образом, геометрия Лобачевского имеет реальный, хотя и искусственный, смысл и столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида» [1, с. 264].

Схожим приёмом для рассуждения о непротиворечивости геометрии пользовался Д. Гильберт (1862–1943). В работе «Основания геометрии» (1899) он строил аналитическую модель геометрии, сводя вопрос о непротиворечивости геометрии к вопросу о непротиворечивости арифметики: «Всякое противоречие в следствиях их аксиом I–V <геометрии> должно, таким образом, иметь место и в арифметике действительных чисел» [11, с. 96]. Отсюда вытекала гильбертовская программа обоснования математики: если доказать непротиворечивость арифметики, то и вся остальная математика (геометрия, анализ, построенный на геометрии, и т. п.) оказывается непротиворечивой[8].

5.3. Ряд последовательных причин. *Вывод допустимой области из ограничивающих её аксиом*

Следующим стандартным ходом математиков конца XIX – начала XX века в обосновании математики было продолжение указанной выше логики рассуждений на арифметику,— а именно построение модели арифметики в теории множеств (при ожидаемой непротиворечивости теории множеств),— им оставалось доказать, что теория множеств не-

---

язык в 1844 г.…>, он <Лобачевский> строит её <геометрию> отличным от моего <Гаусса>, и делает это мастерски, в истинно геометрическом духе» [9, с. 155].

«Именно в связи с работой Лобачевского Гаусс начал учить русский язык» [9, с. 155].

Гаусс обоснованием непротиворечивости геометрии не занимался.

[8] В работе «Математические проблемы» (1900) Гильберт писал: «Доказательства непротиворечивости аксиом геометрии достигается тем, что строится соответствующая числовая область так, что геометрическим аксиомам соответствуют аналогичные отношения между числами этой области; тем самым каждое противоречие, полученное в следствиях из аксиом геометрии, должно быть обнаружено и в арифметике этой числовой области. Таким образом, желательное доказательство непротиворечивости аксиом геометрии сводится к предложению о непротиворечивости аксиом арифметики.

Напротив, непротиворечивость системы аксиом арифметики требует прямого доказательства» [10].

Комментарий к этим словам Гильберта см. на стр. 74 и в [116, с. 11].

противоречива, однако, в связи с неупотреблением самопринадлежащих множеств (чисто предикативными рассуждениями, без самоссылочности) им сделать это не удалось,— возникли так называемые парадоксы теории множеств[9].

Обоснование математики (её непротиворечивости) переместилось в обоснование теории множеств. При этом стремились исключить из вида самоприменимые понятия (и множества) [44, с. 24–25], оставив только конструируемые за конечное число шагов,— сужая область рассмотрения[10]. При этом критерием непротиворечивости при «правильном выводе» из ограничивающих аксиом[11] оставалось отсутствие парадоксов в цепочках выводов[12]; об охвате сразу всей теории для заключения о её непротиворечивости речи пока не шло.

5.4. Два слоя причинности, гипотетичность. *Теория и её арифметизация (метатеория), условные (гипотетичные) доказательства*

На 4-м этапе развития математики появились буквенные обозначения для чисел и переменных,— подобно этому на 4-м подпериоде развития доказательств непротиворечивости, при рассмотрении формальной (аксиоматической) теории, формальному языку теории ставились в соответствие числовые значения его символов, что позволило свести анализ выводов в теории (1-го слоя причинности), к анализу некоторых арифметических закономерностей (на 2-м слое причинности). Используя арифметизацию, «в 1931 г. К. Гедель доказал, что непротиворечивость формальной аксиоматической теории натуральных чисел

---

[9] Эти мнимые парадоксы обойдены в теории множеств с самопринадлежностью, см. [65], [77].

[10] «…парадокс <Рассела> показывает, что если мы <Ершов> не хотим приходить к противоречиям, то необходимо (в частности) отказаться от приятной мысли, что любое осмысленное условие на элементы определяет некоторое множество. К счастью, такого рода парадоксы можно получить лишь с «большими» или «неестественными» множествами, без которых в математике <якобы> можно <по Ершову> вполне обойтись» [14, с. 10].

[11] В том числе из ограничительной аксиомы фундирования, исключавшей из рассмотрения самопринадлежащие множества [82].

[12] Это (третий подпериод 5.3) напоминало средневековую методологию 3-го периода развития науки, когда критерием истины выступали правильные начала и правильные выводы из них. Например, аль-Фараби (870–950), описывая методологию, упоминал только цепь выводов, без эксперимента («Большая книга о музыке»): «Чтобы стать хорошим теоретиком в какой-либо науке, необходимы три условия: во-первых, хорошо знать все её начала [принципы]. Во-вторых, умело делать необходимые выводы из этих начал и данных, относящихся к науке. В-третьих, умело отвечать на ошибочные высказывания в данной науке, анализировать мнения, высказанные другими авторами, чтобы отличить истину от лжи и исправить их ошибки» [42, с. 74].

не может быть обоснована средствами той же теории. Он также доказал, что всякая формальная аксиоматическая теория, включающая арифметику натуральных чисел, неполна» [32, с. 76]. Таким образом, даже при ликвидации парадоксов на предыдущем этапе, вопрос о непротиворечивости оставался неразрешённым.

При этом развитие доказательств непротиворечивости пошло путём привлечения внешних по отношению к рассматриваемым теориям средств для доказательства их непротиворечивости. «Из теоремы Геделя следует, что возможен только один путь доказательства непротиворечивости формальной арифметики — путь, основанный на использовании в таком доказательстве средств, не формализуемых в самой теории, но тем не менее достаточно надежных. В 1936 г. Г. Генцен получил доказательство непротиворечивости формальной арифметики. В этом доказательстве используются средства, не формализуемые в самой теории» [32, с. 77]. Доказательство Генцена требует предположений (внешних по отношению к арифметике) о допустимости безкванторной трансфинитной индукции.

Другие "доказательства" непротиворечивости арифметики также требовали внешних по отношению к ней предположений, например, доказательство И. Н. Хлодовского (1959) использовало «трансфинитную индукцию по числам второго класса» [50, с. 108]; доказательство П. С. Новикова (1947) использовало «аксиому полной индукции» [34, с. 382–383], но непротиворечивость доказана для ограниченной арифметики без этой аксиомы[13].

В теории множеств наличествовал такой же "условно-гипотетический" подход к доказательству непротиворечивости. Известно [20, с. 154–155], что если существует сильно недостижимый кардинал β, то есть такой, что $\forall\alpha < \beta, 2^\alpha < \beta$, то в теории множеств существует внутренняя модель самой теории множеств, что позволяет доказать непротиворечивость теории множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля (ZF) (но для ZF без недостижимых кардиналов), однако существование недостижимых кардиналов не следует из аксиоматики ZF [8], [20], поэтому рассуждения о непротиворечивости в теории множеств без самопринадлежности — это гипотезы, а не доказуемые утверждения.

5.5. Массовая причинность. *Алгоритмические построения над исходной теорией (попытки определения свойств формул теории конечно записываемым алгоритмом)*

Для исключения трансфинитной индукции при доказательстве не-

---

[13] См. также [28, с. 295].

противоречивости арифметики на следующем, 5-м, этапе развития доказательств непротиворечивости стали пользоваться следующей конструкцией. Над формулами теории строился конечно-выразимый алгоритм, который устанавливал свойства этих формул.[14]

В частности, у Д. Нельсона (1947) получалась непротиворечивость интуиционистской арифметики при условии непротиворечивости теории рекурсивных функций, посредством которой устанавливались свойства выразимости формул интуиционистской арифметики (см. [128], [129]). Затем оставалось применить результат Гёделя (1933), что арифметика непротиворечива, если непротиворечива интуиционистская арифметика, но вопрос о непротиворечивости алгоритма, описывающего выразимость формул, оставался открытым,— т. е. "доказательство" оставалось гипотетическим как и более ранние попытки доказательств.

Аналогичным соображениям следовали работы Н. М. Нагорного (1965) [30], [31],— алгоритмом (внешним по отношению к исходной арифметике) над формулами арифметики строились «квазивосполнимые» формулы, и затем устанавливалось, что формула, выражающая противоречие («0=1»), неквазивосполнима; но доказывалась непротиворечивость только исходной арифметики, без надстройки алгоритма квазивосполнимых формул[15], т. е. доказательство несамоприменимо к теории и гипотетично (требует предположения, что алгоритм построения "2-го этажа" квазивосполнимых формул непротиворечив).

6. Непредикативное доказательство средствами самой непредикативной теории

Из переформулировки [26] теоремы Гёделя (теорема 1) следует, что непротиворечивость теории (средствами самой теории) доказуема только для непредикативных теорий (теорий, использующих самоприменимые, самоссылочные конструкции), в отличие от исключения из рассмотрения самоприменимых конструкций, см. п. **5.3** на стр. 15.

Такой теорией является теория множеств с самопринадлежностью [52], [77]. Из непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью следует, в частности, непротиворечивость лямбда-исчисления[16].

---

[14] Непротиворечивость теории следовала из свойств всех формул,— в виде «массовой причинности» множество причин влечёт одно следствие из них.

[15] См. также [5].

[16] Г. Крайзель в работе «Обзор теории доказательств» (1968) указывал, что «концепции теории доказательств относятся к принципам определения функций типа $N^N \to N$ <отображений множества подмножеств множества в само это множество> и принципам определения функций всех конечных типов» [22, с. 13]. Изоморфизм множества подмножеств множества в само множество возможен только в теории множеств с самопринадлежностью, см. доказательство непротиворечивости лямбда-

см. след. стр. ⟶

Схема доказательства непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью следующая. В этой теории множества являются выделяемыми посредством схемы свёртывания из самопринадлежащего множества всех множеств M. Эта теория является непредикативной,— использует самоссылочные определения; так, например, определение простого последователя P(A) к объекту A таково, что последователь объекта A содержит объект A и себя же самого:

$$P(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in A \text{ либо } P(A)\in[x])\},$$

— определяемое находится в правой и левой части выражения (это своего рода уравнение относительно P(A)).

При доказательстве непротиворечивости теории множеств с самопринадлежнстью учитывается, что на неё, как на непредикативную теорию, теоремы Гёделя не распространяются, они действуют только на предикативные теории [54], [77]. Доказательство таково, что в этой теории множества «между пустым множеством $\varnothing$ и множеством всех множеств M» описываются посредством схемы свёртывания [77, с. 14]

$$A=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } (L(x))\},$$

где L(x) — некоторое высказывание теории.

Поскольку в самопринадлежащем множестве M дополнения к нетривиальным объектам вида A невозможно построить, то высказывания теории L(x) об объектах из M, соответствующие множествам, отличным $\varnothing$ и M, не имеют в этой теории отрицаний — теория непротиворечива. При такой интепретации теории множеств она (точнее, всё множество M) является моделью для высказываний о теории, т. е. теория является содержательной моделью для себя самой,— автомодельна (что отличает её от классической теории моделей, см., например [16], [17], [22]). В этом доказательстве непротиворечивости внешних, по отношению к исходной теории, предположений не требуется,— доказательство непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью, выполненное средствами самой этой теории, является окончательным.

Развитие представлений о непротиворечивости математических теорий следовало общей последовательности этапов и подпериодов развития математики,— подпериодов 5-го этапа развития математики (см. табл. 1). Выделенные подпериоды развития представлений о непротиворечивости формальных систем являются предысторией окончательного доказательства непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью.

исчисления ([64], [67], [77]).

Глава 3. Ещё о непредикативности

В этой главе приведены основные результаты, связанные с самоссылочными (непредикативными) свойствами математических теорий.

§5. О предикативности лямбда-исчисления

В этом параграфе на основании теоремы Нагорного об удвоении слов в алфавите показана предикативность лямбда-исчисления, т. е. неформализуемость в лямбда-исчислении непредикативных конструкций. Этот результат совпадает с аналогичным выводом, полученным в теории множеств с самопринадлеженостью.

Лямбда-исчисление является основанием для построения семантики языков программирования, см. [4], [51], [48]. В 60-е гг. XX в. «Скотт описал в его <лямбда-исчисления> терминах семантику языков программирования» [4, с. 6]. С одной стороны, имеется результат о вложении лямбда-исчисления в модальную логику [3] (и далее – в более простые предикативные логики), а также доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления [67]. С другой стороны, интуитивные представления о неформализуемости непредикативных конструкций в лямбда-исчислении, изложенные в монографии [61], подлежат более строгому изложению, что и описано далее. Изложено по [72].

Иерархия логических структур

Гносеологические основания 6-уровневой иерархии математических представлений (понятий), в том числе логических, и их последовательность в истории математики рассмотрены ранее, см. [60]. В работе [61] описана иерархия логических структур от 5-го уровня (формальных систем и лямбда-исчисления), допускающая вложение структур одного уровня (начиная с 5-го) в более низкий уровень. Схема рассуждений такова. Как указано в работе [3], лямбда-исчисление «вкладывается» в модальную логику. Далее легко видеть, что модальная логика вкладываема в некоторую многозначную логику. Многозначная логика вкладывается в декартово произведение двузначных логик. Двузначная логика реализуема на некоторых множествах (несамопринадлежащих), (см., например, диаграммы Венна, рис. 1).

О невозможности непредикативных конструкций в лямбда-исчислении из интуитивных соображений (на примерах результатов теории множеств с самопринадлежностью) уже было сказано в [61], однако имеются и иные рассуждения относительно этого.

Предикативность лямбда-исчисления

Основной принцип лямбда-исчисления заключается в наличии лямбда-абстрактора. «Пусть t ($\equiv$ t(x)) — выражение, содержащее, быть может, переменную x, тогда λx.t(x) — это такая функция f, которая сопоставляет аргументу a значение t(a). Иными словами, имеет место $(\lambda x.t(x))a = t(a)$» [4, с. 18] [17].

С другой стороны, в теории алгоритмов имеется следующий сильный результат [29]: «Для всякого алфавита А может быть указан такой нормальный алгоритм U над А, что невозможен нормальный алгоритм в А, эквивалентный U относительно <этого же алфавита> А.

В качестве такого алгоритма можно, например, взять удваивающий алгоритм над алфавитом А, т .е. такой, что нормальный алгоритм U над А, что U(P)=PP, где P – слово в А».

То есть алгоритм удвоения слова в алфавите А обязательно содержит буквы вне этого алфавита (по крайней мере одну букву).

В лямбда-исчислении такой буквой, находящейся вне удвоения, является символ «λ» лямбда-абстракции (эту лямбда-абстракцию задаёт человек, используя лямбда-исчисление). Соответственно гносеологической схемы отражения действительности в сознании для внешнего по отношению к сознанию отображения непредикативных конструкций необходимо удваивание образа действительности [61], [58]. То есть лямбда-абстракция не действует на саму себя – не является непредикативной,— значит, предикативна. Доказана теорема.

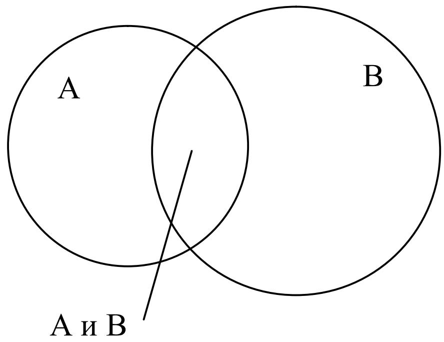


Рис. 1. Пример логики объемов понятий на несамопринадлежащих множествах

Теорема 8 (о предикативности лямбда-исчисления). Лямбда-исчисление — предикативно. □

Это означает, что непредикативные конструкции не реализуемы в лямбда-исчислении, а значит, и в использующих его для выражения семантики языках программирования.

Сопоставление лямбда-исчисления и непредикативности

С одной стороны, лямбда-исчисление допускает модель в непредикативной семантике самопринадлежности [57], [59], [61]; с другой стороны, лямбда-исчисление является предикативным. Таким образом, предикативные конструкции являются частью вообще логических конст-

---

[17] Дедуктивные возможности лямбда-исчисления таковы, что позволяют доказать наличие у любого (корректно записанного) лямбда-выражения неподвижной точки. «Теорема (о неподвижной точке). $\forall F\ \exists X\ (FX = X)$. Доказательство. Пусть $W = \lambda x.F(xx)$ и $x = WW$. Тогда имеем $X = WW \equiv (\lambda x.F(xx))W = F(WW) = FX$» □ [4, с. 36]. В том случае, если речь идет о редукции выражений, рассуждения аналогичны: неподвижная точка понимается как редукция $X \twoheadrightarrow FX$, и в доказательстве имеется редукция $(\lambda x.F(xx))W \twoheadrightarrow F(WW)$ [4].

рукций, среди которых необходимо есть и непредикативные. Этот содержательный результат аналогичен выделению в множестве всех множеств (самопринадлежащем, непредикативном) множества, содержащего все несамопринадлежащие множества [61].

Таким образом, показано, что ввиду предикативности лямбда-исчисления и того, что оно реализует семантику языков программирования, непредикативные конструкции не реализуемы посредством языков программирования [18].

§6. Самопринадлежность: около аксиомы фундирования

В этом параграфе описано содержательное сравнение теории множеств с самопринадлежностью (обладающей непротиворечивостью) с более ранними подходами, использующими ослабление или отрицание аксиомы фундирования; указано, что иные подходы, чем введение самопринадлжности на основании гносеологических и онтологических закономерностей познания, не дали доказательства непротиворечивости теории множеств, рассматривая лишь некоторые модификации известных аксиоматик. Изложено по [82].

В работах [61] и [77] была описана теория множеств с самопринадлежностью, обладающая непротиворечивостью (ввиду непредикативности, самоссылочности теории [55], [65], [124], доказательство непротиворечивости выполнено средствами самой теории); эта теория множеств является неаксиоматизируемой,— построенной по типу исчисления объектов на множестве всех множеств M, с выделением из M объектов схемой свёртывания (выделение объектов из M не следует из аксиом, а представляет собой конструирование аксиом, количество которых является, таким образом, неопределённым ввиду невозможности описать все объекты из M). Ниже кратко описаны основания этой теории и сравнение её с иными теориями множеств, допускающими ослабление аксиомы фундирования (запрещающей самопринадлежность множеств).

Основания теории множеств

Онтологические и гносеологические основания науки подробно описаны в [79], для теории множеств с самопринадлежностью см. [61], [77]. Онтологически имеются три уровня познания [37], [79]: i) непо-

[18] Никакие предикативные алгоритмы (формальные системы, юридические законы сами по себе в виде писанных кодексов и т. п.) не способны передать содержание непредикативных рассуждений (целей ценностей и т. п., составляющих основу человеческой жизни и требующих непосредственного присутствия человека). Этот очевидный факт имеет теперь и математическое выражение. Это своего рода «антропный принцип» информатики.

средственное созерцание (сфера сознания), ii) логические рассуждения (сфера информации, упорядоченной во времени), iii) материально-вещественная практика. Собственно математика относится ко второму онтологическому уровню познания, однако основания математики не могут быть произвольными, – они находятся в созерцательной области сознания. Игнорирование верхнего онтологического уровня (созерцательных оснований, проверяемых непосредственно) приводит к отрыву от реальности, т. е. для теорий необходима онтологическая полнота (см. подробнее [79]).

В теории множеств с самопринадлежностью такими непосредственно созерцаемыми основаниями являются соотношение части и целого, при рассмотрении диалектики единого, многого, и едино-многого,— из этого следует формализация уже не на созерцательном, а на логическом (втором онтологическом) уровне отношений принадлежности в теории множеств, описываемых алгеброй скобок (см. табл. 2).

«Объекты мысли (но не мыслящего и не саму мыслимую мысль) мыслимы как единое или как многое, или как едино-многое. Обозначения мыслимости объектов отображены в табл. 2.

Таблица 2. Диалектика единого и многого

Обозначение	Пояснение
[…]	Брать нечто как единое, взятое — единое
{…}	Брать нечто как многое, взятое — многое
a = {… a}	Брать нечто (a) как едино-многое, взятое — едино-многое (самопринадлежащее)
[[…]] = […]	Брать единое как единое, взятое — единое
[{…}] = […]	Брать многое как единое, взятое — единое
a = {… a}, [a] = a	Брать едино-многое как единое, взятое — едино-многое
{[…]} = […]	Брать единое как многое, взятое — единое
{{…}} = {…}	Брать многое как многое, взятое — многое
a = {… a}, {a} = a	Брать едино-многое как многое, взятое — едино-многое

Таблица 3. Отношение части и целого

Обозначение	Пояснение
$[x] \in \{\dots x\}$	Единое во многом. (Отношение принадлежности)
$x \subseteq \{\dots\}$, каждый y из x — в $\{\dots\}$	Многое во многом. (Отношение включения, подмножество)
$x \in x$, $x=\{\dots x\}$, пример: $x \in \{\dots\}$ следовательно $x \subseteq \{\dots\}$	Едино-многое во многом; едино-многое в едином. (Отношение и принадлежности и включения для самопринадлежащих множеств)

При рассмотрении диалектики единого, многого и едино-многого в плане взаимного содержания, взаимосвязи частей и целого созерцательно таковы, как указано в табл. 3.

При формализации этих интуитивно ясных отношений и выстраиваются операции с самопринадлежащими множествами» [61].

Более подробно свойства множеств с самопринадлежностью и доказательство непротиворечивости теории рассмотрены в [61], [77].

Конечность самоссылочности

Далее указано, что в отличие от несамоссылочных, предикативных теорий, теория множеств с самопринадлежностью ведёт к бесконечной самоссылочности.

Известен следующий вид самореферентных высказываний [41], пусть имеется «семантически замкнутый язык с переменными по формулам: x, y, z, предикатом истинности Тарского Tr(x):

$$Tr(x) \leftrightarrow x, \tag{4}$$

и квантором самореферентности Sx:

$$SxP(x) \leftrightarrow P(SxP(x)). \tag{5}$$

Здесь P(x) называется ядром самореферентного предложения. Если правое вхождение формулы SxP(x) в формуле выше заменить на эквивалентную ей формулу P(SxP(x)), то в результате итерации такой замены получится следующая бесконечная последовательность выражений, напоминающая последовательность Пирса:

$SxP(x) \leftrightarrow P(SxP(x)) \leftrightarrow P(P(SxP(x))) \leftrightarrow P(P(P(SxP(x)))) \leftrightarrow \ldots$.» [41]. (6)

То есть в предикативном выражении самореферентность (самоссылочность) влечёт бесконечные последовательности. Попытки формализовать в таком предикативном языке самопринадлежность множеств приводит к аналогичным бесконечным последовательностям, не имеющим содержательного в плане теории множеств смысла.

Однако при допущении непредикативных (самоссылочных) конструкций самореферентность самопринадлежности имеет конечный вид.

Например [61], пусть A = {a, A} – самопринадлежащее множество, $A \in A$, тогда его запись (сравнимо с (6)) такова: A = {a, A} = (раскрытие в правой части A= {a, A} по определению) = {a, {a, A}} = (раскрытие многих взятых как многое, удаление скобок {}) = {a, a, A} = (удаление подобных обозначений) = {a, A} = A.

Более сложный пример: множество подмножеств множества A таково: Exp(A) = {{a}, {a, A}, {A}} = (раскрытие самопринадлежащего едино-многого объекта A) ={{a}, {a, A}, {a, A}} = (удаление подобных обозначений) = {{a}, {a, A}} = (раскрытие многих, взятых как многое, в одно многое) = {a, a, A} = (удаление подобных обозначений) = {a, A} = = A.

Самопринадлежащее множество имеет конечную самореферентную (самоссылочную) запись его обозначения. Таким образом, при самопринадлежности самореферентность (самоссылочность), соответствующая обозначению самопринадлежащих множеств конечна.

Ещё более сложный пример самоссылочности — это определение последователя к объекту. Простой последователь объекта A содержит объект A и себя самого [53]:

$$P(\{A\})=\{[x]\in M|([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in A \text{ либо } [x]=P(A))\},$$

$$P([A])=\{[x]\in M|([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]=A \text{ либо } [x]=P(A))\}.$$

В этой формуле слева и справа стоит P(A),— самоссылочность задаётся удвоением обозначения одного и того же объекта (это связано с удвоением образа действительности при отражении её в сознании), при этом никакой "дурной" бесконечности не возникает, ведь справа и слева — один и тот же самопринадлежащий объект:

$$P(\{A\})=\{\{A\}, P(\{A\})\}, P([A])=\{[A], P([A])\}.$$

Аксиоматические теории множеств

Далее указано на ограниченность аксиоматического подхода в теории множеств.

В истории математики появление аксиоматических теорий (в смысле формальных логических систем) соответствует 5-му периоду развития (с нач. XIX в.). Программа Гильберта по аксиоматизации математики, высказанная в начале XX в., потерпела крах ввиду теорем Гёделя, говорящих (для предикативных формальных систем) о невозможности доказательства непротиворечивости предикативной теории средствами самой этой теории. (Теория множеств с самопринадлежностью непредикативна и её ограничения теорем Гёделя не касаются, см. [54], [61], [77] и главу 2, стр. 9).

Тем не менее при отрыве от реальности исследование разных типов предикативных аксиоматических систем превратилось в некую самоцель зарубежных исследователей, при этом сплошном теоретизировании, не имеющем созерцательных оснований и не выходящем далеко в практику (онтологически обособленном, чисто логическом рассуждении), выявлялись связи между отдельными аксиоматиками и несколько изменялся состав аксиом, без попыток обоснования непротиворечивости аксиоматик (ввиду явных ограничений теорем Гёделя).

Как указано в [120], [44] периоды развития аксиоматик теории множеств таковы:

1900–1924. Предложены нефундированные (самопринадлежащие) множества (Мириманов и др.), попытка вписать которые в известные к тому времени теории множеств влекла за собой парадоксы (например, парадокс Мириманова).

1925–1949. Для исключения из рассмотрения самопринадлежащих множеств предложена аксиома фундирования, и посредством её построены аксиоматики теории множеств (из которых самая известная аксиоматика Цермело – Френкеля, ZF).

1950–1974. Рассматривались модели теории множеств без аксиомы фундирования.

С 1975 г. были допущены к рассмотрению не полностью фундированные множества (ton-well-founded sets) [120].
(Кроме этой периодизации следует отметить, что с 1993 г. были описаны множества с самопринадлежностью и множество всех множеств, о которых сказано выше и отдельно в [52], [77].)

Но сколько бы ни усложнялись аксиоматики, и сколь бы ни выявлялись новые связи между ними, их предикативность ничего не добавит к обоснованию их непротиворечивости (они так и останутся вне существенных самоссылочных оснований).

Ниже приведён типичный пример таких построений, рис. 2, ([122], [121]).

$$\begin{array}{lllll} CZF & \Rightarrow & IZF & \Rightarrow & ZF \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Updownarrow \\ CZF_{R,E} & \Rightarrow & IZF_R & & (CZF_{R,E} + EM) \end{array}$$

$$ZF \leq_{\neg\neg} IZF$$

$$CZF \sim ID_1 \sim KP << IZF \sim ZF$$

Рис. 2. Диаграмма соотношения модификаций аксиоматики ZF (по [14])

Рассматриваются также и модификации аксиоматики теории множеств Неймана – Бернайса – Гёделя (NBG), см. [126], [127]. Вопросы обоснования введения тех или иных основоположений теории (аксиом) в этих работах не описаны, аксиоматика вводится произвольно, также не рассматриваются вопросы непротиворечивости получаемых теорий, возможности введения понятия множества всех множеств в этих модифицированных аксиоматиках тоже не усматривается.

«Антифундирование»

Ниже указано на ограниченность использования в аксиоматике антифундирования.

После отказа от аксиомы фундирования наблюдались попытки описать не полностью фундированные множества и даже ввести аксиому антифундирования. Аксиома антифундирования описана подробно с её различными вариантами в [120]. При введении этой аксиомы в [120] указывается, что каждому множеству соответствует единственный ориентированный граф, соответствующий отношению принадлежности, и что не полностью фундированные множества предполагаются в нали-

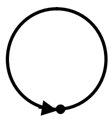


Рис. 3. Множество Ω

чии; причём стрелка (ребро графа) направлена почему-то не в сторону отношения включения, а от большего (содержащего) множества к меньшему (содержащемуся в нём). По [120], множество, содержащееся в самом себе, имеет граф, указанный на рис. 3: Ω={Ω}. Но эта диаграмма развёртывается в [120] как бесконечная последовательность: ●→●→●→…, или в виде записи, подставляющей в правую часть выражения вместо Ω его определение Ω={Ω}: Ω={Ω}={{ Ω}}=…= ={{{{{…}}}}}=… ; это сравнимо с бесконечной последовательностью Пирса (см. стр. 24). Антифундирование (по [120]) заключается не в ликвидации бесконечных вложений (см. стр. 24), а в ограничении при рассмотрении только конечными графами множеств (без рассмотрения их бесконечного развёртывания). То есть используется всё тот же приём, что и при введении аксиомы фундирования. Если что-то неудобно, то не рассматривают это: при введении аксиомы фундирования отказались от рассмотрения самопринадлежащих множеств, при антифундировании отказываются рассматривать развёртывание самопринадлежности в бесконечную цепь.

При дальнейшем рассмотрении антифундирования выдумывание ограничений отказа от самопринадлежности доходило до курьёзов; так, в [125], чтобы не рассматривать предложенное в [120] развёртывание бесконечной последовательности принадлежности, указывается, что выражение $x \,\varepsilon\, y \Leftrightarrow x \in y^*$, где отношение ε — это отношение между индивидуумами, а ∈ – это отношение между индивидуумом и классом, тогда a={a} из [120] (см. выше) заменяется на $\forall x(x \,\varepsilon\, a \Leftrightarrow x \in y)$, и a*={a}, т. е. в [125] говорится, что {a} соответствует не самому собственно a, а его метке (colabel) a*, что означает принадлежность *a* не самому себе, а его метке (colabel) a*[19]. Как видно в [125], при рассмотрении нефундированных множеств предпринимаются те же попытки, что и при введении аксиомы фундирования,— исключения из рассмотрения самопринадлежащих множеств. Аналогичны ограничения в [131], [130], в [123] описаны варианты рассмотрения бесконечных последовательностей при развёртывании графа принадлежности (см. рис. 3 и пояснения к нему); но в этих работах нет и попыток обоснования непротиворечивости теории множеств (основного вопроса).

Как показано выше, даже при рассмотрении антифундирования

[19] Здесь при отказе от фундирования нет тождества между множеством и тем, чему оно принадлежит, множество, по их (Bell John и др.) мнению, принадлежит не себе, а своей метке (colabel), которая не тождественна самому множеству, это сделано для того, чтобы не допустить бесконечного ряда принадлежности $a \in a^*$ но $a^* \neq a$ и $a^* \notin a^*$. Такое растождествление *a* с самим собой и выглядит математическим курьёзом.

указанные работы зарубежных авторов стараются исключить из рассмотрения самопринадлежность множеств, используя различные способы растождествления объекта с самим собой, – якобы он принадлежит не себе самому, а некой «надстройке» над ним, при этом вопросы обоснования непротиворечивости множеств остаются у них без внимания, в отличие от упомянутой теории множеств с самопринадлежностью.

§7. Необходимость непредикативности в основаниях математики

В этом параграфе рассматривается философия оснований математики. Описано в сравнении с непротиворечивой теорией множеств с самопринадлежностью (непредикативной) противоречивое строение чисто предикативной теории множеств. Указано, что выделить из противоречивой предикативной теории непротиворечивую подтеорию невозможно ввиду теорем Гёделя; в итоге непротиворечивость доказуема только в непредикативной системе (теории множеств) с самопринадлежностью; показана необходимость непредикативных систем и теорий. Изложено по [88].

В работах [61], [77] была описана теория множеств с самопринадлежностью, обладающая непротиворечивостью (ввиду непредикативности, самоссылочности теории доказательство непротиворечивости выполнено средствами самой теории [52], [55], [65], [124]). Сравнение с иными теориями множеств, хотя и допускающими ослабление аксиомы фундирования, но не допускающими самопринадлежность множеств, было выполнено в §6 ив [82]. Далее рассмотрены особенности чисто предикативного подхода к теории множеств, как исторически первого в формализации теории множеств.

Основания теории множеств

Онтологические и гносеологические основания науки подробно описаны в [79], для теории множеств с самопринадлежностью см. [61], [77]. Онтологически имеются три уровня познания [37], [79]: i) непосредственное созерцание (сфера сознания), ii) логические рассуждения (сфера информации, упорядоченной во времени), iii) материально-вещественная практика. Собственно математика относится ко второму онтологическому уровню познания, однако основания математики не могут быть произвольными,— они находятся в созерцательной области сознания. Игнорирование верхнего онтологического уровня (непредикативного — созерцательных оснований, проверяемых непосредственно) приводит к отрыву от реальности, т. е. для теорий необходима онтологическая полнота (см. [79]). Подробно основания теории множеств с самопринадлежностью описаны в [61], [77], [82], и здесь они не приводятся.

Попытки предикативного описания множеств

При первоначальном (так называемом "наивном") описании теории множеств [15] (не имеющем полных онтологических оснований) предполагалось, что множества только несамопринадлежащи.

Пусть X — множество, тогда $\forall X\colon X \notin X$, (7)

т. е. множества задаются предикативно (несамоссылочно, без самопринадлежности).

Тогда если попытаться создать множество A, содержащее все несамопринадлежащие множества, получается следующее:

$A=\{X \mid X\notin X\}$, (8)

по (7) $A\notin A$, но по (8) $A\in A$, что противоречит (7). То есть наличие только несамопринадлежащих множеств и схемы свёртывания (выделения, конструирования множеств) приводит к противоречию[20].

Таким образом, предикативная теория множеств (без самопринадлежности) противоречива. Доказана следующая теорема.

Теорема 9 (о противоречивости предикативной теории множеств). Предикативная теория множеств[21] противоречива. □

Отношение принадлежности "$\in$" в рассуждениях вышеприведённой теоремы заменимо на произвольное отношение "α". Тогда пусть P — предикативная теория, т. е.

$\forall y$ из P имеет место $y \neg\alpha\, y$, (9)

где $\neg\alpha$ обозначает отрицание отношения α.

Тогда при выделении объекта схемой свёртывания возникают аналогичные противоречия: $B=\{y \mid y \neg\alpha\, y\}$, (10)

откуда по (9) $B \neg\alpha\, B$, но по (10) $B\, \alpha\, B$,— противоречие, показывающее противоречивость предикативной теории P. Доказана теорема.

Теорема 10 (о противоречивости предикативной теории). Предикативная теория без ограничений противоречива. □

Теорема 10 имеет более общий вид, нежели теорема 9. Поэтому далее рассматривается предикативная теория P.

Если вся предикативная теория P противоречива (теорема 9), то можно ли из неё выделить непротиворечивую подтеорию P_1?

По теореме Гёделя, действующей только на предикативные системы (теории) [77], [54], непротиворечивость этой части P_1 недоказуема

---

[20] Так называемый "парадокс Рассела" — это всего лишь доказательство противоречивости теории множеств без самопринадлежности.

Этот парадокс возникает из-за неопределённости того, допустимы ли самопринадлежащие множества. Если множества только несамопринадлежащи, то, как показано в тексте (теорема 9),— теория противоречива.

Если допустить самопринадлежность, то парадокс разрешён, см. [77].

[21] Без ограничений.

из P_1, а тем более из всей противоречивой теории P. Доказана теорема.

Теорема 11 (о невозможности выделения из противоречивой теории непротиворечивой подтеории). Из противоречивой предикативной теории P невозможно выделить непротиворечивую предикативную подтеорию. □

Следствие из теоремы 11. Из противоречивой предикативной теории множеств невозможно выделить непротиворечивую предикативную подтеорию. □

То есть для доказательства непротиворечивости подтеории P_1 требуется иметь непротиворечивую теорию L, но известна только одна непротиворечивая непредикативная теория множеств с самопринадлежностью [77], следовательно, имеющиеся непротиворечивые предикативные фрагменты теории L непротиворечивы только ввиду непротиворечивости самой непредикативной теории L.

Таким образом, доказательства непротиворечивости предикативных фрагментов теорий — непредикативны,— нет чисто предикативной теории множеств. (Аналогичны рассуждения и для иных предикативных теорий).

Исторические блуждания

Исторические тупиковые блуждания попыток построения теории множеств были связаны с попытками выделить непротиворечивые фрагменты предикативной теории множеств (без самопринадлежности) из противоречивой предикативной теории множеств, посредством аксиоматики [44], что заведомо невозможно по теоремам 9–11.

Периоды развития аксиоматик теории множеств таковы (см. [120], [44]):

1900–1924. Предложены нефундированные (самопринадлежащие) множества (Мириманов Д. и др.), попытка вписать которые в известные к тому времени теории множеств влекла парадоксы (например, парадокс Мириманова).

1925–1949. Для исключения из рассмотрения самопринадлежащих множеств предложена аксиома фундирования, и посредством её построены аксиоматики теории множеств (из которых самая известная аксиоматика Цермело-Френкеля, ZF).

1950–1974. Рассматривались модели теории множеств без аксиомы фундирования.

С 1975 г. были допущены к рассмотрению не полностью фундированные множества (on-well-founded sets) [120].

Но сколько бы ни усложнялись аксиоматики, и сколь бы ни выявлялись новые связи между ними, их предикативность ничего не добавляла к обоснованию их непротиворечивости (они так и остались вне существенных самоссылочных оснований).

Типичный пример таких построений описан в [122], [121]).

Рассматривались также и модификации аксиоматики теории множеств Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG), см. [126], [127]. Вопросы обоснования введения тех или иных основоположений теории (аксиом) в этих работах не описаны, аксиоматика вводится произвольно, также не рассматриваются вопросы непротиворечивости получаемых теорий, возможности введения понятий множества всех множеств в этих модифицированных аксиоматиках тоже не усматривается.

В зарубежной научной школе современные (по состоянию на 2017 г.) попытки модификации аксиоматик антифундированием ничего не изменяют в смысле предикативности и недопущения самопринадлежности множеств, см. подробно §6 и [82].

Необходимость непредикативности

Кроме указанной выше периодизации следует отметить, что с 1993 г. были описаны множества с самопринадлежностью и множество всех множеств, о которых сказано отдельно в [52], [77].

Как было отмечено на стр. 29 и след., для доказательства непротиворечивости теории множеств необходимо допущение самопринадлежности и непредикативности теорий (а иначе по теоремам Гёделя непротиворечивость теории — недоказуема [77]).

Но наличие непредикативности шире, чем то казалось бы на первый взгляд. Для примера ограничились отношением выводимости. В качестве отношения α (см. теорему 10) взято отношение выводимости $|=$. Отношение выводимости $|=$ не может быть чисто предикативным, ибо для аксиом A_i: $\quad A_i \models A_i \qquad (11)$

— они сами формально выводимы из самих себя, выражение (11) — непредикативно и самоссылочно.

Это значит, что непредикативность (в аксиоматике) первична для построения предикативного вывода. Более того, и при предикативном выводе $(A_i,\ A_j) \models B_k$

для теоремы B_k, предикативно выведенной из аксиом A_i, A_j, имеет место непредикативность вывода $B_k \models B_k$.

Таким образом, в логическом выводе непредикативность является первичной, необходимой для построения некоторой теории S.

Следовательно, выделение чисто предикативной части S_1 теории S невозможно (ввиду свойства непредикативной выводимости аксиом (11)), значит, в действительности имеется дело только с логическими системами, допускающими непредикативность. Доказана теорема.

Т е о р е м а 12 (о непредикативности). Логические системы допускают непредикативность (по крайней мере в виде непредикативности выводимости аксиом). □

Таким образом, исторические блуждания в попытках построения чисто предикативных систем (обозначенные на стр. 30) являются тупиковыми.

Показано, с одной стороны, что чисто предикативные теории являются противоречивыми, не допускающими выделения непротиворечивых фрагментов; с другой стороны, имеется единственная известная непротиворечивая теория множеств с самопринадлежностью (непредикативная и самоссылочная); с третьей стороны, чисто предикативных систем нет, ввиду непредикативной выводимости аксиом; поэтому необходимо остаётся рассматривать теории и системы, допускающие непредикативность, без попыток исключить её из рассмотрения.[22]

§8. Об алгоритмической неопределимости вероятностной меры

В этом параграфе описано философско-математическое утверждение об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры. Изложено по [91].

Алгоритмическая неопределимость понятия вероятностной меры — это философско-математическое утверждение, и оно, по сути, просто: алгоритм задаёт строго детерминированный процесс (начальными и граничными условиями), а события бывают и недетерминированными ввиду того, что такое событие свободно определяет человек, обладающий свободой (недетерминированной), и по содержанию события, относящемуся к самому человеку (непредикативности этого определения события),— это определение события неалгоритмизуемо. То есть невозможно построить алгоритм, определяющий формально (в некоторой формальной системе) то, что есть по содержанию вероятностное событие, и определяющий, соответственно, вероятностную меру.

Этот результат более основателен, чем известная теорема Гёделя о неполноте, ибо он касается онтологических уровней: а) сознания, б) абстрактного мышления[23] из трёх уровней: а) сознание, б) абстрактное мышление, в) материально-вещественный уровень.

Таким образом, определение вероятной меры требует присутствия наблюдателя,— самого человека, эту меру определяющего недетерминированно (а алгоритм — это лишь средство наблюдения событий).

---

[22] Первоначальная рукопись этих результатов (август 2011 г.) была найдена в конце 2013 г. в архиве автора.

[23] Теорема Гёделя о неполноте касалась уровней онтологических: б) абстрактное мышление (математические рассуждения) и в) вещественность (представления математических понятий в формальном материальном языке, в некотором алфавите).

Уровень вероятностного мышления — 6-й уровень, уровень алгоритмического мышления — 5-й.

Это связано со свойствами непредикативности (а значит, и неалгоритмизуемости) обозначений [106], а также с описанием шестиуровневой иерархии абстрактных понятий [79], [88].

§9. Об обосновании логического вывода

В этом параграфе описаны онтологические основания логического вывода; отмечено, что вывод непредикативен; указано, что подлинные основания теории (в отличие от аксиом) не могут быть отрицаемы, так как отрицание оснований теории влечёт разрушение смыслового онтологического уровня теории. Изложено по [111].

Онтологические основания науки были упомянуты ранее в [77] и [79] в связи с описанием трёхчастной онтологической структуры действительности: а) сознание, б) время, в) материя; а также трёхступенчатой последовательности постижения истины: а) непосредственное созерцание, б) абстрактно-логические рассуждения, в) материально-вещественная практика [37]. Основания теории множеств (и всей математики) являются надлогическими, это было показано при обосновании допустимости самопринадлежности в [77]. Вообще же логические рассуждения, используемые для упорядочения явлений действительности, получают смысл не из самих себя, не из материально-вещественной сферы действительности, а смысл их (ценностное его содержание) доступен сознанию человека. Таким образом, смысл находится в надлогической области. Далее эти свойства логических рассуждений более конкретизированы.

Непредикативность логического вывода

Источник ценностного содержания смысла логических рассуждений интуитивно представляется единым; с формально математической стороны это выражается доказанной ранее теоремой о свойстве гносеологического отражения действительности [68, с. 18], указывающей на единство высшего (ценностного) уровня отражения действительности для множества субъектов (подробные обоснования этого приведены в [68], [79]).

Таким образом, есть следующая схема: для формально логических рассуждений имеется надлогический смысл, который един над множеством этих суждений. То есть имеется два слоя: формально-логический и находящийся над ним смысловой. Тогда при изображении логического следования одного, а выражения из другого (и истинности обоих) на формально-логическом слое, на слое, находящемся выше,— смысловом — эти выражения имеют общую часть, причастны истине (это при взгляде с формально-логического слоя). При взгляде же с верхнего, смыслового слоя, формально-логические рассуждения лишь развёртывают истину и смысл (надвременные категории) в некоторых, упорядоченных во времени (логическим выводом) цепочках взаимосвязанных формально-логических рассуждений. И если эти формально-логические цепочки корректны (непротиворечивы), то они вмещают смысл с верхнего уровня и тем самым позволяют упорядочить явления материального мира.

Логический вывод при этом непредикативен (самоссылочен) (в смысловом содержании,— имеется общая часть смысла в выводимом и в том, из чего выводится)[24]. Свойства некоторых непредикативных теоретико-множественных конструкций рассматривались ранее в [77], поэтому здесь не приводятся. Для непредикативной теории множеств доказана её непротиворечивость [77, с. 14].

Ограничения предикативного вывода

Логический вывод, основанный на смысловых основаниях, непредикативен. Допустимость такого вывода показана в описании теории множеств с самопринадлежностью и её многообразных приложениях [77].

Если же ограничиться только предикативным логическим выводом (в котором нет общей части в выводимом и в том из чего выводится)[25], то при рассмотрении такого вывода отказываются от надлогического (смыслового уровня), который, как сказано выше, непредикативен (самоссылочен); при этом от математики остаётся только формально-логическая ("бессмысленная" часть), которая, может быть, и описывает материальный мир, но не применима для адекватного описания человека,— описания, включающего в себя и смысловой, сознательный уровень действительности.

При этом (при отсечении верхнего онтологического уровня действительности — ценностно-смыслового) математические теории не имеют опоры в обосновании аксиоматики, так как аксиоматическая система сохраняет свои формальные (не относящиеся к другим уровням действительности кроме её формально-логического уровня) свойства и при отрицании одной (или нескольких) её аксиом[26]. Если аксиоматика описывает материальный мир (например, аксиоматика геометрии), то выбор аксиом (а не их отрицаний) ограничивается совпадением теории с мате-

---

[24] Боле того, непредикативность имеется и в обычных формальных теориях: формально аксиома A выводима их себя самой, $A|=A$,— что непредикативно.

[25] Такой предикативный подход свойственен в основном западной логической школе за немногими исключениями (Г. Фреге и др.).

[26] Пример: аксиома о параллельных, отрицание которой даёт неевклидову геометрию [11, с. 97].

риальной действительностью. Но если предикативная аксиоматическая теория претендует на описание систем, содержащих человека, то здесь она бесполезна и может быть даже разрушительна (ввиду игнорирования ценностно-смысловых оснований).[27]

Особенность непредикативной теории

Особенность непредикативной теории видна на примере теории множеств с самопринадлежностью. Допустимость самопринадлежности обоснована из надлогических соображений. Если в теории множеств отрицать допустимость самопринадлежности, рассматривать только несамопринадлежащие множества и только предикативные определения, то получится теория множеств без самопринадлежности, на которую действуют теоремы Гёделя и непротиворечивость которой недоказуема;— такая теория (с недоказуемой непротиворечивостью) не приемлема для дальнейшего построения математики[28]. Таким образом, отрицание основоположения теории (в отличие от формальной аксиоматики), не приводит к сохранению непротиворечивости теории, т. е. это основоположение является неотрицаемым как по смыслу, так и с формально-логической стороны.

С другой стороны, если в теории множеств отрицать допустимость несамопринадлежности, то получаемый «универсум» множеств ограничится некоторым единственным конечным натуральным числом вида n={1, 2, 3,… , n}[29], что не соответствует необходимости абстракции бесконечности для построения теории меры (более того, неупорядоченные внутри себя отношением принадлежности множества не могут быть «помещены» в этом «универсуме»), что показывает недопустимость от-

---

[27] В [76, с. 11, примеч. 6] была кратко упомянута неполнота онтологических уровней теории игр. Подробнее рассуждения таковы. Теория игр является предикативной теорией, она применима к описанию неживых объектов материального мира (так, например, Л. С. Понтрягин, посредством теории игр решил задачу оптимального преследования для произвольно уклоняющейся цели [38],— решение этой задачи применимо в противоракетной обороне.

С другой стороны, попытки применить теорию игр к описанию систем, содержащих живого человека, обладающего полнотой трёх онтологических уровней, бесполезны.

[28] См. также замечание об онтологическом соответствии теорий в [89, с. 25–26].

[29] Множество **N** всех самопринадлежащих натуральных чисел — несамопринадлежаще, поэтому не вкладывается в этот усечённый чисто самопринадлежащий «универсум». Единственность числа n в этом «универсуме» следует из того, что если у объекта из n–1 (внутренности n, V(n)) имеются два различных последователя $P_1(n-1)$ и $P_2(n-1)$, $P_1(n-1) \neq P_2(n-1)$, то они образуют несамопринадлежащее множество, которое не вкладывается в этот «универсум», таким образом в нём допустима только нить (см. [77, с. 19]) объектов.

рицания и этого основоположения теории множеств.

Таким образом, в теории множеств необходимы как самопринадлежащие, так и несамопринадлежащие множества. То, что отрицание основоположений теории рушит всю теорию[30], отличает содержательный способ построения теорий от формально-аксиоматического.

Основоположения (формально-логического, математического) описания действительности лежат в сфере смысловой, надлогической. Основания теорий, учитывающих эти смысловые основоположения, таковы, что не могут быть отрицаемы (изменяемы) без того, чтобы теория разрушилась (перестала соответствовать трёхуровневой полноте действительности). Таким образом, в методологическом плане, при смыслополагающих основаниях теории, её логическое развёртывание непредикативно (самоссылочно) и непротиворечиво, что и позволяет использовать это непредикативное развёртывание теории для упорядочения явлений окружающего мира.

§10. Непредикативная полнота и предикативная неполнота теорий

В этом параграфе описано понимание непредикативной полноты теории на примере теории множеств с самопринадлежностью, для которой это обусловлено тем, что при существовании множества всех множеств существуют и все высказывания об объектах из него (все высказывания этой теории); с другой стороны, предикативная неполнота — это свойство ограниченности предикативных теорий (пример — теорема Гёделя о неполноте). Изложено по [115].

В [95] было указано на разность понимания полноты теорий, а именно: «в [109] показано, что ограничения теоремы Гёделя о неполноте непреодолимы и для непредикативных теорий в формально-алгоритмическом (предикативном) смысле; однако теория множеств с самопринадлежностью, ввиду наличия множества всех множеств, уже тем самым полна в непредикативном смысле (см. [77])» [95, с. 122]. Два разных понимания полноты теорий описаны ниже подробнее.

Непредикативная полнота теории

Непредикативная полнота теории наблюдаема для полноты теории множеств с самопринадлежностью.

В [77] при описании теории множеств с самопринадлежностью

[30] Отчасти это напоминает антропный принцип в физике,— в теории, описывающей физический мир, физические константы таковы, чтобы описание мира соответствовало действительности, в которой ныне живёт человек; малейшее отклонение от основных физических постоянных от их экспериментально определённых величин, влечёт модель мира, в которой жизнь человека невозможна.

отмечено, что «рассматривается теория множеств с самопринадлежностью, непротиворечивая, <непредикативно> полная, но не аксиоматизируемая» [77, с. 54]. Очевидная (непредикативная) полнота теории множеств с самопринадлежностью заключается в следующем. Поскольку имеется множество всех множеств M (самопринадлежащее и наибольшей мощности), то тем самым задана (неявно и непредикативно) совокупность высказываний о всех (непустых) объектах, принадлежащих множеству всех множеств.

Естественно, что все эти высказывания не являются предикативно, алгоритмически перечислимыми; однако наличие такой совокупности высказываний об объектах из M, поскольку сразу всё M имеется, и есть наличие (непредикативной) полноты теории множеств с самопринадлежностью.

Таким образом, к известной теореме о непротиворечивости добавляется теорема о полноте.

Теорема 13 (о непротиворечивости). Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в M объекты (отличные от $\varnothing$),— непротиворечива [77, с. 14].

Теорема 14 (о непредикативной полноте). Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, соответствующих существующим в M объектам (отличным от $\varnothing$),— непредикативно полна. □

Теорема 14 усиливает результат слабой теоремы о полноте.

Теорема 15 (слабая, о полноте). Доказательство полноты формальной системы имеет место только для фрагмента непредикативной теории множеств с конечным числом объектов [109, с. 29].

Полнота теории множеств с самопринадлежностью наличествует, однако алгоритмически (предикативно) все высказывания теории неперечислимы,— отсюда другое понятие о полноте,— предикативная неполнота теории.

Предикативная неполнота теорий

Предикативная неполнота теорий описана при доказательстве теоремы Гёделя о неполноте.

Теорема 16 (о предикативной неполноте). Предикативная теория не полна [77, с. 39].

Таким образом, необходимо отличать непредикативную полноту теории множеств с самопринадлежностью, связанную с тем, что при существовании множества всех множеств M существуют и все высказывания об объектах из M (теорема 14);— и предикативную неполноту, которая имеет место для предикативных теорий (теорема 16).

Часть 3. Уровни бесконечного и порядковые структуры

В третьей части книги описаны уровни бесконечности и порядковые структуры, предваряющие построение теории меры.

Глава 4. Уровни бесконечного

§11. О счётности последователей типа PN

Ниже описано свойство последователей, следующих за натуральным рядом (первых бесконечных последователей типа PN); показано, что эти последователи и их всевозможные взаимные степени – счётны. Указано на приложение этого свойства к основаниям теории меры. Изложено по [78].

Теория множеств с самопринадлежностью описана ранее в [77], [53]. В работе [53] описывались упорядоченные структуры этой теории. В связи с необходимостью обоснования теории меры далее описано доказательство счётности последователей типа PN(.) и его приложения к основаниям теории меры.

***Последователи типа* PN(.)**

Натуральный ряд N в M (множестве всех множеств) выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \varnothing)$ или $([x] = P^n(\varnothing)$, где $n \in N$ и $P(V(P(x))) = x)$ [31]$\}$.

Свойства натурального ряда

1. Натуральный ряд не единственен.

2. N – несамопринадлежаще, $N \notin N$.

3. Внутренность[32] натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, $V(N) = N$, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам[33].

Имеются две возможности рассмотрения последователей к натуральному ряду N (N – либо как единичное, либо как многое):

1. Простой последователь к N как к единичному объекту [N], P([N]); [N] – единичный объект изоморфен единице $[N] \cong [1]$, P([N]) – двойке, такое рассмотрение выявляет структуру, изоморфную натуральному ряду, но новых структур не выявляет.

---

[31] Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

[32] Определение внутренности см. в работе [77].

[33] Более абстрактно: бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающая и совпадает с самим натуральным рядом.

2. Бесконечный последователь – последователь к множеству всех объектов из N, последователь к натуральному ряду, взятому как многое, {N}:

$PN = \{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in N \text{ либо } x = PN(\varnothing))\}$.

Свойства бесконечного последователя PN:

1) вообще PN не единственен,

2) PN – самопринадлежащ,

3) $V(PN(\varnothing)) = N$.

Так же, как и для счётных последователей, определимы n-е бесконечные последователи типа PN: $PN(PN(\varnothing)) = PN^2(\varnothing)$ и т. д. и бесконечные последователи:

$PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing)=\{[x]\in M|[x]\in\varnothing \text{ или } (x=(PN^{\alpha}(\varnothing)), \alpha\in PN(\varnothing))\}$ и т. д.

***Счётность последователей типа* PN(.)**

Обозначается мощность последователя $PN(\varnothing)$ через ω, тогда $|P(PN(\varnothing))|=\omega+1$, $|PN(PN(\varnothing))|=|PN^2(\varnothing)|=\omega+\omega$, $PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing)|=\omega\cdot\omega$.

Счётность $\omega+1$ очевидна: сначала считаем простой последователь, следующий за $PN(\varnothing)$, затем простые последователи, входящие в $PN(\varnothing)$.

Счётность $\omega+\omega$ также легко видеть: считаются пары последователей $P^n(\varnothing)$ и $P^n(PN(\varnothing))$, таких пар счётное число, ввиду счётной бесконечности пересчёта общее число $\omega+\omega$ – счётно.

Рассмотрим счётность $\omega\cdot\omega$. Счёт возможен различный: а) по строкам, сводя $\omega\cdot\omega$ к сложению $\omega+\omega+\omega+\ldots$ (ω раз), ввиду счётности $\omega+\omega$ эта сумма, равная $\omega\cdot\omega$, счётна; или б) по диагоналям, пересчёт 1, 2, 1_2, 1_3, 2_2, 3, 4, 3_2 и т. д. ввиду счётной бесконечности пересчёта $\omega\cdot\omega$ – счётно.

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 & \ldots & \\ 1_3 & 2_3 & 3_3 & \ldots & & \\ . & & & & & \\ 1_n & 2_n & 3_n & \ldots & & \end{array} \qquad (12)$$

Аналогично показывается счётность $\omega\cdot\omega\cdot\omega$ и т. п. произведений (счётность $\omega\cdot\omega\cdot\omega$ на диаграмме изображается в 3-мерном пространстве, как счётность $\omega\cdot\omega$ в 2-мерном в (12)).

Далее рассматривается ω^{ω}, это эквивалентно счётности в ω-мерной диаграмме вида (12). Пересчёт по диагонали таков. Аналогично пересчёту, указанному выше для (12), пересчитываются диагонали, для пересчёта каждой диагонали требуется ω шагов, для пересчёта первых двух диагоналей $\omega+\omega$ шагов, затем в сумме по всем диагоналям получается $\omega\cdot\omega$ шагов, а это счётное число (см. выше).

Даже если имеются сверх-степени вида $^{\omega}\omega=\omega\wedge\omega\wedge\omega\wedge\ldots$ (ω раз, $\omega\wedge\omega=\omega^{\omega}$), то для них рассуждения аналогичны вышеприведённым (то же для сверх-сверх-степеней и т. д.)[34].

С учётом вышесказанного, в общем виде счётность степеней ω показывается на основании изоморфизма $PN^2(.)\cong PN(.)$, означающего равенство

$$\omega+\omega = \omega. \tag{13}$$

Так, $\omega\cdot\omega$ преобразуется к равенству

$$\omega\cdot\omega = \underbrace{(\omega+\omega+\omega+\ldots+\omega)}_{\omega\text{ раз}}, \tag{14}$$

в котором ω раз по (13) $\omega+\omega$ заменяется на ω, и в итоге получается

$$\omega\cdot\omega = \omega. \tag{15}$$

ω^{ω} преобразуется к равенству

$$\omega^{\omega} = \underbrace{(\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\omega)}_{\omega\text{ раз}}, \tag{16}$$

в котором ω раз по (15) $\omega\cdot\omega$ заменяется на ω, и в итоге получается

$$\omega^{\omega}=\omega. \tag{17}$$

$^{\omega}\omega$ преобразуется к равенству

$$^{\omega}\omega= \underbrace{(\omega\wedge\omega\wedge\omega\wedge\ldots\wedge\omega)}_{\omega\text{ раз}}, \tag{18}$$

в котором ω раз по (17) $\omega\wedge\omega=\omega\cdot\omega$ заменяется на ω, и в итоге получается

$$^{\omega}\omega=\omega. \tag{19}$$

И так далее. Тем самым доказана теорема.

Теорема 17 (о счётности последователей PN). Последователи вида PN(.) и их всевозможные бесконечные степени, строящиеся посредством самих последователей PN(.) и их PN(.) степеней, являются счётными. □

В том случае, если сложение и другие операции в (14), (16), (18) и тому подобные выполняются недостижимое число раз, равное мощности недостижимого последователя $|PO(.)|=\psi$, то итоговые преобразования оказываются такими же, как и в предыдущей теореме. Причём $\omega+\psi = \omega+\psi = \psi >\omega$, т. е. $PN(PO(.)) \cong PO(PN(.))\cong PO(.)$, но

$\sum_{\psi\text{ раз}}\omega = \underbrace{(\omega+\omega+\omega+\ldots+\omega)}_{\psi\text{ раз}} = \omega$, т. е. $\omega\cdot\psi = \omega$[35] и т. п. Таким образом,

---

[34] О сверх-степенях и сверх-сверх-степенях и т. п. см., например, в [12, с. 100].

[35] С другой стороны, $\psi\cdot\omega = \psi$: $\sum_{\omega\text{ раз}}\psi = \underbrace{(\psi+\psi+\psi+\ldots+\psi)}_{\omega\text{ раз}} = \psi$, операции некоммутатив-

см. след. стр. ⟶

доказана следующая теорема.

Теорема 18 (о счётности последователей PN). Последователи вида PN(.) и их всевозможные бесконечные степени (даже недостижимые, типа PO(.)) — счётны. □

Тогда, по доказанной теореме, поскольку следующие за PN последователи — недостижимые PO(.) — несчётны, последователи типа PN(.) остаётся (для простоты наименований) называть *счётными последователями.*

Таким образом, имеются: 1) простые (конечные) последователи P(.), 2) счётные последователи PN(.), 3) недостижимые последователи PO(.). Как указано в [77], этими последователями исчерпывается иерархия последователей.

Приложение к теории меры

При построении теории меры на многомерных упорядоченных объектах требуется, чтобы указанное многомерие допускало изоморфное отображение на одномерие. Например, обычная двумерная мера площади (при определённых одномерных мерах) построима при наличии изоморфизма двумерия в одномерие (на который уже накладываются операции с мерами). Если имеется конечная упорядоченная совокупность K ограниченной мощности $|K|=k$, то при построении двумерной меры указанный выше требуемый изоморфизм конечного по мощности двумерия на конечное одномерие отсутствует: $K\times K \not\cong K$ (это очевидно).

С другой стороны, в счётно-бесконечном случае, так как по (15) $\omega\cdot\omega = \omega$, то при счётной бесконечности объектов имеется изоморфизм двумерия на одномерие, т. е. основания для отображения двумерной меры площади в одномерное её значение — налицо.

Вышесказанным доказана теорема.

Теорема 19 (о необходимости абстракции актуальной бесконечности). Для построения теории меры необходима абстракция актуальной бесконечности. □[6]

Следствие (очевидное). Без абстракции актуальной бесконечности теория меры непостроима. □

В итоге установлено, что последователи типа PN(.) являются *счётными последователями.* Тем самым показано, что имеется иерархия последователей (иерархия уровней бесконечности): 1) простые (конечные) последователи P(.), 2) счётные последователи PN(.), 3) недостижимые последователи PO(.). Мощность множества всех множеств

ны.

[6] В иных книгах о теории меры, от давних [46] до современных [6], не обращалось внимания на необходимость указанного изоморфизма.

больше мощности недостижимых последователей, см. [63], [77, с. 55, теорема 23].

Обосновано, что для построения оснований теории меры необходима абстракция актуальной бесконечности.

§12. О счётности множества подмножеств счётного множества

В этом параграфе описано свойство счётности множества всех подмножеств счётного множества, показано, что всевозможные степени множества подмножеств такого множества — счётны. Указано на однозначное разрешение континуум-гипотезы и на трёхчастную иерархию типов бесконечности: счётная, недостижимая, мощность множества всех множеств. Изложено по [90].

Теория множеств с самопринадлежностью описана ранее в [77]. В [53] описывались упорядоченные структуры этой теории. Счётность десятичных обозначений действительных чисел была доказана в [62], [77], счётность последователей типа PN(.) и их, в том числе недостижимых, степеней показана в §11 и в [78]. Ниже описана счётность множества подмножеств счётного множества.

Случай натурального ряда

Натуральный ряд N в M (множестве всех множеств) выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$N = \{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing)$ или $([x]=P^n(\varnothing)$, где $n\in N$ и $P(V(P(x))) = x)$ [37]$\}$.

Свойства натурального ряда

1. Натуральный ряд — не единственен.

2. N — несамопринадлежащ, $N\notin N$.

3. Внутренность[38] натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, V(N) = N, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам[39].

Объекты натурального ряда самопринадлежащи:

$1=\{1\}$, $1\in 1$,

$2=\{1, 2\}$, $2\in 2$,

$3=\{1, 2, 3\}$, $3\in 3$,

и т. д. $n\in n$.

---

[37] Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

[38] Определение внутренности см. в [77].

[39] Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающа и совпадает с самим натуральным рядом.

Для всех чисел натурального ряда (но не для всего ряда) множество подмножеств совпадает с самим множеством [77]:

$\forall n,\ n \in N$: $Exp(n)=n$.

Множество подмножеств натурального ряда является объединением множеств: а) сам натуральный ряд, взятый как многое, и б) он же, взятый как единое:

$Exp(N) = \{\{N\}, [N]\} = \{1, 2, 3,\ldots [N]\}$,

$Exp(N) \notin Exp(N)$.

Мощность множества подмножеств натурального ряда совпадает с мощностью натурального ряда, $|N|=\omega$, $|Exp(N)|=\omega+1$, но имеется изомофизм (не структурный) между N и Exp(N) (см. [78, теорема 1]), т. е. $\omega=\omega+1$, значит, мощности этих множеств совпадают $|N|=|Exp(N)|=\omega$.

Таким образом, мощность множества подмножеств натурального ряда (счётного множества) — счётна.

Теорема 20 (о счётности подмножеств натурального ряда). Мощность множества подмножества натурального ряда — счётна, $|N|=|Exp(N)|=\omega$. □

Случай несамопринадлежащих множеств

Другой случай — счётные множества, не содержащие самопринадлежащих подмножеств, мощности больших двух (единичный объект — самопринадлежащ), т. е. состоящие только из единичных объектов. (Пример такого множества — это множество десятичных обозначений действительных чисел на отрезке [0, 1],— счётное, см. [62]).

Пусть $|D|=\omega$, $\forall d,\ d \in D$: $|d|=1$. Далее, даже если берётся подмножество F из D, $\{F\} \subseteq D$, то F принадлежит множеству подмножеств множества D как единичный объект, $[F] \in Exp(D)$, т. к. $F \notin F$, то даже при $|\{F\}|>1$, $|[F]|=1$. Если же $|\{F\}|=1$, то $|[F]|=1$. (Об алгебре скобок, брать как единое [.], брать как многое {.}, см подробнее [77]).

Схема рассмотрения множества подмножеств аналогична схеме доказательства счётности десятичных обозначений действительных чисел [62].

С одной стороны (см. рис. 4, знак "/" обозначает исключение объекта из множества), берутся подмножества из D, состоящие из всех объектов из D (таких подмножеств — одно), затем подмножества, в каждом из которых исключён один объект из D (таких подмножеств — ω, счётное число),— это первый слой подмножеств, их ω штук.

Затем при исключённом одном объекте имеется ω вариантов исключения второго объекта из D и подмножеств второго слоя $\omega\cdot\omega$ штук, но $\omega\cdot\omega=\omega$, поэтому их ω штук во втором слое.

Для третьего слоя рассуждения аналогичны,— на третьем слое ω подмножеств. Итого ω слоёв с ω множествами, всего ω·ω, но (см. [78]) ω·ω=ω, значит ω штук,— счётное число.

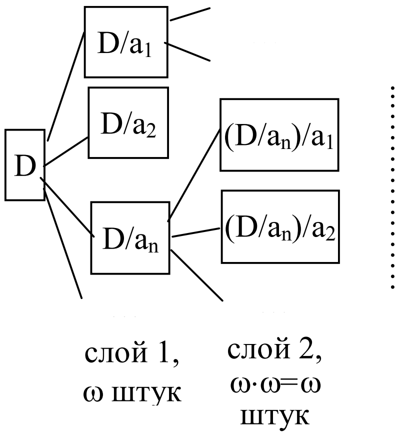


Рис. 4. Слои подмножеств при "уменьшении" подмножеств

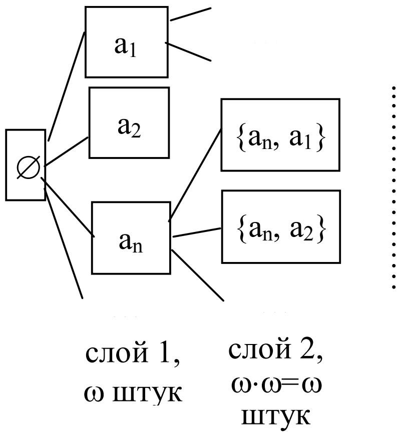


Рис. 5. Слои подмножеств при "увеличении" подмножеств

С другой стороны (рис. 5), берутся подмножества из D, состоящие из одного объекта из D (таких подмножеств — ω),— это первый слой; затем подмножества, в каждом из которых два объекта из D (таких подмножеств — ω·ω=ω, счётное число),— это второй слой подмножеств, их ω штук.

Затем при включенных в подмножество двух объектах имеется ω вариантов включения третьего объекта из D, и подмножеств третьего слоя ω·ω штук, но ω·ω=ω, поэтому их ω штук в третьем слое.

Для четвёртого слоя рассуждения аналогичны,— на четвёртом слое ω подмножеств. Итого ω слоёв с ω множествами, всего ω·ω=ω штук,— счётное число.

В итоге при уменьшении подмножеств — подмножеств ω штук, при увеличении же — их тоже ω, в сумме ω+ω=ω штук,— счётное число. Доказана теорема.

Теорема 21 (о счётности множества всех подмножеств счётного множества). Мощность множества подмножеств счётного множества, без неединичных самопринадлежащих подмножеств — счётна; пусть $|D|=\omega$, $\forall d$, $d\in D$: $|d|=1$, тогда $|D|=|Exp(D)|=\omega$. □

Естественно, что, по теореме 21, то же выполняется и для дальнейших множеств подмножеств исходного множества:

$|D|=|Exp(D)|=|Exp^2(D)|=\omega$, и т. д.

§13. Изоморфизм недостижимых последователей типа PO

В этом параграфе описано свойство изоморфизма недостижимых последователей (типа PO(.)) – изоморфизм отображения точек n-мерного интервала (прямоугольника) на прямую – свойство, лежащее в основании построения теории меры. Изложено по [81].

Теория множеств с самопринадлежностью описана ранее в [77] и [53]. Теорема о необходимости абстракции актуальной бесконечности для построения теории меры была доказана ранее, см. §11 и [78], там же были описаны свойства изоморфизма счёта бесконечных последователей (типа PN): $|PN(\varnothing)|=\omega$, $\omega+\omega=\omega$ и др. Эти утверждения из [78] означали, что счётный базис точек сторон n-мерного интервала (прямоугольника) в его произведении отображается на прямую[7]; однако упорядоченная последовательность точек на прямой (см. [77], [53]) не исчерпывается только счётным базисом — имеется всюду плотное множество (между любыми точками на прямой имеется ещё точка — в качестве точек принимаются недостижимые последователи типа PO); свойство их таково, что множество точек (объектов) между PO(.) и PO(PO(.)) изоморфно PO(.), причём $|PO(.)| = \psi$ (см. [63], [77]), т. е.

$$\psi + \psi = \psi. \tag{20}$$

Из этого свойства следует, что $\psi \cdot \omega$ преобразуется к равенству

$$\psi \cdot \psi = \underbrace{(\psi + \psi + \psi + \ldots + \psi)}_{\psi\ \text{раз}}\ , \tag{21}$$

в котором ψ раз по (20) $\psi + \psi$ заменяется на ψ , и в итоге получается

$$\psi \cdot \psi = \psi. \tag{22}$$

ψ^{ψ} преобразуется к равенству

$$\psi^{\psi} = \underbrace{(\psi\cdot\psi\cdot\psi\cdot\ldots\cdot\psi)}_{\psi\ \text{раз}}\ , \tag{23}$$

в котором ψ раз по (22) $\psi\cdot\psi$ заменяется на ψ, и в итоге получается

$$\psi^{\psi} = \psi\cdot\psi = \psi\,. \tag{24}$$

${}^{\psi}\psi$ (сверхстепень[41]) преобразуется к равенству

$${}^{\psi}\psi = \underbrace{(\psi\hat{}\psi\hat{}\psi\hat{}\ldots\hat{}\psi)}_{\psi\ \text{раз}}\ , \tag{25}$$

в котором ψ раз по (24) $\psi\hat{}\psi=\psi\cdot\psi$ заменяется на ψ, и в итоге получается

$${}^{\psi}\psi = \psi. \tag{26}$$

И так далее. Тем самым доказана теорема.

Теорема 22 (о недостижимых последователях PO). Последователи вида PO(.) и их всевозможные бесконечные степени, строящиеся посредством самих последователей PO(.) и их PO(.) степеней, являются изоморфными. □

Более того, с учётом определения недостижимых последователей PO(.) в [77, с. 52] имеет место структурный изоморфизм

---

[40] См. теорему 19.

[41] О сверхстепенях см. [12].

Теорема 23 (о структурном изоморфизме недостижимых последователей РО). Последователи вида РО(.) и их всевозможные бесконечные степени, строящиеся посредством самих последователей РО(.) и их РО(.) степеней, являются структурно изоморфными между собой. □

Построение теории меры для многомерных объектов рассматривать проще на примере 2-мерного случая.

Площадь прямоугольника является произведением его сторон S=a·b, его площадь отображаема на прямую; для обоснования наличия такого отображения (изоморфизма 2-мерия на 1-мерие) требуется, чтобы количество точек на стороне a, умноженное на количество точек на стороне b, отображалось бы изоморфно на прямую.

Такое отображение задаётся следующим образом:

$$|PO(.)| \cdot |PO(.)| \to |PO(.)|, \qquad (27)$$

в другом обозначении

$$\psi \cdot \psi \to \psi, \qquad (27')$$

по (22) $\psi \cdot \psi = \psi$, таким образом (27') – изоморфизм.

Отображение множества точек всего прямоугольника (2-мерного интервала) на прямую (отрезок) строится с соблюдением его изоморфности в теории множеств с самопринадлежностью.

Наличие такого отображения является основанием для построения количественной теории меры для многомерных объектов.[42]

§14. О недостижимой мощности множества подмножеств множества недостижимой мощности

В данном параграфе сказано о недостижимой мощности множества подмножеств множества недостижимой мощности, состоящего из единичных объектов. Схема доказательства следующей теоремы аналогична рассуждениям, приведённым в §12.

Теорема 24 (о недостижимой мощности множества подмножеств множества недостижимой мощности, состоящего из единичных объектов). Мощность множества подмножеств счётного множества, без неединичных самопринадлежащих подмножеств — счётна; пусть $|D|= \psi$, $\forall d, d \in D$: $|d|=1$, тогда $|D|=|Exp(D)|= \psi$. □

Естественно, что, по теореме 24, то же выполняется и для дальнейших множеств подмножеств исходного множества:

$|D|=|Exp(D)|=|Exp^2(D)|= \psi$, и т. д.

---

[42] Имевшиеся ранее теории меры, у авторов книг о теории меры, от давних [46] до современных [6], не обращали внимания на необходимость указанного изоморфизма.

§15. Иерархия уровней бесконечности

В итоге рассмотрения бесконечных объектов смысл полученного результата таков: множество десятичных обозначений действительных чисел — счётно, и множество его подмножеств тоже счётно (ω),— в отличие от мощности множества точек прямой, равной мощности недостижимого последователя ψ; т. е. никакими комбинациями счётных множеств (даже операцией взятия множества подмножеств) не построить множество, изоморфное множеству точек на прямой (континуальному, недостижимому множеству); это есть однозначное решение так называемой 1-й проблемы Гильберта (континуум-гипотезы, сформулированной Кантором в 1877 г. [15] [43]): из теоремы 21 следует, что никаких промежуточных мощностей между счётной мощностью ω и недостижимой мощностью ψ — нет.

Таким образом, имеется следующая иерархия мощностей множеств:

а) пустое множество $\varnothing$ (ничего нет),

б) конечные множества,

в) счётные множества, мощность ω,

г) недостижимые множества, мощность ψ,

д) множество всех множеств (наибольшая мощность).

При этом имеются три уровня бесконечности: в), г), д), которые независимы один от другого,— из счётной бесконечности не получается недостижимая, из достижимой не строится наибольшая мощность множества всех множеств.

[43] Ранее было доказано лишь то, что в теории множеств Цермело-Френкеля континуум-проблема недоказуема [20].

Глава 5. Порядковые структуры

§16. О счётномерных ориентированных пространствах

В этом параграфе описано ограничение для пространств с ориентированными друг относительно друга осями (ориентированными пространствами),— допустимость только конечного числа измерений в них. Изложено по [93].

Рассматриваются пространства с ориентированными осями, описание которых впервые опубликовано в [53], см. тж. [77].

При построении ориентации k осей, при ориентированных k–1 осях> концы осей, бывшие в k–1 осях соединены каждая одной линией с k–ой осью, степень вершины графа — k, см. рис. 6.

Вершины k–ой оси соединены с k–1 осями в началах осей, и с k–1 осями в концах осей, таким образом степень вершины «начала координат» — k, и вершины k–ой оси — k; построен граф степени k; и т. д. для сколь угодно большого счётного (конечного) числа осей.

Так, по структуризации (обозначению осей) n–мерное пространство представляет собой (n + 1)-раскрашиваемую регулярную (изотропную) структуру («элемент» которой изоморфен графу K_n (обозначение по [47])).

Отсюда доказуема теорема: более чем счётно (конечно) –мерных пространств (в виде упорядоченных числовых структур) выделить в M — невозможно.

Теорема 25 (о не более чем счётно-мерных пространствах). Более чем счётно-конечно-мерных числовых пространств (в виде совокупности построений упорядоченных числовых структур) в теории множеств с самопринадлежностью выделить невозможно.

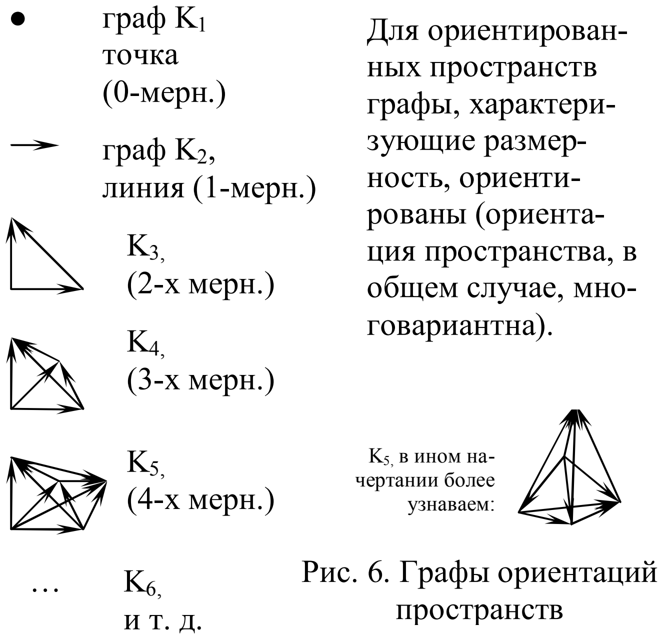
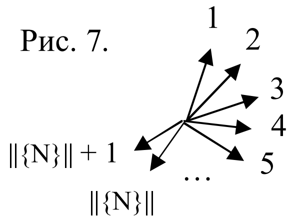


Рис. 6. Графы ориентаций пространств

Доказательство.

Для бесконечномерного ||{N}||–мерного числового пространства неопределима структура ориентировки осей. (Пространство получается неизотропным по структуре, оси с номерами ||{N}||, ||{N}|| + 1,— качественно иные, чем оси со счётными номерами и изменить порядок счёта осей при построении ориентирую-

Рис. 7.



щей структуры невозможно, см. рис. 7).

Пока число осей счётное-конечное, пересчитывать их можно в произвольном порядке. Попытка построить бесконечномерную структуру влечёт невозможность построения ориентировки, т. к. при построении ориентировки требуется последовательно соединить вершины осей и в бесконечно мерном случае (абстракции бесконечности 1-го уровня) невозможно соединить наибольшую (по счёту) конечную по номеру ось с бесконечной, т. к. наибольшей — нет. □

Раскраска подразумевает счётность: каждый цвет — добавление единицы, добавлением единиц превысить счётную бесконечность ||{N}|| — невозможно (по построению).

Если пространство неориентировано, то его самоподобная структура — неопределённа; в случае бесконечного числа осей получается дерево с ветвлением бесконечной степени: в каждой вершине дерева бесконечное число ответвлений[44].

Свойство ориентаций: для ориентации n–мерного пространства дополнительной (ориентирующей) структурой является (n – 1)-мерное пространство (в случае канонической ориентации).

Теорема 26 (о невозможности циклической ориентации). Для ориентаций n–мерных пространств не допускается циклическая ориентирующая структура.

Доказательство — очевидно и следует из теоремы о стягивании циклов, см. [77, с. 42, теорема 14]. □

§17. Структурный изоморфизм цепи n-деревьев и теория меры

В этом параграфе описано доказательство теоремы о изоморфизме n-деревьев, и теорема о локальном структурном изоморфизме узлов цепи n-деревьев; этими теоремами указывается на необходимость введения понятия эталона меры и шкалы (направления) меры, изложено по [108].

В [62], [77, с. 54] рассмотрена теорема о счётности n-дерева (n-ичных обозначений чисел). Пересчёт ведётся по слоям, см. рис. 8.

Теорема 27. Число n-ичных обозначений чисел на прямой счётно (n — конечно) [77, с. 54]. □

Нить множеств [77, с. 19] представляет собой множество следующего вида, см. рис. 9а. Объединение узлов счётной нити (продолжающейся и «вверх» и «вниз» счётно-бесконечно) с n-деревом даёт *счётную*

---

[44] (Ср. с картиной бифуркаций (на плоскости)).

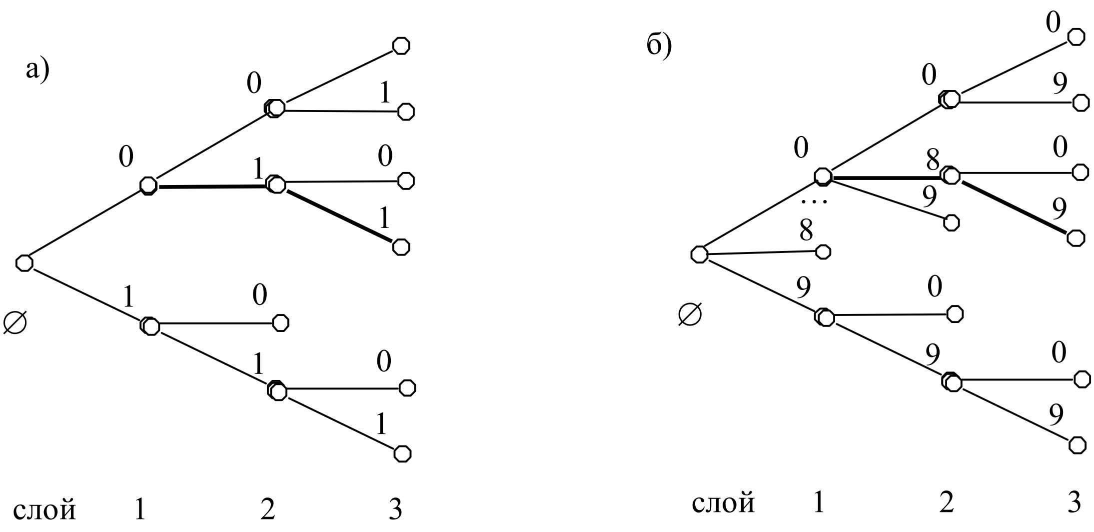


Рис. 8. Фрагменты 2-дерева (а) и 10-дерева (б)

цепь n-деревьев, см. рис. 9б — цепь 10-деревьев. Такой счётной цепи 10-деревьев соответствует бесконечное множество десятичных обозначений чисел на всей длине прямой. Очевидно, что это множество — счётно (пересчёт ведётся также по слоям с учётом того, что $\omega + \omega = \omega$ и $\omega \cdot \omega = \omega$, см. [78] и §11).

Узлы этой цепи обозначаются как (m–1), (m), (m+1)… и т. д. Для всякого узла (m+1) имеется изоморфизм его на узел (m); $(m)\in(m+1)$, очевидно для любых a, b, принадлежащих узлу (m+1), но отличающихся от самого узла (m+1), имеются в m их образы: f(a), f(b)ь — такие, что сохраняется отношение принадлежности для образов:

$\exists f,\ f\colon (m+1)\rightarrow(m),\ \forall a, b \in (m+1),\ a, b \neq (m+1)\colon (a\in b)\Leftrightarrow(f(a)\in f(b))$, где $f(a), f(b) \in (m)$.

Отображение f — это, во-первых, изоморфизм, а во-вторых, структурный изоморфизм, по определению структурного изоморфизма [77, с. 22], сохраняющего отношение принадлежности (структуру множеств). Доказаны теоремы в общем случае (не только 10-ичных, но и n-ичных обозначений чисел) следующие.

Теорема 28 (об изоморфизме узлов цепи). Узлы цепи n-деревьев изоморфны между собой (n — конечно). □

Теорема 29 (о структурном изоморфизме узлов цепи). Узлы цепи n-деревьев структурно изоморфны между собой (n — конечно). □

При этом структурный изоморфизм действенен только для узлов цепи, — узел (число) 1 структурно изоморфен узлу (числу) 2: $1\cong^{\in}2$, но 1 изоморфно 1,5, но не структурно: $1\cong 1{,}5$, но $1\cong^{\notin}1{,}5$.

Известна также следующая теорема:

Теорема 30. Количество точек на прямой — несчётно [77, с. 53, теорема 20]. □

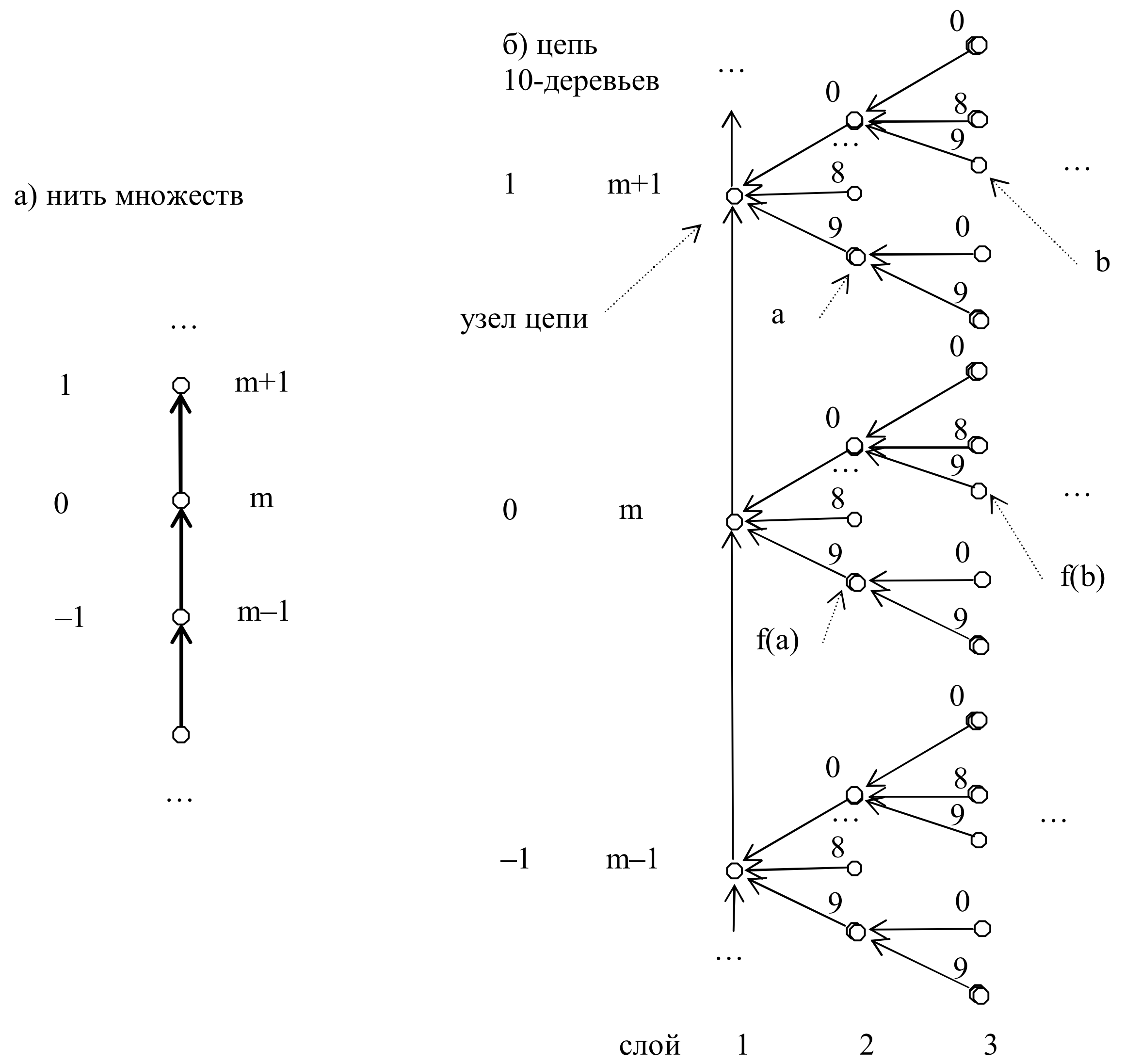


Рис. 9. Нить множеств (а) и цепь 10-деревьев (б)

Следствие из этой теоремы таково (см. [77, с. 53]): любые две точки на прямой (множества, соответствующие нити последователей PO(.)) структурно изоморфны друг другу ([77, с. 23–24]).

С другой стороны, если брать цепь 10-деревьев, содержащую следующую по дробности нить (с узлами через 0,1: …, –0,1, 0, 0,1 …), то это приблизит к накрытию структурного изоморфизма точек прямой структурным изоморфизмом цепи 10-деревьев. И так далее (уменьшая шаг): с узлами шагом 0,01, 0,001 и т. д. счётно-бесконечно,— тогда в пределе структурный изоморфизм точек на прямой покрывается структурным изоморфизмом цепи 10-деревьев (десятичных обозначений чисел на прямой), при этом структурный изоморфизм цепи 10-деревьев действенен только в узлах цепи, а структурный изоморфизм точек на прямой — для любых точек прямой. В осмысленном виде бесконеч-

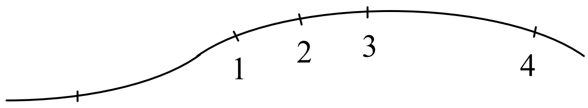


Рис. 10. Цепь 10-деревьев, наложенная на порядок «прямой»
без эталона меры и шкалы

ность уменьшения шага узлов цепи 10-деревьев остаётся полагать потенциальной, тогда эта последовательность (1, 0,1, 0,01, 0,001…) — конечна (бесконечность здесь потенциальная), и для любого ε>0 имеется такой шаг цепи 10-деревьев, что в узлах её выполнятся структурный изоморфизм. Это означает, что для любого ε>0 достижимо покрытие структурного изоморфизма точек на прямой (несчётного множества), структурным изоморфизмом цепи 10-деревьев (счётного множества, с шагом между узлами h<ε). То есть доказана теорема.

Теорема 31 (о покрытии структурного изоморфизма точек на прямой). Структурный изоморфизм точек на прямой (несчётного множества) покрывается с точностью ε>0 структурным изоморфизмом цепи 10-деревьев (счётного множества, с шагом между узлами h<ε). □

Следствие: В общем случае и для n-деревьев (n — конечно). □

То, что структурный изоморфизм имеется только в узлах цепи n-деревьев (n — конечно), косвенно указывает на необходимость использования эталона меры ("единичного отрезка"), соответствующего мере между узлами цепи, при приложении чисел (их n-ичных обозначений) к обозначению измеряемых величин; т. е. произвол и неопределённость вида (рис. 10) подлежит устранению строгим определением процесса измерения в теории меры.

Таким образом, свойства структурного изоморфизма цепи n-деревьев косвенно указывают на необходимость строгого определения понятий теории меры: эталона меры (предполагающего его потенциально-бесконечную делимость) и шкалы меры, описание которых подлежит отдельному изложению.

Часть 4. Теория меры

В четвёртой части описаны основания теории меры[45] и её связь с классическим математическим анализом.

Глава 6. Основания теории меры

§18. Теоремы об отделимости (сепарабельности)

При рассмотрении 10-деревьев (см. рис. 8, §17) легко видеть следующее: если на каком-либо конечном слое k (k>0) имеются две соседние вершины (две соседние по этим вершинам ветви), то на следующем слое (k+1) между этими двумя ветвями имеется промежуточная ветвь. Более того, это имеет место и для n-деревьев (n≥2, n — конечно), и для цепи n-деревьев (рис. 9б); таким образом доказана теорема:

Теорема 32 (о конечной отделимости). Между любыми двумя ветвями дерева (цепи) на конечном слое, на следующем слое имеется промежуточная ветвь. □

При выполнении теоремы 32 и движении по всем слоям «вверх» в сторону увеличения числа слоёв теорема 32 выполняется на любом слое и для каждого слоя (количество слоёв, ω,— счётно), тем самым доказана теорема.

Теорема 33 (о счётной отделимости). Для любой ветви n-дерева (цепи n-деревьев) имеется промежуточная ветвь. □

С другой стороны, для любой ветви цепи n-деревьев имеются ветви а) более «высокие» (содержащие бóльшее десятичное выражение,

---

[45] В первом приближении основания теории меры были намечены ещё в [74]:

«Свойства отношения порядка, построенного посредством теории множеств с самопринадлежностью, и свойства десятичных обозначений, связанных с этим порядком, изложены в [77] (решена 1-я проблема Гильберта, см. в [77] теоремы 20–23). Для оперирования десятичными обозначениями, построенными на порядковом множестве, в плане их соответствия объектам внешнего мира, необходимо отношение меры.

При описании отношения меры имеется образец меры (принимаемый за единичный), которому соответствует ранее описанное множество десятичных (в общем случае n-ичных) обозначений. Образец меры не содержится в самом отношении порядка и во множестве десятичных обозначений чисел, построенных на этом порядке. Таким образом, этот образец меры внешний по отношению к указанному порядку и обозначениям чисел.

Поскольку самопринадлежащие конструкции относятся к онтологической области информации (упорядоченного времени), то такое описание теории меры соответствует наличию внутреннего времени субъекта и внешнего по отношению к субъекту времени.

При приложении теории меры к экономико-математическому моделированию образцом меры является усреднённое общественно необходимое время отдельного субъекта (трудозатраты, см. [68]).»

чем соответствующее этой ветви) и б) менее «высокие» (содержащие меньшее десятичное выражение, чем соответствующее этой ветви)[46],— таким образом, выбранная ветвь является пределом для упорядоченной последовательности убывающих более «высоких» или возрастающих более «низких» ветвей. Это очевидное утверждение соответствует аксиоме Дедекинда, а теорема 33 заменяет собой известную аксиому отделимости (сепарабельности).[47]

Таким образом, указанные свойства счётных цепей n-деревьев, следующие из оснований теории множеств, доказательно заменяют известные исходные положения теории пространств ("континуума"); причём свойство отделимости и наличие сечения выполняются на счётных структурах.[48]

После свойств отделимости обычно указываются свойства метризуемости пространств.

§19. Порядковая числовая структура одномерия

Мера над теорией множеств строится следующим образом (в простейшем одномерном случае). Имеется нить недостижимых (самопринадлежащих) последователей PO(.), обладающая тем свойством, что любые два объекта этой нити структурно изомορфны между собой (теорема 23).

Ряды внутренностей этих последователей типа PO(.) не обрываются, схематично, см. тж. [77, с. 23]:

$$\ldots\Leftarrow PO(.)\Rightarrow\ldots\Leftarrow PO^2(.)\Rightarrow\ldots\Leftarrow PO^3(.)\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Leftarrow PO(.)\Rightarrow\ldots\Leftarrow V^{PO^2(.)}(PO\,(.))\Rightarrow\ldots\Leftarrow V^{PO(.)}(PO\,(.))\Rightarrow\ldots\Leftarrow PO^2(.)\Rightarrow\ldots, \quad (28)$$

где объекты упорядочены отношением принадлежности слева направо, широкая стрелка вправо $\Rightarrow$ — это необрывающийся счёт (бесконечный

---

[46] Например, имеется ветвь, соответствующая десятичному выражению 0,4567(7), выше её лежит ветвь 0,4568(8), ниже — 0,4566(6).

[47] Так, А. Я. Хинчин о континууме писал:

«Аксиома I. Континуум есть (линейно) упорядоченное множество, не содержащее ни первого, ни последнего элемента.

Аксиома II. Между двумя элементами континуума всегда существует по меньшей мере ещё один элемент» [49, с. 181].

Аксиома Дедекинда. Всякое сечение континуума имеет рубеж <сечение, предел>, притом единственный в силу аксиомы I» [49, с. 182].

[48] Более того, по теореме 33 для указанных структур теории множеств с самопринадлежностью (цепи n-деревьев) невозможно выписать все ветви в линейный список, т. к. между любыми двумя ветвями можно вписать третью,— таким образом, диагональный метод Кантора не применим к этим структурам.

(Об этом диагональном методе см. письмо Г. Кантора к Р. Дедекинду от 7 декабря 1873 года [15, с. 328–330].)

ряд) последователей за последователем типа РО(.), широкая стрелка влево ⇐ — это счёт (бесконечный, не обрывающийся ряд) внутренностей последователя типа РО(.).

На нить недостижимых последователей РО(.) (28), представляющую из себя структуру геометрической линии, накладывается цепь 10-деревьев (n-деревьев в общем случае), см. рис. 9, 10. Некоторые объекты нити недостижимых последователей (которых несчётное число и которые, следовательно, невозможно все обозначить ввиду наличия только счётного числа обозначений при конечном алфавите и счётной длине слов,— десятичных обозначений чисел) обозначаются в виде ветвей соответствующих 10-дереьев цепи 10-деревьев, т. е. на несчётный структурно самоподобный [77, с. 53] порядок прямой накладывается счётное покрытие десятичных чисел (с бесконечным числом знаков за запятой), также обладающее свойством структурного изоморфизма узлов цепи, см. теоремы 29, 31 на стр. 50–52 о счётном покрытии структурного изоморфизма точек на прямой.

Для этого счётного покрытия прямой обозначениями десятичных чисел выполняются свойства отделимости, см. теоремы в §18. Таким образом, для завершения построения меры необходимо наличие эталона меры.

§20. Эталон меры и его необходимые свойства

Описанная в §19 порядковая структура, будь то одномерная или многомерная, с учётом построения многомерных пространств (см. §16 и [77, с. 23–27]),— есть лишь абстракция ii-го онтологического уровня, неприложимая к объектам внешнего материального мира (к i-му онтологическому уровню). Для приложимости порядковых структур к объектам материального мира необходимо наличие эталона меры, который является уже не логическим, чисто абстрактным (как отношение следования друг за другом, наблюдаемое и во времени, над материальным уровнем), а вполне материальным объектом.

Пусть эталон является неким единичным отрезком •——• , которому сопоставляются 0 и 1 цепи 10-деревьев (см. рис. 9б). Однако такого простого эталона недостаточно:

а) этот эталон •——• не указывает направление возрастания меры, где начало этого эталона, а где конец — неясно.

б) такой эталон не указывает вообще и направления меры, поэтому возможны "изломы" вида .

в) в этом простейшем случае неясен вопрос с делимостью эталона меры для изменения величин меньших, чем сам эталон.

Поэтому эталон обладает свойствами:

а) указывает направление возрастания меры, если направление возрастания меры совпадает с направлением возрастания чисел (направлением прямой, задаваемым отношением принадлежности), то мера изменяется в положительную сторону, если противоположно, то — в отрицательную:

$$\bullet\longrightarrow\bullet \tag{29}$$

$$({}^{0}\bullet\longrightarrow\bullet^{1}) \tag{29'}$$

б) эталон указывает вообще направление меры, направление, вдоль которого выполняется сдвиг при измерении величин бóльших, чем сам эталон, для этого (29) преобразуемо к виду, содержащему два направленных единичных отрезка, следующих друг за другом в одном направлении:

$$\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\bullet$$

$${}^{0}\bullet\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}\ , \tag{30}$$

— их сдвиг (сдвиг эталона (30)) на один единичный отрезок даёт направление меры, но для этого эталон обладает ещё одним свойством:

в) удваиваемости, т. е. минимум есть два одинаковых эталона, чтоб их можно было двигать один относительно другого в одном направлении:

$$\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\bullet\ ,$$

$$\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\bullet\ ; \tag{31}$$

тогда сдвиг при наложении одного на другой:

$$\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}$$

$$\qquad\qquad\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}\ , \tag{32}$$

— даёт следующую картину при наложении на цепь деревьев (см. рис. 9б):

$$\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}\longrightarrow\bullet^{3}, \tag{33}$$

и при последовательном выполнении сдвигов заполняется числовая прямая (которая уже настоящая, однонаправленная прямая, без изгибов, в отличие от рис. 10) от 0 и дальше…;

г) эталон обладает свойством делимости (масштабируемости), т. е. весь эталон (2-й его экземпляр) проецируется на единичный отрезок

$$\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$\bullet^{0}\xrightarrow{\qquad\qquad}\bullet^{1}\xrightarrow{\qquad\qquad}\bullet^{2} \tag{34}$$

(т. е. единичный отрезок делится на равные части)

$$\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{0,5}\longrightarrow\bullet^{1}\xrightarrow{\qquad\qquad}\bullet^{2}\ , \tag{35}$$

и т. д.,— делимостью эталона заполняются соответствия ветвей 10-деревьев мере, определимой на прямой.

Для 10-деревьев удобнее из эталона вида $\bullet^{0}\longrightarrow\bullet^{1}\longrightarrow\bullet^{2}$ построить эталон вида $\bullet^{0}\to\bullet^{1}\to\bullet^{2}\to\bullet^{3}\to\bullet^{4}\to\bullet^{5}\to\bullet^{6}\to\bullet^{7}\to\bullet^{8}\to\bullet^{9}\to\bullet^{10}$, из которого делимостью, аналогично (34), получается мера, соответствующая следующему слою 10-деревьев в цепи 10-деревьев (десятичных обозначений чисел, см. рис. 9б):

$$\bullet^{0} \longrightarrow \bullet^{0,1} \rightarrow \bullet^{0,2} \rightarrow \bullet^{0,3} \rightarrow \bullet^{0,4} \rightarrow \bullet^{0,5} \rightarrow \bullet^{0,6} \rightarrow \bullet^{0,7} \rightarrow \bullet^{0,8} \rightarrow \bullet^{0,9} \rightarrow \bullet^{1} \rightarrow \ldots \rightarrow \bullet^{10} \quad (36)$$

и т. д. по слоям 10-деревьев (следующим знакам за запятой) и по единичным отрезкам (увеличению чисел, по (32–33)).

Таким образом, необходимые свойства эталона меры описаны.

Для многомерных пространств построение аналогично для каждой из осей с учётом свойств пространств с ориентированными друг относительно друга осями (см. теорему 26). Переводы линейных мер в площади (умножением длин сторон прямоугольника), т. е. проекции 2-мерия на 1-мерие (и вообще n-мерия на 1-мерие), возможны ввиду наличия абстракции актуальной (счётной) бесконечности, см. теорему 19 и формулу (27). См. также теорему 43 о свойствах эталона меры на стр. 68.

§21. Связь теории меры с классическим математическим анализом

Над метризованным пространством (см. §20) определимы переменные величины, функции и их свойства, т. е. строится уже весь классический математический анализ. При этом использование языка бесконечно-малых является естественным, т. к. бесконечно малые величины — это переменные, убывающие до нуля, но, может быть, и с разной скоростью, сравнимой посредством теории предела[49], например:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1} = 0 \ , \qquad (37)$$

т. е. функция x^2 убывает в 0 в бесконечное число раз быстрее, чем x; или:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1} = 2 \ , \qquad (38)$$

т. е. функция 2x убывает в 0 в 2 раза медленнее, чем x.

При наличии обоснованной теории меры математический анализ (теория дифференцирования и интегрирования) строится далее классическим образом, см., например, руководства по математическому анализу [43], [33]. Над пространством с мерой имеются переменные величины, которые между собой связаны функциями, и далее по обычной схеме от свойств функций к их дифференцированию и интегрированию.

[49] Таким образом, не требуется введения никаких «актуально бесконечно малых и бесконечно больших чисел» как в нестандартном анализе А. Робинсона.

Часть 5. Приложения результатов

В пятой части книги описаны приложения результатов теории множеств с самопринадлежностью и теории меры.

Глава 7. Счётная вычислимость неподвижной точки

В главе описаны результаты, относящиеся к счётной вычислимости неподвижной точки, соединяющие дискретную (вычислительную) математику и математику непрерывных величин.

§22. К обоснованию вычислимости решения задачи управления

Во многих задачах, в частности в задачах управления качеством химико-технологических процессов, нахождение решения выполнимо по методу последовательных приближений. При счётности десятичных обозначений точек на прямой достижение "точного" решения выполнимо за счётное число шагов. При этом если имеется "конечная" точность, то решение находится за конечное число шагов. Изложено по [73].

Рассматривается задача нахождения решения управления качеством химико-технологических процессов (см. [66], [70]). При однозначно определенных функциях зависимостей экономического параметра Z от параметра управления Y (и коррекции технологической нормы качества x_0 по минимуму дополнительных издержек), нахождение решения выполнимо методом последовательных приближений, т. е. имеется некоторый оператор А, обладающий свойством сжатия:

$$\|Ay_n\| < \|y_n\|. \qquad (39)$$

При рассмотрении последовательности приближений к решению в этом случае возникает риторический вопрос: как возможен за счётное количество шагов выбор некоторого решения из несчётной совокупности точек на прямой? На самом же деле достижение решения выполняется в метрическом пространстве, на счётной совокупности. Количество десятичных обозначений чисел, соответствующих прямой, является счётным, в отличие от несчётного количества точек на прямой. При этом при нахождении решения осуществляется выбор за счётное количество шагов из счётной совокупности. Счётность количества десятичных обозначений чисел обоснована в [77, с. 67] («Теорема о счётности десятичных обозначений»).

Схема доказательства теоремы о счётности десятичных отображений заключается в следующем [77, с. 67]: строится 10-дерево (рис. 11), соответствующее всевозможным десятичным обозначениям чисел на интервале [0, 1), и организуется пересчёт по слоям, т. е. по номеру цифры, стоящей за запятой; такой пересчёт выполним, следовательно, число десятичных обозначений чисел на указанном интервале является счетным. Поскольку имеется счётное количество интервалов длины 1 на прямой, то общее количество десятичных обозначений всех чисел, соответствующих прямой, остаётся счётным. (При этом количество точек на прямой, имеются в виду геометрические точки, а не десятичные обозначения, является несчётным, [77, с.66]).

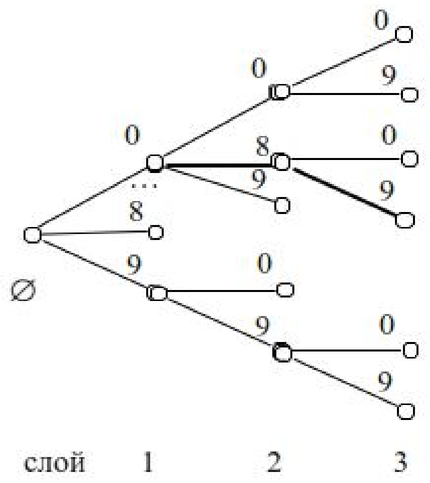


Рис. 11. Фрагмент 10-дерева

При возможности выполнения бесконечного счётного числа операций нахождения решения путем применения оператора сжатия (39) находимо точное решение за счётное число шагов, однако на практике вычисления ограничены конечным числом итераций и точность вычислений не является абсолютной.

При этом очевидно, что при требовании «конечной» точности вычислений (лучшей чем 1/k) имеется неравенство $\|y_n - y_{n+1}\| < 1/k$, где $k < \infty$, и решение задачи управления с требуемой точностью достигается за конечное число шагов. Таким образом, обоснована вычислимость решения задачи управления.

§23. О счётной (конечной) вычислимости неподвижной точки

Посредством результатов теории множеств с самопринадлежностью обоснована счётная (конечная) вычислимость неподвижной точки сжимающего отображения, тем самым ликвидирован пробел в теории, относящейся к неподвижным точкам метрических пространств. Этот результат соединяет математику непрерывных величин и вычислительную математику. Изложено по [107].

Теорема о счётной (конечной) вычислимости

В непротиворечивой теории множеств с самопринадлежностью известны следующие теоремы: о несчётности количества точек на прямой и о счётности десятичных обозначений чисел [77, с. 53–54].

Теорема 34 (о несчётности точек на прямой). Количество точек на прямой несчётно.

Теорема 35 (о счётности десятичных обозначений).Число десятичных обозначений действительных чисел счётно.

Пусть имеется вычислительный процесс (очевидно имеющий дело не с точками на прямой, а с числами, например, в десятичной системе), использующий метод сжимающих отображений, при котором $\|Ay_{n+1}\| < \| y_n\|$, для общности рассуждений конкретный вид оператора А не определён. Тогда, при учёте результатов теоремы 35, неподвижная точка у*, $\|Ay^*\| = \|y^*\|$ является достижимой в общем случае за не более чем счётное число шагов итераций.

Доказана теорема.

Теорема 36 (о счётной вычислимости). Неподвижная точка сжимающего оператора А достижима за счётное число шагов (счётно вычислима). □

Очевидно, что при останове итерационного процесса на шаге достижения заданной точности $\varepsilon > 0$, итерационный процесс оканчивается на конечном шаге, и неподвижная точка является конечно вычислимой, имеет место следующая теорема.

Теорема 37 (о конечной вычислимости). Неподвижная точка сжимающего оператора А достижима с точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число шагов (конечно вычислима). □

При этом для доказательств теорем 36 и 37 важно лишь наличие свойства сжимаемости оператора А, что указывает на широкую значимость этих теорем; в частности, этими теоремами обосновывалась решаемость в реальном времени задачи управления качеством технологических процессов [73].

Обсуждение результата

Теорема о неподвижной точке известна в нескольких вариантах. Первый вариант — это теорема о сжимающих отображениях ([19, с. 88], [119, т. 1, с. 108]). «Теорема 38 (о сжимающем отображении). Всякое сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку».

Вторая теорема о неподвижной точке — теорема Шаудера ([119, т. 2, с. 321]). «Теорема 39 (Шаудер, о неподвижной точке). Пусть Е — банахово пространство. Тогда любое непрерывное отображение выпуклого компакта К из Е в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку».

К теореме Шаудера примыкает как частный случай теорема Брауэра. «Теорема 40 (Брауэр, о неподвижной точке). Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку».

Теорема 38 о сжимающих отображениях указывает способ вычисления неподвижной точки; а теоремы 39–40 этого способа не указывают, отмечая только существование такой точки.

В связи с вычислением неподвижной точки возникает следующий вопрос: каким образом за счётное число итераций сжимающего отображения (а их по определению не более чем счётное число), из несчётного количества точек на прямой выбирается неподвижная точка? Из этого вопроса можно было бы сделать неразрешимый парадокс, но он разрешается указанным в теореме 35 способом, т. к. при вычислениях имеется n-ичная система обозначения чисел, а количество n-ичных обозначений чисел на прямой — счётно (n — конечное число).

Теорема 38 о сжимающем отображении не указывает явно на конечность итерационного процесса при неабсолютной точности результата (это указание вводимо теоремой 37).

Посредством результатов теории множеств с самопринадлежностью разрешён парадокс счётной достижимости неподвижной точки сжимающего отображения: обоснована счётная (конечная) вычислимость неподвижной точки сжимающего отображения. Таким образом, эти результаты (теоремы 36, 37) ликвидируют пробел в теории, относящейся к неподвижным точкам метрических пространств.

Также этот результат (теорема 36 и особенно теорема 37 о конечной вычислимости неподвижной точки) впервые соединяет математику непрерывных величин и вычислительную математику, оперирующую только конечнозначными приближениями чисел.[50] Для полноты соединения этих математик (непрерывной и дискретной) необходимо описание теории меры. Связь теорем 36 и 37 с теоремами о неподвижной точке в теории вычислимых функций подлежит отдельному изложению.

[50] При этом построения отдельной теории для рациональных приближений классического понятия элементарной функции, действительных, в т. ч. трансцендентных чисел и т. п., как это сделано в [12], а именно: «Рекурсивный анализ — это теория функций в поле рациональных чисел, содержащая лишь свободные переменные и основанная на рекурсивной арифметике» [12, с. 268],— представляются избыточными (излишними), тем более что они игнорируют математику непрерывных величин.

Глава 8. Приложения к теории управления

В главе описаны приложения теоремы о размерности пространств с взаимно ориентированными осями [77] к теории управления.

§24. Трёхмерность структуры задач управления

В этом параграфе описано свойство трёхмерности структуры классических задач управления в смысле теоремы об ограниченности вложенности суперпозиций; постановка задачи управления обобщена на случай наличия внешних возмущающих параметров, при этом её трёхмерность в указанном смысле сохраняется; эта трёхмерность соответствует трёхчастной онтологической структуре действительности. Изложено по [83].

Теорема о трёхмерности пространства с упорядоченными друг относительно друга осями была доказана в [53], в [61]. Более подробно в работе [70] описано приложение этого результата к обоснованию метода управления технологическими процессами, с обоснованием, как и в [77, с. 85 и сл.], ограниченной размерности оператора суперпозиции.

Теорема 41 (об ограниченности вложенности суперпозиций). Для пространств X_n, Y_k, Z_m, W_r, размерности которых конечны и отличны от 0 ($n, k, m, r \in \mathbf{N}$), имеющих общее начало координат, суперпозиция $((X_n \xrightarrow{\varphi} Y_k) \xrightarrow{\psi} Z_m) \xrightarrow{\xi} W_r$ невозможна, возможна суперпозиция только для трех пространств, например, $(X_n \xrightarrow{\varphi} Y_k) \xrightarrow{\psi} Z_m$.□

В прикладной интерпретации (см. [70])

$$(X \xleftarrow{\varphi} Y) \xrightarrow{\psi} Z , \qquad (40)$$

где X — параметр качества, Y — параметр управления, Z — экономический параметр. Оказывается, что трёхмерность задач управления (трёхмерность суперпозиции (40), согласно теореме 41) наблюдается не только в методе пространства состояний (см. [70]), но обнаруженное ограничение размерности свойственно широкому классу задач управления, в том числе и задачам классической теории управления, что и описано ниже.

Трёхмерность структуры задач управления

Очевидно, что в смысле теоремы 41, структура классической задачи управления — трёхмерна. Постановка классической задачи управления такова [39, с. 16] (см. тж. [2]): объект управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1(t),\ldots, x_n(t), u_1(t),\ldots, u_m(t)) \qquad (41)$$

в векторной форме: $dX/dt = F(X(t), U(t))$, где X — это вектор координат, U — вектор управлений; f_i непрерывно дифференцируемы; при этом имеется функция $f_0(X(t), U(t))$, и задача управления сводится к минимизации функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X(t), U(t))\, dt = \min \qquad (41')$$

путём выбора оптимального управления U(t), при перемещении точки из $X_0=X(t_0)$ в $X_1=X(t_1)$.

Записанные в терминах теоремы 41 отображения, соответствующие задаче (41), таковы: $(X \xleftarrow{\varphi} U) \xrightarrow{\psi} I$, где отображение φ задаётся системой дифференциальных уравнений (41), а ψ — минимизацией функционала (41'). Тем самым показано: структура классической задачи управления — трёхмерна в смысле теоремы 41 [51].

Обобщение при возмущениях

В классической задаче управления (41) предполагается отсутствие внешних возмущений, действующих на систему. Для учёта таковых возмущений (может быть стохастических) в модель вводится вектор возмущений A, тогда постановка задачи такова, что объект управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1(t),\ldots, u_1(t),\ldots, a_k(t)), \qquad (42)$$

в векторной форме: $dX/dt = F(X(t), U(t), A(t))$, где X — это вектор координат, U — вектор управлений, A — вектор возмущений; f_i непрерывно дифференцируемы; при этом имеется функция $f_0(X(t), U(t), A(t))$, и задача управления сводится к минимизации функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X(t), U(t), A(t))\, dt = \min, \qquad (42')$$

либо усреднено по возмущениям $I=I(\overline{A})$, либо при определённых возмущениях $A(t)=A^*$, $I=I(A^*)$. При этом структура этой задачи управления (более общей, чем в [39]) также остаётся трёхмерной: $(X \xleftarrow{\varphi} (U\times A)) \xrightarrow{\psi} I$.

Онтологические основания

Трёхмерность структуры задач управления имеет онтологические основания. В системе дифференциальных уравнений, описывающих систему, X — материально-вещественный (в онтологическом смысле) параметр (координаты), задаваемый в начальной и конечной точке; функции U, A и отображение φ изменяются во времени; функционал I отвлечён от понятия времени (как уже проинтегрированный по переменной, соответствующей времени). Таким образом, онтологическая структура (ср. [76, с. 7–11]), выявляемая в этой задаче, соответствует известной онтологии: а) материально-вещественная часть реальности, б) время, в) вневременные характеристики реальности, в том числе само-

[51] Если рассматриваются оптимальные процессы с параметрами (см. [39, с. 215–221]), где помимо управления U имеется параметр W, остающийся постоянным в процессе движения, то трёхмерность структуры также очевидна: $(X \xleftarrow{\varphi} (U\times W)) \xrightarrow{\psi} I$.

описательность описания реальности (5-й уровень обобщения).

Показана трёхмерность структуры задачи управления в смысле теоремы об ограниченности вложенности суперпозиций, постановка задачи управления обобщена на случай наличия внешних возмущающих параметров (трёхмерие структуры задачи в смысле указанной теоремы при этом остаётся); это трёхмерие соответствует трёхчастной онтологической структуре реальности.

§25. Трёхмерность задач управления и управление качеством

С использованием свойства трёхмерности структуры общей задачи управления показана связь этой задачи с конкретным методом пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов управления. Изложено по [84].

Трёхмерность структуры задач управления была показана в §24 и в [83]; в случае задачи с наличием возмущений постановка задачи следующая. Для учёта возмущений (может быть, стохастических) в модель вводится вектор возмущений A, тогда постановка задачи такова, что объект управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1(t),\dots, u_1(t),\dots, a_k(t)) \qquad (43)$$

в векторной форме: $dX/dt = F(X(t), U(t), A(t))$, где X – это вектор координат, U – вектор управлений, A – вектор возмущений; f_i непрерывно дифференцируемы; при этом имеется функция $f_0(X(t), U(t), A(t))$, и задача управления сводится к минимизации функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X(t), U(t), A(t))\, dt = \min, \qquad (43')$$

либо усреднено по возмущениям $I=I(\overline{A})$, либо при определённых возмущениях $A(t)=A^*$, $I=I(A^*)$. При этом структура этой задачи управления (более общей, чем в [39]) также остаётся трёхмерной: $(X\xleftarrow{\varphi}(U\times A))\xrightarrow{\psi}I$. В случае метода пространства состояний структура задачи управления также трёхмерна (см. [70], [77]).

Решение задачи управления при фундаментальной обоснованности трёхмерности пространства состояний системы следующее: 1) параметр качества продукта (подпространство X); 2) параметр управления (подпространство Y); 3) экономический параметр (подпространство Z) соответствует отображению $(X\xleftarrow{\varphi}Y)\xrightarrow{\psi}Z$. Отображение φ — это отображение подпространства параметра управления Y в подпространство параметра качества X, отображение ψ – это отображение отображения φ в подпространство экономического параметра. Оптимум управления находится как управление при получении продукта, соответствующего норме качества с заданной вероятностью при минимальных издержках [70].

При этом в окрестности оптимума отображение φ допускает линеаризацию [71].

$$\frac{\delta x}{\delta y} = f(y(t);a(t)) \,, \qquad (44)$$

где x – значение параметра качества, y – значение параметра управления (y* – оптимум), a – возмущение, f – функционал от параметров на промежутке управления. При линеаризирующем преобразовании получается

$$\left.\frac{\delta x}{\delta y}\right|_{y \approx y^*} = l(y(t)) + a^*(t) \,, \qquad (45)$$

где l – линейный функционал на промежутке управления. Статистическая фильтрация позволяет устранить влияние стохастических возмущений a*(t) на управление:

$$\left.\frac{\delta x}{\delta y}\right|_{y \approx y^*} = l^*(y) \,. \qquad (46)$$

При этом в задаче управления, в первом приближении, минимизируется функционал (задаваемый на ограниченном промежутке учёта параметров системы, – промежутке управления):

$$z_1 = \int_{\Delta t} F(y(t), x(t), a(t))\, dt \to \min.$$

При учёте же экономической составляющей процесса производства, минимизация функционала (дополнительных издержек) выполнима относительно произведённого продукта, при уже отфильтрованных (46):

$$z = \int_{\Delta r} F(y(r), x(r))\, dr \to \min, \ (47),$$

при этом (47) раскладывается в сумму двух составляющих (в окрестности оптимума, с учётом (46)):

$$z = S_1 + S_2 = \int_{\Delta r} S_1(y,x)\, dr + \int_{\Delta r} S_2(y,x)\, dr \to \min,$$

где S_1 – дополнительные издержки, S_2 – упущенная выгода. (Описание конкретных примеров задач см. в [70]).

Постановка задачи управления в вышеприведённых терминах в методе пространства состояний управления качеством такова. Система описывается уравнением

$$\frac{\delta x}{\delta y} = f(y(r);a(r)) \,, \qquad (48)$$

допускающим вблизи оптимума линеаризирующую аппроксимацию

$$\left.\frac{\delta x}{\delta y}\right|_{y \approx y^*} = l^*(y) \,, \qquad (46)$$

при этом минимизируется функционал дополнительных издержек

$$z = \int_{\Delta r} F(y(r), x(r))\, dr \to \min. \qquad (47)$$

(Структура задачи трёхмерна $(X \xleftarrow{\varphi} Y) \xrightarrow{\psi} Z$).

То есть в методе пространства состояний, в отличие от классической задачи управления (см. [39], [2]) и её модификации при возмущениях (43–43') [83] (см. §24), система уравнений или уравнение, описывающее объект (48), (46), отвлечено от понятия времени (в уравнении дифференцирование по параметру управления) и функционал (47) отвлечёт от времени (интегрирование в нём по произведённому продукту) — задача не «во» времени, а «над» временем.

Таким образом, прослежена аналогия (трёхмерность структуры) и отличие задачи метода пространства состояний управления качеством от классической задачи управления.

§26. Дополнение: ещё раз о теореме о размерности

В этом параграфе рассмотрен наглядный вариант доказательства теоремы о не более чем трёхмерности пространств с ориентированными друг относительно друга осями, имеющий широкий набор приложений в теории управления и математической экономике.

Простейший вариант доказательства

Простейший вариант доказательства приведён в [53], [61, с. 33], [77, с. 26]. Схема доказательства заключается в следующем: при построении ориентации[52] 4-мерного пространства (не допускающей циклов ориентирующих направлений), см. рис. 14, ориентация диагонали между точками (1010) и (0101) оказывается сразу двунаправленной, т. е. вершины (1010) и (0101) принадлежат друг другу,— $(1010)\in(0101)$ и $(0101)\in(1010)$, что противоречит изначальному предположению об однозначной ориентации, таким образом теорема доказана.

Теорема 42 (о размерности). Пространство с ориентированными друг относительно друга осями не более чем 3-мерно. □

Более подробное рассмотрение теоремы о размерности иллюстрируется геометрическими и теоретико-групповыми соображениями (доказательство при этом удлиняется, но остаётся наглядным).

Модель ориентации в геометрии определяющих соотношений

Идея геометрических представлений определяющих соотношений в группах описана в [35, с. 9–11], геометрическое представление взаимных ориентаций недостижимых последователей типа РО(.) иллюстрируется определяющими соотношениями в бесконечных группах.

Первый тип ориентации — прямая, ей соответствует бесконечная

[52] Ориентация задаётся отношением принадлежности недостижимых последователей РО(.).

коммутативная группа по сложению с одним образующим элементом a бесконечного порядка, $|a|=\infty$.

Второй тип ориентации — плоскость, см. рис. 12, ей соответствует коммутативная группа с определяющими соотношениями:

$a+b=b+a$, $|a|=\infty$, $|b|=\infty$, (плоскость) (49)

$a+x=x+a=b$, $|x|=\infty$. (ориентация плоскости). (50)

Первое определяющее соотношение (49) задаёт собственно порядок на плоскости (геометрическую модель порядка плоскости), а второе (50) — однозначную ориентацию плоскости (геометрическую модель ориентации плоскости). На плоскости ориентация однозначна.

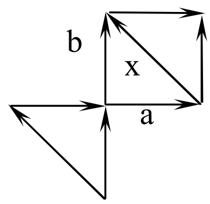


Рис. 12. Структура порядка плоскости

Третий тип ориентации — трёхмерие, см. рис. 13а. Трёхмерию соответствует коммутативная группа с определяющими соотношениями:

$a+b=b+a$, $|a|=\infty$, $|b|=\infty$, (плоскость 1)

$a+c=c+a$, $|c|=\infty$, (плоскость 2)

$b+c=c+b$, (плоскость 3)

$a+x=x+a=b$, $|x|=\infty$, (ориентация плоскости 1)

$a+y=y+a=b+z=z+b=c$, $|y|=\infty$, $|z|=\infty$.

(ориентация 3-го измерения относительно плоскости 1). (51)

В секущих плоскостях имеются пересечения проекций ориентирующих векторов, см. рис. 13б–в (точка A). Тогда с учётом сохранения неразрывности отношений принадлежности в 3-мерии в ориентациях возникают дополнительные коммутативные определяющие соотношения (выражение для точки A):

$a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}z=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. (52)

Ориентация плоскостей (001, 010, 110, 101), см. рис. 13б, и (001, 011, 110, 100), см. рис. 13в,— неоднозначна, но это преодолевается назначением дополнительных определяющих соотношений (52). Из вышесказанного следует, что при рассмотрении трёхмерия тем самым постулируется необходимость:

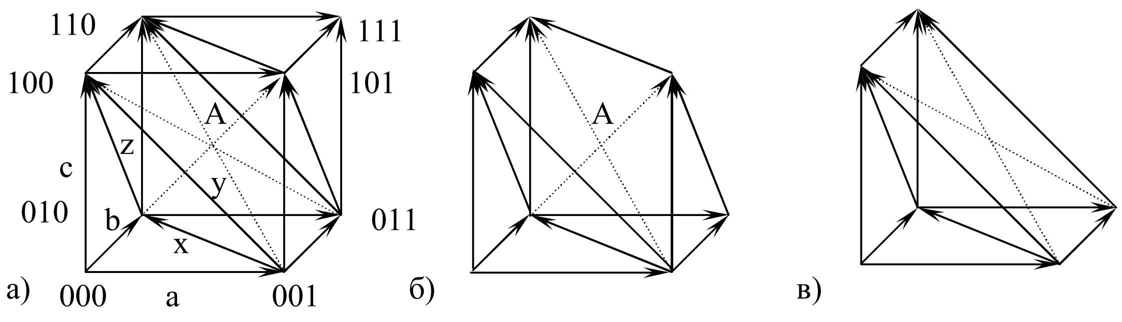


Рис. 13. Ориентация 3-мерия

1) делимости эталона меры (коэффициент ½ в (52)),
2) его удваиваемости, т. е. копируемости (½(a+x)+½(a+x)=½b+½b),
3) наличия направления меры (вектора вида ½a+½a задают направление сдвига по оси на ½a),— геометрически доказана теорема.

Теорема 43 (о свойствах эталона меры). Из наличия ориентации 3-мерного пространства вытекает необходимость: 1) делимости эталона

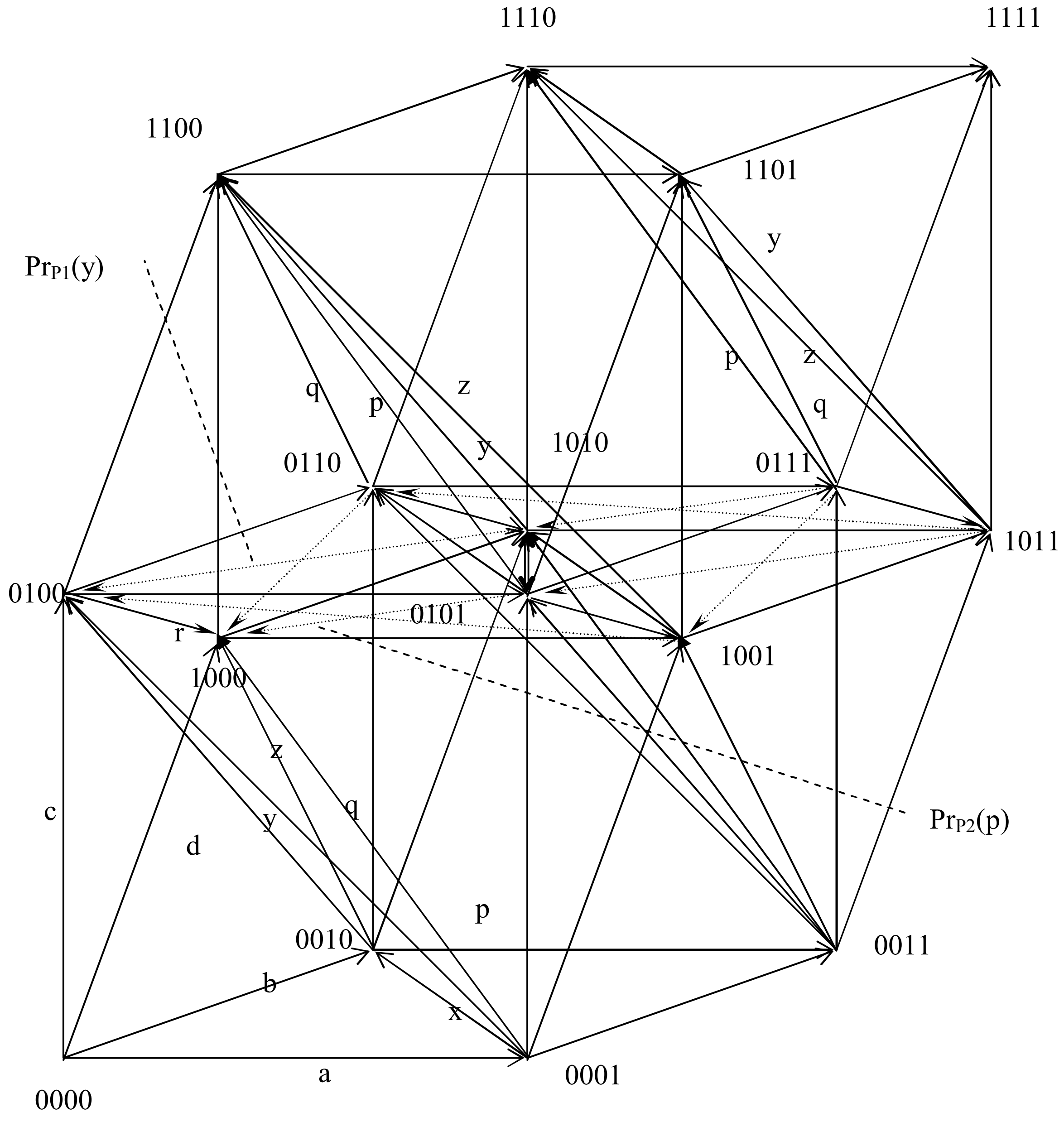


Рис. 14. Четырёхмерие фиктивное

меры, 2) его удваиваемости (копируемости), 3) наличия направления меры. □

Свойства эталона меры описаны в §20.

Следующая попытка построения ориентации — четырёхмерие, (рис. 14). Попытка записать определяющие соотношения для 4-мерия —

коммутативная группа с определяющими соотношениями:

$a+b=b+a$, $|a|=\infty$, $|b|=\infty$, (плоскость 1)

$a+c=c+a$, $|c|=\infty$, (плоскость 2)

$b+c=c+b$, (плоскость 3)

$a+d=d+a$, $|d|=\infty$, (плоскость 4)

$b+d=d+b$, (плоскость 5)

$c+d=d+c$, (плоскость 6)

$a+x=x+a=b$, $|x|=\infty$, (ориентация плоскости 1)

$a+y=y+a=b+z=z+b=c$, $|y|=\infty$, $|z|=\infty$.

(ориентация 3-го измерения относительно плоскости 1)

$a+p=p+a=b+q=q+b=c+r=r+c=d$, $|p|=\infty$, $|q|=\infty$, $|r|=\infty$

(ориентация 4-го измерения относительно первых 3-х). (53)

При этом отмечается та же, что и ранее, взаимная принадлежность вершин $(1010)\in(0101)$ и $(0101)\in(1010)$, (54)

однако здесь можно не искать противоречий (т. к. изначально при этих рассуждениях, построении геометрической модели, не требовалось однозначной ориентации), но ввиду (54) указанные вершины совпадают, т. е. (1010)=(0101). Кроме того, наблюдаются циклы объектов вида (1000–1010–0100), (1010–1011–0110) и т. п., которые, по теореме о стягивании циклов с самопринадлежностью [77, с. 42], стягиваемы,— каждый из циклов в один объект.

«Теорема 44 (о стягивании циклов с самопринадлежностью). Цикл принадлежащих один другому объектов с самопринадлежностью (пусть даже и с ответвлениями) тождественен одному объекту» [77, с. 42]. □

В результате после стягивания циклов из фиктивного 4-мерия получается следующий объект (см. рис. 15), для которого соотношения таковы:

$a+z=c$ (нижняя часть),

$c+a=z$ (верхняя часть),

откуда, подставив первое во второе,

$a+(c+a)=c$, т. е. $2a=c-c=0$, $a=0$,— противоречие с исходными определяющими соотношениями $(a\neq0)$[53], доказывающее невозможность 4-мерной ориентации.

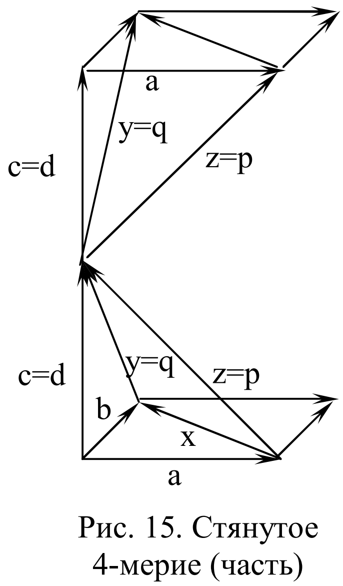


Рис. 15. Стянутое 4-мерие (часть)

Таким образом теорема 42 о размерности ещё раз доказана.□

[53] С другой стороны, то что a=0 лишь показывает, что попытка построить из 3-мерия 4-мерие обнуляет одно из измерений, ориентированное 3-мерие остаётся нерасширяемым ориентированным 4-мерием.

§27. Приложения теоремы о размерности

В этом параграфе упомянуты основные приложения рассмотренной выше теоремы о размерности.

Приложения в теории и практике управления

Приложения доказанной теоремы 42 о размерности в теории управления рассмотрены в §24 и §25 в виде следствия из неё трёхмерности суперпозиций отображений пространств $((X \leftarrow Y) \rightarrow Z)$ для широкого класса задач управления.

Конкретные примеры задач управления, решаемые методом, обоснованным теоремой о размерности, приведены в [70], см. также список литературы в [70]. С момента издания книг [70] и [77] опубликованы следующие приложения указанной теоремы:

а) относящиеся к теоретическим результатам:

1) интерпретация свойства оператора суперпозиции (ограниченного размерностью три), как коммутативности обмена и единства цен при равновесии экономики [75], подробнее об этом см. [76, с. 18–20].
2) интерпретация свойства оператора суперпозиции (ограниченного размерностью три), как общей трёхмерности задач управления (§24 и §25), [83], [84]; а также в случае управления качеством химико-технологических процессов [102];

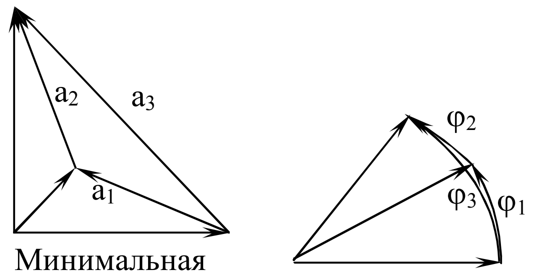
б) относящиеся к приложению в решении прикладных задач:

3) приложение к построению управления технологическими процессами ректификации [85], хлорирования руд редкоземельных металлов [104] оптимизации системы конденсации хлоратора [86], [104] процессу флотации руд [112], [113], электролиза [98];
4) приложение к построению методики оптимизации внесения удобрений [99].

Ограничения условий вращения (в 4-мерии нет вращения)

Теорема 42 о размерности позволила указать невозможность вращения в 4-мерных пространствах, т. к. вращение задавало бы противоречивую ориентацию. Схема доказательства изображена на рис. 16.

Теорема 45 (О вращении в многомерных пространствах). Вращение возможно не более чем в 3-мерном пространстве. □



Минимальная структура ориентированного 3-мерия

"Структурирующие" повороты в 3-мерии

Рис. 16. Поворот аналогичен ориентации в 3-мерии, φ_i – повороты относительно осей, a_i – ориентирующие вектора

Интерпретация этой теоремы такова. Пространство Минковского, кроме обычного 3-мерного подпространства имеет ещё и 4-ю ось — мнимозначную ось времени [27], [36],— (x, y, z, it). По теореме 45 вращение в 4-мерии — невозможно, значит, невозможно и вращение в 4-мерии, перемещающее материальный 3-мерный объект во времени. Это означает, что такие вращения невозможны и в пространствах большей размерности, моделирующих физическую реальность, поскольку пространство Минковского является их подпространством. Подробнее об указанном вращении см. [100, с. 219–220].

Обобщение интерпретаций теоремы о размерности

При решении задач управления технологическими процессами по минимизации издержек [70] в суперпозиции ((X←Y)→Z), X — это параметр качества, Y — параметр управления, Z — экономический параметр, который в итоге минимизируется. Задача управления качеством решается на 4-м из 6-ти вертикальных информационных уровней в системе управления производством.

При этом возникает следующее обобщение: при поднятии на следующий 5-й уровень задача управления становится не 3-мерной (не суперпозиция ((X←Y)→Z)), а двумерной, сводящейся к учёту и планированию потоков ресурсов, трудозатрат и продуктов[54].

При поднятии ещё на уровень (на 6-й) — задача управления качественно одномерна (один параметр Z), для которого необходимо определение точки стационарности финансового оборота (безынфляционного равновесия экономики),— эти задачи подробно разобраны в книгах [68], [76], [87], см. также [96], [114].

Эти обобщения соотносимы также со структурой взаимодействий экономических субъектов (лиц) в экономике [110, с. 67], но это требует отдельного изложения.

[54] Один из примеров таких задач — оптимизации объёма хранимого товара (ресурса) для вероятностно гарантированного удовлетворения спроса ($p>1-\alpha$) см. в [103].

Глава 9. Решения отдельных математических проблем

В главе описаны решения в теории множеств с самопринадлежностью известной проблемы Гильберта и невозможность парадокса Банаха-Тарского при корректном применении теории меры.

§28. Об однозначной невозможности первой проблемы Гильберта

В этом параграфе описана ещё одна сторона решения первой проблемы Гильберта. Показано, что между счётной бесконечностью и континуальной нет и не может быть по определению промежуточных уровней бесконечности в теории множеств с самопринадлежностью. Изложено по [116].

Решение первой проблемы Гильберта[55] [10, с. 408] содержательно обсуждалось ещё в [77, теоремы 20–22]; отдельно иерархия уровней бесконечности рассмотрена в [90] (см. также главу 3):
а) счётная бесконечность (счётные последователи PN(.), см. [78], [62]),
б) континуальная бесконечность (недостижимые последователи PO(.), см. [81]),
в) мощность множества всех множеств [63].

Далее приведён ещё один способ рассмотрения иерархии уровней бесконечности.

Отсутствие проблемы Гильберта

Иерархия уровней бесконечности рассмотрена в [90]; показано, что мощность множества подмножеств счётного множества счётна. Таким образом, из счётных множеств не строятся недостижимые по мощности (континуальные); это, с одной стороны, указывает на отсутствие промежуточных по мощности множеств между счётными и недостижимыми (в теории множеств с самопринадлежностью).

С другой стороны, при построении недостижимых последователей (типа PO), они по определению [53], [77] следуют за всеми последователями типа PN и их всевозможными степенями и сверхстепенями (которые счётны, см. [78]). Таким образом, по определению бесконечных объектов, бесконечных множеств промежуточных мощностей между счётными (ω) и недостижимыми (ψ) в теории множеств с самопринадлежностью не имеется,— тем самым нет и первой проблемы Гильберта.

Вышеизложенное на самом деле очень просто: при выделении

[55] Первая проблема Гильберта — это континуум-гипотеза, сформулированная Кантором в 1877 г. [15]. В [20] указано, что эта проблема не зависит от аксиоматики Цермело-Френкеля, т. е. однозначного решения проблемы не дано (не дан однозначный ответ на решение первой проблемы Гильберта).

объектов из множества всех множеств M, по определению недостижимых последователей PO(.) (мощности ψ), следующих за всевозможными степенями бесконечных последователей типа PN(.) (которые счётны, т. е. мощности ω), между последователями этих типов нет промежуточных объектов, а значит, и нет промежуточных мощностей.

Так называемая первая проблема Гильберта возникла на пустом месте, из-за отсутствия четкого представления в то время (нач. XX в.) о способах построения упорядоченных множеств.

То есть в теории множеств с самопринадлежностью такой проблемы вообще нет и быть не может, ввиду однозначной определённости свойств бесконечных объектов (последователей PN и PO типов).

Дополнение (о решении второй проблемы Гильберта)

Возникновение первой проблемы Гильберта изложено в его работе «Математические проблемы» [10, с. 401–406]. В частности, Гильберт писал о формальной математике, что она уже оторвана от действительного мира: «При дальнейшем развитии какой-либо математической дисциплины человеческий ум, обнадёженный удачами, проявляет уже самостоятельность; он сам ставит новые и плодотворные <?> проблемы, часто без заметного влияния внешнего мира, с помощью только логического сопоставления, обобщения, специализированного, удачного расчленения и группировки понятий и выступает затем сам на первый план как постановщик задач» [10, с. 403],— т. е., в видении Гильберта, математика остаётся только в пределах ii-го онтологического уровня, в отрыве от остальных уровней.

При таком отрыве от действительности внимание уделяется только логическим выводам из аксиом, но никак не поиску и обоснованию истинности аксиом, начальных положений теории,— математика сводится к цепочке выводов, без осмысления исходных обоснований и понятий. Решение проблемы виделось Гильберту более в дедуктивном доказательстве, нежели в обоснованности исходных положений. Он писал: «… каковы могут быть общие требования, которые мы <Гильберт> вправе предъявить к решению математической проблемы. Я <Гильберт> имею в виду прежде всего требования, благодаря которым удаётся убедиться в правильности ответа с помощью конечного числа заключений и при том на основании конечного числа предпосылок, которые кладутся в основу каждой задачи и которые должны быть в каждом случае точно сформулированы. Это требование логической дедукции с помощью конечного числа заключений есть не что иное, как требование строгости проведения | доказательств. … Новая задача, особенно если она вызвана к жизни явлениями внешнего мира, подобна молодому побегу, который может расти и приносить плоды, лишь если он будет заботливо и по строгим правилам искусства садоводства взращиваться на старом стволе — твёрдой основе нашего <Гильбертова> математического знания» [10, с. 403–404]. Ожидаемый Гильбертом чисто дедуктивный логический вывод при решении соседствует с метафорой, указывающей, что всё новое в математике, по Гильберту, ожидается возникающим из старого (но тогда вообще непонятно, как это новое может возникнуть в старом и ограниченном…).

Обращаясь же к формулировке первой проблемы, Гильберт отмечал, что проблема сводится к тому, что «*с точки зрения эквивалентности возможны только два типа числовых множеств: счётное множество и континуум*» [10, с. 408]. «Мне <Гильберту> казалось бы чрезвычайно желательным *получить прямое доказательство этого замечательного предложения Кантора…*» [10, с. 409]. То есть Гильбертом ожидалось чисто дедуктивное, с логическим выводом, решение этой проблемы, так действовали и последователи Гильберта, «ответвляясь» от известного знания.

Но первая проблема решена не дедуктивно, а прежде всего в созерцательных основаниях математики,— при использовании самопринадлежности и построении упорядоченных множеств, см. стр. 72, а также §2 и [26]. Это и есть ответ на вопрос, почему ранее первую проблему Гильберта не решили,— пытались использовать только тупиковые (предикативные) дедуктивные подходы, говорившие лишь о независимости континуум-гипотезы от других аксиом аксиоматической теории множеств без самопринадлежности (Коэн и др. [20]).

И это не единственный случай в решении математических проблем, то же самое касается и второй проблемы Гильберта,— построении непротиворечивой теории (доказательстве непротиворечивости арифметики), Гильберт и в этом случае ожидал прямого дедуктивного доказательства для имеющейся системы аксиом: «непротиворечивость системы аксиом арифметики требует прямого доказательства» [10]. Пыл Гильберта и его последователей в желании «прямых доказательств» поумерили работы К. Гёделя, написавшего лишь об ограниченности предикативных формальных теорий, но не давшего, однако, ни одного конструктивного решения обозначенных им проблем.

Построение непротиворечивой теории множеств с самопринадлежностью (косвенное решение второй проблемы Гильберта) также решено не дедуктивно, а прежде всего в созерцательных основаниях математики,— при использовании самопринадлежности и построении упорядоченных множеств, с указанием обхода ограничений, следующих из теорем Гёделя, см. подробнее [26], [77].

Таким образом, основания науки, основания, занимающиеся истинными основоположениями[56], служат решению насущных проблем, а логический

---

[56] П. Коэн, доказав независимость континуум-гипотезы и аксиоматики теории множеств Цермело-Френкеля [20], писал впоследствии (критикуя "программу Гильберта"), что важными для математики являются основоположения: «Наша <Коэна> интуиция о недостижимых или измеримых кардиналах ещё недостаточно развита или по крайней мере не передаётся в передаче в общении. Мне <Коэну> кажется, тем не менее, что полезно развивать наше <Коэна> чувство, позволяющее судить о приемлемости тех или иных аксиом. Здесь, разумеется, мы <Коэн> должны полностью отказаться от научно обоснованных программ <"программы Гильберта"> и вернуться к почти инстинктивному уровню, сродни тому, на котором человек впервые на-

см. след. стр. ⟶

вывод (дедукция),— это лишь служебный инструмент логического выражения истинных оснований и основоположений.

§29. К разрешению парадокса Банаха-Тарского

В параграфе рассмотрен известный парадокс Банаха-Тарского. Показано, что логически корректная интерпретация построения меры шара не позволяет построить этот парадокс; изложено по [117].

В теории меры и классической теории множеств известен парадокс Банаха-Тарского, являющийся примером, на первый взгляд противоречащим здравому смыслу, вывод из которого — довод против принятия аксиомы выбора в классической теории множеств.

Далее с использованием представлений о построении меры множества описан вариант разрешения этого парадокса.

Известны несколько формулировок парадокса Банаха-Тарского [40, с. 174]. Одна из его формулировок следующая.

Утверждение 1 (парадокс Банаха-Тарского): трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.

Два подмножества евклидова пространства называются равносоставленными, если одно можно разбить на конечное число (не обязательно связных) попарно непересекающихся частей, передвинуть их (при этом частям не запрещается "проходить друг сквозь друга", т. е. не требуется оставаться попарно непересекающимися во всех промежуточных положениях) и составить из них второе.

Более точно: два множества A и B являются равносоставленными, если их можно представить как конечное объединение непересекающихся подмножеств, $A = \bigcup_{i=\underline{1,\ n}} A_i$, $B = \bigcup_{i=\underline{1,\ n}} B_i$, так, что для каждого i подмножество A_i конгруэнтно[57] B_i.

Удваиваемый шар устроен следующим образом:

1. Задано евклидово пространство E, в котором имеется континуум точек и которым определяется направление осей.
2. На пространстве E задано понятие меры, посредством которого строится мера шара в евклидовом пространстве, но, когда строится мера шара, используется счетно-бесконечное покрытие шара кубическими элементами, и минимальному покрытию соответствует объём шара.

Возникает коллизия: нижний уровень евклидова пространства — континуальное количество точек, а мера шара построена путем счетного

чинал думать о математике» [21, с. 176],— т. е. думать об основаниях математики им предлагалось заново, только ничего конкретного в виде готовой непротиворечивой теории множеств им не было описано.

[57] Конгруэнтность — отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур (отрезков, углов и т. д.).

покрытия. Тогда парадокс напоминает следующее выражение.

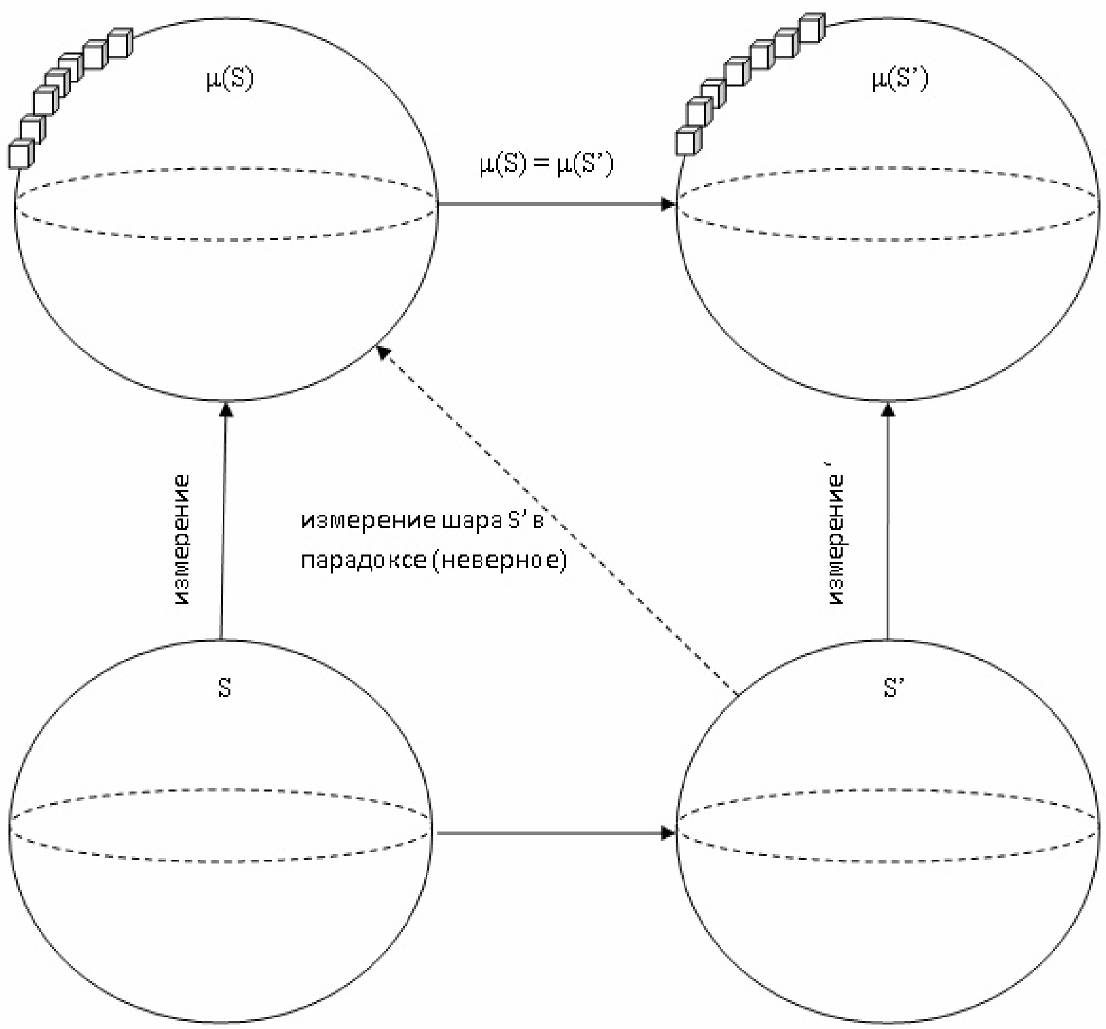


Рис. 17. Схема удвоения континуально бесконечного множества точек шара и счетного покрытия процесса измерения его объёма

Континуальная (недостижимая) бесконечность (мощности ψ) $\psi = \psi + \psi$ (удвоение шара точками из континуума). Откуда в мнимом парадоксе[58] получается $1 = 2$, но мера (счетное покрытие, мощности ω) построена над уже имеющимся континуальным (недостижимым) множеством точек шара. Это не означает, что другой шар должен быть привязан к этой мере, т. е. производится манипуляция нижним континуальным уровнем в отрыве от уровня, который дает меру шара. Тогда во втором шаре остались континуальные точки без их накрытия "мерой", и для построения второго шара необходимо построить накрытие этого

[58] Известный парадокс заключается в следующем:
$(1 + \omega = \omega,\ 2 + \omega = \omega) \Rightarrow ((1 + \omega) = (2 + \omega)) \Rightarrow 1 = 2$ (что неверно, вычитать в этом случае бесконечность ω некорректно).

континуального шара счетной мерой, но это уже другая мера по отношению к мере исходного шара, и второй измеримый объём из первого не возникает.

Шары из парадокса можно рассматривать двояко.

1. Шары как объекты теории множеств (континуальные (недостижимые) множества точек, расположенных определенным образом).

2. Шары как объекты, над которыми производится процесс измерения, и в результате измерения появляются меры (объёмы) шаров. В этом случае шары не являются объектами теории множеств, т. к. над ними введены меры.

Исходя из этого рассмотрения (п. 1, 2), нельзя говорить о равносоставленности двух шаров в евклидовом пространстве. Процессы измерения шаров S и S', как показано на рис. 17, разные, и поэтому нельзя сравнивать эти два шара, применяя в процессе сравнения общую для них меру. Пунктиром обозначен неправильный процесс измерения шара S', который и подразумевается в утверждении 1 (мнимом парадоксе).

Таким образом, при корректных логических рассуждениях, с учётом того, что точки пространства и шар измеримого объёма — это разные логические уровни математических конструкций, парадокс Банаха-Тарского построить не удаётся, т. е. парадокс разрешён.

Глава 10. Непредикативный вывод модели равновесия экономики

§30. Непредикативный вывод основного логистического уравнения

В этом параграфе описан непредикативный вывод основного логистического уравнения, выведенного ранее из условия баланса свобод человека, формальный и содержательно выведенный результаты совпадают с тем отличием, что только содержательный вывод указывает смысл этого уравнения; в формальном выводе, для рыночной экономики, использованы понятия алгоритмической сложности.

Основное логистическое уравнение (ОЛУ) оборота общественно необходимого времени (ОНВ) выводимо из равновесия свобод человека (в выводе использованы неопределённости, как меры возможности реализации свобод труда и пользования результатами труда, см. [76, с. 15], [87, с. 22]),— в онтологически полной (плановой) экономике, однако оно, ОЛУ, описывает, при анализе отклонений от равновесия, и онтологически неполную экономику (рыночную), т. е. имеется и формально алгоритмический вывод ОЛУ из соображений условий современной рыночной экономики.

Экономика рыночная действует по алгоритму максимизации прибыли экономических субъектов (алгоритмы взаимного обмена при установлении цен), в ней (в экономике) все (каждый из) экономические субъекты пользуются трудами всех остальных (прямо или косвенно),— это экономика без небазовых (непотребных, ложных) потребностей (см. [68, с. 96]).

Тогда пусть алгоритмическая сложность всей экономики — R, и в неё имеется n (конечное число) экономических субъектов.

Для отдельного экономического субъекта получение от остальных причитающегося ему — это процедура перебора из n экономических субъектов[59], см. рис. 18а, сложность r_1 этой процедуры, ввиду сложности всей экономики R, такова:

$$r_1 = n \cdot R. \qquad (55)$$

Отдавать же экономическому субъекту за пользование товарами и услугами (см. [68, с. 62] — рекомбинация товаров и услуг) — это перебирать все подмножества из множества n экономических субъектов (поскольку каждый прямо или косвенно пользуется трудами всех, см. рис. 18б),— алгоритмическая сложность r_2 этой процедуры такова:

[59] Считается, что экономический субъект сам себе тоже должен, например, для отдельного человека: а) должен готовить пищу и употреблять её, б) выполнять самостоятельно требования личной гигиены и т. п.

$$r_2 = n^n \cdot R. \tag{56}$$

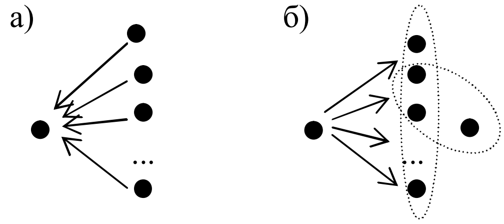


Рис. 18. Процедуры взаиморасчета:
а) получение субъектом причитающегося ему,
б) отдача субъектом должного (прямо и косвенно) другим (множеству подмножеств экономических субъектов)

Общая алгоритмическая сложность процедур взаиморасчёта для экономического субъекта — это сумма двух процедур, которая совпадает со значением алгоритмической сложности всей экономики R (сложность действий отдельного экономического субъекта равна сложности всей экономики, т. к. этот экономический субъект прямо или косвенно связан со всеми остальными экономическим субъектами — со всей экономикой[60]), в итоге имеется выражение:

$$r_1 + r_2 = n \cdot R + n^n \cdot R = R, \tag{57}$$

при сокращении на R

$$n + n^n = 1. \tag{58}$$

Уравнение (58) — это и есть ОЛУ ($x + x^x = 1$), его решение, c_0=0,3036…, даёт относительную сложность процесса получения экономического субъекта ему причитающегося (в других терминах — равновесную долю высвобождаемого ОНВ).

Таким образом, поскольку вначале предполагали, что исходная рыночная экономика — это экономика без небазовых (непотребных) потребностей,— то отклонение от равновесия (безынфляционности) в рыночной экономике связано с наличием в экономике небазовых (непотребных, ложных) потребностей (подробнее о непотребных, ложных, потребностях см. [68, с. 96]).

---

[60] В этом заключается непредикативность рассуждений.

Заключение

Теория множеств с самопринадежностью построена не аксиоматически, а по типу исчисления, выявляющего (в том числе самоссылочно) свойства объектов этой теории, и структур, строимых посредством этих объектов.

Теория множеств с самопринадлежностью является на сегодняшний день (2017 г.) единственной теорией, непротиворечивость которой доказана средствами самой теории.

Приведённое в книге описание оснований теории меры (первая публикация по данной теме — в 2012 г. [74]) хорошо согласуется с построением классического математического анализа, использующего бесконечно-малые величины, как убывающие к нулю переменные, сравнимые (посредством теории предела) по скорости убывания.

На классическое представление об интегрируемых функциях опирается и интегральное представление условных верояностных мер [94], обладающих тем свойством, что с течением времени интегрирования (наблюдения событий) алгебра событий может изменяться[61].

Приложения приведённых в книге результатов к теории вероятностных мер требуют отдельного изложения.

[61] В отличие от неизменной и заранее заданной алгебры событий в аксиоматической теории вероятностей, см. [18]. Наглядно это представимо так: например, в ходе бросаний кубика число сторон его изменяется от 6 непредсказуемо до 7 и далее и обратно.

Послесловие

Осенью 1993 г., в период работы над разделом по истории математики книги [79], было замечено, что наличие самопринадлежащего множества всех множеств не отрицается теоремой Кантора, действующей только на несамопринадлежащие множества. Дальнейшая история написания теории множеств с самопринадлежностью по 2012 г. приведена в [77, с. 114].

Необходимость описания оснований теории меры возникла примерно в 2003 г. при описании упорядоченных структур (пространств, впервые описанных в [53]).

В этой книге приведены результаты, как находившиеся ранее в архиве автора, так и полученные с момента издания [77] и частично опубликованные в отдельных статьях (см. список литературы).

Теоремы о счётной вычислимости неподвижной точки и результаты о трёхмерности задач управления получены в 2012 г.

Представления о свойствах эталона меры первоначально формализованы в 2013–2014 гг.

Идея обращения формулировки теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости принадлежит А. А. Лопатину [26], выдвинувшем её в 2015 г. на семинарском занятии по истории математики.

Непредикативный вывод уравнения равновесия экономики из соображений вычислительной сложности алгоритмов получен в 2015 г.

Теорема о счётной отделимости со следствиями из неё окончательно оформлена в январе 2017 г. и публикуема впервые.

Описание более конкретных приложений приведённых в книге результатов в теории управления, теории вероятностных мер и в прикладной математической экономике выходит за рамки этой книги.

Отзывы о содержании книги отправлять автору на адрес электронной почты chechulinvl@mail.ru

Список литературы

1. *Александров А. Д.* Основания геометрии. М.: Наука, 1987.— 288 с.
2. *Алексеев В.М.* и др. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.
3. *Артёмов С.Н.* Погружение модального λ-исчисления в логику доказательств // Математическая логика и алгебра: труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2003. Т. 242. С.44–58.
4. *Барендрегт Х.* Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика / пер. с англ. Г. Е. Минц. М.: Мир, 1985.— 606 с.
5. *Бессонов А. В.* Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. 2015. Т. 13. Вып. 4. С. 5–14.
6. *Богачёв В.И.* Основы теории меры. Т. 1. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. Москва–Ижевск, 2006. 544 с.
7. *Больаи Я.* Аппендикс // Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей / ред. Норден А. П. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 71–100.
8. *Бурбаки Н.* Теория множеств / ред., пер. с фр. В. А. Успенский. М.: Мир, 1965.— 458 с.
9. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование / Пер. с англ. М.: Наука, 1989.— 208 с.
10. *Гильберт Д.* Математические проблемы // Гильберт Д. Избранные труды. В 2 т. Т. 2. М.: Факториал, 1998. С. 401–466.
11. *Гильберт Д.* Основания геометрии / пер. с нем. Градштейн И. С., ред. Рашевский П. К.М.-Л.: ОГИЗ, 1948.— 492 с.
12. *Гудстейн Р.Л.* Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970.— 472 с.
13. *Евклид.* Начала: в 3 т. / пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовский, при участ. И. Н. Веселовского. М.–Л., 1948–1950.
14. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.— 336 с.
15. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / пер. с нем., ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Изд-во АН СССР, 1985. Серия: Памятники науки.
16. *Кейслер Джером Х.* Основы теории моделей // Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей / пер. с англ. М. Наука, 1982. С. 55–108.
17. *Карри Х.* Основания математической логики / пер. с англ. М.: Мир, 1969.— 568 с.
18. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974.— 120 с.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 624 с.
20. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза: пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина / П. Дж. Коэн. М.: Мир, 1969.— 344 с.
21. *Коэн П. Дж.* Об основаниях теории множеств // Успехи математических

наук. 1974. Т. XXIX. Вып. 5(179). С. 169–176.
22. *Крайзель Г.* Обзор теории доказательств // Крайзель Г. Исследования по теории доказательств / пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 9–113.
23. *Лобачевский Н. И.* Геометрические исследования по теории параллельных линий // Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений в 5 т. Т. 1. М.–Л., 1946. С. 79–127.
24. *Лобачевский Н. И.* О началах геометрии // Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений в 5 т. Т. 1. М.–Л., 1946. С. 187–261.
25. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия // Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений в 5 т. Т. 3. М.–Л., 1951. С. 16–70.
26. *Лопатин А. А., Чечулин В. Л.* Об обращении теоремы Гёделя о непротиворечивости // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 25–27.
27. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Прохоров Ю. В. М.: БРЭ,1995.— 848 с.
28. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику / пер. с англ. М.: Наука, 1984.— 320 с.
29. *Нагорный Н. М.* К усилению теоремы приведения теории алгоритмов // Доклады Академии наук СССР. 1953. Т. 90. №3. С. 341–342.
30. *Нагорный Н. М.* К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики. М. ВЦ РАН, 1995.— 25 с.
31. *Нагорный Н. М.* Одна конструктивная модель классической формальной арифметики // Доклады Академии Наук. 1993. Т. 332. № 1. С. 26–28.
32. *Нечаев В. И.* Числовые системы. М.: Просвещение, 1975.— 199 с.
33. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. В 2 т. М.: Наука, 1990–1991.
34. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М.: Наука,1973.— 400 с.
35. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука.1989.— 448 с.
36. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1991.— 328 с.
37. *Подосетник В.М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины // Вопросы философии. 1954. № 5. С. 77–81.
38. *Понтрягин Л. С.* Оптимизация и дифференциальные игры // Успехи математических наук. 1978. Т. 33. Вып. 6(204). С. 22–28.
39. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983.— 392 с.
40. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: РХД, 2003.
41. *Степанов В. А.* Многозначная логика для описания внешних операций самореферентных формул // Логико-философские штудии. 2012. Т. 9. № 3. С. 30–37.
42. *аль-Фараби.* Трактаты о музыке и поэзии. АН СССР. Алма-Ата: Гылым, 1992.— 456 с.
43. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.-Л., 1947–1949.

44. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств / пер. с англ. Ю. А. Гастева, под. ред. А. С. Есенина-Вольпина. М.: Мир, 1966.— 366 с.
45. *Хайям, Омар.* Трактаты / пер. Б. А. Розенфельд. М.: Изд. вост. лит., 1961.
46. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.— 282 с.
47. *Харари Л.* Теория графов. М.: Мир, 1981.
48. *Хендерсон П.* Функциональное программирование: применение и реализация / пер. с англ. М.: Мир,1983.— 350 с.
49. *Хинчин А. Я.* Простейший линейный континуум // Успехи математических наук, 1949. Т. IV. Вып 2 (30). С. 180–197.
50. *Хлодовский И. Н.* Новое доказательство непротиворечивости арифметики // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. Вып. 6(90). С. 105–140.
51. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. Т. 1 / пер. с англ. М.: Иностр. лит., 1961.
52. *Чечулин В. Л.* О множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2005. Вып. 2(2). С. 133–138.
53. *Чечулин В. Л.* Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4(20). С. 37–46.
54. *Чечулин В. Л.* О кратком варианте доказательства теорем Гёделя // Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: Материалы международ. конф. при ИПМ ДВО РАН, Хабаровск, 2009. С. 60–62.
55. *Чечулин В. Л.* О приложениях семантики самопринадлежности // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3 (29). С. 10–17.
56. *Чечулин В. Л.* О периодичности в строении материи // Актуальные проблемы философии, социологии, политологии и психологии: Материалы 12-й междунар. аспирантской конф. при ПГУ, Пермь, 2009. С. 107–109.
57. *Чечулин В. Л.* О приложениях семантики самопринадлежности // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика. 2009. Вып. 3 (29). С. 10–17.
58. *Чечулин В. Л.* Ограничения информационных методов // Искусственный интеллект: философия, методология, инновации: Материалы III Всерос. конф. МИРЭАМ: Связь-Принт, 2009. С. 47–48.
59. *Чечулин В. Л.* Об одном варианте модельной области лямбда-исчисления // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы 3-й Российской школы-семинара. Иркутск, 2010. С. 112–114.
60. *Чечулин В. Л.* О последовательности 6 исторических этапов появления основных математических понятий // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2 (2). 2010. С. 115–124.
61. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010.— 100 с.
62. *Чечулин В. Л.* О счётности простых деревьев и следствиях из неё // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4 (4). 2010. С. 20–23.

63. *Чечулин В. Л.* О мощности множества всех множеств в теории множеств с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4 (4). С. 18–9.
64. *Чечулин В. Л.* Об одном варианте модельной области лямбда-исчисления // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы 3-й Российской школы-семинара. Иркутск, 2010. С. 112–114.
65. *Чечулин В. Л.* О свободе теории множеств с самопринадлежностью от известных парадоксов наивной теории множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика. 2010. Вып. 1 (1). С. 29–31.
66. *Чечулин В. Л., Налдаева Е. Н.* Особенности информационной системы управления процессом плавки концентратов // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM – 2010). Труды 10-й междунар. конф. Под ред. Е.И. Артамонова, 2010. С. 232–233.
67. *Чечулин В. Л.* О непротиворечивости лямбда-исчисления // В мире научных открытий. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. №1. С. 203–206.
68. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.– 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
69. *Чечулин В. Л.* Развитие понятия причинности в истории науки // Актуальные проблемы Российской философии: Сб. трудов Всеросс. конф. Пермь. 2011. С. 213–216.
70. *Чечулин В. Л.* Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов: моногр. / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011.— 114 с. URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_mps.pdf .
71. *Чечулин В. Л., Налдаева Е. Н.* О линеаризации вблизи оптимума управления качеством // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта, CAD/CAM/PDM: Труды 12-й междунар. конф. / ИПУ РАН. М., 2012. С. 138–139.
72. *Чечулин В. Л.* О предикативности лямбда-исчисления // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. №4(12). С. 76–78.
73. *Чечулин В. Л., Налдаева Е. Н.* К обоснованию вычислимости решения задачи управления качеством // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта. CAD/CAM/PDM: Труды 12-й междунар. конф. ИПУ РАН. М., 2012. С. 137.
74. *Чечулин В. Л.* К обоснованию теории меры // Актульные проблемы математики, механики, информатики – 2012. Сб. тезисов Всеросс. науч.-практ. конф. при ПГНИУ. Пермь, 2012. С. 47.
75. *Чечулин В. Л.* Об одной экономической интерпретации свойства операто-

ра суперпозиции // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012 №2(10). С. 58–59.
76. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.– 112 с.
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf
77. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография; 2-е изд. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012. —126 с. URL:
http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_v_l_sets_with_selfconsidering_second_edition.pdf
78. *Чечулин В. Л.* О счётности последователей типа PN и основаниях теории меры // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 1. С. 37–15.
79. *Чечулин В. Л.* История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.— 166 с.
80. *Чечулин В. Л., Смыслов В. И.* Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.– 194 с. URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_Smyslov_modeli_2013.pdf
81. *Чечулин В. Л.* Изоморфизм недостижимых последователей типа PO и основания теории меры // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №2. С. 36–37.
82. *Чечулин В. Л.* Самопринадлежность: около аксиомы фундирования // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №4. С. 14–18.
83. *Чечулин В. Л.* О трёхмерности задачи управления и её некотором обобщении // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №1. С. 16–18.
84. *Чечулин В. Л.* Общая трёхмерность задач управления и её конкретизация в задачах управления качеством // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №2. С. 73–75.
85. *Чечулин В. Л., Сафонова Д. Н.* Управление процессом ректификации // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта, CAD/CAM/PDM: Труды 13-й междунар. конф. ИПУ РАН. М., 2013. С. 145–149.
86. *Чечулин В. Л., Сафонова Д. Н.* Модель системы конденсации процесса хлорирования // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта, CAD/CAM/PDM: Труды 13-й междунар. конф. ИПУ РАН. М., 2013. С. 244–248.
87. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безынфляционности

экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала: монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.– 162 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf

88. *Чечулин В. Л.* О необходимости непредикативности в основаниях математики // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 6–12.

89. *Чечулин В. Л.* К периодизации истории понятия предела // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 18–29.

90. *Чечулин В. Л.* О счётности множества подмножеств счётного множества в теории множеств с самопринадлежностью // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 13–17. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_statji_2014_1.pdf

91. *Чечулин В. Л.* Об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 66–67

92. *Чечулин В. Л.* Логико-семантические модели в психологии и их приложение / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014.— 142 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_logiko-semanticheskie_modeli_v_psihologii_i_ih_prilozhenie-2.pdf

93. *Чечулин В. Л.* О счётномерных ориентированных пространствах в теории множеств с самопринадлежностью // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 82–84.

94. *Чечулин В. Л.* Об одном определении вероятностной меры // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 68–78.

95. *Чечулин В. Л.* История математики и её методологии (структуры и ограничения) / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015.— 154 с.

96. *Чечулин В. Л.* О жёстком оптимуме безынфляционного состояния экономики // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Материалы VI Международной конференции / Отв. за выпуск А. А. Романова. Изд-во: Омский гос. ун-т им. Ф.М. Достоевского (Омск), 2015. С. 163.

97. *Чечулин В. Л.* Периодичность в строении материи и её отличие от иных структурных закономерностей // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 23–28.

98. *Чечулин В. Л., Мазунин С. А.* О суперпозиции задач в управлении процессом электролиза алюминия // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 34–37.

99. *Чечулин В. Л.* К описанию методики построения системы управления внесением удобрений // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 125–129.

100. *Чечулин В. Л.* О вращении в многомерных пространствах // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 219–220.
101. *Чечулин В. Л.* О нелокальности массы // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 297–298.
102. *Чечулин В. Л., Налдаева Е. Н.* Об особенностях управления сложными химико-технологическими процессами // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 299–308.
103. *Чечулин В. Л., Смыслов В. И.* Построение модели, описывающей дополнительные издержки торгующего экономического субъекта // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 353–359.
104. *Чечулин В. Л., Сафонова Д. Н.* Модель вычисления материального баланса процесса хлорирования редкоземельных металлов // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 381–385.
105. *Чечулин В. Л., Сафонова Д. Н.* Модель оптимизации системы конденсации процесса хлорирования в текущем времени // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 386–398.
106. *Чечулин В. Л., Чирков М. Ю.* О непредикативности символов и обозначений // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 532–534.
107. *Чечулин В. Л.* Счетная (конечная) вычислимость неподвижной точки // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 18–20.
108. *Чечулин В. Л.* Структурный изоморфизм цепи n-деревьев и его приложение // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 21–24.
109. *Чечулин В. Л.* Об обращении теоремы Гёделя о неполноте // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 29–31.
110. *Чечулин В. Л.* О структурах взаимодействия в экономике (структурах лиц) // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 64–70.
111. *Чечулин В. Л.* К обоснованию логического вывода // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 101–105.
112. *Чечулин В. Л., Сибиряков А. В.* Особенности управления качеством процесса флотационного обогащения руд // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта. Труды конф. CAD/CAM/PDM-2015. М.: ИПУ

РАН, 2015.
113. *Чечулин В. Л., Сибиряков А. В.* Об устойчивости алгоритма управления процессом флотации // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта. CAD/CAM/PDM: Труды 16-й междунар. конф. ИПУ РАН. М., 2016.
114. *Чечулин В. Л., Ташкинов Д. А.* К минимизации производства инфляции едиными правилами нормирования прибыли // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. С. 48-55.
115. *Чечулин В. Л.* О непредикативной полноте и предикативной неполноте теорий // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. С. 6–8.
116. *Чечулин В. Л.* К однозначной невозможности первой проблемы Гильберта в теории множеств с самопринадлежностью // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. С. 9–13.
117. *Чечулин В. Л., Лопатин А. А.* К разрешению парадокса Банаха-Тарского // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. С. 14–16.
118. *Чечулин В. Л. Богомягкова В. С.* Негэнтропия и социальные факторы (модели и анализ) / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – 130 с. URL:
http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin-negentropiya-i-socialnye-faktory.pdf
119. *Шварц Л.* Анализ. В 2 т. / пер. с франц. Пугачёв Б. П. М.: Мир, 1972.— 824+528 с.

120. *Aczel Peter.* Non-well-founded sets / Stanford Junior University, Printed in the United States, 1988.— 159 p.
121. *Aczel Peter.* Local Constructive Set Theory and Inductive Definitions // Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics, ed. by G. Sommaruga, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Springer Science, Business Media B.V. 2011. P. 189–207.
122. *Aczel Peter.* What is a set? // Leeds Logic Seminar Leeds, November 24, 2010. URL: http://www.cs.man.ac.uk/~petera/Recent-Slides/what-is-a-set-leeds-nov-2010.pdf (дата обращения: 25.09.2013).
123. *Barwise Jon, Larry Moss.* Hypersets // The mathematical in elligencer. Vol. 13. № 4. 1991. P. 31–41.
124. *Chechulin V. L.* About the selfconsidering semantic in the mathematical logic // Bull. Symbolic Logic. 2010. Vol. 16. P. 111–112 (European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic: Logic Colloquium '09. Sofia, Bulgaria. 2009. July 31–August 5).
125. *Bell John l.* Sets and classes as many // Journal of Philosophical Logic, 2000. Vol. 29. P. 585–601.
126. *Farmer William M., Joshua D. Guttman.* A Set Theory with Support for Partial Functions // Studia Logica, 2000. Vol. 65. P. 59–78.
127. *Farmer William M.* A Set Theory for Mechanized Mathematics // Journal of

Automated Reasoning, 2001. Vol. 26. P. 269–289.
128. *Nelson D.* Recursive functions and intuitionistic number theory // Trans. American Mathematical Society. 1947. V. 61. P. 307–368.
129. *Nelson Edward.* Review of the book: *Gnomes in the fog: The reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s, by Dennis E. Hesseling*, Science Networks – Historical Studies, Vol. 28, Birkhauser, Basel, 2003. // Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society, 2004. Vol. 41. № 4. P. 545–549.
130. *Rathjen Michael.* The Anti-Foundation Axiom in Constructive Set Theories // Proceedings of LLC9, CSLI Publications, 2000. P. 1–21.
131. *Tzouvaras, Athanassios.* Forcing and antifoundation // Arch. Math. Logic. 2005. Vol. 44. P. 645–661.

Указатель имён

Предметный указатель

Научное издание

Чечулин Виктор Львович

**Теория множеств с самопринадлежностью и теория меры
(основания и приложения)**

МОНОГРАФИЯ

Редактор *Н. Е. Петрова*
Корректор *Е. Н. Пермякова*
Компьютерная вёрстка *В. Л. Чечулина*

Подписано в печать 15.05.2017. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 5,35. Тираж 100 экз. Заказ №__

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в ООО «Учебный центр "Информатика"»
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Предыдущие книги В. Л. Чечулина

1. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010.– 100 с. ISBN 978-5-7944-1468-4

2. Чечулин В. Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.– 112 с. ISBN 978-5-7944-1621-3

3. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011.– 114 с. ISBN 978-5-7944-1774-6

4. Чечулин В. Л., Мазунин С. А., Моисеенков М. С. Плоскостность линий моновариантного равновесия в водно-солевых системах и её приложение / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 116 с. ISBN 978-5-7944-1922-1

5. Мазунин С. А., Чечулин В. Л. Высаливание как физико-химическая основа малоотходных способов получения фосфатов калия и аммония / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 114 с. ISBN 978-5-7944-1860-6

6. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В. Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.– 112 с. ISBN 978-5-7944-2012-8

7. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Изд. 2-е, испр.и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.– 126 с. ISBN 978-5-7944-2061-6

8. Чечулин В. Л. История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.— 166 с. ISBN 978-5-7944-2116-3

9. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.– 162 с. ISBN 978-5-7944-2191-0

10. Чечулин В. Л., Смыслов В. И. Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.– 194 с. ISBN 978-5-7944-2273-3

11. Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. – 94 с. ISBN 978-5-7944-2381-5 ISBN 978-5-7944-2382-2 (вып. 1).

12. Чечулин В. Л. Логико-семантические модели в психологии и их приложение // монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014.– 142 с. ISBN 978-5-7944-2450-8

13. Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. – 110 с. ISBN 978-5-7944-2381-5 ISBN 978-5-7944-2541-3 (вып. 2)

14. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс] / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2015. ISBN 978-5-7944-2591-8

15. Чечулин В. Л. История математики и её методологии (структуры и ограничения): монография / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. – 154 с. ISBN 978-5-7944-2654-0

16. Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац.исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. – 106 с. ISBN 978-5-7944-2381-5 ISBN 978-5-7944-2702-8 (вып. 3)

17. Чечулин В. Л. Богомягкова В. С. Негэнтропия и социальные факторы (модели и анализ): монография / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. – 130 с. ISBN 978-5-7944-2818-6