

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Л. Чечулин

**Теория множеств
с самопринадлежностью
(основания и некоторые приложения)**

2-е издание

МОНОГРАФИЯ

Пермь 2012

УДК 519.50

ББК 22.10

Ч 57

Чечулин В. Л.

Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения): монография, изд. 2-е испр. и доп. / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2012. — 126 с.

ISBN 978-5-7944-2061-6

В монографии излагаются основные результаты теории множеств с самопринадлежностью. Подход к описанию оснований введения самопринадлежности в теорию множеств (выдвинута русским математиком Д. Миримановым в 1917 г.), используемый в монографии, имеет гносеолого-философские основания.

В 1-й части приводятся основные теоремы о свойствах множеств с самопринадлежностью, в частности теорема о непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью.

Во 2-й части рассматриваются приложения полученных результатов к решению некоторых математических проблем. Показано, что теория множеств с самопринадлежностью свободна от парадоксов наивной теории множеств, использовавшей только несамопринадлежащие множества. Доказательство теоремы Гёделя в семантике самопринадлежности значительно укорачивается.

В 3-й части уделено внимание нематематическим прикладным аспектам описанных в предыдущих главах результатов. Рассматривается приложение теоремы о трёхмерности пространства с ориентированными осями к построению метода управления качеством технологических процессов, а также к некоторым аспектам экономико-математического моделирования.

Во втором издании добавлены новые результаты и приложения теории? относящиеся к теории права, психологии и другим разделам науки.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

(126 с., 7 табл., 28 рис., библиография 127 наименований.)

УДК 519.50

ББК 22.10

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: *Л. Н. Ясницкий*, д-р. техн. наук, проф., зав. кафедрой прикладной информатики и искусственного интеллекта Пермского государственного педагогического университета; *В. В. Морозенко*, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. информационных технологий в бизнесе Пермского филиала ГУ ВШЭ.

ISBN 978-5-7944-2061-6

© Чечулин В. Л., 2012

Chechulin V. L.

Set theory with selfconsidering (foundation and some applications): monography, 2-nd edition / V. L. Chechulin; Perm State University.— Perm (Russia), 2012.— 126 p.

ISBN 978-5-7944-2061-6

The monograph presents the main results of the theory of sets with selfconsidering. The approach to the description of the grounds selfconsidering introduction to the theory of sets (as proposed by the Russian mathematician Mirimanov in 1917), used in the monograph has epistemological grounds.

In the 1-st part of the book. In this part sets out the main theorems about properties of sets with selfconsidering, in particular — a theorem about the consistency of set theory with selfconsidering.

In the 2-nd part of the book discusses applications of the results to the solution of certain mathematical problems. Shown that the theory of sets with selfconsidering free from the paradoxes of naive set theory, using only unselfconsidering sets. The proof of Godel's theorem in the selfconsidering semantics significantly shortened.

In the 3-rd part of the attention paid to some applied aspects described in the previous chapters results. The application of the theorem on 3-dimension space with axes oriented was considered to the construction method of quality management processes. Also mentioned the application of the same theorem to certain aspects of economic-mathematical modeling.

In 2-nd edition new rezults was added.

The book is intended for researchers, postgraduates and senior students.

Printed by decision editorial and publishing soviet
of Perm State University

Reviewers: Reviewers: Dr., prof. L. N. Yasnitskiy, chief of subfaculty of applied informatics and computer intellect ot Perm state pedagogical university; V. V. Morozenko, docent of subfuculty information technologies in business of Hihg economic school Perm filial

ISBN 978-5-7944-2061-6

© Chechulin V. L., 2012.

Оглавление

Оглавление	4
Из предисловия автора к 1-му изданию	6
Предисловие	6
Часть 1. Основания и основные результаты	7
Глава 1. Гносеологические основания	7
§1. Самоссылочные структуры сознания	7
Глава 2. О множествах с самопринадлежностью	10
§2. Формализация отношения принадлежности	10
§3. Явная запись самопринадлежащих объектов	11
§4. Схема свёртывания	11
§5. Основные определения	11
§6. Свойства $\emptyset$	12
§7. Свойства M	12
§8. Основные теоремы. Непротиворечивость теории	13
§9. О множестве несамопринадлежащих множеств	15
§10. Числовые структуры	17
Глава 3. Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью	19
§11. Простые, конечные, последователи	19
§12. Бесконечные последователи	21
§13. Недостижимые последователи	22
§14. Структурный изоморфизм	22
§15. Самоподобие, пространства	23
§16. Ограничение размерности	26
§17. О связи с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов	28
§18. О несамоподобию множества M	28
Глава 4. Исторические аналогии	30
§19. Последовательность усложнения математических понятий	30
§20. Усложнение представлений о числе и бесконечности	30
§21. Самоописательность в теории множеств	32
Часть 2. Приложения основных результатов	34
Глава 5. О некоторых приложениях семантики самопринадлежности	34
§22. Приложения к λ -теории	34
§23. Приложения к логике	36
§24. Приложения в матлингвистике	41
§25. Приложение в матэкономике	43
Глава 6. Интерпретация теоремы о размерности	44
§26. Интерпретация в терминах теории графов	45
§27. Ориентированные пространства	45
§28. Теорема об ограниченности размерности	46
Глава 7. Обход парадоксов	49
§29. Разрешение парадоксов принадлежности	49
§30. Отсутствие парадокса Кантора	49
§31. Отсутствие парадокса Бурали-Форти	50
Глава 8. Около континуум-гипотезы	51
§32. Краткое доказательство теорем Гёделя	51

§33. Несчётность количества точек на прямой.....	52
§34. Счётность количества обозначений.....	53
§35. Счётность простых деревьев.....	54
§36. О мощности самоподобных множеств.....	54
§37. Дополнение: о мощности множества M	55
Глава 9. Теорема о неподвижной точке.....	56
§38. Формулировка теоремы.....	56
§39. Интерпретация теоремы.....	57
Глава 10. Внематематические приложения результатов.....	60
§40. Приложение теоремы о размерности в теории управления.....	60
§41. Экономические приложения.....	61
§42. Ограничения биологических моделей.....	62
Часть 3. Дополнения.....	64
Глава 11. О представлениях самопринадлежности.....	64
§43. Ограничения в терминах несамопринадлежности.....	64
§44. Попытки обозначения самопринадлежности.....	64
Глава 12. Об иерархии логических структур.....	66
§45. Исторические аналогии.....	66
§46. Невложимость самопринадлежности в простые логики.....	68
Глава 13. Дальнейшие фундаментальные результаты.....	71
§47. О счётности последователей типа $PN(.)$	71
§48. Мощность множества M и множества Рассела.....	72
§49. Самопринадлежащие множества как неподвижные точки.....	73
§50. Свойства структурного изоморфизма.....	74
§51. К обоснованию теории меры.....	78
§52. Свойства конечных множеств.....	78
§53. Об уточнении свойств пустого множества.....	82
§54. Непредикативность определения натуральных чисел.....	84
Глава 14. Дальнейшие прикладные результаты.....	85
§55. О свойстве оператора суперпозиции.....	85
§56. О вращении в многомерных пространствах.....	89
§57. Неподвижные точки и алгебра событий.....	91
§58. Предикативность лямбда-исчисления.....	93
§59. Непротиворечивость лямбда-исчисления.....	97
§60. Моделирование логических схем.....	98
§61. Моделирование нейросетей.....	102
§62. Интерпретация теоремы о стягивании циклов.....	104
§63. Обоснование вычислимости неподвижной точки.....	105
§64. О непредикативных основаниях права.....	106
§65. О непредикативности в психологии.....	109
Заключение.....	113
Послесловие.....	114
Список литературы.....	115
Указатель имён.....	124
Предметный указатель.....	124

Из предисловия автора к 1-му изданию

Предпосылкой написания монографии стал курс лекций по «Философии математики», прочитанный автором в 2007/2008 учебном году студентам-математикам при Соликамском государственном педагогическом институте.

Каждая часть книги имеет содержательную завершённость. В первой части даётся описание оснований и основных результатов теории множеств с самопринадлежностью. Во второй части содержатся внутриматематические приложения основных результатов. Примеры приложений результатов в других областях даны в третьей части.

Предисловие

Во втором издании монографии устранены неточности первого издания, а также приведены дополнительные главы (12, 13) с новыми фундаментальными и прикладными результатами теории.

Логика изложения 1-го издания сохранена, сохранена и нумерация теорем. Таким образом, текст первого издания представляет собой введение в теорию, дальнейшие результаты которой изложены в дополнительных главах второго издания.

Автор благодарит Д. С. Корепанову за содержательные рассуждения о пустом множестве, а также А. А. Волочкова за внимательное изучение 1-го издания книги и высказанные предложения по его улучшению.

Часть 1. Основания и основные результаты

Глава 1. Гносеологические основания

§1. Самоссылочные структуры сознания

Онтологические основания нижеследующих рассуждений весьма очевидны: имеется окружающий мир, в котором находится сознание человека, внутри сознания содержится описание окружающего мира, включающего как самого человека, так и само описание окружающего мира. То есть внутри описания мира находится некоторое самоссылочное (непредикативное) ядро описания (см. рис. 1а). Эта самоссылочность в описании мира проявляется на весьма высоких уровнях абстракции, которые явны при более подробном гносеологическом анализе описания мира. (О критериях истины в таком описании см. [106, §2]).

В собственно онтологическом плане имеются три составляющие:

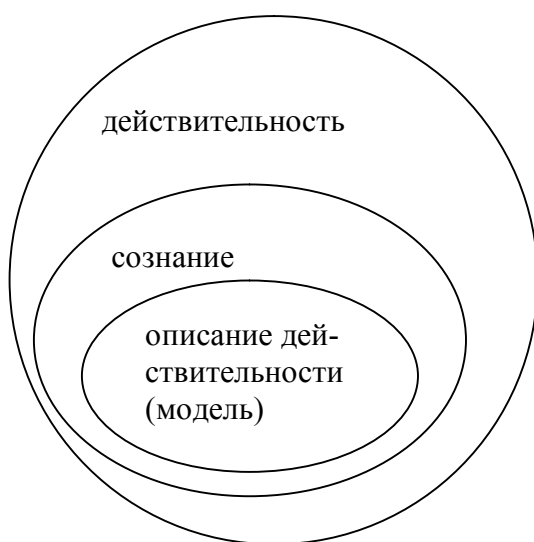


Рис. 1а. Онтологическая иерархия

сознание, время (и упорядоченные в нём информационно логические структуры) и материя. Это связано с трёхсоставностью действительности: сознание, информация (организованная во времени), материя. При этом закономерности каждой составляющей своеобразны [76]. Место математики — в средней составляющей реальности. Такое устройство реальности соответствует ступеням познания истины [33]: i) непосредственное созерцание (в сознании), ii) логические рассуждения (информация, во времени), iii)

практическая деятельность (во внешнем материальном мире).

Такая последовательность выдержана и в этой работе — от непосредственного созерцания самопринадлежности к формализуемым математическим рассуждениям и далее к практическим приложениям полученных математических результатов. Место математики в средней области онтологических составляющих — между сознанием и материей. (Как сказано далее в главе 11, самоссылочность, самопринадлежность — это абстракции, не выражимые в материальной форме, но и не сознание). Математика имеет надматематические основания в высшей (созерцательной) онтологической области.

При этом критерий истинности в математике — это не просто непротиворечивость, но непротиворечивость, основанная на истинном созерцании оснований, а также влекущая полезные практические прило-

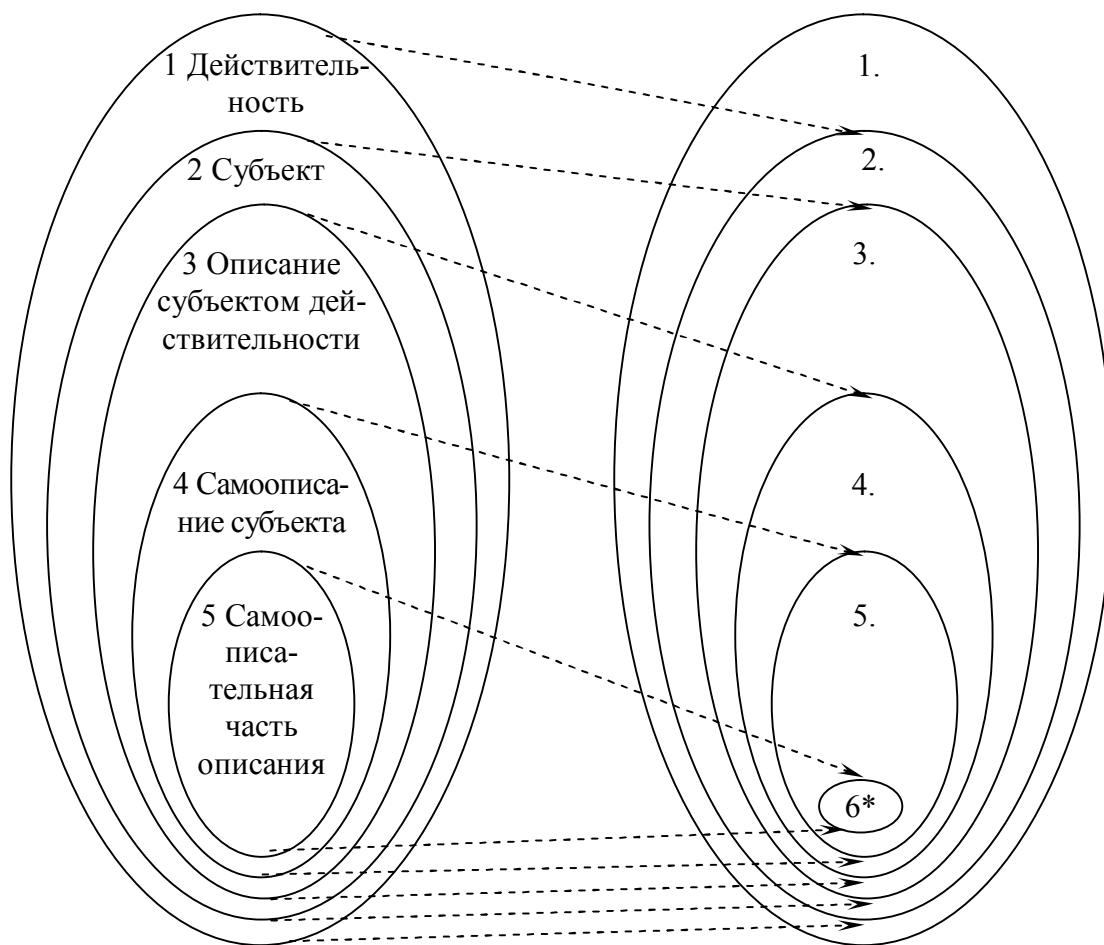


Рис. 16. Схема отражения мира в самоосознании.

* 6 — самоописание субъекта в самоописательной части описания мира

жения.¹

Последовательная схема отражения действительности в сознании представлена на рис. 16 [76]. Высший уровень отражения — 6-й — необходимо самоссылочен (непредикативен). Не углубляясь в гносеологический анализ схемы отражения, можно заметить, что при анализе процесса познания (отражения действительности) видно, что т. к. самоссылочные структуры имеются в сознании, то тем более самоссылочность уместна и в математических структурах.

О допустимости самопринадлежности в теории множеств было известно с начала XX в. "Впервые внимание к <экстраординарным множествам> привлёк Д. Мириманов²" [40, с. 117], оставаясь в рамках

¹ См. подробнее [106, §2].

² *Mirimanoff D.*, Les antinomies de Russel et de Burali-Forti et le probleme fondamental de la theorie des ensembles // *L'Enseignement Mathematiques*, 1917, vol. 19, 37-52.

Mirimanoff D., Remarques sur la theorie des ensembles et les antinomies cantorienes // *Ibidem*, 1921, vol. 21, 29-52. (указано по: [40]; см. список литературы).

наивной теории множеств. Аксиоматизация теории множеств была связана в основном с попыткой избавиться от рассмотрения множеств с самопринадлежностью³.

Однако при рассмотрении множеств с самопринадлежностью не возникает противоречий и открываются весьма неожиданные свойства этих объектов мысли.

³ В теории множеств, хотя было известно (с 1917 г.) о существовании самопринадлежащих множеств: $s \in s$, названных экстраординарными [40, с. 117], была предложена Цермело (в 1925 г.) и фон Нейманом (позже) аксиома фундирования, исключающая из рассмотрения такие множества [40, с. 118]. Аксиома эта была измышлена из предположения ("предрассудка"), что якобы "единственным первичным конститuentом (составляющим, constituent) любого множества оказывается пустое множество [40, с. 117].

Глава 2. О множествах с самопринадлежностью

§2. Формализация отношения принадлежности

Прежде чем формально рассматривать самопринадлежащие множества, следует определиться с интуитивным пониманием объекта и отношения принадлежности (отношения части и целого).

Объекты мысли (но не мыслящего и не саму мыслимую мысль) можно мыслить как единое или как многое, или как единое-многое. Возможности мыслимости объектов отображены в табл. 1.

Таблица 1. Диалектика единого и многого

Обозначение	Пояснение
$[...]$	Брать нечто как единое, взятое — единое
$\{...\}$	Брать нечто как многое, взятое — многое
$a = \{... a\}$	Брать нечто (a) как единое-многое, взятое — единое-многое
$[[...]] = [...]$	Брать единое как единое, взятое — единое
$[\{...\}] = [...]$	Брать многое как единое, взятое — единое
$a = \{... a\}, [a] = a$	Брать единое-многое как единое, взятое — единое-многое
$\{[...]\} = [...]$	Брать единое как многое, взятое — единое
$\{\{...\}\} = \{...\}$	Брать многое как многое, взятое — многое
$a = \{... a\}, \{a\} = a$	Брать единое-многое как многое, взятое — единое-многое

При рассмотрении диалектики единого, многого и единое-многого в плане взаимного содержания, взаимосвязи частей и целого созерцательно таковы, как указано в табл. 2.

Таблица 2. Отношение части и целого

Обозначение	Пояснение
$[x] \in \{... x\}$	Единое во многом. (Отношение принадлежности)
$x \subseteq \{...\}$, каждый y из x — в $\{...\}$	Многое во многом. (Отношение включения, подмножество)
	Единое-многое во многом; единое-многое в едином. (Отношение и принадлежности и включения)

При формализации этих интуитивно ясных отношений и выстраиваются операции с самопринадлежащими множествами.

§3. Явная запись самопринадлежащих объектов

Пример. Пусть $A = \{a, A\}$, $A \in A$, множество подмножеств A таково: $\text{Exp}(A) = \{\{a\}, \{a, A\}, \{A\}\} = (\text{раскрытие самопринадлежащего едино-многого объекта } A) = \{\{a\}, \{a, A\}, \{a, A\}\} = (\text{удаление подобных обозначений}) = \{\{a\}, \{a, A\}\} = (\text{раскрытие многих, взятых как многое, в одно многое}) = \{a, a, A\} = (\text{удаление подобных обозначений}) = \{a, A\} = A.$

§4. Схема свёртывания

Определение 1. Множество всех множеств M — множество, содержащее все объекты, рассматриваемые как связанные между собой отношением принадлежности.

Схема свёртывания, схема выделения объектов из M такова: A содержит объекты x из M , такие, что выполняется условие $L(x)$, причём т. к. пустое множество принадлежит (формально) любому объекту из M , то возможность несуществования объекта A , при невыполнении условия $L(x)$ на всех объектах из M оговаривается отдельно, условием $(x \in \emptyset)$:

$$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } L(x)\}.$$

Таким образом, теория множеств с самопринадлежностью есть некоторое исчисление множеств (объектов), ограниченное замкнутой областью M ⁴.

Посредством схемы свёртывания операции с множествами записываются следующим образом:

Объединение множеств A и B —

$$A \cup B = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } (x \in A \text{ или } x \in B)\}.$$

Пересечение множеств A и B —

$$A \cap B = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in B)\}.$$

Множество подмножеств множества A —

$$\text{Exp}(A) = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } (x \subseteq A)\}.$$

§5. Основные определения

Определение 2. A — подмножество множества B , если всякий объект из A принадлежит B .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow x \in B.$$

Определение 3. Множество всех подмножеств некоторого объекта A обозначается $\text{Exp}A$.

$$\text{Exp}(A) = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } x \subseteq A\}.$$

Очевидно, что $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$.

⁴ См. далее свойство M : $\text{Exp}(M) = M$.

§6. Свойства $\emptyset$

*Свойства пустого множества*⁵

1. $\emptyset$ — самопринадлежаще (формально⁶), очевидно, $\emptyset \in \emptyset$.

2. $\emptyset$ принадлежит любому объекту из M (формально), что выражено в схеме свёртывания:

$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или "условие, задающее объект } A"\}$.

3. $\emptyset$ — единственно.

*Доказательство*⁷ (формальное). Пусть $\emptyset'$ и $\emptyset$ — пустые множества, тогда по свойствам 1 и 2 (т. к. оба множества самопринадлежащи) и т. к. $\emptyset' \in \emptyset$ и $\emptyset \in \emptyset'$, по теореме о транзитивности принадлежности имеем $\emptyset' \subseteq \emptyset$ и $\emptyset \subseteq \emptyset'$, значит, $\emptyset = \emptyset'$, т. е. разные обозначения обозначают одно и то же, $\emptyset$ — единственно. $\square$

4. Множество подмножеств пустого множества пусто. $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$.

Доказательство (формальное). $\text{Exp}(\emptyset) = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } x \subseteq \emptyset\} \in \emptyset$. $\square$

§7. Свойства M

Свойства множества всех множеств

1. M — самопринадлежаще, $M \in M$.

Доказательство. По определению множества всех объектов, т. к. множество всех множеств тоже некоторый объект, этот объект самопринадлежащ. $\square$

2. Если A — некоторый объект из M , $A \in M$, то $A \subseteq M$.

Доказательство. Если $x \in A$, то, по определению M , $x \in M$ (для всех x из A), по определению подобъекта, $A \subseteq M$. $\square$

3. Если A — некоторый объект из M , и $M \in A$, то $A = M$. ("Переполнимость" любого объекта из M объектом M , неограничиваемость объекта M подобъектами, его "максимальность").

Доказательство. По условию $A \in M$ (с учётом особенности $M \subseteq M$); $M \in A$, по теореме о транзитивности принадлежности $M \subseteq A$; по объединению формул $A = M$. $\square$

4. M — единственно.

Доказательство. Если бы объект M' был бы тоже множеством всех множеств, то по определению этот объект содержал бы M и наоборот (по определению объекта M) содержался бы в M : $M' \in M$ и $M \in M'$; т. к. M и M' — самопринадлежащи, по 1-му свойству и по теореме о тран-

⁵ Несуществования (ничто), обозначаемого существующим символом.

⁶ Содержательно: ничто только из ничто и состоит (в несуществующем только не-существование, и нет в нём существующего).

⁷ Содержательно ясно, что ничто — единственно.

зитивности отношения принадлежности для самопринадлежащих множеств, то $M \subseteq M'$ и $M' \subseteq M$, значит, речь при разных обозначениях идёт об одном объекте. Объект M — единственен, с точностью до обозначения. $\square$

5. M тождественно множеству всех своих подмножеств, $M = \text{Exp}(M)$.

Доказательство. По определению множества подмножеств (опред. 3) $M \subseteq \text{Exp}(M)$; по определению M , $\text{Exp}(M) \subseteq M$; по объединению формул $M = \text{Exp}(M)$ ⁸. $\square$

§8. Основные теоремы. Непротиворечивость теории

Транзитивность принадлежности. Недополнимость. Непротиворечивость.

Диалектика единого и многого, являющаяся основанием рассуждения о множествах, указана в табл. 1, 2.

Единое, многое и едино-многое в их комбинациях образуют формально выразимую алгебру скобок $[.]$ и $\{.\}$, описанную в левом столбце табл. 1.

Пусть множество A самопринадлежаще, $A \in A$, и пусть A принадлежит B , $A \in B$, тогда в записи посредством скобок:

$B = \{... [A]\} = (\text{раскрытие квадратных скобок, табл. 1}) = \{... A\} = (\text{замена самопринадлежащего } A \text{ его содержимым } A = \{... A\}) = \{... \{a_i ... A\}\}^9 = (\text{раскрытие скобок } \{.\}, \text{ "многое во многом есть многое"}) = \{..., a_i, ... A\}$.

Пример. $A = \{a, b, A\}$, $B = \{c, d, A\}$. Тогда $B = \{c, d, A\} = (\text{замена } A = \{... A\}) = \{c, d, \{a, b, A\}\} = (\text{раскрытие скобок}) = \{c, d, a, b, A\} = (\text{те же замены, что и ранее}) = \{c, d, a, b, a, b, A\} = (\text{вычёркивание повторений}) = \{c, d, a, b, A\}$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1 (О транзитивности принадлежности). Объекты, принадлежащие самопринадлежащему объекту A , который принадлежит B , принадлежат объекту B . $A \in A$, $A \in B \Rightarrow \forall a_i \in A \ a_i \in B$. $\square$ ¹⁰

Теоремы о неполноте подмножества в M и неделимости самопринадлежащего объекта.

⁸ Теорема Кантора о порядке множества подмножеств (см., напр., [9]) справедлива только для несамопринадлежащих множеств.

⁹ Где $a_i \in A$.

¹⁰ Содержательно вытекает из интуитивного определения отношений частей и целого, самопринадлежащий объект представляет собой открытость, через самопринадлежащее, целое частей, составляющих это целое.

Теорема 2 (о недополнимости объекта в M). M — множество всех множеств. Для любого существующего объекта в M не существует дополнения до M .

Доказательство. Пусть A объект, $A \in M$, возможны случаи:

1. $A = \emptyset$, тогда A — не объект ($\emptyset$ означает несуществование, но не существующий объект).

2. $A \neq \emptyset$ и $M \notin A$. Попытаемся построить дополнение B к A в M , т. е. попытаемся собрать все объекты, не принадлежащие A , "внешние" по отношению к A , в одно множество B .

$B = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } x \notin A\}$, $M \notin A$, значит, $M \in B$, т. е. $B = M$ и $A \in B$. Дополнение "поглощает" дополняемый объект. Попытка неудачна. Утверждение теоремы доказано.

3. $A = M$, очевидно, $B = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } x \notin A\} = \emptyset$, что означает несуществование (отсутствие) дополнения к M в M . $\square$

Следствие. Множество всех объектов M невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся объектов. M неделимо на части.

Теорема 3 (о неделимости самопринадлежащего объекта). Любой самопринадлежащий объект целокупен, т. е. неделим на две (и более) непересекающиеся части.

Доказательство. Пусть $A \in M$. Возможны случаи:

1. $A = \emptyset$. Предельный случай, формально $\emptyset \in \emptyset$, $\emptyset$ единственно, — "ничто" неделимо.

2. $A \neq \emptyset$. Доказательство подобно доказательству теоремы о недополнимости объекта в M . Попытка "дополнить" любой, отличный от A и $\emptyset$, объект B из A в A — неудачна. В выстраиваемом дополнении присутствует собственно объект A , объемлющий дополняемый объект B . $\square$

Следствие. Для любого существующего объекта B из самопринадлежащего объекта A в A не существует дополнения.

Доказательство очевидно. $\square$

Теорема 4 (о непротиворечивости). Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в M объекты, — непротиворечива.

Доказательство

Если высказыванием L описан объект A , то отрицание этого высказывания описывало бы дополнение B к объекту A в M , но по теореме о недополнимости это невозможно, следовательно, высказывания об объектах из M непротиворечивы. ¹¹ $\square$

¹¹ Известно [24, с. 154–155], что если существует сильно недостижимый кардинал β , то есть такой, что $\forall \alpha < \beta, 2^\alpha < \beta$, то в теории множеств существует внутренняя модель. *см. след. стр. —>*

Существует, однако, ограничение: эти высказывания об объектах из M не могут быть получены формальным выводом из некоторых аксиом.

Пример. Пусть A — множество, содержащее как объекты все несамопринадлежащие множества, тогда A — самопринадлежаще (если $A \notin A$, то $A \in A$), внутренность¹² множества A тоже самопринадлежаща, и т. д. по всем множествам ряда внутренностей A . A — недостижимый объект:

$$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset \text{ или } x \notin x) \text{ либо } (x = a, a \in a, a \in A, P^\alpha(a) = A, \text{ где } \alpha \text{ — число})\} \notin \emptyset.$$

Объект, полученный отрицанием высказывания в схеме выделения, не существует, очевидно,

$$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset \text{ или } x \notin x) \text{ эквив. } (x = a, a \in a, a \in A, P^\alpha(a) = A, \text{ где } \alpha \text{ — число})\} \in \emptyset.$$

В M -теории верно первое высказывание о множестве, содержащем все несамопринадлежащие множества. Однако объект, содержащий только самопринадлежащие внутренности объекта A , тоже существует:

$$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } (x = a, a \in a, a \in A, P^\alpha(a) = A, \text{ где } \alpha \text{ — число})\} \notin \emptyset, \text{ в этом случае } A \text{ — недостижимое бесконечное число.}$$

§9. О множестве несамопринадлежащих множеств

Пусть M — множество всех объектов (множеств). Выделим в M множество A , содержащее все несамопринадлежащие множества. В первом приближении A таково:

$$A = \{ [x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } x \notin x \}. \quad (1)$$

Но тогда $A \notin A$, значит по словесному определению $A \in A$, т. е. (1) перепишем как

$$A = \{ [x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x \notin x \text{ либо } x = A) \}; \quad (2)$$

дель самой теории множеств, что позволяет доказать непротиворечивость теории множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля (ZF), однако существование недостижимых кардиналов не следует из аксиоматики ZF [8], [24], поэтому рассуждения о недостижимых кардиналах в теории множеств без самопринадлежности более гипотезы, чем доказуемые утверждения. При рассмотрении теории множеств с самопринадлежностью выполняются условия, аналогичные свойствам недостижимых кардиналов, и доказуема непротиворечивость теории.

В теории множеств с самопринадлежностью множество всех множеств M совпадает со множеством всех своих подмножеств, но не совпадает со множествами подмножеств любого своего собственного подмножества — $\text{Exp}(M) = M$, но $\forall A \subset M$ ($M \notin A$) $\text{Exp}(A) \neq M$, ($M \notin \text{Exp}(A)$). То есть утверждение, аналогичное утверждению о недостижимом кардинале, выполнено. Однако непротиворечивость теории множеств с самопринадлежностью доказывается из несколько других соображений, что описано выше.

¹² См. след. сноску.

однако внутренность¹³ такого объекта A , $V(A)$ описываема по формуле (1), значит, объекту A , содержащему все несамопринадлежащие объекты, принадлежат и все внутренности самого объекта A (причём ряд внутренностей не обрывается¹⁴):

$$A = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x = a, a \notin a, a = V^\alpha(A), \text{ где } \alpha \text{ — число})\}. \quad (3)$$

Таким образом, объект, содержащий все несамопринадлежащие множества,— самопринадлежащ и содержит все свои внутренние подобъекты.

К тому же множество всех подмножеств объекта A совпадает с ним самим, $\text{Exp}(A) = A$,— если $X \subseteq A$ и $X \notin X$, то $X \in A$ по определению A (3) (см. табл. 1, 2); если же $X \subseteq A$ и $X \in X$, то X совпадает с некоторым внутренним объектом из A или с A , т. е. по определению A (3), $X \in A$.

В теории с самопринадлежностью множеств парадокс Расселла отсутствует.

Рассуждение. Словесной формулировки недостаточно для однозначного выделения объекта из M , требуется формализованная конкретизация, причём кроме первоначально сформулированного словесно условия объект может обладать (объективно) и другими свойствами — содержать помимо выделяемых и иные объекты. В рассуждениях о множестве несамопринадлежащих множеств первоначальная словесная формулировка формализована (переведена на математический язык) в формуле (1), в следующей формуле (2) условие конкретизировано (не применительно к словесным выражениям естественного языка, но применительно к естеству M -теории), окончательно объект выделен, построен, по объективно существующей структуре объекта M — формула (3). Рассуждения об объектах (множествах) возможны при признании существования объекта M (множества всех множеств) в явном виде, полностью не описываемого и не формализовываемого.

Рассуждая логически (см. теорему о непротиворечивости), в логике, вложимой в M -теорию, невозможно построить утверждение, отрицающее себя. Утверждения, отрицающие себя¹⁵ (несамопринадлежащие объекты), содержатся в некотором самоутвердительном утверждении (самопринадлежащем объекте).

Интуитивного представления о числе как о порядковом типе (вполне упорядоченной структуре) достаточно для интуитивного понимания отсутствия в теории с самопринадлежащими множествами пара-

¹³ $V(A) = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x \notin A \text{ и } A \notin x)\}$ — внутренность объекта A ,— объект, содержащий все объекты из A , кроме самого A . Для несамопринадлежащих множеств внутренность совпадает с самим объектом: $X \notin X$, значит, $V(X) = X$.

¹⁴ Условие обрыва минимальных цепей отсутствует в теории M .

¹⁵ При интерпретации отношения принадлежности $\in$ как импликации $\Rightarrow$.

докса Рассела.

§10. Числовые структуры

Интуитивно самопринадлежность наблюдается при счёте моментов времени, единица — "сейчас" состоит из "сейчас", двойка — из "бывшего" и "сейчас", но "бывшее" когда-то было "сейчас", тройка — из "бывшего раньше", "бывшего" и "сейчас"; каждый момент бытия заключён в бытии — самопринадлежащ. Числа (при счёте во времени) самопринадлежащи:

единица состоит из единицы и ничто;

двойка — из единицы, двойки (себя самой) и ничто¹⁶;

тройка — из единицы, двойки, тройки (себя самой) и ничто;

$1 \in 1, \emptyset \in 1,$

$1 \in 2, 2 \in 2, \emptyset \in 2,$

$1 \in 3, 2 \in 3, 3 \in 3, \emptyset \in 3, \dots$

$1 = \{1\}, \emptyset \in 1,$

$2 = \{1, 2\}, \emptyset \in 2,$

$3 = \{1, 2, 3\}, \emptyset \in 3, \text{ и т. д.}^{17}$

¹⁶ То же при счёте на пальцах: два загнутых пальца — это двойка, но не две единицы (единица — загнутый мизинец) — пальцы не поменять местами (как при счёте на палочках — палочки).

¹⁷ Определение числа в теории множеств с самопринадлежностью формализуется посредством понятия последователя к множеству (объекту).

Определение. Последователь объекта А содержит объект А и себя же самого;

$P(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } P(A) \in [x])\}$

Если последователь простой (единичный), то

$P(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } [x] = P(A))\}.$

Свойства последователей.

1. Формально, единичный объект — это последователь для ничто; $[a] = P(\emptyset)$; (двойственность к особенности внутренности единичного объекта).

2. Последователь для М не определён (по единственности М).

Формально $P(M) = \emptyset$, что означает: М — не расширяемо последователями, ограничено.

3. Последователь вообще не единственен (для объекта иного, чем М); $[a] \in M$, и $M \not\in a$, $P_1(a) \neq P_2(a)$ (однако, очевидно, внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$).

4. Все простые последователи, построенные по определённому выше типу Р, — конечны.

$[a]$, $P([a])$, $P(P([a]))$ и т. д. — конечны. Добавлением единицы (без абстракции бесконечности) можно построить (выделить в М) только конечные числа.

Натуральные числа — это ряд последовательных последователей к единичному объекту.

см. след. стр. —>

Таким образом, понятие о числах, упорядоченных структурах, определяется из теории множеств естественно.

Очевидно, что множество N , содержащее все натуральные числа, — несамопринадлежаще $N \notin N$ ¹⁸.

Формализация же в теории множеств с самопринадлежностью, понятий о бесконечных числовых, структурах достаточно пространна и описана в следующей главе.

Вообще же если C — множество-число, то $C \in C$ и, для любых двух объектов a, b из C , $a \in a$, $b \in b$, $a \in b$ или $b \in a$; число — нить вложенных друг в друга отношений принадлежности (без ветвлений) объектов.

¹⁸ Т. е. $[N]$ — единичное множество, может быть началом новой линии счёта. Однако этим замечанием следует пока ограничиться.

Глава 3. Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью

В этой главе продолжено краткое описание понятий о бесконечных числовых (упорядоченных) структурах в теории множеств с самопринадлежностью.

§11. Простые, конечные, последователи

Определение натурального числа (см. §10) в теории множеств с самопринадлежностью формализуемо посредством понятия последователя к множеству (объекту).

Определение 4. Простой последователь объект A содержит объект A и себя самого, $P(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } P(A) \in [x])\}$.

Если последователь простой (единичный), то $P(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } [x] = P(A))\}$.

Свойства последователей

1. Формально: единичный объект — это последователь для «ничто»; $[a] = P(\emptyset)$ (двойственность к свойству внутренности единичного объекта);
2. Последователь для M не определён (по единственности M), формально $P(M) = \emptyset$, что означает: M не расширяемо последователями, ограничено.
3. Последователь вообще не единственен (для объекта иного, чем M); $[a] \in M$, и $M \not\subseteq a$, $P_1(a) \neq P_2(a)$ (однако, очевидно, внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$).
4. Все простые последователи, построенные по определённому выше типу P , — конечны. $[a]$, $P([a])$, $P(P([a]))$ и т. д. — конечны. Добавлением единицы (без абстракции бесконечности) можно выделить в M только конечные числа.

Натуральные числа — это ряд последовательных последователей к единичному объекту. Вообще же если C — *множество-число*, то $C \in C$ и для любых двух объектов a, b из C , $a \in a$, $b \in b$, $a \in b$ или $b \in a$; т. е. число — это *нить* вложенных друг в друга отношением принадлежности (без ветвлений) объектов.

Определение 5. Внутренность объекта A содержит объекты, принадлежащие объекту A , за исключением самого объекта A ; $V(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ и } A \notin V(A))\}$.

Свойства внутренностей

1. Внутренность единичного объекта — ничто; $V([a]) = \emptyset$,
2. Внутренность для M не определена — формально ничто, $V(M) = \emptyset$, т. е. объект M , множество всех множеств не имеет ни последователей,

ни внутренностей¹⁹.

3. Внутренность объекта — единственна.

3.1 Для несамопринадлежащего объекта внутренность объекта совпадает с самим объектом. $V \notin V$, следовательно, $V(V) = V$ (см. определение внутренности).

3.2 Для самопринадлежащего объекта внутренность объекта — единственна. $A \in A$, по определению внутренности $V(A)$ либо а) самопринадлежаща, $V(A) \in V(A)$, тогда она единственна (единственен самопринадлежащий объект $V(A)$ по содержанию понятия о самопринадлежности, см. табл. 1, 2), либо б) несамопринадлежаща, $V(A) \notin V(A)$, также очевидна единственность несамопринадлежащего множества $V(A)$; в) либо ничто, $V(A) = \emptyset$.

4. Внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$.

Пример. $1 \in 1, \emptyset \in 1,$

$1 \in 2, 2 \in 2, \emptyset \in 2,$

$1 \in 3, 2 \in 3, 3 \in 3, \emptyset \in 3, \dots$

$1 = \{1\}, \emptyset \in 1,$

$2 = \{1, 2\}, \emptyset \in 2,$

$3 = \{1, 2, 3\}, \emptyset \in 3, \text{ и т. д.}^{20}$

$P(1) = 2, P(2) = 3, V(3) = 2.$

Легко определяются n -е последователи: $P(P(a)) = P^2(a)$ и т. д. и n -е внутренности $V(V(a)) = V^2(a)$, где n — натуральное число, изображимое последователем $P^n(\emptyset)$; в общем случае для простых последователей

¹⁹ Хотя можно ввести иерархию единичных объектов, взяв мысленно объект M как единое следующего уровня единства, как единичный объект, $]M[$, однако тогда придётся постулировать бытие многих единичных объектов $]M_i[$, аналогичных объекту $]M[$, что противоречит свойству единственности множества всех множеств M (см. выше); но даже допустив, внелогично, мыслимость неединственности множества таких единичных объектов $]M_i[$, должно было бы заключить, что они принадлежат множеству всех множеств следующего уровня иерархии $M1$, совпадающего, однако, по структуре при всей изолированности структур множеств $]M_i[$ со структурой множества всех множеств M и при изолированности, несвязанности отношением принадлежности объектов из разных множеств $]M_i[$ и $]M_j[$ (по определению единичных объектов) ($i \neq j$) и из $M1$, не получили бы качественно новых, структурно различных объектов (см. ниже определение самоподобия) — не добавили бы ничего качественно нового к описанию самопринадлежащих объектов, поэтому остаётся ограничиться рассмотрением обычного множества всех множеств.

²⁰ В этой записи два обозначения "3" справа и слева от знака равенства обозначают один и тот же объект (определение самопринадлежащего множества самоссылочно, непредикативно).

$V^n(P^n(a)) = a$, но возможно $P^n(V^n(a)) \neq a$, например $P^5(V^5(P^3(\emptyset))) = 5$ ²¹.

Вообще можно рассматривать и разные ветвящиеся структуры и циклы простых последовательностей, аналогичные ориентированным графам, однако при рассмотрении более сложных структур, имеющих практическое приложение, остаётся ограничиться рассмотрением числовых (вполне упорядоченных) структур.

§12. Бесконечные последовательности

Натуральный ряд в M выделяется как множество простых последовательностей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] = P^n(\emptyset), \text{ где } n \in N \text{ и } P(V(P(x))) = x) \}^{22}.$$

Свойства натурального ряда

1. Натуральный ряд — не единственен.
2. N — несамопринадлежаще, $N \notin N$.
3. Внутренность натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, $V(N) = N$, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам ²³.

Имеются две возможности рассмотрения последовательностей к натуральному ряду N (N — как единичное либо как многое):

1. Простой последователь к N как к единичному объекту $[N]$, $P([N])$; $[N]$ — единичный объект изоморфен единице $[N] \cong [1]$, $P([N])$ — двойке, такое рассмотрение выявляет структуру изоморфную натуральному ряду, но новых структур не выявляет.

2. Бесконечный последователь — последователь к множеству всех объектов из N , последователь к натуральному ряду, взятому как многое, $\{N\}$: $PN = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in N \text{ либо } x = PN(\emptyset)) \}$.

Свойства бесконечного последователя PN :

- 1) вообще PN не единственен,
- 2) PN — самопринадлежащ,
- 3) $V(PN(\emptyset)) = N$.

Так же, как и для счётных последовательностей, определимы n -е бесконечные последователи типа PN : $PN(PN(\emptyset)) = PN^2(\emptyset)$ и т. д., и беско-

²¹ В арифметике натурального ряда (без дополнительных конструкций) нет отрицательных чисел, арифметическая запись этого выражения $3-5 = 0$, $0+5 = 5$.

²² Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

²³ Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающая и совпадает с самим натуральным рядом.

нечные последователи:

$$PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset) = \{ [x] \in M \mid [x] \in \emptyset \text{ или } (x = (PN^\alpha(\emptyset)), \alpha \in PN(\emptyset)) \} \text{ и т. д.}$$

§13. Недостижимые последователи

Выделим бесконечный ряд последовательных простых и бесконечных последователей PN:

$$\emptyset, P(\emptyset), \dots, PN(\emptyset), P(PN(\emptyset)), \dots, PN^2(\emptyset), \dots, PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset), \dots \quad (4)^{24}$$

выделим в записи последовательности только некоторые объекты (последовательность бесконечных последователей PN):

$$\emptyset, PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset), \dots, PN^{PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset)}(\emptyset), \dots, PN^{PN^{PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset)}(\emptyset)}(\emptyset), \dots \quad (5)$$

Объект $PO(\emptyset)$, содержащий все объекты такого ряда, — самопринадлежащ (если нет, то к нему можно построить последователь по типу $P(PN(\emptyset))$ и, значит, он объект из этого же ряда), причём ряд его внутренностей не обрывается²⁵, объект $PO(\emptyset)$ — недостижимый объект. По аналогии, рассматривая ряды из последователей вида $PO(\emptyset)$ и их $PO(\emptyset)$ степеней, можно выделить объект $P1O(\emptyset)$, содержащий все такие последователи, и т. д., построив бесконечный ряд $PO, P1O, P2O$ и т. д., — неостанет счётного ряда для нумерования уровней недостижимости объектов, придётся использовать для нумерации недостижимые же последователи и т. д. — получаются структуры, аналогичные недостижимым последователям (кардиналам), рассматриваемым в классической теории множеств (см.: [8; 25]).

Увеличение уровня недостижимости перестаёт добавлять качественно новое в структуру объектов; следующий уровень сложности (бесконечности) объектов — объекты самоподобные, структурно-изоморфные своей собственной части.

§14. Структурный изоморфизм

Определение 6. Два объекта структурно изоморфны, если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^e B$ если $A \cong B$ и если для любых $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, (a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Пример. Объекты $A = \{[a], A\}$ и $2 = \{1, 2\}$ — структурно изоморфны, объекты A и $C = \{[c_1], [c_2]\}$ — изоморфны, но не структурно ($A \cong^e C$), $A \not\cong [a]$.

Теорема 5 (об изоморфизме множеств подмножеств). Если два множества структурно изоморфны друг другу, то множества их под-

²⁴ $P(PN(\emptyset))$ в иной записи — это счётная бесконечность плюс единица, $\omega+1$.

²⁵ См. выше (глава 2) подобные рассуждения при выделении множества, содержащего все несамопринадлежащие множества.

множеств также структурно изоморфны между собой,
 $A \cong^e B \Rightarrow \text{Exp}(A) \cong^e \text{Exp}(B)$.

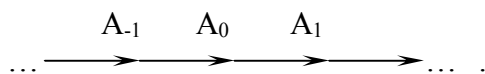


Рис. 2. Структура порядка прямой

Доказательство следует из определений структурного изоморфизма и множества подмножеств. $\square$

§15. Самоподобие, пространства

Счёт в конечных последователях:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots \quad (6)$$

одна направленный, полностью обратимый.

Счёт же в бесконечных последователях $\text{PN}(\emptyset)$, $\text{PO}(\emptyset)$ и т. д. — отчасти одна направленный, отчасти обратимый (многоточие обозначает

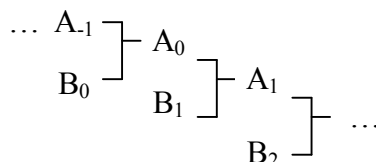


Рис. 3. Структура самоподобного множества

промежутки необратимости счёта):

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \text{PN}(\emptyset) \longrightarrow \text{P}(\text{PN}(\emptyset)) \longrightarrow \dots \quad (7)$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \text{PN}(\emptyset) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{V}(\text{PO}(\emptyset)) \longrightarrow \text{PO}(\emptyset) \dots, \quad (8)$$

при этом как последовательность последователей типов P-, PN-, PO- не обрывается, так и последовательность внутренностей объекта $\text{PO}(1)$ не обрывается ввиду того, что при возможных вариантах рассмотрения ряда внутренностей объекта $\text{PO}(1)$

1) $\text{V}^{\text{PO}(1)}\text{PO}(\emptyset) = \emptyset$ (т. е. ряд внутренностей только счётен, ряд (8) симметричен относительно предельного перехода). Это невозможно, т. к. $\text{V}(\text{PN}(\emptyset)) = \text{PN}(\emptyset)$;

2) $\text{V}^{\text{PO}(1)}\text{PO}(\emptyset)$ — внутри необрывающегося ряда внутренностей:

$$\emptyset \rightarrow 1 \rightarrow \dots \text{PN}(\emptyset) \rightarrow \dots \rightarrow \text{V}^{\text{PO}(1)}\text{PO}(\emptyset) \rightarrow \dots \rightarrow \text{V}(\text{PO}(\emptyset)) \rightarrow \text{PO}(\emptyset) \dots \quad (9)$$

Определение 7. Объект A — собственно внутренний по отношению к объекту B, если он принадлежит B, но не принадлежит ряду внутренностей объекта B ²⁶.

²⁶ Как таковую, в виде отдельного объекта, собственную внутренность недостижимого объекта выделить невозможно; несамопринадлежащие множества объекта A (см. главу 2) собственно внутренние, однако объект, содержащий только несамопри-

см. след. стр. $\longrightarrow$

Пример. Число 2 собственно внутреннее по отношению к недостижимому числу $PO(\emptyset)$, т. к. $2 \in PO(\emptyset)$, $V^\alpha(PO(\emptyset)) \notin 2$.

Определение 8. Объект самоподобен, если структурно изоморфен подобъекту, собственно внутреннему по отношению к этому же объекту.

Пример. Объект A_1 — самопринадлежащ и самоподобен, в собственной внутренности объекта A_1 — объект A_0 , структурно изоморфный объекту A_1 , $A_0 \cong^\epsilon A_1$, некоторый объект B_1 — в собственной внутренности объекта A_1 , $B_1 \in VT(A_1)$, $B_0 \cong^\epsilon B_1$. Объекты A_0, A_1, A_{-1} выделяемы с точностью до обозначения, ряд объектов продолжим в обе стороны последовательно неограниченно (по свойству недостижимых объ-

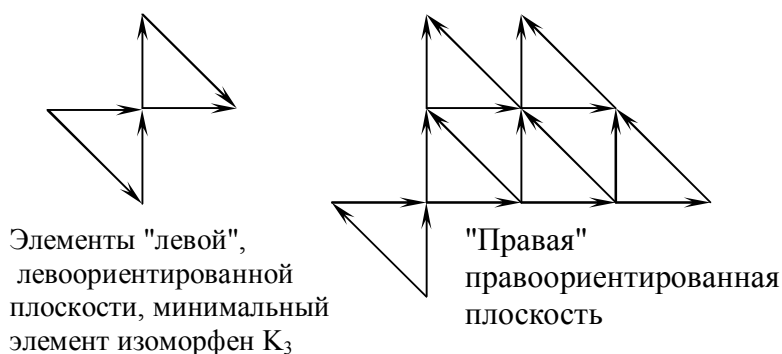


Рис. 4. Структура порядка плоскости

ектов), однако в целом ряд (рис. 3) — несамопринадлежащий объект.

Если в объекте рис. 3 (взятом как многое) "обнулить" содержимое объектов "нити B ", то получим простейшее одномерное пространство — прямую (рис. 2), обозначим для дальнейшего рассуждения отношения принадлежности между отдельными выделенными самоподобными объектами этой последовательности стрелками, а объекты (выделенные с точностью до обозначения²⁷) — точками.

При наличной выделяемости самоподобных объектов, как и недостижимых объектов, в последовательности с точностью до обозначения (ввиду структурного изоморфизма), имеется и возможная и бесконечная делимость "отрезка" — между любыми объектами из последовательности (см. рис. 2), выделение между двумя последовательными (принадлежащими один другому самоподобными объектами) третьего, "проме-

надлежащие множества, — невыделим.

²⁷ Если объекты одинаковы по структуре, то отличить один объект от другого по внутренним их свойствам невозможно, но можно различить по различию обозначений. Для того чтобы получить действительную прямую, требуется кроме обозначений ввести ещё понятие о мере (в простейшем виде о мере длины).

жуточного" (содержащего первый и принадлежащего второму)²⁸.

Следующий сложный самоподобный объект — плоскость, двухмерное пространство, каждый объект из плоскости (рис. 4) структурно изоморфен любому содержащемуся в нём объекту; минимальное структурное образование (ясно просматривается на рис. 4) может быть двояким: либо "левоориентированным" либо "правоориентированным"; нити последователей в кольца не замкнуты, то объект, содержащий все объекты одной плоскости (рис. 4), — несамопринадлежащ.

Рассмотрим трёхмерные пространства. В трёхмерном объекте возможны ориентации: "левая" и "правая" — по нижней ориентирующей плоскости (без циклов, см. теорему о стягивании циклов); "вверх" и

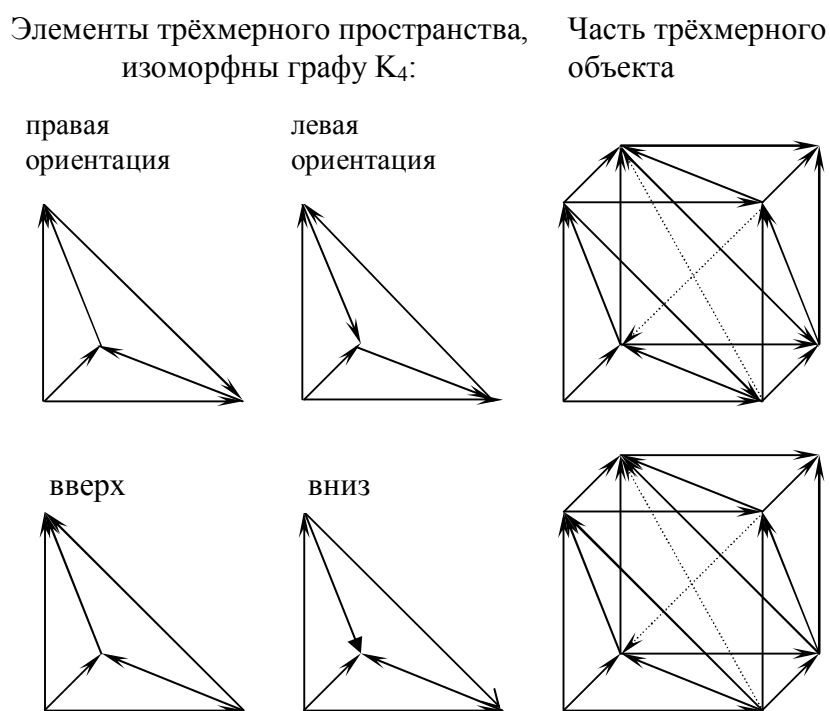


Рис. 5. Структура порядка трёхмерного пространства

"вниз" (без циклов). При этом плоскости, секущие куб по диагоналям противоположных сторон, не являются ориентированными²⁹, т. е. координатные оси в таком ориентированном пространстве заданы однозначно (ориентирующие векторы не являются координатными). Объект, со-

²⁸ Аналог аксиомы об отделимости (Хаусдорфа). Для оперирования с числами на прямой остаётся определить каким-либо образом внешнюю по отношению к прямой меру, меру регулярную.

²⁹ Если бы это было, то ориентация секущей (по диагонали, ориентирующей основание куба) плоскости (построенная по ориентациям сторон куба) была бы неоднозначна (что и показано на рисунке пунктирными линиями).

державший всё трёхмерное пространство, — несамопринадлежащ.

Вышеизложенным показано свойство неоднозначной ориентируемости двумерных объектов внутри трёхмерных пространств.

Теорема 6. В M совершенно однозначно ориентировано лишь 2-мерное пространство (плоскость).

Доказательство очевидно, см. на рис. 5 ориентацию плоскости, пересекающую основание куба по диагонали. $\square$

Рассмотрим четырёхмерное пространство.

§16. Ограничение размерности

Основная теорема об ограниченности размерности полностью упорядоченных ориентированных самоподобных объектов (пространств) трёхмерна в теории с самопринадлежностью:

Теорема 7 (о размерности). Полностью ориентируемы только трёх- и менее мерные самоподобные упорядоченные объекты, пространства (т. е. четырёхмерие — неориентируемо).

Доказательство (краткоизложенное). Как и в трёхмерных пространствах, в четырёх- и более мерных пространствах не имеется однозначной ориентации двумерных подпространств, что проверяемо непосредственным построением (см. рис. 6)³⁰. На рисунке — попытка изображения элемента четырёхмерного пространства (четырёхмерного куба) с нанесением линий ориентации граней всех кубов.

Легко заметить³¹, что грани куба (с вершинами 1000, 1001, 0011, 0001, 0100, 0110, 0111, 1101) ориентированы неоднозначно, например, линия 1000–0110³² и линия 0100–1010³³ пересекаются, как и в случае трёхмерных пространств.

Однако при попытке полного построения ориентирующих составляющих четырёхмерного пространства и его трёх- и двумерных подпространств обнаруживается, что в плоскости (1000, 1010, 0111, 0101) ориентирующие линии (объекты) получают направленными навстречу друг другу от вершины 1010 к вершине 0101 и от вершины 0101 к вершине 1010³⁴, на рисунке эти линии выделены двойной линией ($\parallel$), поскольку отношение принадлежности — однонаправлено, т. е. если

³⁰ 4-координатный "вектор" ориентирован "векторами", направленными от имевшихся 3-координатных "векторов" к новому — 4-му.

³¹ В трёхмерной модели, построенной, например, в "Автокаде", при объёмном вращении (см. рис. 6).

³² Проекция ориентаций в плоскости, 1010–1100 и 0010–0100.

³³ Проекция ориентаций в плоскости, 0010–1000 и 0110–1100.

³⁴ Линии пересечения плоскостей, построенных на уже ранее построенных ориентирующих прямых, с означенной плоскостью.

$A \in B$ (и $A \neq B$), то $B \notin A$ ³⁵, такой двунаправленной линии (двунаправленной нити с принадлежностью объектов в ту и в другую сторону) не может быть по определению отношения принадлежности (противоречие), следовательно, показанный на рисунке объект не существует (как и $\emptyset$). $\square$

Из изложенного следует, что четырёхмерное пространство — не-

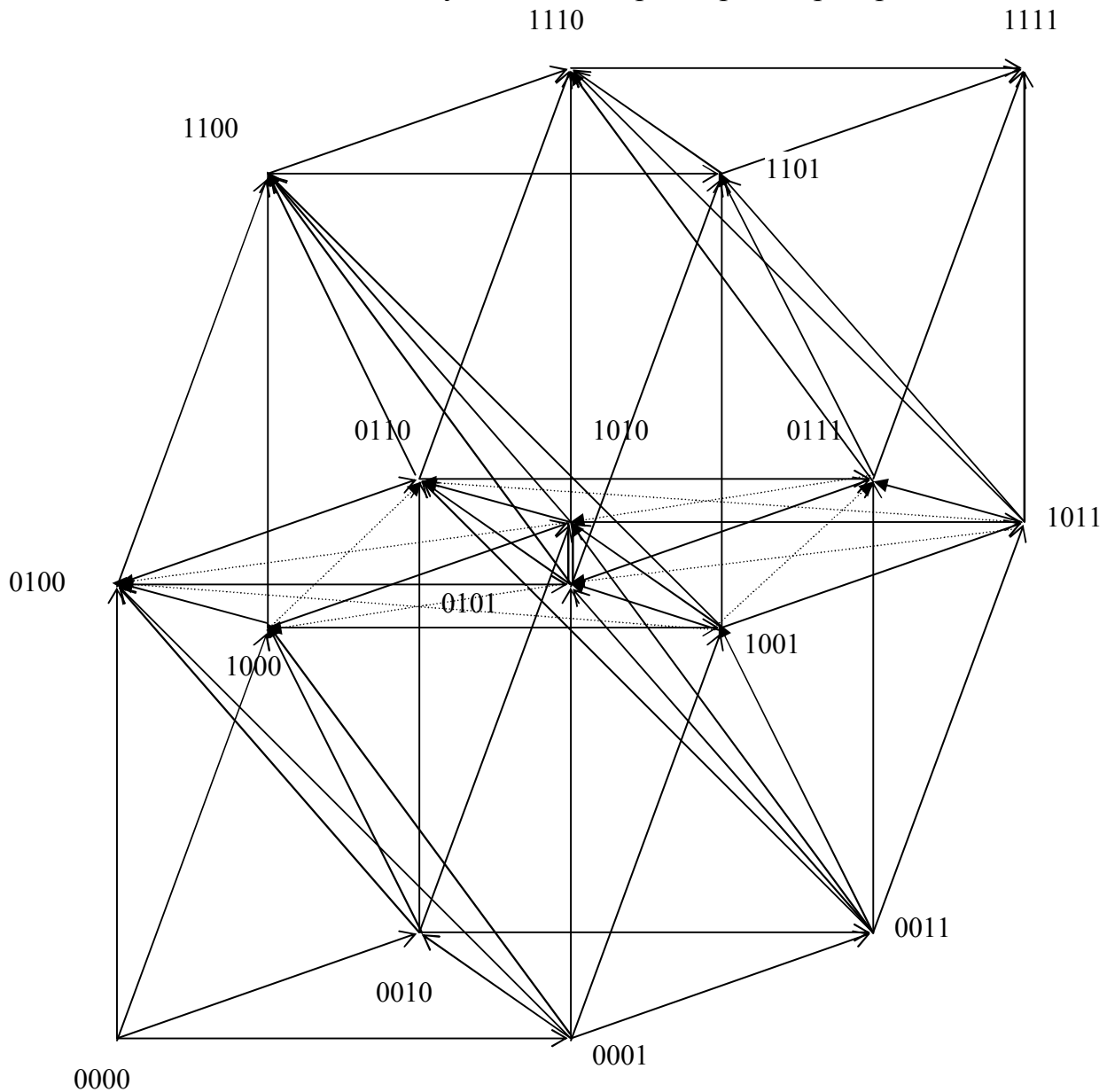


Рис. 6. Фиктивное 4-мерие

ориентируемо полностью³⁶.

³⁵ Не может быть, чтобы и $B \in A$ (тогда $B = A$, противоречие с начальным условием $B \neq A$).

³⁶ Практическое приложение эта теорема имеет при истолковании (интерпретации) экономико-математических моделей в плане привязки меры стоимости к трёхраз-
см. след. стр. $\longrightarrow$

§17. О связи с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов

Минимальный "элемент", образующий пространство размерности n , гомологичен (изоморфен) графу K_{n+1} .

По теореме о размерности имеются не более чем трёхмерные вполне упорядоченные структуры, образующий их минимальный элемент изоморфен графу K_4 , граф K_4 — плоский, это значит, что фрагмент трёхмерного пространства (лежащий в пределах координатных осей — $1/8$ часть трёхмерного пространства) допускает плоскую проекцию на раскрашиваемую плоскую область: координаты точки задаются относительной цветностью (1, 2, 3 цвета), величиной обратной интенсивности (яркости) задаётся удаление от начала координат — начало координат изображается точкой белого цвета максимальной яркости (при удалении от начала координат добавляется 4-й цвет — "чёрный").

Для четырёхмерных пространств (с образующим графом K_5) такая плоская проекция невозможна (таким образом, вышеозначенный результат связан с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов [56], [99]).

Однако проекция трёхмерной области на плоскую область не сохраняет непрерывности отображения, таким образом, доступными для наглядного созерцания на плоскости остаются только двухмерные зависимости (см. теорему 6) (О приложениях плоских проекций см. [109]).

§18. О несамоподобии множества M

Для полноты картины представлений об упорядоченных структурах остаётся показать отличие множества всех множеств от самоподобных объектов.

Теорема 8 (о несамоподобии M). Множество всех множеств несамоподобно, т. е. в нём нет структурно-изоморфного ему собственного подмножества.

Доказательство. Предположим противное, т. е. в M есть M_1 , $M_1 \neq M$, $M_1 \cong^e M$, тогда по свойству структурного изоморфизма в M_1 найдётся M_2 , $M_2 \cong^e M_1$, и т. д. — бесконечный необрывающийся убывающий ряд структурно-изоморфных M множеств M_k (аналогичный рис 3, 2). Но тогда по свойству структурного изоморфизма $PO(M_{k-1}) = M_k$ и ничто не запрещает строить последователи $PO(\dots)$ и к M , поскольку свойства M таковы, как и у M_k , ввиду структурного изоморфизма, т. е. бесконечный ряд последователей $PO^I(M) = M_I$, но тогда в ряду самоподобных мно-

мерной материальной характеристике системы (вещной, временной, энергетической), любой 4-й фактор (например, деньги, оторванные по содержанию от упорядочивающих материальных факторов) дезориентирующ, т. е. денежная мера практически привязываема к 3 упомянутым факторам.

жеств $M_k, \dots, M, \dots, M_r$ невозможно однозначно выделить объект, обладающий свойством быть множеством всех множеств, что противоречит вышедоказанному свойству единственности M .³⁷ Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Мощность множества всех множеств M больше мощности недостижимого (самоподобного) последователя $PO(.)$ и является наибольшей мощностью. $\square$

Поскольку M не самоподобно и не является нитью объектов, то M не является объектом вполне упорядоченным отношением принадлежности.

Следствие 2. Множество всех множеств M не является вполне упорядоченным отношением принадлежности. $\square$

³⁷ Иной вариант рассуждений. $M_1 \cong^e M$. Тогда образовалась бы, в силу свойств структурного изоморфизма, бесконечная цепочка структурно-изоморфных множеств $M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$, — все множества этой цепочки были бы не различимы между собой по структуре, тогда выбор из них единственного (ввиду доказанной выше единственности M) множества всех множеств был бы невозможен, что противоречит наличию единственного множества M .

Глава 4. Исторические аналогии

§19. Последовательность усложнения математических понятий

В соответствии с наличием 6 уровней отражения действительности (рис. 1б) в формировании математических понятий (как в истории, так и с возрастом) наблюдается 6 уровней абстракции: 1) появление понятия о числе (конкретном, как наборе предметов или загнутых пальцев); 2) абстрактное понятие о числе (как наборе единиц — Евклид) и об арифметических операциях (сложения, вычитания); 3) появление понятия о неизвестной величине и определения уравнения (Диофант); 4) появление представления о функции (Ферма, Декарт); 5) появление представлений о формальной системе (алгоритме, А. Лейвелс); 6) вероятностные, непредикативные представления (см. [85], [86], [100]).

С усложнением математических понятий изменяется и представление об упорядоченных структурах — числе и бесконечности. Это усложнение представлений об упорядоченных структурах (числе и бесконечности) соответствует структурам теории множеств с самопринадлежностью.

§20. Усложнение представлений о числе и бесконечности

Структуры, описанные в главе 3, соответствуют уже имевшимся ранее представлениям о бесконечном (о числах). Проследим это соответствие от простых (исторически более ранних структур) в упорядочении по историческим периодам усложнения научного знания:

1. Первичные единичные объекты чем-то схожи с "атомами", неделимыми объектами чувственного восприятия, описанными Демокритом (460–370 до н. э.) (см.: [28, с. 468]).

2. Простые несамопринадлежащие множества явно описываются в математике несколько позже, Евклидом (III в. до н. э.), число мыслится как составленное из единиц³⁸ (без указания на их упорядоченность, как в нитях самопринадлежащих объектов), т. е. как простое, конечное, несамопринадлежащее множество. То же представление повторяется и позже (Прокл, *Inst. th.*): "§6. Всякое множество возникает или из объединённостей ($\epsilon\tilde{\xi} \eta\nu\omega\mu\epsilon\nu\omega\nu$), или из единичностей ($\epsilon\tilde{\xi} \epsilon\nu\alpha\delta\omega\nu$). Ясно ведь, что, во-первых, никакой [элемент] многого не есть [тем самым] просто само множество, и, наоборот, во-вторых, множество не есть каждый из его элементов" [35, с. 460] — такие множества не единомногие.

³⁸ "1. *Единица* есть <то>, через что каждое из существующих считается единым.

2. *Число* же — множество, составленное из единиц." [13, т. 2, с.9-10] ("Начала". Кн. 7: определения).

3. Представления о едино-многом (но не в форме множеств) имелись уже у того же Прокла (410–485) ("Единое и многое в их органическом сращении", заголовок А. Ф. Лосева) [35, с. 484]:

"(§67.) Каждая цельность или предшествует частям <единое>, или состоит из частей <многое>, или содержится в части <едино-многое>. ... (§68.) Всякое целое, содержащееся в части, есть часть целого, состоящего из частей <едино-многое>."

Бесконечность, однако, в математическом (да и философском) мышлении Средневековья представлялась в упорядоченном виде, потенциальной (с актуально бесконечными последовательностями и бесконечными рядами не оперировали) либо актуальной, являвшейся пределом, не допускающим дальнейшего продолжения. Такова последовательность причин, сводимых к некоторой первопричине, упоминаемая Ибн-Синой (980-1037). Таковы же представления о бесконечности, являющейся пределом увеличения у Николая Кузанского [26; 32]: $\infty+1=\infty$.

4. На четвёртой стадии исторического развития возникает абстракция актуальной бесконечности. Так, Фонтенель (1657–1757; см. "Элементы бесконечного") употреблял операции с бесконечными величинами (о чём упоминал Маклорен (1698–1746; "Трактат о флюксиях")³⁹: $\infty/n : \infty = 1/n$, и т. п., прогрессии $1, 2\infty, 3\infty, \dots \infty^2$, и т. п. ...

У Эйлера же (1707–1783) операции с числами "за бесконечностью" совершенно осмысленны и в отличие от предыдущего этапа (3) уровни бесконечного чётко отличимы [117, с.93–95]: "их <бесконечно малые> нужно непременно отличать друг от друга, если наше внимание обращено на то их соотношение, которое выражается геометрическим соотношением", "так как a/dx есть бесконечное количество A , то, очевидно, количество A/dx будет количеством, в бесконечное число раз большим, чем a/dx ... Итак, <есть> бесконечно много ступеней бесконечных количеств, из которых каждая бесконечно больше предыдущей." И при описании "дифференцирования непредставимых функций" Эйлер употреблял последователи для бесконечных величин (последовательностей) [117, с. 512, 518 и след.]: "количества $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$ и т. д. будут составлять арифметическую прогрессию..."⁴⁰.

На 4-м уровне операции с бесконечными величинами используют представления о простых бесконечных последователях (PN -, PN^{PN} -последователях).

5. Кантор (1845–1918) мыслил бесконечные структуры аналогич-

³⁹ Коренцова М. М. Концепция бесконечного в "Трактате о флюксиях" Маклорена (Маклорен и Фонтенель) [6, с. 71–73].

⁴⁰ Индексы — $PN(\emptyset)$, $P(PN(\emptyset))$,...

но недостижимым объектам, не предполагая ограниченности ряда "алефов" (письмо Дедекинду из Галле от 28 июля 1899 г.) [15, с. 367]:

"Система $\aleph$ всех алефов

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega 0}, \aleph_{\omega 0+1}, \dots, \aleph_{\omega 1}, \dots$$

при их расположении по величине ... образует бесконечную последовательность".

Недостижимые кардиналы, появившиеся в описании множеств немного позже (см. [8, с. 234–235; 25]), аналогичны недостижимым последователям⁴¹ вида $\text{PO}(\emptyset)$.

Однако у Кантора нет ещё представления о том, что ряд всех алефов (включающий и недостижимые кардиналы) является частью множества всех множеств, это связано с тем, что Кантор исключал из рассмотрения самопринадлежащие объекты, оперируя только с несамопринадлежащими множествами.

6а. Самоподобные структуры, описывающие в теории с самопринадлежностью пространственные структуры, не имеют аналогов в предшествующих историко-математических представлениях.

6б. Бесконечные структуры в теории множеств с самопринадлежностью, заключённые внутри неизмеримого и неупорядочиваемого бесконечного множества всех множеств M , вбирают в себя описанные ранее (п. 1–6) представления о бесконечных структурах (см. главу 3).

§21. Самоописательность в теории множеств

Историческое усложнение представлений о бесконечных (упорядоченных) объектах совпадает с усложняющейся последовательностью структур теории множеств с самопринадлежностью. Таким образом, в теории множеств с самопринадлежностью, описывающей и более ранние, более простые представления о бесконечных упорядоченных структурах, имеется элемент самоописательности своего исторического становления — одна из составляющих теоретического критерия истинности, что также совпадает с наличием самоописательности в схеме отражения действительности в сознании (см. рис. 1б, гл. 1). Более того, возрастное изменение представлений о бесконечности аналогично прослеженному в истории. Таким образом, самоописательность относится и к возрастному становлению познания, а уже на основании его к историческому изменению представлений.

⁴¹ При этом, поскольку "обобщённая континуум гипотеза [8, с. 235] влечёт, что всякое недостижимое кардинальное число является сильно недостижимым", она не верна, т. к. в теории с самопринадлежностью имеется бесконечный ряд (доминантных) недостижимых последователей, структурно-изоморфных один другому.

Таблица 3. Соответствие структур множества М и исторически усложнявшихся представлений

№ уровня	Объект теории с самопринадлежностью	Объект исторических представлений	Исторический период
1	Единичный объект	Конкретное число	1) древний
2	Несамопринадлежащее мн-во	Число как "куча" единиц ⁴²	2) Античность, с III в. до н. э.
3	Самопринадлежащий последователь	Едино-многие объекты ⁴³	3) Сред. века, со II в.
4	Бесконечные последователи, N, P(N), PN($\emptyset$) и т. д.	Абстракция актуальной бесконечности	4) Нов. время, с XV в.
5а)	Недостижимые последователи PO($\emptyset$) и т. п.	Абстракция ряда "аллефов", недостижимые кардиналы	5) с XIX в.
5б)	Самоподобные объекты	... ⁴⁴	5) XX в.
6	Собственно мн-во всех мн-в, М		6) современность

⁴² Из историко-философских сравнений — логика (отношений несамопринадлежащих классов) Аристотеля.

⁴³ Из философских категорий — представление о ряде последовательных причин в средневековой философии.

⁴⁴ Фрактальные объекты — отдалённый и лишь внешне похожий аналог, нестандартный анализ (А. Робинсон), в котором предполагается, что (на прямой) окрестность каждой точки подобна по устройству всей числовой прямой, отчасти схож с описанным самоподобием объектов.

Часть 2. Приложения основных результатов

Глава 5. О некоторых приложениях семантики самопринадлежности

Ниже кратко описаны приложения семантики самопринадлежности и полученных ранее результатов теории множеств с самопринадлежностью в различных областях, а именно:

Описано доказательство теоремы в теории множеств с самопринадлежностью о конечности области моделей для лямбда-исчисления; указано, что результат этой абстрактной теоремы совпадает с очевидным фактом конечности внутренних состояний электронной вычислительной машины [121].

Представлен краткий вариант доказательства теоремы о неполноте предикативной формальной системы [58]; описана модель двужанной логики с обоснованием закона исключения третьего.

Рассмотрено доказательство теоремы о стягивании циклов с самопринадлежностью в один объект (тождественности такого цикла одному объекту) и приложение её семантики в математической лингвистике — тождественность цикла непредикативных определений одному непредикативному определению.

Описано доказательство теоремы о конечной алгоритмизуемости (вычислимости) оптимального планирования (оптимальной нормы прибыли) с использованием более ранней теоремы о существовании неподвижной точки финансового оборота в условиях безинфляционности и результатов теории множеств с самопринадлежностью.

§22. Приложения к λ -теории

Введение

Лямбда-исчисление (λ -исчисление) описывает основания программирования на алгоритмических языках (см.: [5; 42]). Значимым вопросом в λ -теории является вопрос о построении моделей этой теории, причём, как отмечалось ещё в 60-е гг.⁴⁵, "в бестиповом λ -исчислении объекты служат как аргументами, так и функциями, которые применяются к этим аргументам" [5, с. 99]. Поэтому "ввиду бестипового характера этой теории было неясно, как строить модели для неё" [5, с.17], в идеале "семантика для λ -исчисления состояла <бы> из области D , такой, что её пространство функций D^D изоморфно D " [5, с. 99]. В теории несамопринадлежащих множеств такое вложение $D^D \rightarrow D$, или $\text{Exp}(D) \rightarrow D$ невозможно ввиду того, что для несамопринадлежащих

⁴⁵ Скоттом в 1969 г. См.: Skott D. S. Models for the λ -calculus: Manuscript (unpublished). 1969. 53 p. (цит. по: [5, с. 99, 582]).

множеств если $D \notin D$, то $\text{Exp}(D) \neq D$. Ниже описано построение модели в теории множеств с самопринадлежностью.

Доказательство теоремы о модельной области

В теории множеств с самопринадлежностью описывается ряд объектов, обладающих указанным выше для модельной области свойством: $\text{Exp}(X) = X$. Это прежде всего такие объекты, как $\emptyset$ (пустое множество, ничто, $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$) и M (множество всех множеств, $\text{Exp}(M) = M$), которые, однако, не могут являться модельной областью D , указанной выше ($\emptyset$, ничто, очевидно почему, а M "столь велико", что не обладает свойством полной упорядоченности (см.: [50], гл. 3). Из вполне упорядочиваемых объектов свойством $\text{Exp}(X) = X$ ввиду транзитивности отношения принадлежности для самопринадлежащих множеств обладают натуральные (конечные числа), самопринадлежащие множества вида $1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д.

Как указано в главе 2, натуральный ряд в M выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] = P^n(\emptyset), \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } P(V(P(x))) = x) \}^{46}$.

Свойства натурального ряда:

1. Натуральный ряд — неединственен.
2. N — несамопринадлежаще, $N \notin N$.
3. Внутренность натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, $V(N) = N$, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам⁴⁷.

Теорема 9 (о модели лямбда-исчисления). В теории множеств с самопринадлежностью модельными областями для λ -исчисления являются только конечные натуральные числа.

Доказательство. По свойствам самопринадлежащих множеств, если $n \in N$, то $\text{Exp}(n) = n$, для $1 = \{1\}$, $\text{Exp}(\{1\}) = 1$ — очевидно; для $2 = \{1, 2\}$ $\text{Exp}(2 = \{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} =$ (по транзитивности принадлежности для самопринадлежащих множеств $\{2\} = \{1, 2\}$) $= \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}\} =$ (вычёркивание одинаковых записей) $= \{\{1\}, \{1, 2\}\} =$ (слияние многого, взятого как многое в одно многое, удаление лишних скобок вида " $\{\dots\}$ ") $= \{1, 1, 2\} =$ (вычёркивание одинаковых записей) $= \{1, 2\} = 2$, и т. д. для остальных n из N .

⁴⁶ Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

⁴⁷ Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающая и совпадает с самим натуральным рядом.

Однако $\text{Exp}(N) \neq N$, т. к. $N \notin N$, то N как единичный объект принадлежит $\text{Exp}(N)$, $[N] \in \text{Exp}(N)$, с другой стороны (см. выше), $[N] \notin N$, значит, $\text{Exp}(N) \neq N$.

Следовательно, для любого вполне упорядоченного объекта A из M , иного, чем конечные натуральные числа, $A \notin N$, $\text{Exp}(A) \neq A$, что означает, что модельной областью в теории множеств с самопринадлежностью для лямбда-исчисления являются только конечные натуральные числа, обладающие требуемым свойством: $\text{Exp}(n) = n$. Теорема доказана. $\square$

Заключение

Результат теоремы о конечной вычислимости в его более пространном истолковании таков, что семантика языков программирования, задаваемая λ -исчислением, задаваема только на конечной вполне упорядоченной области (самопринадлежащих множеств, натуральных чисел). Доказанный результат удивительно точно совпадает с действительностью — в действительной цифровой электронной вычислительной машине множество её внутренних состояний определяется конечным (вполне упорядоченным) набором машинных слов (команд процессора и массива обрабатываемых данных) мощностью, равной $n = 2^m$, где m — количество разрядов в машинном слове⁴⁸.

§23. Приложения к логике

Предисловие

С допущением семантики непредикативных (самоссылочных) утверждений кратко описывается вполне очевидный факт того, что в предикативной формальной системе, такой, что следствия из аксиом и утверждений, выведенных из аксиом (причём в способах вывода нет ссылок на сами выводимые утверждения), не содержат утверждения о непротиворечивости всей этой формальной системы, потому что это утверждение в своём выводе ссылалось бы на само себя.

Ранее в главе 1 необходимое наличие в сознании таких утвержде-

⁴⁸ Если чуть углубиться в философско-математическую область, то иерархия упомянутых теорий будет такова: 1) теория объектов, множеств с самопринадлежностью, допускающей бесконечные объекты сверхсчётной мощности, но замкнутые внутри множества всех множеств M ; 2) теория обозначений и подстановок этих обозначений на место переменных, допускающая при некоторой неопределённости, открытости процесса обозначаемости настоящих текущих событий потенциальную неопределённость ("бесконечность") вариантов обозначений; 3) собственно вычислимость (определённое λ -исчисление) на уже обозначенной и конечной, и ограниченной области объектов (конечная, исполняемая программа).

ний было обосновано из гносеологических соображений⁴⁹ (см. также: [53]).

Простейший пример непредикативных конструкций, строгое определение понятия натурального числа как самопринадлежащего объекта приведены в работе [46], см. также главу 2 настоящей работы. Например, $1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д., т. е. $\emptyset \in \emptyset$ (по сути, $\emptyset$ — ничто, $\text{Exp}\emptyset = \emptyset$), $1 \in 1$, $1 \in 2$, $2 \in 2$ и т. д. (как при счёте на пальцах, пальцы не поменять местами, в числе "двойка" они неравнозначны, хотя считаемые предметы могут быть равнозначны, например отдельные камешки, — в том разница между числами, которые являются абстрактными категориями, и вещественными предметами). Более подробно построение числовой системы со строгой формализацией уровней бесконечности описано в работе [50] и в главе 3 настоящей работы.

Итак, в семантике рассуждений вполне допустимы непредикативные самоссылочные конструкции, применение которых непротиворечиво и оправдывается практикой, что позволяет выразить математическим языком описание утверждения 1-го абзаца §23.

Предварительные рассуждения

Пусть существует *предикативная теория* T , такая, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i и выводимые утверждения B_j :

$$(A_{i1}, \dots, A_{in}, B_{j1}, \dots, B_{jm}) \models B_{j0}, \quad (10)$$

причём при определённых правилах вывода общее свойство этих правил вывода по условию предикативности системы таково, что выводимое утверждение не содержится в том наборе утверждений, из которых оно выводится, не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в формуле (10),

$$B_{j0} \notin \{A_{i1}, \dots, A_{in}, B_{j1}, \dots, B_{jm}\}, \quad (11)$$

и утверждения, из которых выводимо B_{j0} , невыводимы из него (т. е. по условию предикативности — отсутствие круга в выводе), не получаемы с участием B_{j0} ,

$$\begin{aligned} D_0 &= \{A_{i1}, \dots, A_{in}, B_{j1}, \dots, B_{jm}\}, \\ \forall D_k \in D_0, B_{j0} &\not\models D_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Говоря иначе, пусть VL — внутренность высказывания (выводимого высказывания или аксиомы) такова, что содержит все высказывания, из которых выводится данное высказывание. Для аксиом $VL(A_i) = \emptyset$, т. е. аксиомы в предикативной системе постулируются выводимыми

⁴⁹ Они основываются на онтологических представлениях о том, что самоосознание человека созерцает себя непосредственно и поэтому познаёт себя, и абстрактные категории, и вещественный мир — в основаниях своих и на высшем уровне абстракции непредикативно.

из ничто⁵⁰, для самого $\emptyset$ — $VL(\emptyset) = \emptyset$, формально. Для высказываний аналогично $VL(B_{j0}) = D_0$. Очевидно, что внутренности некоторого выводимого высказывания образуют частично упорядоченную решётку $R(VL(B_{j0}))$ ⁵¹, тогда условие отсутствия круга в выводе записывается так:

$$B_{j0} \notin R(VL(B_{j0})), \quad (13)$$

$$\text{или } \forall D_k \in R(VL(B_{j0})), B_{j0} \not\models D_k. \quad (14)$$

Таким образом, условия построения предикативной системы описаны. Простейшим примером такой предикативной системы является школьный аксиоматический курс геометрии.

Описание доказательства теоремы

Пусть C — высказывание о непротиворечивости теории, т. е. в C утверждается, что все утверждения теории T таковы, что в этой теории не выводимы и их отрицания. И пусть T непротиворечива, т. е. высказывание C выполнимо на всех высказываниях этой теории⁵², т. е. семантически C выводимо из множества всех высказываний теории, в том числе и из себя самого (т. к. отрицает собственное отрицание при наличии непротиворечивости):

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, C\} \models C, \quad (15)$$

что противоречит условиям предикативности системы T . Следовательно, теорема о том, что *в предикативной системе недоказуема её непротиворечивость*, доказана.

Теорема 10 (Гёделя). В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость. $\square$

Однако предположение о непредикативности системы являлось лишь начальным условием рассуждений, и в связи с доказанной теоремой допускается иная интерпретация результата — *непротиворечивость теории недоказуема в предикативных системах*, т. е. доказательства непротиворечивости возможны только с допущением непредикативности (самоссылочности) в семантике рассуждений, как, например в теории множеств с самопринадлежностью.

⁵⁰ Это уже само по себе странно, т. е. абстрактный средний уровень мышления в этом случае формально оторван от высшего — созерцания в сознании, говоря онтологически. И если аксиомы случайно хоть отчасти отображают созерцательно правильные категории, то это уже хорошо и частично правильно (как в школьной геометрии).

⁵¹ Содержит всевозможные степени внутренностей высказываний, из которых выведено B_{j0} , т. е. $VL_r(VL(B_{j0}))$ и т. д. до $\emptyset$, поскольку обратное прослеживание цепи выводов обрывается после начальных аксиом.

⁵² Важным для использования семантики самоссылочных высказываний является допущение того, что это высказывание уже истинно.

Обсуждение результата

В доказательстве теоремы о неполноте, известном ранее (Гёдель, Клини [20; 21], Линдон [27]), которое является достаточно объёмным и где используется при построении определённого вида нумераций, при заданном виде формального алфавита системы тот факт, что Гёделев номер высказывания о непротиворечивости теории будет таков, что не будет совпадать с номерами выводимых формул (в процедуре диагонализации). Само построение таких формальных нумераций достаточно громоздко, при этом используется только семантика вещественной области мышления чисто предикативная, если говорить онтологическим языком. Иной пример использования непредикативных конструкций наблюдается в *теории множеств с самопринадлежностью (непредикативной)*.

Вот пример теоремы, использующей непредикативную семантику (см. гл. 1):

Теорема 4. Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в M объекты, непротиворечива.

Доказательство. Если высказыванием L описан объект A , то отрицание этого высказывания описывало бы дополнение V к объекту A в M , но по теореме о недополнимости это невозможно (самопринадлежащий объект необразуем из объединения двух непересекающихся подмножеств, отличных от него самого), следовательно, высказывания об объектах из M непротиворечивы. Теорема доказана. $\square$

Теорема о неполноте

Аналогичны рассуждения и о других ограничительных теоремах (5-го уровня развития абстрактного мышления), например при рассуждении о полноте системы.

Пусть F — высказывание о полноте системы, т. е. F утверждает, что в системе T выводимы все утверждения, в том числе и само F , но тогда F , если оно верно, семантически (самоссылочно) сказывается о себе самом:

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, F\} \models F, \quad (16)$$

что противоречит условиям допущения чисто предикативности теории T . Доказана следующая теорема.

Теорема 11 (о неполноте). Предикативная теория не полна. $\square$

Дополнение о модели логики

Интересны также результаты описания вложения логики высказываний в означенную теорию множеств. Как известно [22, с. 43], базисом исчисления высказываний является набор логических операций, позволяющих построить полную систему логических функций. Одним из таких базисов является базис, состоящий из операций импликации и от-

рицания,— в терминах теории множеств этот базис построим следующим образом.

Таблица 4. Сопоставление элементов теорий

Элемент теории	Теория множеств	Исчисление высказываний
Константа "невыполнимость"	$\emptyset$	0
Константа "выполнимость"	M	1
Импликация	$\in$	$\Rightarrow$
Отрицание	$(\dots \in \emptyset)$	$\neg$

Пусть имеются две константы $\emptyset$ (ничто) и M (множество всех множеств), тогда на этих константах посредством отношения принадлежности $\in$ выстраиваемы высказывания, аналогичные логическим, где отношение принадлежности аналогично отношению импликации, отрицание $\neg x$ — результату операции $(x \in \emptyset)$ и переменная x принимает значения $\emptyset$ или M, аналогичные логическим константам 0 и 1 (сопоставление систем см. в табл. 4).

Таблица 5. Выполнимость

X	y	$x \in \emptyset$	$x \in y$	$((x \in \emptyset) \in \emptyset)$
$\emptyset$	$\emptyset$	M	M	$\emptyset$
$\emptyset$	M	M	M	$\emptyset$
M	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	M
M	M	$\emptyset$	M	M

В качестве константы, обозначающей выполнимость логической операции ("выполнимость"), определим самопринадлежащий объект M (множество всех множеств)⁵³. В этой двузначной логике однозначно

⁵³ Казалось бы, вместо константы M можно выбрать единичный объект [a] и на объектах [a] и $\emptyset$ задать двузначную логику, а в случае выбора константы вида $2 = \{[1], 2\}$, где [1] — единичный объект, получить 3-значную логику и т. п. бесконечное количество конечно-значных и бесконечно-значных логик — в зависимости от выбранного объекта-константы, но значение выполнимого логического высказывания, например $\emptyset \in [a]$, лежало бы вне области определённых логических констант [a] и $\emptyset$. Можно, конечно, пытаться ограничить универсум множеств объектами [a], $2 = \{[1], 2\}$ и т. п., пытаясь построить многозначные логики (заклучая по теореме о непротиворечивости подтеории, что исчисления высказываний в таких логиках — см. след. стр. —→

выполняется закон исключения третьего $\neg\neg x = x$, $((x \in \emptyset) \in \emptyset) = x$ (см. табл. 5), а также иные аксиомы теории исчисления высказываний L [22, с. 46-47]⁵⁴. Тем самым посредством модели логики в теории множеств с самопринадлежностью доказана теорема.

Теорема 12 (о законе исключения третьего). В двузначной логике отрицание отрицания совпадает с первым отрицаемым, т. е. действует закон исключения третьего: $\neg\neg x = x$. $\square$

Таким образом, вложение логики высказываний в теорию множеств с самопринадлежностью в достаточной мере очевидно⁵⁵.

Заключение

Таким образом, доказательства ограничительных теорем о формальных системах, при допущении семантики самопринадлежащих (самоссылочных, непредикативных) рассуждений, значительно упрощаются, что обеспечивает большую степень понимания их студентами⁵⁶. К этому же рассуждению примыкает и более сильное ограничительное утверждение об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры, также использующее семантику самопринадлежащих рассуждений, изложенное отдельно (имеющее приложение в теории управления). То есть использование самопринадлежащих конструкций является вполне приемлемым и позволяет получать фундаментальные математические результаты более ясным путём.

§24. Приложения в матлингвистике

Теоремы о стягивании циклов

Рассмотрим цикл объектов с самопринадлежностью:

$$A_1 \in A_2 \in \dots \in A_n \in A_1, \quad (17)$$

где $A_i \in A_i$.

Тогда для объектов A_k и A_{k+1} , $k \in [1, n]$ (цикл для k : $n+1=1$, $1=1=n$), предыдущий принадлежит последующему $A_k \in A_{k+1}$, по определению цикла (17) и по теореме о транзитивности принадлежности ([46],

как непротиворечивы), но это искусственный приём рассуждений.

⁵⁴ Причём описание логических констант в теории множеств с самопринадлежностью представляется наиболее естественным, в отличие, например, от описания посредством теории категорий [11, с. 138 и след.].

⁵⁵ Кроме того, поскольку для M (и для некоторых других самопринадлежащих множеств) выполняется условие равенства множества всех подмножеств множества самому множеству $\text{Exp}M = M$, то на M (и этих множествах) легко строится операция замыкания (отображения множества всех подмножеств на само множество [17]), конструирующая дедуктивную систему. Другое дело, что не все объекты из M могут быть объективно известны (к данному моменту процесса их описания).

⁵⁶ В том числе в курсе "Философии математики", прочитанном автором в Соликамском государственном педагогическом институте.

гл. 2) $A_{k+1} \in A_k$, последующий принадлежит предыдущему, значит, по следствию из определения равенства объектов [46] эти объекты совпадают, $A_k = A_{k+1}$, т. е. цикл тождественен единственному объекту. Доказана следующая теорема.

Теорема 13 (о стягивании простых циклов). Простой цикл (без ответвлений) самопринадлежащих объектов тождественен единственному объекту. $\square$

Наличие ответвлений от цикла не изменяет содержания доказанного утверждения. Пусть цикл таков:

$$A_1 \in \underset{\substack{\cup \\ B}}{A_2} \in \dots \in A_n \in A_1. \quad (18)$$

Тогда $B \in A_1$ по транзитивности принадлежности самопринадлежащих объектов A_k цикла (18), т. е. $B, A_1 \in A_2$ и $B, A_2 \in A_1$, значит, $A_1 = A_2$. Для произвольного A_k доказывается аналогично: A_1 отождествляется с A_2 , n уменьшается на единицу и рассматривается отождествление следующих двух объектов и т. д. до оставшегося одного объекта, цикл стягивается к объекту вида $B \in A_{*1}$.

Если же, наоборот, объект цикла принадлежит некоторому объекту, то рассуждения аналогичны рассуждениям вышедоказанной теоремы,

$$A_1 \in A_2 \in \dots \in A_n \in A_1, \quad (19)$$

$\cap$
 B

таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 14 (о стягивании циклов с самопринадлежностью). Цикл принадлежащих один другому объектов с самопринадлежностью (пусть даже и с ответвлениями) тождественен одному объекту. $\square$

Приложение к определениям

Приложение семантики самопринадлежности в математической лингвистике. Пусть L — язык, допускающий непредикативные определения (близкий к естественному или даже естественный), и пусть конечное количество определений образуют цикл:

$O_1 \xrightarrow{\text{def}} O_2$ (O_1 определяет O_2), $O_k \xrightarrow{\text{def}} O_{k+1}$, $O_n \xrightarrow{\text{def}} O_1$, $k \in [1, n]$. Если все определения цикла непредикативны (самоссылочны), т. е. $O_i \xrightarrow{\text{def}} O_i$, $i \in [1, n]$ ⁵⁷, тогда в интерпретации самопринадлежности $O_{k+1} \in O_k$ образуется цикл с самопринадлежностью и по доказанной выше теореме определения O_i совпадают $O_i = O_j = O_{*1}$, т. е. круг непредикативных определений тождественен одному определению. Доказана теорема.

⁵⁷ Ср. философские определения через род и ближайшее видовое отличие.

Теорема 15 (о стягивании круга определений). Круг непредикативных определений тождественен одному определению. □

§25. Приложение в матэкономике

Возможность конечной алгоритмизации (вычислимости) планирования экономики (построения оптимального плана как деятельности государства, так и составляющих его экономических субъектов) имеет, очевидно, необходимую прикладную значимость. Описание результатов решения этой задачи на основании недавних результатов о конечных моделях для лямбда-теории в семантике множеств с самопринадлежностью и составляет содержание следующего раздела.

Теорема о конечной вычислимости

Основной результат лямбда-теории (оснований теории языков программирования высокого уровня [5; 44]) составляет теорема о неподвижной точке [5, с. 140; § 6.1] и её следствие, гласящее, что если у оператора есть неподвижная точка, то она вычислима (конечно вычислима). Этот результат усилен в теореме о конечной области моделей для лямбда-исчисления в теории множеств с самопринадлежностью — из соображений построения моделей лямбда-теории, где D — совокупность λ -термов, $\text{Exp}(D) \rightarrow D$ ($\text{Exp}(D) = D$). Модельной областью для λ -теории в теории множеств с самопринадлежностью [46] являются конечные натуральные числа; по свойству этих чисел $\text{Exp}(n) = n$, где $n \in \mathbb{N}$ (но $\text{Exp}(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$). Подробное доказательство этой теоремы см. в §22).

Таким образом, в интерпретации объединённый смысл вышеприведённой теоремы таков, что если имеется неподвижная точка оператора, то она вычислима посредством конечного алгоритма.

Кроме того, есть также более ранняя теорема о неподвижной точке финансового оборота (неподвижной точке оборота общественно необходимого времени в экономике) при условии безынфляционности, более подробно см. в работах [45; 48]. В другой интерпретации — теорема об оптимальной норме прибыли экономических субъектов, об оптимальной норме прибыли государственного бюджета и внутригосударственных экономических субъектов⁵⁸.

Объединяя смысл этих теорем и учитывая, что количество внутригосударственных экономических субъектов конечно (и норма прибыли стандартна), получается конечный результат:

Теорема 16 (о конечной алгоритмизуемости, вычислимости, оп-

⁵⁸ Позволяет прогнозировать нижнюю границу инфляции и многократно проверена по данным экономической статистики как СССР и России, так и в мировом масштабе (частично библиографию см. в [48]).

тимального планирования). При условиях безинфляционности задача планирования (определения неподвижной точки финансового оборота — оптимальной нормы прибыли — как государственного бюджета, так и бюджетов внутригосударственных субъектов) вычислима посредством конечного алгоритма (конечно вычислима). □

Дополнение об оптимуме управления

Приведённый общий результат имеет и узкоспециальное приложение в практике построения систем статистически оптимального управления сложными химико-технологическими процессами (см., напр. [49; 54; 55]), а именно в этой предметной области теорема, получаемая аналогичным рассуждением, такова:

Теорема 17 (о конечной вычислимости параметра оптимального управления). При использовании метода пространства состояний (трёхмерного описания параметров химико-технологической системы) неподвижная точка (оптимум управления) вычислима посредством конечного алгоритма (конечно вычислима). □

Заключение

Описанная теорема как в предметной области математической экономики, так и в предметной области теории управления является фундаментальным обоснованием возможности решения указанных экономических⁵⁹ и прикладных задач.

Глава 6. Интерпретация теоремы о размерности

В этой главе описана одна интерпретация топологического определения размерности посредством приложения результатов теории множеств с самопринадлежностью (теоремы о размерности).

⁵⁹ Теорема о конечной вычислимости оптимального плана в экономической предметной области такова, что, если в качестве меры экономических ресурсов, как это неоднократно предлагали советские и российские философы [1, с. 72], в неограниченно продолжающемся будущем использовать меру электрической энергии (кВт/ч) — кстати, единственно возможный в долгосрочной перспективе выход — электрическая энергия, получаемая в единой энергосистеме посредством солнечных батарей (см. обзор в работе [47], поток электрической энергии при занятии 10% площади земной поверхности солнечными батареями таков, что на одного человека приходится мощность 100 кВт/ч за 1 час при 10^{10} человек населения — многократно больше, чем в развитых странах ныне), — в этом случае при условии стационарного состояния биосферы — совокупного нулевого производства энтропии, у оператора совокупного энергооборота (и энергооборота отдельных экономических субъектов) также имеется неподвижная точка — мера оптимума энергозатрат, направленная на самоподдержание экономики (материально-техническое обслуживание и инфраструктуру), такая, что и в этих условиях оптимальное планирование экономической деятельности конечным образом алгоритмизуемо (вычислимо).

Описана интерпретация топологического определения размерности, связанная с теорией графов, показано соответствие между размерностью и хроматическим числом графа K_n , строимого на базисных векторах пространства, описано понятие ориентированного пространства, доказана иным способом, с привлечением теории графов, теорема об ограниченной размерности ориентированного пространства; указано на естественный способ построения ориентированных пространств в теории множеств с самопринадлежностью.

Определение размерности по Лебегу накрытиями для области и пространства таково: пространство (область) имеет размерность m , если имеет накрытие объединением $m+1$ выпуклых множеств.

§26. Интерпретация в терминах теории графов

Вышеприведённое определение размерности допускает такую интерпретацию. Область, общая для множеств накрытия, должна содержать минимально $n+1$ различных точек, принадлежащих всем $n+1$ минимально накрывающим множествам, где n — размерность пространства. При этом на этих $n+1$ точках, как на вершинах графа, соединяемых попарно рёбрами, строится граф K_{n+1} , являющийся $n+1$ раскрашиваемым графом.

Заметим, что в n -мерном пространстве вершины n базисных векторов и начало координат также являются вершинами графа K_{n+1} , более того, всякий фрагмент этого n -мерного пространства (в окрестности какой-либо точки, в которую переносится начало координат) устроен, в смысле структуры направлений базисных векторов, точно так же.

В связи с вышесказанным можно различать в геометрическом смысле одинаковые (и различающиеся только по обозначению) оси по раскраске графа, K_{n+1} , построенного на базисных векторах, однако такое различие не имеет геометрического смысла и является различием только по обозначению. В геометрическом же смысле оси пространства различаемы при введении дополнительных ориентирующих векторов, соединяющих попарно вершины базисных векторов, при этом теоретически возможно 2^n различных ориентаций n -мерного пространства.

§27. Ориентированные пространства

Как уже сказано, в ориентированном пространстве задаются дополнительные, соединяющие попарно вершины базисных векторов, ориентирующие направления (см. рис. 7 для двухмерного случая).

Ориентация задаваема также и посредством определяющих соотношений (с привлечением теоретико-групповых методов). Для указанного двухмерного случая рассмотрим группу по сложению, образованную единичными базисными векторами a и b .

Эта группа коммутативна (знак операции сложения в записи для простоты опускаем), $ab=ba$ (определяющее соотношение). Сами базисные вектора друг от друга ничем, кроме обозначения, неотличимы. Если же ввести ориентацию, то добавится ещё одно определяющее соотношение $b=ax$, где x соответствует ориентирующему плоскость вектору.

Аналогично для трёхмерного пространства (см. рис. 8, определяющие соотношения пропускаем). В трёхмерном случае наблюдается одно отличие от двумерия, если двумерие было абсолютно однозначно ориентировано, каждый фрагмент плоскости ориентирован одинаково, то в трёхмерии имеется плоскость, пересекающая куб по диагонали, соединяющей первые два базисных вектора и параллельная 3-й оси, такая, что она (плоскость) ориентирована неоднозначно, — эта неоднозначность ориентации каких-либо противоречий в определяющих соотношениях не влечёт. Но естественно задаться вопросом: а не накладывает ли ориентация ограничений на размерность пространства, т. е. не возникает ли в пространствах большей размерности каких-либо иных неоднозначностей ориентации, влекущих противоречия?

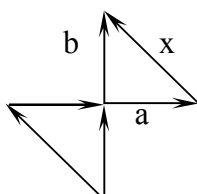


Рис. 7. Структура порядка плоскости

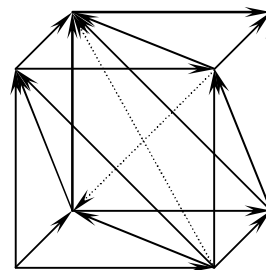


Рис. 8. Структура порядка 3-мерного пространства

§28. Теорема об ограниченности размерности

Рассмотрим четырёхмерный случай (см. рис. 9). Для упрощения представления вершины куба обозначены в двоичной форме. Ей соответствует буквенное обозначение базисных векторов $1111=dcba$. Определяющие соотношения таковы:

$ab=ba$, $bc=cb$, $cd=dc$, $da=ad$ — задают базисные отношения, далее ориентирующие соотношения, $b=ax$ (плоскость), $c=by=az$ (куб), $d=ar=qb=rc$ (четырёхмерный куб). Легко заметить, что плоскость P_1 , соединяющая вершины $(1000, 0100, 1010, 0110)$, и плоскость P_2 $(0100, 1000, 1001, 0101)$, как и для трёхмерного пространства, неоднозначно ориентированы, поэтому вектор, соединяющий точки A и B $(1010, 0101)$, является противоречиво ориентированным, а это показывает, что ориентированного четырёхмерия не существует.

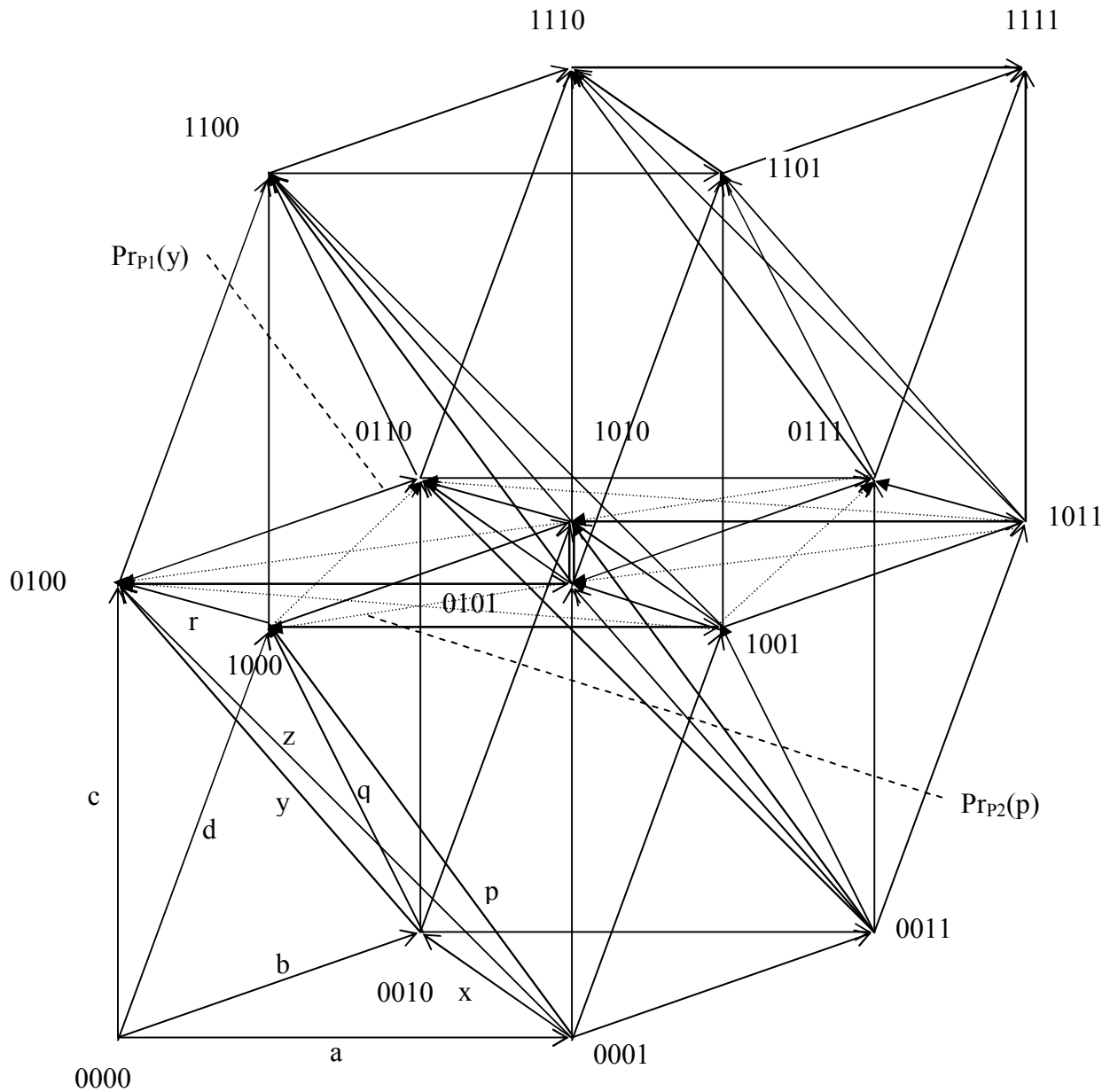


Рис. 9. Четырёхмерие фиктивное

Рассмотрим то же в определяющих соотношениях. В плоскости P_1 диагональ, соединяющая вершины 1010 и 0100, равна элементу $bdPr_{P_1}(y)$, где $Pr_{P_1}(y)$ — проекция на плоскость P_1 (по направлению d) направления, задаваемого элементом (вектором) y . В плоскости P_2 диагональ (1000, 0101) — $acPr_{P_2}(p)$, где $Pr_{P_2}(p)$ — проекция на плоскость P_2 (по направлению c) направления, задаваемого элементом (вектором) p . Следовательно, при проекции этих двух направлений на отрезок AB получаем соотношение $abdPr_{P_1}(y) = bacPr_{P_2}(p)$, ввиду коммутативности выражение слева сокращается, значит, $dPr_{P_1}(y) = cPr_{P_2}(p)$, т. к. $d = rc$, то $rcPr_{P_1}(y) = cPr_{P_2}(p)$, по коммутативности $rPr_{P_1}(y) = Pr_{P_2}(p)$, что не имеет места, — поскольку получено противоречие, то четырёхмерное ориен-

тированное пространство невозможно. Доказана следующая теорема.

Теорема 18 (об ограниченной размерности). Ориентированное пространство не более чем трёхмерно. $\square$

Это доказательство носит характер отвлечённый от природы ориентируемых объектов (от их самопринадлежащих структур) и поэтому действенно и для классического определения пространства (без привлечения семантики самопринадлежности).

В теории множеств с самопринадлежностью эта теорема доказывается аналогично: ориентация пространства задаётся посредством отношения принадлежности при выстраивании дополнительной ориентирующей структуры множеств, кроме как определяющей координатные направления (рисунки совершенно идентичны).

Таким образом, максимальный ориентирующий граф в ориентированном пространстве — это граф K_4 — максимальный плоский из графов вида K_n . Этим доказанная теорема связана с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов [12, с. 253-254; 56].

Заключение

При введении понятия ориентированного пространства показано, что ориентированность пространства накладывает ограничения на его размерность — ориентированное пространство не более чем 3-мерно. Кроме того, изложенный материал иллюстрирует тесную связь и геометрических понятий (понятий "непрерывной" математики) и некоторых понятий теории графов и теории множеств ("дискретной" математики) в связи с понятием размерности.

Глава 7. Обход парадоксов

§29. Разрешение парадоксов принадлежности

Отсутствие в теории с самопринадлежностью парадокса Рассела показано ранее (см. гл. 2, §9).

Кроме парадокса Рассела в теории множеств без самопринадлежности известны сходные парадоксы [125], разрешимые аналогичным образом.

Парадокс класса всех фундированных классов (парадокс Мириманова): класс B называется фундированным (нефундированным), если есть (нет) такая последовательность классов. Парадокс заключается в том, что допущение фундированности класса всех классов либо допущение его нефундированности приводят к противоречию, аналогичному противоречию в парадоксе Рассела.

Класс всех фундированных классов при интерпретации этого его свойства в теории множеств с самопринадлежностью совпадает с объектом A (множеством Рассела) в разрешении парадокса Рассела. Класс всех нефундированных классов при той же интерпретации — это множество, содержащее все самопринадлежащие множества (a , значит, и само M), совпадающее с M (по свойству транзитивности принадлежности для объектов, принадлежащих самопринадлежащим множествам). Таким образом, в теории множеств с самопринадлежностью описанный выше парадокс не то что бы не имеет места, но разрешён конструктивным образом.

Парадокс всех классов C без круга [125] является расширением парадокса Рассела, попытка построить в теории множеств без самопринадлежности класс C всех классов без круга, т. е. не содержащих кругов вида:

$$B \in B_{s_i} \in \dots \in B_2 \in B_1 = B, \quad (20)$$

при некоторых s_i , приводит к противоречию. То же самое при построении класса всех классов без n -членного круга ($s_i = n$).

По доказанным ранее теоремам о стягивании циклов цикл объектов (20) вышеозначенного парадокса тождественен единственному самопринадлежащему объекту. По теореме о недополнимости непустого объекта в M дополнение к множеству всех циклов (некоторого вида) — непостроимо, т. е. этот парадокс в теории множеств с самопринадлежностью отсутствует.

Таким образом, в непротиворечивой теории множеств с самопринадлежностью устранены конструктивным образом (а не исключением из рассмотрения) парадоксы круга принадлежности.

§30. Отсутствие парадокса Кантора

Парадокс Кантора — парадокс теории множеств, использующей

только несамопринадлежащие множества, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств в этой теории ведёт к противоречиям.

Теорема Кантора [40], являющаяся отправной точкой рассуждений этого парадокса, о том, что мощность множества всех подмножеств множества больше мощности множества, $|\text{Exp}(A)| > |A|$, имеет место только для несамопринадлежащих множеств, поэтому "наибольшего" несамопринадлежащего множества не существует.

Для некоторых самопринадлежащих множеств имеет место $|\text{Exp}(B)| = |B|$, т. к. $\text{Exp}(B) = B$ (где $B \in B$; см. выше §22). Поэтому заключение теоремы Кантора в теории множеств с самопринадлежностью не создаёт парадокса. Действительно, $\text{Exp}(M) = M$ (где M — множество всех множеств) и бóльших множеств операцией взятия множества подмножеств не построить.

§31. Отсутствие парадокса Бурали-Форти

В теории множеств без самопринадлежности парадокс Бурали-Форти демонстрирует, что предположение о существовании множества всех порядковых чисел ведёт к противоречиям [40].

Утверждение о том, что объединение порядковых чисел — порядковое число, являющееся основой этого парадокса, имеет место только в теории, которая утверждает, что множество подмножеств пустого множества не пусто, что на самом деле, в теории с самопринадлежностью, не имеет места (см. §6) $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$, где $\emptyset \in \emptyset$. К тому же в теории множеств с самопринадлежностью натуральный ряд чисел не единственен (имеется больше двух структурно-изоморфных натуральных рядов, объединение которых не является порядковым множеством), что не даёт оснований для построения этого парадокса.

Наибольшим множеством, содержащим в себе все порядковые числа (упорядоченные нити последователей), является множество всех множеств, M , которое не является упорядоченной (самоподобной) нитью объектов, т. е. числом (см. §18). Таким образом, в теории с самопринадлежностью парадокс Бурали-Форти не имеет места.

Действительно, легко заметить, что теория множеств с самопринадлежностью свободна от парадоксов теории множеств Кантора, необоснованно использовавшей только несамопринадлежащие множества.

Глава 8. Около континуум-гипотезы

В связи с доказанной ранее некорректностью диагонального метода (Зенкин) переобоснованы посредством семантики самопринадлежности теоремы Гёделя, а также утверждения о несчётности количества точек прямой; указано на возможность лишь счётного количества обозначений, построен пересчёт обозначений n -ичных разложений чисел на отрезке $[0, 1)$.

В 1997 г. А. А. Зенкин опубликовал [14] результаты, подтверждающие некорректность диагонального метода Кантора. В связи с этим возникает потребность анализа и переобоснования базирующихся на этом диагональном методе утверждений, что и сделано далее с использованием семантики самопринадлежности, введённой русским математиком Д. Миримановым ещё в 1917 г. [40].

§32. Краткое доказательство теорем Гёделя

Подробно основания структур с самопринадлежностью и сами эти структуры описаны отдельно [50; 46]; см. также главы 2, 3. Для понимания этого параграфа достаточно интуитивного представления о несамопринадлежащих ($X \notin X$) и самопринадлежащих ($Y \in Y$) объектах.

Теоремы Гёделя доказываются достаточно кратко. Пусть имеется *предикативная* теория T , такая, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i , и выводимые утверждения B_j ,

$$(A_{i1}, \dots, A_{in}, B_{j1}, \dots, B_{jm}) \models B_{j0}, \quad (21)$$

причём выводимое утверждение не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в левой части формулы (21), которую безотносительно её содержания обозначим через L , $\{A_{i1}, \dots, A_{in}, B_{j1}, \dots, B_{jm}\} = L$, $B_{j0} \notin L$.

Теорема 10. В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость.

Теорема 11 (о неполноте предикативной системы). Предикативная теория — неполна.

Схемы доказательств этих теорем одинаковы: непредикативные утверждения о непротиворечивости или полноте предикативной теории T не являются в самой этой теории выводимыми ввиду того, что эти утверждения в их выводе ссылаются на себя самих.

Пусть C — высказывание о непротиворечивости теории, т. е. в C утверждается, что все утверждения теории T таковы, что в ней (теории T) не выводимы и их отрицания. И пусть T непротиворечива, т. е. высказывание C выполнимо на всех высказываниях этой теории (важным для использования семантики самоссылочных высказываний является допущение того, что это высказывание уже истинно), т. е. семантически C выводимо из множества всех высказываний теории, в том числе и из

себя самого (раз отрицает собственное отрицание при наличии непротиворечивости),

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, C\} \models C, \quad (22)$$

$C \in L$, что противоречит условиям предикативности системы T ($C \notin L$). Следовательно, теорема 10 о том, что *в предикативной теории недоказуема её непротиворечивость*, доказана. $\square$

Пусть F — высказывание о полноте системы, т. е. F утверждает, что в системе T выводимы все утверждения, в том числе и само F , но тогда F , если оно верно, семантически (самоссылочно) выводится и из себя самого

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, F\} \models F, \quad (23)$$

$F \in L$, что противоречит условиям допущения чисто предикативности теории T ($F \notin L$). Теорема доказана. $\square$

Однако предположение о непредикативности теории T являлось лишь начальным условием рассуждений, в связи с доказанными теоремами допускается и иная интерпретация результата — *непротиворечивость теории недоказуема в предикативных системах*, т. е. доказательства непротиворечивости возможны только с допущением непредикативности (самоссылочности) в семантике рассуждений, как, например, в теории множеств с самопринадлежностью.

Теорема 19. Непротиворечивость и полнота теории недоказуемы средствами самой этой предикативной теории. $\square$

Таким образом, без применения диагонального метода передоказаны теоремы Гёделя. Поскольку в этих теоремах (1–3) не упоминался совершенно тип логики, посредством которого осуществляется вывод в теории T ⁶⁰, то эти теоремы действенны в отношении множества предикативных теорий с произвольными правилами вывода (в т. ч. на использующие многозначную, модальную и т. п. логики).

Следующие утверждения связаны с отношением счётности и несчётности множеств.

§33. Несчётность количества точек на прямой

При описании упорядоченных структур в теории множеств с самопринадлежностью было указано, что объекты, определяющие структуру прямой, самоподобны, т. е. обладают свойством структурной изоморфности объекта его собственному подобъекту.

Определение 5. Внутренность объекта A содержит объекты, принадлежащие объекту A , за исключением самого объекта A ;

$$V(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ и } A \notin V(A))\}.$$

Определение 6. Два объекта структурно-изоморфны, если они

⁶⁰ Вообще эта логика может быть не только двузначной.

изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^{\varepsilon} B$, если $A \cong B$ (изоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$) и если для любых $a_1, a_2 \in A$, $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$, $b_1, b_2 \in B$, имеет место $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Определение 7. Объект A собственно внутренний по отношению к объекту B , если он принадлежит B , но не принадлежит ряду внутренних объектов B .

Определение 8. Объект самоподобен, если структурно-изоморфен подобъекту, собственно внутреннему по отношению к этому же объекту.

Для самоподобных объектов C и D одной прямой, $D \subset C$, или $C \subset D$ или $D = C$, причём в любом случае имеет место структурный изоморфизм $D \cong^{\varepsilon} C$. Для объектов натурального ряда (натуральных чисел) свойство структурной изоморфности, очевидно, не выполняется, — натуральные числа одно другому структурно неизоморфны. Следова-

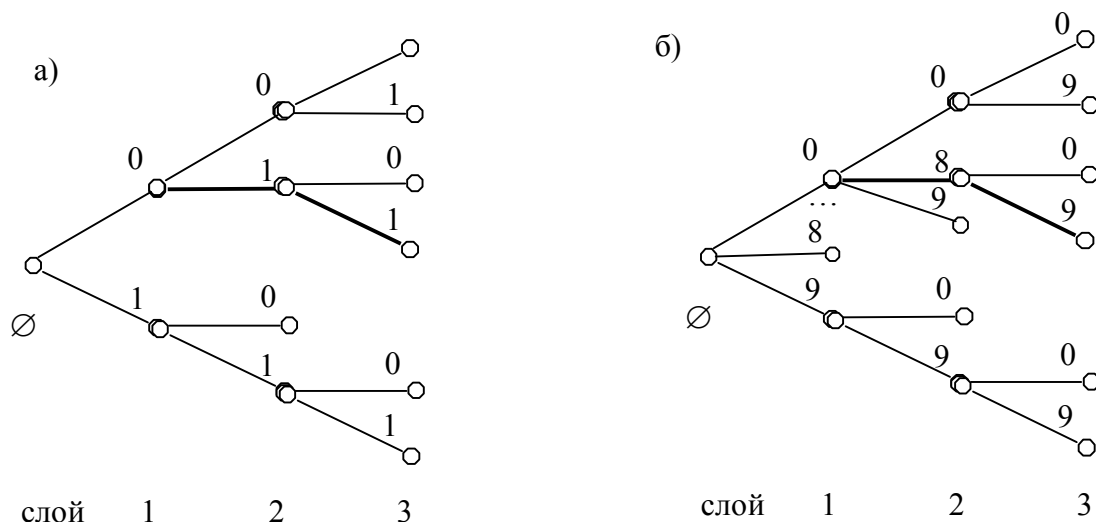


Рис. 10. Фрагменты 2-дерева (а) и 10-дерева (б)

тельно, самоподобные объекты — несчётны. Доказана теорема.

Теорема 20. Количество точек на прямой — несчётно. $\square$

§34. Счётность количества обозначений

Очевидно также, что, располагая конечным алфавитом, можно иметь не более чем счётное количество обозначений. Множество подмножеств конечного множества конечно. Счётное повторение этой операции для начального конечного множества даёт счётное множество.

Даже в случае, если имеется счётный алфавит, но сами обозначения содержат конечное число символов, итоговое количество обозначений счётно (ввиду счётности множества конечных подмножеств счётного множества).

Таким образом, следует различать точки на прямой (как показано

выше, их несчётное количество) и их десятичные обозначения, которых по вышесказанным соображениям счётное количество. Остаётся построить пересчёт этих обозначений.

§35. Счётность простых деревьев

Представления чисел на отрезке $[0, 1)$ в n -ичной системе счисления (с m разрядами) изоморфны n -дереву (глубины m), что очевидно. На рис. 10а выделенная линия соответствует числу $0,011\dots$, на рис. 10б — $0,089\dots$ (номер слоя соответствует порядковому номеру цифры за запятой).

Пересчёт n -дерева организуется следующим образом: считается 1-й слой, затем — 2-й, далее — 3-й и т. д. В m -дереве для всякой вершины r -го слоя её номер не более чем n^r . Для всех n и r из $\mathbb{N}$, $n^r < N$, из чего следует счётность количества вершин дерева, а значит, и счётность количества n -ичных обозначений чисел на отрезке $[0, 1)$.

Таким образом, несчётность множества точек на прямой и счётность количества n -ичных обозначений чисел на отрезке $[0, 1)$ согласуются друг с другом. Доказана теорема [87].

Теорема 21. Число десятичных обозначений чисел — счётно. $\square$

Следствие. Число n -ичных обозначений чисел, где n конечно, — счётно. $\square$

Как показано, классические утверждения (теоремы Гёделя, утверждения о несчётности числа точек на прямой) доказуемы и без диагональных рассуждений, в семантике самопринадлежности. Счётность количества обозначений — счётность количества n -ичных обозначений чисел на отрезке $[0, 1)$ не противоречит тому, что объектов мысли (точек на прямой) несчётное число, не всё из существующего (мыслимого) можно обозначить.

§36. О мощностях самоподобных множеств

Рассмотрим самоподобное множество A , задающее порядок на прямой, обозначим количество объектов в объекте A_i (его мощность) через α , $|A_i| = \alpha$, где A_i — некоторый недостижимый последователь, содержащийся в A . По изложенным выше соображениям (конечный алфавит обозначений) таких недостижимых последователь обозначениями можно выделить не более чем счётное (строго говоря конечное число). Интересен следующий вопрос: сколько объектов находятся между A_i и A_{i+1} ?

С одной стороны, недостижимые последователи структурно-изоморфны, то их мощности равны — $|A_i| = |A_{i+1}| = |A_j| = \alpha$. С другой стороны, если между A_i и A_{i+1} r объектов и $r < \alpha$, то, т. к. выделено счётное число A_j , имеем общее число объектов во всей бесконечной цепочке —

$\gamma \cdot |\mathbb{N}| < \alpha$, что противоречит начальному предположению о том, что $|A_j| = \alpha$. Значит, теорема доказана.

Теорема 22 (о количестве точек на прямой между двумя разными точками). Количество объектов в самоподобном объекте и между любыми его подобъектами, соответствующих различным недостижимым последовательностям, равно одной величине — мощности этого множества. $\square$

Записывая формально, имеем $\alpha + \alpha = \alpha$, сложение некоммукативно (не допускает обращения в вычитание, т. к. убывающие цепи внутренностей не обрываются). То есть α есть мощность упорядоченного (в простейшем случае на прямой) континуума.

Следующий вопрос, требующий разрешения, — о мощности множества всех множеств.

§37. Дополнение: о мощности множества M

По доказанной ранее теореме 8 множество всех множеств — несамоподобно, поэтому из предыдущей теоремы очевидно, что мощность множества M больше чем мощность самоподобного множества, $|M| = \mu > \alpha = |A|$, где A — самоподобно. (Иначе бы существовал изоморфизм M на A или на подмножество A , что противоречит тому, что в M имеется кроме A бесконечное количество самоподобных объектов). Доказана теорема (см. [92]).

Теорема 23 (о мощности M). Мощность множества M больше, чем мощность самоподобного объекта. $\square$

Таким образом, мощность множества M является максимальной, однако M — не упорядочено отношением принадлежности.

Вопрос о том, имеются ли определённые мощности, промежуточные между мощностью самоподобного множества и мощностью множества всех множеств, является неразрешимым ввиду невозможности структурирования объектов, промежуточных между этими множествами в виде некоторых последовательностей.

Глава 9. Теорема о неподвижной точке

Описан аналог теоремы Какутани о неподвижной точке [16]. В теории множеств с самопринадлежностью эта теорема в интерпретации позволяет формализовать принцип самоприменимости (неотчуждаемости) экономической деятельности, созерцательно качественно описанный ранее [57].

О самоприменимости (конструктивных целей) экономической деятельности писали ранее исходя из тех соображений, что несамоприменимая (отчуждённая) деятельность большей частью деструктивна (как то: производители табака сами не курят и детям своим не позволяют, разве что пересыпают им вещи от моли...); ниже описана некоторая простая формализация этого принципа, достаточно хорошо совпадающая с действительностью (см. [90], [94]).

§38. Формулировка теоремы

Предварительные сведения. Рассматривается теория множеств с самопринадлежностью, непротиворечивая, полная, но не аксиоматизируемая.

Рассмотрим отображение

$$f : X \rightarrow \text{Exp}(X), \quad (24)$$

где $\text{Exp}(X)$ — множество всех подмножеств множества X .

Неподвижная точка x_0 отображения f понимается в обычном смысле: $f(x_0) = x_0$ ⁶¹.

Теорема 24 (о неподвижных точках). Неподвижными точками многозначного отображения множества всех множеств в множество всех его подмножеств, $g : M \rightarrow \text{Exp}(M)$, являются:

- а) единичные объекты $[x] = g([x]) = x$ ($\text{Exp}([x]) = [x]$);
- б) самопринадлежащие множества, такие что $A \in A$, $A = g(A)$ ⁶²;

⁶¹ Строгость неподвижности может быть ослаблена, x_1 *слабо-неподвижная точка* отображения f если x_1 структурно-изоморфно подмножеству из $f(x_1)$ (определение структурного изоморфизма см. выше), экономические интерпретации в этом случае далее по тексту аналогичны, в (2) равенство $B = \text{Exp}(B)$ заменяется на структурный изоморфизм, т. е. неподвижная точка x_1 такова, что $x_1 \in x_1$ и как один и тот же объект $x_1 \in \subseteq f(x_1)$, x_1 является частью его образа и одновременно, как тот же объект, ему принадлежит (что выполняется только для самопринадлежащих множеств $C \in C$, $C \in \subseteq \text{Exp}(C)$).

Определение. Два объекта структурно изоморфны, если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^e B$ если $A \cong B$ и если для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Пример. Объекты $A = \{[a], A\}$ и $2 = \{1, 2\}$ — структурно изоморфны, объекты A и $C = \{[c_1], [c_2]\}$ — изоморфны, но не структурно ($A \not\cong^e C$), $A \neq [a]$.

⁶² В общем случае может быть и $A \neq \text{Exp}(A)$, например, $C = \{a, b, C\}$, $[\{a, b\}] \notin C$,
см. след. стр. $\longrightarrow$

в) в том числе само множество M (т. к. $M \in M$ и $\text{Exp}(M) = M$);
 г) пустое множество, $\emptyset = g(\emptyset) = \emptyset$ ($\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$),
 обобщая а)...г), неподвижные точки — все самопринадлежащие объекты со свойством $X = \text{Exp}(X)$.

Доказательство. Очевидно, следует из свойств множеств ⁶³. $\square$

Эта теорема даёт абстрактное математическое выражение созерцательно усматриваемому прежде неё принципу самоприменимости целей экономической деятельности (в широком смысле — неотчуждаемости), который кратко описывается так: конструктивная (сохраняющая воспроизводство системы ценностей) деятельность является и самоприменимой (несамоприменимость связана с деструкцией...).

§39. Интерпретация теоремы

Рассмотрим (созерцательно) экономическую систему, в которой производится некоторый набор товаров (в общем случае и услуг), в определённой системе управления (законов и т. п., которые в данном случае вне внимания, рассматривается собственно экономическая область), тогда циклы производства и обмена описываются общей схемой (поскольку любой набор товаров (и услуг) есть некоторый товар (услуга), то весь набор товаров и услуг B таков, что $B = \text{Exp}(B)$):

$$B \xrightarrow{f_{t_1}} B = \text{Exp}(B) \xrightarrow{f_{t_2}} B = \text{Exp}(B) \xrightarrow{f_{t_3}} \text{ и т. д. }, \quad (25)$$

в общем случае в стационарном состоянии $f_{t_i} = f_{t_j}$, $\forall i, j \in I$ (рекомбинация товаров и услуг в процессе производства).

Тогда неподвижные точки этого отображения суть экономические субъекты:

- а) отдельные товары (и услуги), (модель — единичные объекты),
- б) некие комплексы товаров (и услуг), производимые предприятиями и аналогичными по масштабу экономическими субъектами, (модель — самопринадлежащие объекты промежуточные между единичными и самим M , неединичные и неравные M)⁶⁴;
- в) вся государственная экономика в целом (модель — M);
- г) пребывание в созерцательном покое, вне обмена товарами (и

$[\{a, b\}] \in \text{Exp}(C)$.

⁶³ Эта теорема является аналогом теоремы Какутани о неподвижной точке (см.: [16, с. 630]), в теории множеств с самопринадлежностью.

⁶⁴ Непустота этих объектов в экономическом смысле очевидна, в математическом следует из существования множеств, промежуточных между единичными объектами и M и отличных от натурального ряда, обладающих требуемым теоремой свойством.

услугами) (модель — $\emptyset$) ⁶⁵.

Самопринадлежность истолковывается как самоприменимость по отношению к работникам (семьям трудящихся) этих товаров (и услуг), которые они производят.

То есть несамопринадлежащие объекты (несамоприменимые) не являются неподвижными точками, т. е. не являются подлинными экономическими единицами, о чём в качественном смысле много было сказано ранее.

Более того, такая формально-математическая троечастность неподвижных точек совпадает с действительной структурой экономики:

а) домашние хозяйства, производящие и потребляющие внутри себя единичные объекты потребления (как то: кашу на завтрак, выстиранную пелёнку или заплатку);

б) промышленные предприятия и аналогичные по масштабу экономические субъекты;

в) государство в целом, о чём в связи со структурированием бюджетов трёх этих видов экономических субъектов писалось ранее ⁶⁶.

Вне семантики самопринадлежности рекомбинация товаров и услуг (отображение множеств (25)) не может быть описана по теореме Кантора о мощности множества всех подмножеств несамопринадлежащего множества, которая в этом случае превышает мощность самого несамопринадлежащего множества.

Заключение

Таким образом, описанный аналог теоремы Какутани о неподвижной точке и его интерпретация дают формальное выражение основополагающему созерцательному принципу самоприменимости для выделения подлинных (конструктивно действующих) экономических субъектов. Хотя выяснить конкретную структуру самопринадлежащих множеств, являющихся неподвижными точками, соответствующими определённым комплексам товаров, вряд ли возможно (имеет небольшой прикладной смысл), более значимо и имеет дальнейшее практическое приложение именно наличие формального подтверждения принципа самоприменимости. К тому же экономические субъекты гораздо сложнее теории множеств, содержат самого человека (субъекта), поэтому обладают свойством открытости, в отличие от множеств, субъекта не

⁶⁵ Примечательно, что этот частный случай вписывается в этой теории в общую схему.

⁶⁶ Описание оборота общественно необходимого времени и нормирования доли (свободно распределяемой) прибыли (эквивалента меры стоимости) в этих экономических субъектах дано посредством основного логистического уравнения $x = 1 - x^x$ [57; 60; 61], выводимого из положений теории информации.

содержащих, замкнутых в М. Поэтому применение формальных методов в описании систем с субъектом весьма ограничено (кстати, даже если множества, являющиеся неподвижными точками, были описаны, то было бы методологически некорректным заключать от их структуры к структуре экономических субъектов, содержащих человека).

Дополнение

Описанная интерпретация теоремы о неподвижной точке является ярчайшим примером ограничения применимости математических методов к описанию систем, содержащих неотъемлемо и самого человека. Так, на 4-м уровне сложности математических понятий (функционально-интегрально-дифференциальных представлениях) невыразима свобода воли человека, неопределимая некоторой функцией. На 5-м уровне сложности (алгоритмические представления) математические понятия не отражают возрастной изменчивости представлений субъекта (комплексов знаний-умений-навыков). На 6-м же уровне даже непредикативные конструкции не в состоянии полностью соответствовать реальным процессам обмена в экономике, поскольку не отражают наличия субъекта как носителя определённой системы ценностей, которому подчинён этот обмен. Таким образом, математические понятия и структуры применимы лишь для упорядочения внешних по отношению к сознанию составляющих бытия — материальных потребностей, затрат времени и т. п.

Так что математический аппарат, пригодный для описания моделей и упорядочения процессов неживой природы в технике и технологиях или для упорядочения информационных процессов в электронных информационных системах, весьма ограничено (и то более лишь для измерения параметров системы) применим для описания системы, включающей как неотъемлемую часть и самого человека с его сознательной и свободной деятельностью.

Глава 10. Внематематические приложения результатов

Выше были рассмотрены приложения основных результатов теории множеств с самопринадлежностью в собственно математической или экономико-математической области. Кроме этих приложений имеются и другие, относящиеся к областям иным, нежели собственно математическая теория.

§40. Приложение теоремы о размерности в теории управления

При интерпретации теоремы о размерности рассмотрены особенности управления качеством физико-химического технологического процесса. Описан общий подход к управлению качеством химико-технологических процессов путём представления их параметров в трёхмерном пространстве состояний.

Установлено, что при наличии одного главного параметра качества процесса и одного главного параметра управления пространство состояний химико-технологического процесса трёхмерно. Это условие является как необходимым, так и достаточным для представления со-

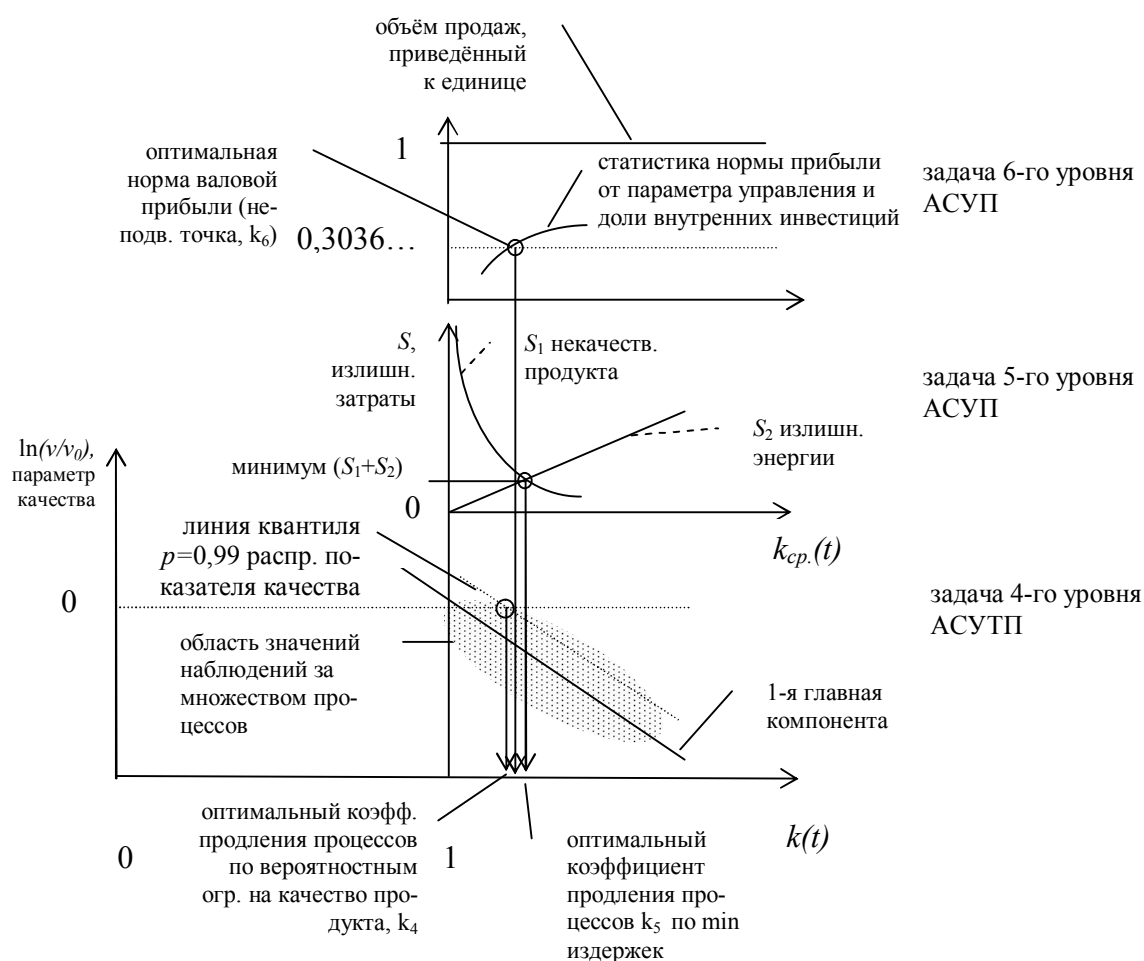


Рис. 11. Оптимизационная статистическая диаграмма управления

стояния химико-технологического процесса.

Пространство состояний (трёхмерное по вышедоказанным теоремам) соответствует трёхмерности параметров процесса: 1) мера качества процесса; 2) параметр управления; 3) экономический параметр. (Пример полной оптимизационной диаграммы в пространстве состояний, см. на рис. 11).

Решение задачи управления при фундаментальной обоснованности трёхмерности пространства состояний системы: 1) параметр качества продукта (подпространство X); 2) параметр управления (подпространство Y); 3) экономический параметр (подпространство Z) — сводится при приложении результатов теории измеримости [115] $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{g} Z$, отображение g измеримо, если измеримо f , к построению оптимизационной статистической диаграммы в трёхмерном пространстве состояний (см. рис. 11, на примере процесса отгонки), вычислению норм подпространств X, Y, Z , — $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$, перенормировке наблюдений соответственно вычисленных норм, а затем определению по статистической обработке данных оптимума — неподвижной точки оператора управления.

Отображение f — это отображение подпространства параметра качества X в подпространство параметра управления Y , отображение g — это отображение отображения f в подпространство экономического параметра. Оптимум управления находится как управление при получении продукта, соответствующего норме качества с заданной вероятностью при минимальных издержках. В этом заключается основное содержание метода пространства состояний управления качеством химико-технологических процессов.

Метод пространства состояний управления качеством химико-технологических процессов является устойчивым вследствие свойств устойчивости применяемых статистических методов и применим к процессам, допускающим выделение одного определяющего параметра качества и одного определяющего параметра управления.

Результаты приложения теоремы о размерности к построению информационных систем управления технологическими процессами описаны в [40; 45; 59; 126; 62–66; 68; 70; 118–120].

Вертикальная 6-уровневая структура информационных систем управления [52; 67] связана с гносеологическими основаниями, указанными в главе 1.

§41. Экономические приложения

Некоторые экономические приложения (теорема о неподвижных точках) описаны в предыдущих параграфах. Теорема 7 об ограничении размерности имеет также и экономическую интерпретацию, позволяю-

щую описать трёхмерие системы потребностей и соответственно трёхмерную структуру бюджетов экономических субъектов (государства, предприятий, домашних хозяйств). Подробно это описано отдельно [60], здесь же указывается основная идея приложения этой теоремы.

Поскольку сферы потребностей (см. рис 12) — i) необходимость, ii) обязательства, iii) свободы — качественно различны и несводимы друг к другу, то одномерная характеристика не может являться индикатором качества их удовлетворения, требуются учёт пропорциональности потребления и соответствия нижней границы потребления норме (физиологической границе для питания).

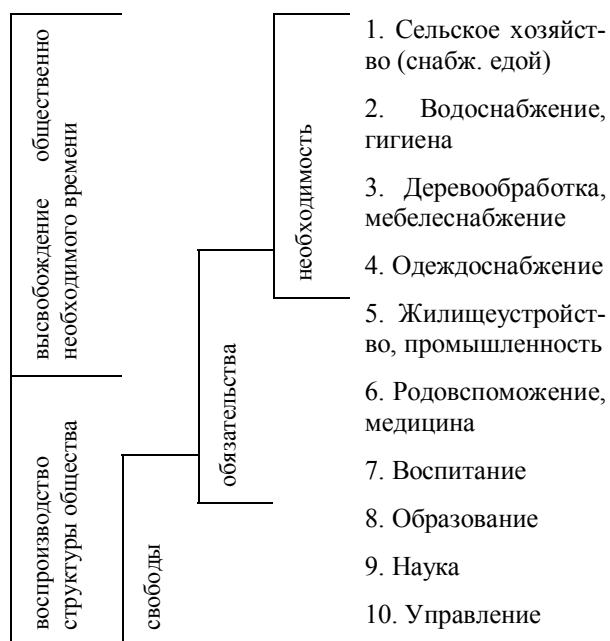


Рис. 12. Структура ценностей (отраслей хозяйства)

§42. Ограничения биологических моделей

В полигенной модели соответствия фенотипических признаков генотипу [37] используется предикативный подход, аналогичный предикативному выводу в формальных системах. (Ограничения предикативного подхода были указаны ранее для некоторых классов моделей [119]. В рассматриваемом случае ограничения аналогичны). То есть даже без знания конкретных правил вывода фенотипа из генотипа фенотипические признаки представляются как некоторые предикативные выводы из генотипических аксиом:

$$(G_1, \dots, G_n) \models F_i, \quad (26)$$

причём $F_i \cap (G_1, \dots, G_n) = \emptyset$ (условие предикативности), где G_j — фрагменты генома, F_i — фенотипические признаки.

(Если же предполагать сложную, многоуровневую схему формирования признаков, то возможно

$$(G_1, \dots, G_n, F_{K1}, \dots, F_{Kr}) \models F_i, \quad (27)$$

$$(G_1, \dots, G_n, F_{K1}, \dots, F_{Kr}) \cap F_i = \emptyset,$$

т. е. формирование фенотипических признаков обусловлено наличием иных признаков, проявляющихся в той или иной мере зависимо и от влияния окружающей среды).

Тогда на схемы (26) и (27) действуют ограничения теоремы Гёделя о неполноте (см. выше), т. е. в предикативной формальной теории L , содержащей правила вывода (26) или (27), имеются утверждения, невы-

водимые из аксиом ($G_1, \dots, G_n$). Это означает, что в L имеются утверждения (фенотипические признаки), не обусловленные генотипом и средой (которая также предикативно учитывается). Если привлекать к этим рассуждениям негенотипическую наследственность (наследственность через митохондриальные РНК и т. п.), то ограничения остаются точно такими же. Таким образом, вследствие ограничений предикативного аппарата описания наследственности имеются фенотипические признаки, не обусловленные известной материальной наследственностью.

То есть "центральный постулат генетики <который> гласит, что развитие и свойства организма определяются дискретным фактором наследственности — геномом" [43], подлежит в свете вышеозначенных ограничений уточнению, в том плане, что существует некоторая мера этой определённости, меньшая единицы, ввиду, как следует из теорем Гёделя, наличия признаков, не определяемых геномом⁶⁷.

⁶⁷ Религиозному мировоззрению эти выводы лишний раз указали бы на наличие Творца, продолжающего и сейчас творить мир и всё живое и человека, поддерживая жизнь (как сказал поэт, "Творца, творящего творенье,— оно им живо и сейчас..."); но материалистическому мировоззрению эти ограничения лишь указывают на ограниченность научного знания в этой области на современном этапе развития науки.

Часть 3. Дополнения

Глава 11. О представлениях самопринадлежности

Описаны ограничения представления самопринадлежащих объектов в терминах несамопринадлежности; указано на невозможность полного вложения теории множеств с самопринадлежностью в теорию без самопринадлежности. С рассмотрением кроме отношения принадлежности и отношения обозначения указано на возможность лексикографической записи обозначений самопринадлежащих объектов дублированием обозначения. Показано, что отношение обозначения использует семантику самопринадлежности.

§43. Ограничения в терминах несамопринадлежности

Очевидно, что полное "вложение" теории множеств с самопринадлежностью (ТМ) в теорию множеств без самопринадлежности (ТН) невозможно. Это следует из того, что множество всех множеств M , $M \in M$, $\text{Exp}(M) = M$ невозможно описать в терминах несамопринадлежности хотя бы потому, что теорема Кантора, действенная только для несамопринадлежащих множеств, $\forall x, x \notin x \quad |\text{Exp}(x)| > |x|$, не позволяет вложить в теорию без самопринадлежности множество всех множеств с его специфичными свойствами $|\text{Exp}(M)| = |M|$. Обратное вложение теории множеств без самопринадлежности в теорию множеств с самопринадлежностью имеет место вследствие выделения в M множества, содержащего все несамопринадлежащие множества

$A = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x = a, a \notin a, a = V^\alpha(A), \text{ где } \alpha \text{ — число})\}$; см. (3).

Кроме того, теорема о непредставимости самопринадлежащего объекта в виде объединения двух его непустых непересекающихся объектов также непредставима в терминах несамопринадлежности.

Однако при такой невложимости теории с самопринадлежностью в целом в теорию без самопринадлежности интересны попытки представить если не всё множество M , то, по крайней мере, отдельные конечные самопринадлежащие множества в терминах несамопринадлежности — попытки построить их несамопринадлежащие модели.

§44. Попытки обозначения самопринадлежности

При описании теории множеств с самопринадлежностью уже отмечалась разница между объектами и их обозначениями (при описании свойств пустого множества). Полная иерархия обозначений такова:

- i) отношения части и целого (отношения принадлежности),
- ii) отношения обозначения (и на его основании — меры),
- iii) отношения потребности (включающие и самого субъекта).

(Описание отношений потребности вне пределов этой математической работы, см. чуть подробнее [94]).

Итак, рассматривается иерархия отношений обозначения и принадлежности — как самопринадлежащий объект (нематериализуемый в

виде вещи), обозначается посредством несамопринадлежащих вещественных символов.

Обозначение самопринадлежащего объекта (мыслимого в сознании сразу едино-многим) посредством символов, находящихся вне сознания, требует удвоения обозначения самопринадлежащего объекта.

Пример. Объект "двойка", состоящий из "единицы" и самой "двойки", мыслимый в воображении как единое целое (едино-многое), требует при обозначении дублирования обозначения "двойки" — $2 = \{1, 2\}$.

Другой пример — файл, имеющий вид
"имя_файла" = {"имя_файла", "содержимое"}.

По теореме о транзитивности принадлежности если берётся имя файла, то будет браться (ввиду его самопринадлежности) и всё содержимое файла. Такие операции с файлами хорошо знакомы.

Таким образом, с одной стороны, лексикографическая запись обозначений самопринадлежащих объектов требует дублирования их обозначений⁶⁸. С другой стороны, в самом отношении обозначения имеется самопринадлежность — обозначение обозначает своё содержимое и себя само — "знак" = {"знак", "обозначаемое содержание"}⁶⁹.

Это проявляется при построении обобщающих понятий, например, на 1-м уровне обобщения (соответствующем 1-му психологическому возрасту) понятие о "вообще стуле" является обобщением восприятий множества конкретных стульев

"вообще стул" = {"вообще стул", "стул 1", "стул 2", ..., "стул n"}.

Посредством несамопринадлежащих множеств невозможно построить такие обобщающие конструкции понятий, обозначающих и себя, и своё содержимое. Центрирующим эти отношения самопринадлежности в обозначениях разного уровня обобщённости является высший, 6-й, уровень отражения действительности в самоосознании (см. рис. 16).

Таким образом, самопринадлежащие конструкции непредставимы в терминах чистой несамопринадлежности (более того самопринадлежность нематериальна, она относится ко 2-му онтологическому уровню⁷⁰). Однако даже в самом отношении обозначения наличествует самопринадлежность вследствие того, что знак обозначает и себя, и своё содержимое.

⁶⁸ Это связано с удвоением образа действительности при его отражении в самоосознании (см. гл. 1).

⁶⁹ Наличие самопринадлежности в отношении потребности в экономическом смысле в виде самоприменимости экономической деятельности уже рассматривалось выше (см. гл. 9).

⁷⁰ При трёх онтологических составляющих: 1. материя, 2. время (информация, как упорядоченное время, 3 сознание, см. [106, §1], [113])

Глава 12. Об иерархии логических структур

Для рассмотрения наличной иерархии логических структур предварительно рассмотрена историко-психологическая иерархия логических представлений.

§45. Исторические аналогии

Описание современной иерархии логик сопоставимо в плане самоописательности современных логических теорий с историческим усложнением логических представлений.

Этапы развития логики

В истории осознания логических понятий и операций по мере усложнения структуры научных понятий в истории развития представлений о логических понятиях и операциях выделяют 6 стадий:

1. Первоначальное формирование понятий о чувственно воспринимаемых образах, возникновение письменности (1 тыс. л. до н. э.) [7, т. 19, с. 571–577].

2. При обобщении понятий об отдельных предметах и образах — возникновение осознанного представления об элементах языка, формирование логики объёмов понятий. (Работы Аристотеля в этом плане первоначальны IV в. до н. э. [2]).

3. Возникновение логики суждений, осознание грамматических категорий. Если на предваряющей стадии основополагающим элементом рассуждения было отдельное понятие-слово, то на 3-м этапе анализу подвергается словосочетание или грамматическая категория (склонение, спряжение) как отношение, связующее отдельные слова или понятия (в логике высказывание — силлогизм). Первоначальны в этом плане грамматические учения (III в.) неоплатоников [39]. В дальнейшем при развитии символизма, символьного обозначения (первоначальное обозначение понятия буквой — у Диофанта, ⁷¹ II в.) и при возникновении формального понятия о подстановке понятий на место переменных в логическом выражении возникает схоластическая логика — силлогистика, абстрактно оперирующая с понятиями (до XV в.): "Большое занимает место в школе Пселла (IX в.) изучение подстановки одних логических терминов на место других терминов, которая, по-видимому, вряд ли была возможна без ясного различия логических постоянных и логических переменных..." [38, с. 114].

4. Примерно с XVI в. при обобщении формально-логических рассуждений и отвлечении от них начинается стадия оперирования абстрактно-определимыми понятиями (например, сила, скорость и т. п.) и

⁷¹ Кстати, впервые давшего отвлечённое определение понятия об уравнении (с неизвестной величиной).

начало осознанного применения гипотетических рассуждений (Ф. Бэкон, Г. Галилей, XVI в., до кон. XVIII в.). Абстрактное определение понятия обобщает множество силлогизмов, включающихся в определение термина. Возникает представление о модальной логике (Гегель, см. ниже).

5. Осознанное определение понятия об алгоритме возникает в 1-й пол. XIX в.⁷², отличающееся от гипотетического мышления предыдущей стадии (не осознающего конечной цели построения гипотез и открытия законов), осознающего конечную цель логического построения, взаимосвязь множества отдельных законов, гипотез. С появлением понятия об алгоритме связано появление отвлечённого понятия о формальной (аксиоматической) системе, теории.

6. При обобщении множества теорий практика применения теоретического знания, осознание взаимосвязи физических, биологических и социальных процессов, требующие анализа ценности и значимости конечных целей (отчасти процессы глобализации и экологизации; с той же стадии окончательно оформляется вероятностное мышление — середина XX в.), эта стадия развития логики научного знания длится и в настоящее время.

Структура прослеженных этапов такова, что на каждой новой исторической стадии наблюдается обобщение некоторого множества элементов предыдущей стадии, отвлечение от них и появление новой структуры, исторического новообразования. Возрастное развитие логических представлений содержит те же этапы, что и историческое (см.: [51]), наличие этих этапов обусловлено иерархией уровней обобщения, связанных с уровнями самоосознания и с уровнями отражения действительности в сознании (см. рис. 1б).

Иерархия суждений по Гегелю

По сравнению с описанной шестиуровневой иерархией логик имеются и более ранние описания этой иерархии, содержащие лишь начальную часть уровней. Так, у Гегеля, в "Науке логики" при описании суждений наблюдается следующая иерархия:

1. "Суждение наличного бытия" — это суждение есть "согласие бытия и реальности" [10, с. 68], аналогичное упомянутому 1-му уровню абстракции (в последовательности отражения) именованию.

2. "Суждение рефлексии", соответствующее 2-му уровню абстракции в схеме отражения действительности в сознании. "Если нужно приводить примеры предикатов суждений рефлексии, то они должны быть другого рода, чем для суждений наличного бытия" [10, с. 83]. Ло-

⁷² Об определении алгоритма А. Лавлейс говорилось выше.

гика этого уровня суждений — логика объёмов понятий, аналогичная Аристотелевому описанию логики.

3. "Суждение необходимости", содержащее в себе многозначность ("различие ей имманентно" [10, с. 90]) и заключающееся в подстановке на место логических переменных их конкретных значений.

4. "Суждение понятия", содержащее в себе категории модальности [10, с. 99].

Эта Гегелева иерархия логических суждений совпадает с первыми 4 историческими этапами развития логики и с первыми 4 уровнями логических рассуждений в современной шестиуровневой иерархии логик⁷³.

§46. Невложимость самопринадлежности в простые логики

Итак, наличная иерархия уровней логик такова:

- 1) именование объектов;
- 2) логика объёмов понятий;
- 3) многозначная логика;
- 4) модальная логика;
- 5) алгоритмы, формализуемые лямбда-исчислением;
- 6) непредикативные, самопринадлежащие конструкции.

Причём интересно, что если самопринадлежащие конструкции несводимы к лямбда-исчислению, то остальные уровни допускают последовательное сведение к низшему логическому уровню.

В теории множеств с самопринадлежностью построена адекватная модельная область для лямбда-исчисления (см. §22). Обратное не имеет места, поскольку лямбда-исчисление оперирует с несамопринадлежащими конструктами [5], непредставимость самопринадлежности в терминах несамопринадлежности рассмотрена ранее (см. гл. 11).

Сводимость логических конструкций 5-го уровня и менее к низшим такова. (В работе [4] рассмотрено вложение λ -исчисления в модальную логику).

Таблица 6. Таблицы для L_3 . (а или b, а и b, не а)

или	0	1	2		и	0	1	2		не	
0	0	1	2		0	0	0	0		0	2
1	1	1	2		1	0	1	1		1	1
2	2	2	2		2	0	1	2		2	0

⁷³ Иерархия логических представлений Аристотеля занимает первые два уровня. Причём первый уровень — это именование, а второй — логика объёмов понятий, впервые им (Аристотелем) и описанная.

Модальная логика вложима в трёхзначную логику. Пусть имеется трёхзначная логика L_3 с алфавитом $(0, 1, 2)$, заданная таблицами логических функций (см. табл. 6)⁷⁴. Тогда строится соответствие между L_3 и модальной логикой L_m следующим образом, $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow$ "возможно а", $2 \rightarrow$ "необходимо а". И модальная логика вкладывается тем самым в трёхзначную логику L_3 .

В свою очередь многозначные логики вложимы в декартово произведение двухзначных логик. Так, трёхзначная логика L_3 вложима в декартово произведение трёх двухзначных логик:

$$L_3(0, 1, 2) \subseteq L_2(0, 1) \times L_2(1, 2) \times L_2(0, 2).$$

Двухзначная же логика, кроме глобальной её модели посредством множества всех множеств, реализуема и на локальных моделях — на какой-либо непустой несамопринадлежащей области (см. пример на рис. 13). Это логика объёмов понятий (2-го уровня обобщённости), впервые описанная Аристотелем.

Рассуждения логики объёмов понятий сводятся к рассуждению об именовании предметов. Пусть A — имя одной совокупности предметов, B — наименование второй совокупности, тогда для выяснения, обладают ли некоторые предметы одновременно свойствами A и B , требуется перебрать совокупности этих предметов, дабы выяснить, что пересечение несамопринадлежащих множеств A и B не пусто (см. рис. 13).

Формально при кодировании информации в ЭВМ в них выполняются фактически операции нижнего, 1-го, уровня логики. К этим операциям сводятся более сложные — логика объёмов понятий (сравнение совокупностей), многозначная, а затем и модальная логики, а также λ -исчисление. Реализация же операций с собственно самопринадлежащими объектами неформализуема в ЭВМ.

Заключение

Таким образом, в иерархии логических структур непредикативные, самопринадлежащие конструкции занимают особое место вследствие их несводимости к алгоритмическим, предикативным, строго несамопринадлежащим представлениям. То есть не вся часть логических рассуж-

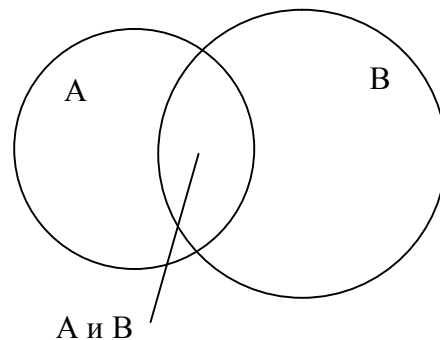


Рис. 13. Пример логики объёмов понятий на несамопринадлежащих множествах

⁷⁴ Такая логика используется при моделировании сигналов в цифровых схемах [19, с. 206–207] $L_3(0, *, 1)$, "0" и "1" — это логические 0 и 1, а "*" — состояние неопределённости между 0 и 1 (фронт изменения электрического сигнала в логической электронной схеме).

дений может быть формализована внешним по отношению к сознанию образом, с чем связаны естественные ограничения искусственного интеллекта. Объективные цели и ценности, носителем и выразителем которых является сам субъект, носящие непредикативный характер, неформализуемы вне его сознания, однако рассуждения о целях и ценностях уже вне математики — над логико-информационным уровнем мышления — в созерцательной области.

Рассмотренная теория множеств с самопринадлежностью дополняет уже известные результаты классической теории множеств и иных разделов математики.

Глава 13. Дальнейшие фундаментальные результаты

В этой главе приведены дальнейшие фундаментальные результаты теории множеств с самопринадлежностью.

§47. О счётности последователей типа $PN(.)$

Обозначим мощность последователя $PN(\emptyset)$ через ω , тогда $|P(PN(\emptyset))| = \omega + 1$, $|PN(PN(\emptyset))| = \omega + \omega$, $|PN^{PN(\emptyset)}(\emptyset)| = \omega \cdot \omega$.

Счётность $\omega + 1$ очевидна: сначала считаем простой последователь, следующий за $PN(\emptyset)$, затем простые последователи, входящие в $PN(\emptyset)$.

Счётность $\omega + \omega$ также легко видеть: считаются пары последователей $P^n(\emptyset)$ и $P^n(PN(\emptyset))$, пар счётное число, ввиду счётной бесконечности пересчёта общее число $\omega + \omega$ — счётно.

Рассмотрим счётность $\omega \cdot \omega$. Счёт возможен различный: а) по строкам, сводя $\omega \cdot \omega$ к сложению $\omega + \omega + \omega + \dots$ (ω раз), ввиду счётности $\omega + \omega$ эта сумма равная $\omega \cdot \omega$ — счётна; или б) по диагоналям", пересчёт 1, 2, 1_2 , 1_3 , 2_2 , 3, 4, 3_2 и т. д. ввиду счётной бесконечности пересчёта $\omega \cdot \omega$ — счётно.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\
 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 & \dots & & & \\
 1_3 & 2_3 & 3_3 & \dots & & & & \\
 \dots & & & & & & & \\
 1_n & 2_n & 3_n & \dots & & & &
 \end{array} \tag{28}$$

Аналогично показывается счётность $\omega \cdot \omega \cdot \omega$ и т. п. произведений (счётность $\omega \cdot \omega \cdot \omega$ на диаграмме изображается в 3-мерном пространстве, как счётность $\omega \cdot \omega$ в 2-мерном в (28)).

Далее рассматривается ω^ω , это эквивалентно счётности в ω -мерной диаграмме вида (28). Пересчёт по диагонали таков. Аналогично пересчёту, указанному выше для (28), пересчитываются диагонали, для пересчёта каждой диагонали требуется ω шагов, для пересчёта первых двух диагоналей $\omega + \omega$ шагов, затем в сумме по всем диагоналям получается $\omega \cdot \omega$ шагов, а это счётное число, см. выше.

Даже если имеются сверхстепени вида ${}^\omega\omega = \omega^\omega \omega^\omega \omega^\omega \dots$ (ω раз, $\omega^\omega \omega^\omega = \omega^\omega$), то для них рассуждения аналогичны вышеприведённым (то же для сверсверхстепеней и т. д.).⁷⁵

⁷⁵ О сверхстепенях и сверсверхстепенях и т. п. см. напр. [36].

§48. Мощность множества М и множества Рассела

В этом параграфе показано, что мощность множества, содержащего все несамопринадлежащие множества (множества Рассела), относительно мощности множества всех множеств есть бесконечно малая величина, — т. е. несамопринадлежащих множеств бесконечно мало по сравнению с самопринадлежащими множествами.

Основные свойства множеств с самопринадлежностью описаны ранее в монографии [93], см также часть 1. Множество, содержащее все несамопринадлежащие множества (множество Рассела), было описано в работе [46]. То, что мощность множества всех множеств является максимальной, установлено в работе [77]. Исследуется вопрос о соотношении мощностей множеств: множества несамопринадлежащих множеств А и множества всех множеств М.

Рассмотрим соотношение мощностей:

$$|A| / |M|, \quad (29)$$

где А — множество, содержащее все множества, задаваемое непредикативной схемой свёртывания [46], [93].

$$A = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } ((x = a, a \notin a) \text{ либо } a = A \text{ или } a = V^\alpha(A), \text{ где } \alpha \text{ — число})\}^{76}, \quad (30)$$

где М — множество всех множеств.

Строится множество A^{*1} , такое, что содержит как все несамопринадлежащие объекты множества А, так и все их простые последователи. Для всех В, $B \notin B$, $[B] \in A$, последователь к В, $P(B) \in A^{*1}$. При этом по определению последователя он самопринадлежащ — $P(B) \in P(B)$. Аналогично строится A^{*2} , где используются последователи порядка 1 и 2, $P(B)$ и $P^2(B)$ и т. д. до бесконечных и недостижимых последователей включительно (все эти последователи — самопринадлежащи, для бесконечных $PN(.)$ берётся самопринадлежащий $P(PN(.))$), строятся множества $A^{*\beta}$.

Отношения мощностей множеств таковы:

$$|A| / |A^{*1}| \approx 1/2, \quad |A| / |A^{*2}| \approx 1/3, \dots \text{ и т. д.}$$

Тогда отношение мощностей $|A| / |A^{*\beta}|$, при устремлении β к увеличению, стремится к бесконечно малой величине ε :

$$|A| / |A^{*\beta}| \rightarrow \varepsilon. \quad (31)$$

Ввиду максимальной мощности множества всех множеств имеет место соотношение

$$|A^{*\beta}| < |M|,$$

⁷⁶ $\alpha \in PO(\emptyset)$, где $PO(.)$ — недостижимый последователь, $V^\alpha(A)$ — внутренность степени α от А, $V(A) = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x \notin A \text{ и } A \notin x)\}$, см. [50].

что с учётом (29) означает, что

$$|A| / |A^{*\beta}| > |A| / |M|.$$

Следовательно, отношение (29) мажорируемо отношением (31), значит,

$$|A| / |M| = \delta,$$

где δ — бесконечно малая величина, $\delta < \varepsilon$.

Доказана теорема.

Теорема 25 (о количестве несамопринадлежащих множеств). Количество несамопринадлежащих множеств $|A|$ бесконечно мало по сравнению с мощностью множества всех множеств $|M|$; $|A| / |M| = \delta$, — бесконечно малая величина. $\square$

Таким образом, наивная [3] и аксиоматические [8], [25], [40] теории множеств, оперирующие только несамопринадлежащими множествами, описывали лишь совокупность множеств бесконечно малую по сравнению с самопринадлежащим множеством всех множеств.

§49. Самопринадлежащие множества как неподвижные точки

В этом параграфе указано, что самопринадлежащие множества являются неподвижными точками отображения множества всех множеств в себя, порождаемого отношением принадлежности (с учётом транзитивности принадлежности объектов, принадлежащих самопринадлежащему объекту), см. [111].

Подробно свойства множеств с самопринадлежностью описаны выше в части 1. Свойства канонического отображения множества всех множеств в себя заключаются в следующем.

Как известно, множество всех множеств обладает, в частности, следующими свойствами:

- а) $M \in M$, б) $M = \text{Exp}(M)$, в) M — единственно.

Имеется следующая теорема (доказательство на с. 13).

Теорема 1 (о транзитивности принадлежности). Пусть объекты, принадлежащие самопринадлежащему объекту A , принадлежат и тому объекту B , которому объект A принадлежит $A \in A$, ($A \notin \emptyset$), $A \in B$, тогда объекты из A принадлежат и объекту B , $x \in A \Rightarrow x \in B$, т. е. $A \subseteq B$.

С учётом свойств а) и б) множества M имеется отображение: $\varphi : M \rightarrow M$, такое, что $\forall A, A \subseteq M \Rightarrow [A] \in M$ ($\varphi(A) = [A]$)⁷⁷.

⁷⁷ Более строго это записывается так:

$\varphi : \text{Exp}(M) (=M) \rightarrow M$, такое что $\forall A \subseteq M [A] \in M$.

Отображение φ — содержит операцию над объектами брать как единое, обозначаемую квадратными скобками (см. табл. 1). Отношение принадлежности — это принадлежность взятого как единое какому-либо иному объекту. Отображение φ естественно порождается в M отношением принадлежности.

С учётом теоремы о транзитивности принадлежности неподвижными точками отображения φ ($\varphi(X) = X$) являются самопринадлежащие множества:

$$\varphi(X) = X \Leftrightarrow X \in X.$$

Очевидно, что если $Y \notin Y$, то $\varphi(Y) = [Y]$, где $[Y]$ — единичный объект, $||Y||=1$. То есть, в случае несамопринадлежащих множеств ($Y \notin Y$), имеет место последовательность отображений:

$$Y = \{a, \dots, b\} \xrightarrow{\varphi} [Y] \xrightarrow{\varphi} [Y].$$

Таким образом, отображение φ переводит все несамопринадлежащие множества в единичные объекты (самопринадлежащие), которые являются неподвижными точками отображения φ .

Доказана теорема.

Теорема 26 (о неподвижных точках канонического отображения).

На множестве M задано каноническое отображение $\varphi : M \rightarrow M$, такое, что $\forall A, A \subseteq M \Rightarrow [A] \in M$ ($\varphi(A) = [A]$); неподвижные точки этого отображения φ — самопринадлежащие множества. $\square$

То есть несамопринадлежащие множества не являются неподвижными точками отображения φ , порождаемого отношением принадлежности.⁷⁸ Таким образом, общее свойство самопринадлежащих множеств быть неподвижными точками канонического отображения множества всех множеств в себя указано.

§50. Свойства структурного изоморфизма

В §14 было описано понятие структурного изоморфизма. Структурный изоморфизм обладает свойствами (изложено по [104]⁷⁹), связывающими его с теоремой о неподвижных точках.

⁷⁸ Это является основной причиной псевдопарадоксов при рассмотрении только несамопринадлежащих объектов теории множеств. Отсутствие в теории множеств с самопринадлежностью этих псевдопарадоксов показано ранее в [77].

Доказательства некоторых теорем в теории несамопринадлежащих множеств пытаются строить неподвижные точки в виде несамопринадлежащих объектов; см. например доказательство теоремы Кантора в [3], теорем Гёделя [20] [27], теоремы о несчётности чисел на прямой [20] и т. п., влекущие при дальнейших формальных рассуждениях парадоксы. С другой стороны, на некорректность таких диагональных рассуждений указывал А. А. Зенкин [14]. Подробный разбор упомянутых доказательств — предмет отдельного изложения.

Таким образом, общая причина псевдопарадоксов в несамопринадлежащей области (рассмотрении только несамопринадлежащих объектов), отсутствующих при рассмотрении самопринадлежащего множества всех множеств, указана.

⁷⁹ Рукопись набросков подробного доказательства описанной теоремы была случайно найдена в архиве автора в 2011 г.

В этом параграфе описано свойство структурного изоморфизма множеств подмножеств структурно-изоморфных множеств, в теории множеств с самопринадлежностью,— структурный изоморфизм имеет место и для множеств подмножеств исходных структурно-изоморфных множеств. Указана прикладная интерпретация этого свойства в лингвистической области. Минимальная модельная область для формального языка с самоссылочностью — всё множество всех множеств.

Предисловие

В теории множеств с самопринадлежностью свойства структурного изоморфизма использовались при описании бесконечных самоподобных множеств. Напоминание определений:

Определение 9. Два объекта изоморфны, если существует изоморфное отображение одного в другой, т. е. $A \cong B$ если существует изоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$, $\varphi(a_i) = b_i$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$.⁸⁰

Определение 6. Два объекта структурно изоморфны, если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^e B$ если $A \cong B$ (изоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$) и если для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $b_1 = \varphi(a_1)$, $b_2 = \varphi(a_2)$, — $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Пример. Объекты $A = \{[a], A\}$ и $2 = \{1, 2\}$ — структурно изоморфны, объекты A и $C = \{[c_1], [c_2]\}$ — изоморфны, но не структурно ($A \cong^e C$), $A \not\cong [a]$.

Теорема о структурном изоморфизме

Пусть A и B структурно-изоморфные множества из M , $A \cong^e B$, т. е. имеется изоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$, т. е. $(x_1 \in x_2) \Leftrightarrow (y_1 \in y_2)$, где $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. Для множеств подмножеств A и B , $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$ выполняется следующее:

1. Для единичных объектов. Пусть x_1, x_2 — единичные объекты из A , тогда если $x_1 \neq x_2$, то $x_1 \notin x_2$, следовательно, т. к. $A \cong^e B$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $y_1 \notin y_2$. Для множеств подмножеств $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$: т. к. для единичного объекта выполняется (см. [1]⁸¹) $x_1 = [x_1]$ и $[x_1] = \{[x_1]\}$, то подмножества, состоящие из единичных объектов, совпадают с самими единичными объектами, значит для единичных объектов из $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$ условие структурного изоморфизма $([\{x_1\}] \in [\{x_2\}]) \Leftrightarrow ([\{y_1\}] \in [\{y_2\}])$, $(x_1 \in x_2) \Leftrightarrow (y_1 \in y_2)$ выполнено.

2. Для несамопринадлежащих подмножеств. Пусть $X_3 \subseteq A$, $X_3 \notin X_3$, тогда, т. к. $A \cong^e B$, имеем $Y_3 = \varphi(X_3)$ и $Y_3 \notin Y_3$. Для множеств подмножеств $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$: т. к. $X_3 \subseteq A$, то $[\{X_3\}] \in \text{Exp}(A)$, $[\{X_3\}]$ — единичный

⁸⁰ Это понимание изоморфизма традиционно для теории множеств, см. [8].

⁸¹ Скобки означают $[\cdot]$ — брать как единичный объект, $\{\cdot\}$ — брать как множество.

объект, $[\{X_3\}] \in [\{X_3\}]$, тоже и для Y_3 , $[\{Y_3\}] \in [\{Y_3\}]$; условие структурного изоморфизма выполнено.

3. Для самопринадлежащих подмножеств. Пусть $X_4 \subseteq A$, $X_4 \in X_4$, тогда, т. к. $A \cong^e B$, $Y_4 = \varphi(X_4)$ и $Y_4 \in Y_4$. Для множеств подмножеств $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$: т. к. для самопринадлежащих множеств $X_4 = [\{X_4\}]$ и $Y_4 = [\{Y_4\}]$, то аналогично тому как для единичных объектов (см. п. 1), условие структурного изоморфизма выполнено.

Все варианты подмножеств множеств A и B описаны вышеозначенными пунктами 1–3; значит и таким образом доказана теорема.

Теорема 27 (об изоморфизме множеств подмножеств). Если два множества структурно изоморфны друг другу, то множества их подмножеств также структурно изоморфны между собой, $A \cong^e B \Rightarrow \text{Exp}(A) \cong^e \text{Exp}(B)$. $\square$

Изоморфизм множеств A и B (не структурный) не влечёт изоморфизма множеств подмножеств $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(B)$.

Пример. Для множеств примера 1 множества подмножеств таковы $\text{Exp}(A) = A$, $|\text{Exp}(A)| = 2$, $\text{Exp}(C) = \{[c_1], [c_2], [\{[c_1], [c_2]\}]\}$, $|\text{Exp}(C)| = 3$. $\text{Exp}(A)$ и $\text{Exp}(C)$ — не изоморфны.

Обратная теорема об изоморфизме

Допустимы также и обратные рассуждения. Пусть имеются структурно изоморфные множества C и D , $C \cong^e D$, $\psi: C \rightarrow D$ и для любых $c_1, c_2 \in A$, $d_1, d_2 \in D$, $d_1 = \varphi(c_1)$, $d_2 = \varphi(c_2)$, — $(c_1 \in c_2) \Leftrightarrow (d_1 \in d_2)$; при этом известно, что C и D являются множествами подмножеств множеств A и B соответственно, $C = \text{Exp}(A)$, $B = \text{Exp}(D)$.

Объекты из C и D исчерпываются следующими вариантами:

1. Самопринадлежащие объекты, отличные от единичных объектов, $X_5 \in X_5$, $X_5 \in C$, $|X_5| \geq 2$, $X_5 \subseteq A$, ввиду структурного изоморфизма $\psi: C \rightarrow D$, $Y_5 = \psi(X_5)$, $Y_5 \in D$, $Y_5 \in Y_5$, $Y_5 \subseteq B$, ввиду того, что $A \subseteq \text{Exp}(A)$ и $B \subseteq \text{Exp}(B)$, структурный изоморфизм ψ в отношении этих самопринадлежащих множеств (Y_5 и X_5) имеет место. Это имеет место для всех самопринадлежащих множеств из C , D , A , B , отличных от единичных объектов.

2. Несамопринадлежащие подмножества из C и D , не входящие в A и B , не относятся к подмножествам из A и B .

3. Единичные объекты из C , D .

3.1 Собственно единичные объекты, такие что $[[a]] \in C$ и $[a] \in A$, аналогично пункту 1, удовлетворяют условия структурного изоморфизма.

3.2 Единичные объекты из C , D , образованные несамопринадлежащими подмножествами из A , B . $[Z] \in C$, $Z \subseteq A$, тогда единичные объекты и самопринадлежащие множества, которые образуют Z , принадлежат как C , так и A , для них по пп. 1, 2 имеет место структурный изоморфизм ψ . Следовательно, A и B изоморфны, а ввиду выполнения условий

структурного изоморфизма пп. 1–3, — структурно изоморфны (все варианты объектов из C , D — исчерпаны). Таким образом, доказана теорема.

Теорема 28 (обратная теореме об структурном изоморфизме). Если два множества C и D структурно изоморфны друг другу, и являются множествами подмножеств множеств A и B соответственно, то и множества A и B также структурно изоморфны между собой, $C = \text{Exp}(A) \cong^{\epsilon} \text{Exp}(B) = D \Rightarrow A \cong^{\epsilon} B$. $\square$

Приложение в матлингвистике

Пусть имеются два языка L_1 и L_2 (формальных), в них имеются высказывания F_1 и F_2 соответственно, структура которых описываемая множествами (с самопринадлежностью), тогда перевод из языка L_1 высказывания F_1 высказыванием F_2 из языка L_2 адекватен, если имеется структурный изоморфизм $F_1 \cong^{\epsilon} F_2$.

Естественно, что наряду с высказыванием F язык L содержит и все возможные его подмножества, т. е. модельная область G для формального языка L является множеством, совпадающим с множеством своих подмножеств $G = \text{Exp}(G)$.

Формальные языки (и системы) по модельной области делятся на следующие:

1. Языки с конечной модельной областью, как например лямбда-исчисление, модельная область которого — конечные натуральные числа, см. [71], [79], [96].

2. Если высказывания языка несамоссылочны (кроме высказываний о самом языке), то его модельная область — это множество, содержащее все несамопринадлежащие множества, с необрывающимся рядом внутренностей:

$A = \{[x] \in M \mid x \in \emptyset \text{ или } (x = a, a \notin a, a = V^{\alpha}(A), \text{ где } \alpha \text{ — число})\}$, — ряд внутренностей этого множества аналогичен самоподобному упорядоченному объекту.

3. Поскольку объектов промежуточной мощности между самоподобными множествами и множеством всех множеств M выделить не удаётся, то минимальная модельная область для языка с самоссылочностью — это всё множество M . Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 29 (о модельной области языка с самоссылочностью). Минимальной модельной областью формального языка с самоссылочностью является всё множество всех множеств M . $\square$

Связь с теоремой о неподвижных точках

В главе 9 была рассмотрена теорема о неподвижных точках и её экономическая интерпретация в виде описания процесса рекомбинации товаров и услуг; вышедоказанные теоремы о структурном изоморфизме показывают, что при отображении, соответствующем процессу рекомбинации товаров и услуг, структура множеств (в виду структурного из-

морфизма множеств подмножеств) сохраняется.

Заключение

При описании свойств структурного изоморфизма и прикладной интерпретации этих свойств на предметной области формальных языков показано, что минимальной модельной областью для языка с самоссылочностью является всё множество всех множеств.

§51. К обоснованию теории меры

Свойства отношения порядка, построенного посредством теории множеств с самопринадлежностью, и свойства десятичных обозначений, связанных с этим порядком, изложены в [93] (решена 1-я проблема Гильберта, см. в [93], см. теоремы 20–23 в этой книге). Для оперирования десятичными обозначениями, построенными на порядковом множестве, в плане их соответствия объектам внешнего мира, необходимо отношение меры.

При описании отношения меры имеется образец меры (принимаемый за единичный), которому соответствует ранее описанное множество десятичных (в общем случае n -ичных) обозначений. Образец меры не содержится в самом отношении порядка, и в множестве десятичных обозначений чисел, построенных на этом порядке. Таким образом, этот образец меры внешний по отношению к указанному порядку и обозначениям чисел. Образец меры обладает свойством самоизмеримости,— соответствует самому себе в процессе измерения. И процесс измерения включает удвоение образца меры,— сопоставление образцу меры равного ему отрезка на прямой.

Поскольку самопринадлежащие конструкции относятся к онтологической области информации (упорядоченного времени), то такое описание теории меры соответствует наличию внутреннего времени субъекта, и внешнего по отношению к субъекту времени.

При приложении теории меры к экономико-математическому моделированию образцом меры является усреднённое общественно необходимое время отдельного субъекта (трудозатраты, см. [94]).

Кратко намеченное выше и в [105] описание теории меры требует отдельного подробного изложения.

§52. Свойства конечных множеств

Описание множеств с самопринадлежностью довольствовалось до сих пор качественным описанием свойств множеств. Интерес представляют и количественные результаты, относящиеся к определению порядка (мощности) множеств подмножеств конечных множеств. Ниже при-

ведены результаты⁸², относящиеся к несамопринадлежащим множествам и множествам с самопринадлежностью, обладающих относительно простой структурой.

Несамопринадлежащие множества

Рассмотрим для начала несамопринадлежащие множества. Пусть $A \notin A$ и A — конечно, $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и для всех a , $a \in A$, a — единичный объект, $|a| = 1$. Требуется определить порядок множества всех подмножеств множества A , — $|\text{Exp}(A)|$.

При перенумерации всех объектов из A , это множество в записи представимо так:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}. \quad (32)$$

Для каждого подмножества B_j из A , $B_j \subseteq A$, и каждого объекта a_i из A определима характеристическая функция $\chi(B_j, a_i)$:

$$\chi(B_j, a_i) = \begin{cases} 1; & a_i \in B_j \\ 0; & a_i \notin B_j \end{cases}, \quad (33)$$

которая принимает единичные значения, если объект a_i принадлежит подмножеству B_j , и нулевые — если не принадлежит.

Подпишем значения характеристической функции (33) под записью (32), под соответствующими объектами a_i из A , — строка записи соответствует подмножеству B_j и является некоторым двоичным числом. В этой записи упорядочим такие двоичные строки-числа, получим запись вида:

$$\begin{array}{llllll} A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \text{— } B_1 = \{a_1\} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \text{— } B_2 = \{a_2\} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \text{— } B_3 = \{a_1, a_2\} \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & \text{— } B_m = A. \end{array} \quad (34)$$

В записи (34) m строк; строка, состоящая из одних нулей, соответствующая пустому множеству $\emptyset$, в эту запись не входит, т. к. по его свойствам, $\{\emptyset\} = [\emptyset] = \emptyset$ ("ничто" $\emptyset$ множеств не образует). Таким образом, в записи (34) всего $m = 2^n - 1$ двоичных строк. Доказана теорема.

Теорема 30. Для любого несамопринадлежащего конечного множества A , $A \notin A$, $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}$, состоящего из единичных объектов, $\forall a$, $a \in A$, $|a| = 1$, порядок множества его подмножеств $\text{Exp}(A)$ равен $|\text{Exp}(A)| = 2^n - 1$. $\square$

Самопринадлежащие множества

Рассмотрим самопринадлежащее множество C , такое, что его

⁸² Результаты получены автором ещё в 1993–1994 гг., но оставались в рукописях.

внутренность⁸³ равна множеству из условия теоремы 1, $V(C) = A$; т. е. C есть простой последователь⁸⁴ от A ; перенумеруем все объекты из C , тогда запись аналогичная записи (32), такова:

$$C = C_k = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, C_k\}. \quad (35)$$

То же самое сделаем с характеристической функцией, построенной аналогично (33) для объектов из C и подмножеств D_j , $D_j \subseteq C$. Запись двоичных слов, аналогичная (34) в первом приближении такова:

$$C = C_k = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, C_k\} \quad (36)$$

$$\begin{array}{llllll} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_1 = \{a_1\} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_2 = \{a_2\} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_3 = \{a_1, a_2\} \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & \text{— } D_{r-1} = A \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \text{— } D_r = C \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \text{— } D_{r+1} = \{a_1, C\} = C \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \text{— } D_s = C, \end{array}$$

где $s=2^k$.

В этой записи среди подмножеств имеются одинаковые,— это те подмножества, которые содержат C , поскольку в этом случае по теореме о транзитивности отношения принадлежности подмножество C , содержащее C , совпадает с C .

Если быть точными, то, подправляя характеристическую функцию в соответствии с теоремой о транзитивности принадлежности, следует записать предыдущую таблицу (36) чуть иначе.

Последние строки, начиная с r -ой, будут одинаковы:

$$C = C_k = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, C_k\} \quad (37)$$

$$\begin{array}{llllll} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_1 = \{a_1\} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_2 = \{a_2\} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{— } D_3 = \{a_1, a_2\} \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & \text{— } D_{r-1} = A \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \text{— } D_r = C \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \text{— } D_{r+1} = \{a_1, C\} = C \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \text{— } D_s = C. \end{array}$$

Поэтому количество разных подмножеств множества C определяется первыми r строками, количество их равно $r = 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^{k-1}$. Доказана

⁸³ Внутренность множества X — это множество всех объектов из X , за исключением самого X , см. подробнее с. 19.

⁸⁴ см. там же с. 19.

теорема.

Теорема 31. Для самопринадлежащего конечного множества C , такого, что его внутренность $V(C)=A$ несамопринадлежаща, $A \notin A$, и состоит из единичных объектов, $\forall a, a \in A, |a| = 1$, порядок множества его подмножеств $\text{Exp}(C)$ равен $|\text{Exp}(C)| = 2^{k-1}$, где $k=|C|$. $\square$

Очевидно, что если $F=P(C)=P^2(A)$ (см. условия теорем 30, 31), то $|\text{Exp}(F)| = 2^{k-2} + 1$, где $k = |F|$. Доказана теорема.

Теорема 32. Для самопринадлежащего конечного множества F , такого, что его s -я внутренность $V^s(F)=A$ несамопринадлежаща, $A \notin A$, и состоит из единичных объектов, $\forall a, a \in A, |a| = 1$, порядок множества его подмножеств $\text{Exp}(F)$ равен $|\text{Exp}(F)| = 2^{k-s} + s - 1$, где $k=|F|$. $\square$

Рассуждения о самопринадлежащих множествах более сложной структуры, в общем случае, довольно многообразны, ввиду разнообразия структуры конечных самопринадлежащих множеств. При сложности описания структуры конечных самопринадлежащих множеств в общем виде заключение о порядках множеств их подмножеств представляется очень громоздким. Однако алгоритм формирования подмножеств (с учётом теоремы о транзитивности принадлежности), показанный на примерах построения упорядоченного списка подмножеств (34), (37), пусть и с повторяющимися строками, относительно более прост. Посредством этого алгоритма представляется выполнимым калькулятор порядков самопринадлежащих множеств.

Для вычисления порядка множества подмножеств конечного самопринадлежащего множества требуется:

- а) перенумеровать объекты его составляющие,
- б) построить множество двоичных слов, соответствующих теоретическим подмножествам,
- в) пользуясь теоремой о транзитивности принадлежности, уточнить значения характеристической функции (подправить двоичные строки),
- г) вычеркнуть повторяющиеся двоичные строки,
- д) подсчитать количество оставшихся строк.

Это количество строк и будет порядком множества подмножеств исходного множества.

Описание реализации этого алгоритма вне рамок этой книги, подробное описание программной реализации калькулятора множеств подмножеств конечных множеств с самопринадлежностью см. в [127], [95].

Теорема о порядке множества подмножеств несамопринадлежащего множества, состоящего из единичных объектов, аналогична подобным теоремам из наивной и аксиоматической теорий множеств. Теоремы о порядке множества подмножеств определённого вида самопринадлежащих множеств весьма специфичны. Описанная схема алгоритма построения характеристической функции для подмножеств само-

принадлежащего множества (с учётом теоремы о транзитивности принадлежности), очевидно при алгоритмическом описании структуры самопринадлежащего множества, позволяет построить программный калькулятор для вычисления порядка множества подмножеств таких множеств, обладающих сложной структурой [127], [95].

§53. Об уточнении свойств пустого множества

В этом параграфе описаны недостатки определения отношения принадлежности в предикативной теории множеств (без самопринадлежности множеств) на примере отношений, связанных с пустым множеством; указано на описанное ранее преодоление этих недостатков в теории множеств с самопринадлежностью, уточнены свойства пустого множества (изложено по [80]).

Свойства множеств с самопринадлежностью описаны достаточно подробно выше, в части 1. Легко видеть, что свойства пустого множества в теории множеств с самопринадлежностью и теории множеств без самопринадлежности — отличаются. Рассмотрим это подробнее.

Свойства $\emptyset$ в теории множеств с самопринадлежностью таковы:

1. $\emptyset$ — самопринадлежаще (формально⁸⁵), очевидно, $\emptyset \in \emptyset$.
2. $\emptyset$ принадлежит (формально) любому объекту из M (множества всех множеств), что выражено в схеме свёртывания:

$$A = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или "условие, задающее объект } A"\}.$$

3. $\emptyset$ — единственно.

*Доказательство*⁸⁶ (формальное). Пусть $\emptyset'$ и $\emptyset$ — пустые множества, тогда, по свойствам 1 и 2 (т. к. оба множества самопринадлежащи) и т. к. $\emptyset' \in \emptyset$ и $\emptyset \in \emptyset'$, по теореме о транзитивности принадлежности, имеем $\emptyset' \subseteq \emptyset$ и $\emptyset \subseteq \emptyset'$, значит $\emptyset = \emptyset'$, т. е. разные обозначения обозначают одно и то же, $\emptyset$ — единственно. $\square$

4. Множество подмножеств пустого множества также пусто $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$.

Доказательство (формальное).

$$\text{Exp} \emptyset = \{[x] \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } x \subseteq \emptyset\} \in \emptyset. \square$$

Непротиворечивость теории множеств с самопринадлежностью доказана, ввиду непредикативности этой теории, средствами самой теории в обход теорем Гёделя, действующих только на предикативные теории, см. часть 2.

В теории множеств без самопринадлежности (канторовской или аксиоматических, ZF и др., непротиворечивость которых, ввиду теорем Гёделя, под вопросом) предполагается, что пустое множество несамо-

⁸⁵ Содержательно: ничто только из ничто и состоит (в несуществующем только не-существование, и нет в нём существующего).

⁸⁶ Содержательно ясно, что ничто — единственно.

принадлежаще, причём содержательных оснований такому мнению о его несамопринадлежности на указано. Такое представление о свойствах пустого множества придаёт отношению принадлежности в этих предикативных теориях несколько непоследовательный вид. Ниже рассуждается в терминах предикативных теорий.

Пусть U — универсум несамопринадлежащих множеств, тогда

$$\forall x, x \in U, \emptyset \in x, \quad (38)$$

за исключением случая, когда $x = \emptyset$, тогда по определению пустого множества в предикативной теории

$$\emptyset \notin \emptyset. \quad (38')$$

Это выделяет в предикативной теории пустое множество от остальных множеств, делая свойство (38) не всеобщим для множеств, но имеющим исключения в виде пустого множества (38').

Рассмотрим другой случай. Пусть X и Y непустые множества, тогда если пересечение их не пусто, то выполняется следующее

$$(\emptyset \in X \text{ и } \emptyset \in Y) \Rightarrow (\emptyset \in (X \cap Y)). \quad (39)$$

Предположение о непустоте пересечения X и Y являлось искусственным, рассмотрим следующий случай. Пусть теперь имеем два множества $A = \{a, b\}$ и $C = \{d, e\}$, где a, b, d, e — различные не пустые элементы. Тогда (39) переписывается для множеств A и C следующим образом:

$$(\emptyset \in A \text{ и } \emptyset \in C) \Rightarrow (\emptyset \in (A \cap C)). \quad (39')$$

То есть, по раскрытии правой части импликации, имеется, что

$$\emptyset \in \emptyset. \quad (40)$$

Это соответствует свойству №2 пустого множества в теории множеств с самопринадлежностью (см. выше), но этому не соответствуют безосновательно постулируемые свойства пустого множества (в виде его якобы несамопринадлежности) в предикативных теориях⁸⁷. То есть отношение принадлежности в предикативных теориях (как только несамопринадлежность множеств) определяется некорректно.

Таким образом, на примере рассмотрения свойств пустого множества показано, что определение отношения принадлежности в предикативных теориях (исключающее самопринадлежность) имеет недостатки и влечёт противоречия, которые, однако, отсутствуют в теории множеств с самопринадлежностью.⁸⁸ Это позволило ещё раз содержательно уточнить описанные ранее свойства пустого множества.

⁸⁷ Поскольку из (40) следует, что в предикативной теории одновременно $\emptyset \notin \emptyset$ и $\emptyset \in \emptyset$, то эта предикативная теория противоречива.

⁸⁸ Указание на противоречивость предикативных систем было высказано Д. С. Корепановой в декабре 2009 г. при сдаче зачёта, с этим указанием и связано основное содержание параграфа.

§54. Непредикативность определения натуральных чисел

Непредикативное постулирование существования множества всех множеств M , обладающего свойствами $M = \text{Exp}(M)$, $M \in M$, некоторым образом «потенциально» в отношении находящихся в нём множеств. То есть с существованием M структура всех принадлежащих ему множеств не задана и подлежит отдельному конструктивному выяснению, при уже доказанной непротиворечивости теории. Стандартным способом выделения из M множеств является схема свёртывания. Натуральные числа задаются как простые последователи к 1 или как к пустому множеству $\emptyset$ ($1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д.):

$$P(A) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } P(A) \in [x])\}$$

$$1 = P(\emptyset) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in \emptyset \text{ либо } P(1) \in [x])\}$$

$$2 = P(1) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in 1 \text{ либо } P(1) \in [x])\}$$

$$3 = P(2) = \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in 2 \text{ либо } P(2) \in [x])\}$$

и т. д.

При этом определение натурального числа (последователя) является непредикативным ($P(A)$ имеется в левой и в правой части равенства).

Пытаться предикативно строить порядковые множества из подмножеств пустого множества: $\emptyset$, $\text{Exp}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\text{Exp}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ и т. д., — в данном случае не имеет смысла, поскольку $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$.

Аналогичный непредикативный подход к определению натурального числа (аксиома существования следующего натурального числа) использовался Фреге, его подход является не сводимым к предикативным конструкциям [122], [123].

Таким образом, в определении натурального числа используются непредикативные конструкции.

Глава 14. Дальнейшие прикладные результаты

§55. О свойстве оператора суперпозиции

В этом параграфе показана связь оператора суперпозиции и теоремы об ограничении размерности. Показано, что оператор суперпозиции $(X_1 \rightarrow Y_1) \rightarrow Z_1$ задаёт ориентацию пространств (в том случае, если эти пространства одномерны), из чего по теореме об ограничении размерности ориентированных пространств следует, что возможна суперпозиция при не более чем трёх связанных оператором суперпозиции пространствах. Этот результат распространён и на случай изначальных (неориентированных) пространств произвольной размерности $(X_n \rightarrow Y_k) \rightarrow Z_m$. В прикладном смысле основной результат является обоснованием метода пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов (изложено по [101]).

Предисловие

Свойства оператора суперпозиции

$$(X \xrightarrow{\varphi} Y) \xrightarrow{\psi} Z \quad (41)$$

неоднократно описывались, см., например, работы [116], [115].

Вопрос: возможно ли продолжение вложения суперпозиций вида

$$((X \xrightarrow{\varphi} Y) \xrightarrow{\psi} Z) \xrightarrow{\xi} W \quad (42)$$

и т. д., — подлежит разрешению. В этой статье на основании приложения теоремы 7 об ограничении размерности ориентированных пространств (их не более чем 3-мерности, см. с. 26), показано, что допустимы суперпозиции только вида (41), а суперпозиции вида (42) и большей вложенности — невозможны.

Суперпозиция одномерных пространств

Пусть пространства, на которых задан оператор суперпозиции, одномерны и имеют общее начало координат. Рассмотрим оператор суперпозиции

$$((X_1 \xrightarrow{\varphi} Y_1) \xrightarrow{\psi} Z_1) \xrightarrow{\xi} W_1. \quad (43)$$

Тогда отображения φ , ψ , ξ задают ориентации этих пространств (см. рис. 14, 15, 17).

Рассмотрим структуру ориентированного 4-мерия подробнее (см. рис. 17, 16). Элементарный 4-мерный объём, или объём, задаваемый на базисных векторах, с учётом ориен-

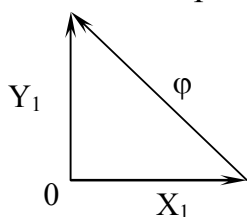


Рис. 14. Отображение φ задаёт ориентацию 2-мерия

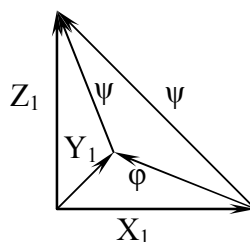


Рис. 15. Отображения φ и ψ ориентируют 3-мерие

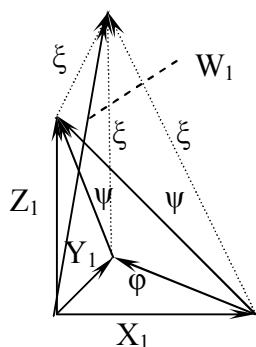


Рис. 16. Отображения φ, ψ, ξ ориентируют 4-мерие

тации,— это ориентированный 4-мерный куб (см. рис. 17). Отображения задают ориентации граней куба и секущих плоскостей.

Как указывалось ранее (в теореме об ограничении размерности ориентированного пространства), 4-мерная ориентация невозможна ввиду того, что между вершинами 0101 и 1010 имеется противоречивая ориентация (одновременно в два на-

правления). То есть отображение ξ в (43) не имеет места. Из этого сле-

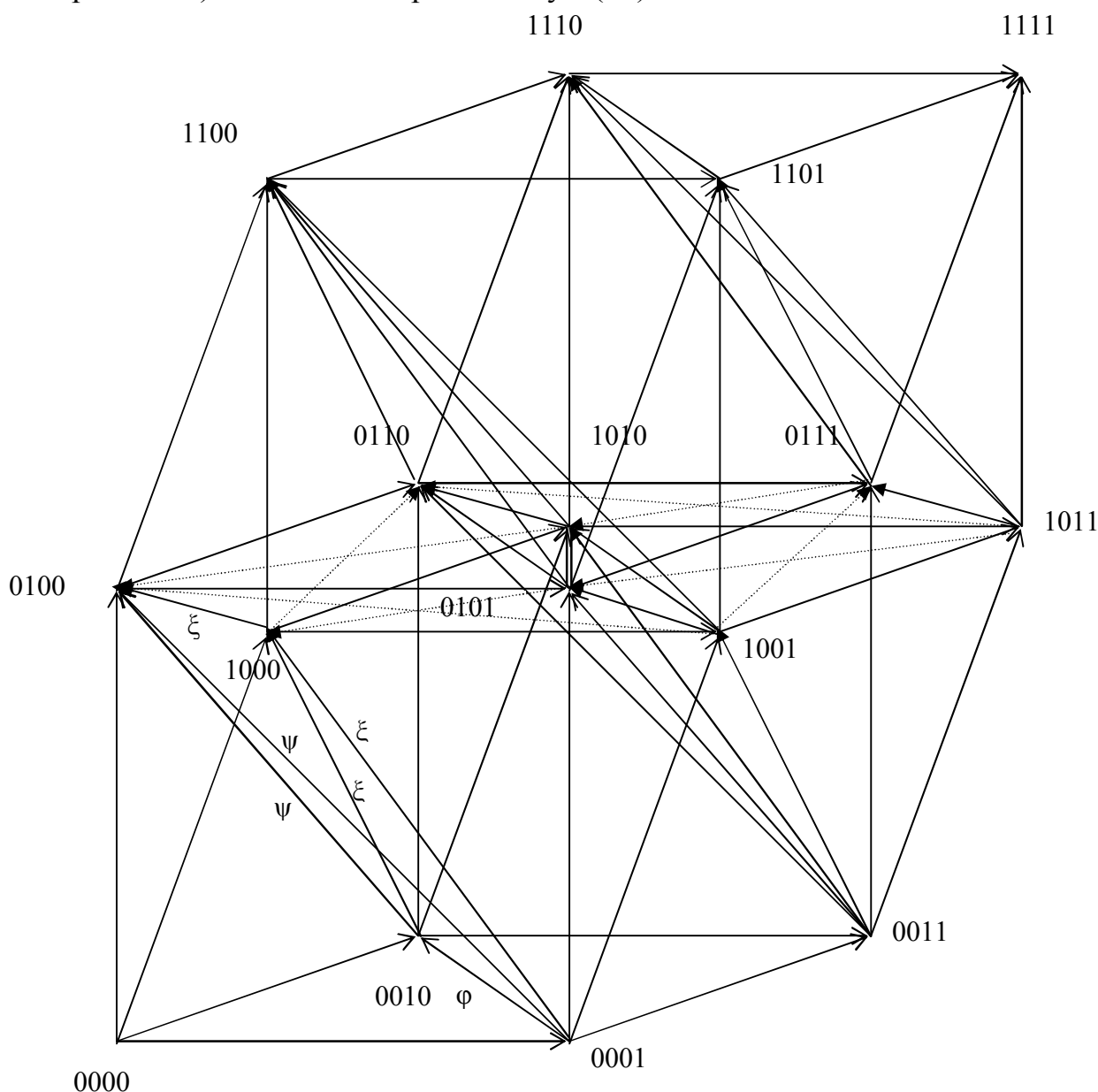


Рис. 17. Фиктивное 4-мерие

дует, что суперпозиция (43) для 4-х пространств — невозможна. Доказана теорема.

Теорема 33 (об ограниченности суперпозиций для одномерных пространств). Для одномерных пространств X_i , имеющих общее начало

$$\varphi: X_2 \rightarrow Y_2$$

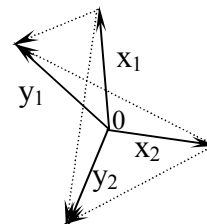


Рис. 18. φ задаёт ориентацию между 2-мерными пространствами X_2 и Y_2

координат в суперпозиции отображений $\varphi_i (((X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2) \xrightarrow{\varphi_2} X_3) \dots) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n$ $n \leq 3$.

Иная формулировка теоремы:

Теорема 33' (о том же). Для одномерных пространств, имеющих общее начало координат, суперпозиция $((X_1 \xrightarrow{\varphi} Y_1) \xrightarrow{\psi} Z_1) \xrightarrow{\xi} W_1$ невозможна, возможна суперпозиция только для 3-х пространств, например, $(X_1 \xrightarrow{\varphi} Y_1) \xrightarrow{\psi} Z_1$. □

Суперпозиция многомерных пространств

Если пространства, на которых задан оператор суперпозиции, многомерны, то рассуждения аналогичны.

Например, пусть даны два 2-мерных пространства с общим началом координат X_2 и Y_2 , тогда ориентация их друг относительно друга задаётся отображением $\varphi: X_2 \rightarrow Y_2$ как указано на рис. 18 (x_1, x_2, y_1, y_2 — базисные вектора соответствующих пространств). Базисные вектора неориентированных пространств X_2 и Y_2 на рис. 18 можно поменять местами — ориентация никак не изменится; ориентация, задаваемая отображением φ , действует между пространствами.

Легко видеть, что если задаётся суперпозиция отображений на пространствах произвольной (ненулевой) конечной размерности

$$((X_n \xrightarrow{\varphi} Y_k) \xrightarrow{\psi} Z_m) \xrightarrow{\xi} W_r \quad (44)$$

(где $n, k, m, r \in \mathbb{N}$), то элементарный объём, выстроенный на базисных векторах этих пространств, будет содержать ориентированное 4-мерие (ориентированный 4-мерный куб), аналогично изображённому на рис. 17, 16. Поэтому, как при рассуждениях в доказательстве теоремы 33, из невозможности ориентированного 4-мерного куба следует невозможность суперпозиции на 4-х пространствах. Доказана следующая теорема.

Теорема 34 (об ограниченности суперпозиций). Для пространств X_i (произвольной конечной размерности, отличной от 0), имеющих общее начало координат в суперпозиции отображений $\varphi_i (((X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2) \xrightarrow{\varphi_2} X_3) \dots) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n$ $n \leq 3$.

Иная формулировка теоремы:

Теорема 34' (о том же). Для пространств X_n, Y_k, Z_m, W_r , размерно-

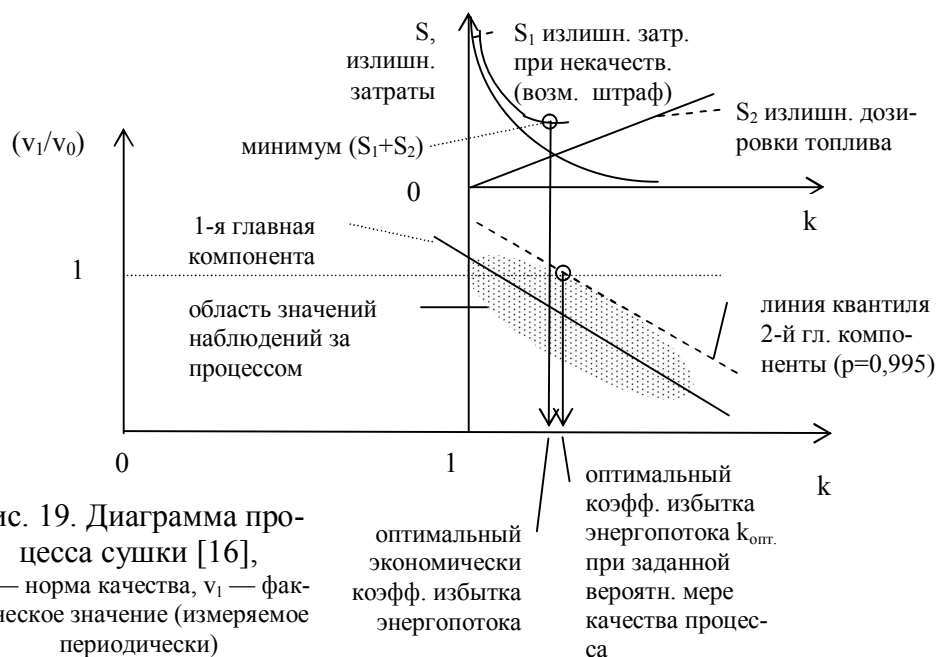


Рис. 19. Диаграмма процесса сушки [16],
 v_0 — норма качества, v_1 — фактическое значение (измеряемое периодически)

оптимальный
экономически
коэфф. избытка
энергопотока

оптимальный
коэфф. избытка
энергопотока $k_{\text{опт.}}$
при заданной
вероятн. мере
качества процес-
са

сти которых конечны и отличны от 0 ($n, k, m, r \in \mathbb{N}$), имеющих общее начало координат, суперпозиция $((X_n \xrightarrow{\varphi} Y_k) \xrightarrow{\psi} Z_m) \xrightarrow{\xi} W_r$ невозможна, возможна суперпозиция только для 3-х пространств, например, $(X_n \xrightarrow{\varphi} Y_k) \xrightarrow{\psi} Z_m$. □

Приложение результата

Доказанными теоремами обосновывается метод пространства состояний управления сложными химико-технологическими процессами, неоднократно описанный в его приложениях ранее [81], [64], [118], см. также монографию [102].

При наличии одного главного параметра качества и одного главного параметра управления задача оптимизации сводится к достижению минимума дополнительных издержек на процесс, при заданных вероятностных ограничениях на качество процесса.

Пространство состояний таково: X — параметр качества, Y — параметр управления, Z — экономический параметр. На пространствах (в стандартном случае одномерных) имеется суперпозиция $(X \xrightarrow{\varphi} Y) \xrightarrow{\psi} Z$, найти оптимум (минимум издержек, определяемый отображением ψ) возможно только при определённости отображения φ , для чего применяются стандартные статистические методы.

Наличие теоремы 34 для многомерных пространств фактически обосновывает возможность распараллеливания задач управления (при нескольких параметрах качества и соответствующих им параметрах управления), при этом для каждой подзадачи пространство состояний также 3-мерно, см. пример такого распараллеливания задач в [81], [102].

Пример оптимизационной диаграммы метода пространства состояний приведён на рис. 19 (из [64]).

Заключение

Описанные результаты об ограниченности последовательности суперпозиций отображений аналогичны результатам, относящимся к допустимости вращений в не более чем 3-мерном пространстве, изложенным в [97] в следующем параграфе. Это ещё один ограничительный результат, следующий из теоремы об ограниченности размерности пространств с ориентированными друг относительно друга осями.

§56. О вращении в многомерных пространствах

В этом параграфе в терминах вращений в многомерном пространстве проинтерпретирована теорема, относящаяся к описанию свойств пространств с ориентированными друг относительно друга осями. Установлено, что вращения в таких пространствах возможны при размерности их не выше трёх. Полученный результат в плане невозможности вращения в 4-мерии приложим к пространству Минковского.

Возможны ли вращения в пространствах размерности более чем три до недавнего времени не было установлено⁸⁹. Почему такие вращения невозможны в действительности требует строгого обоснования.

Рассмотрим ориентированное двумерно пространство, см. рис. 4, 22. Если рассмотреть повороты плоскости, которые также являются "правыми" или "левыми", то легко заметить, что поворот в плоскости аналогичен ориентации, см. рис. 21. Аналогично повороты в многомерном пространстве (неориентированном) задают определённую ориентацию между радиус-вектором бывшим

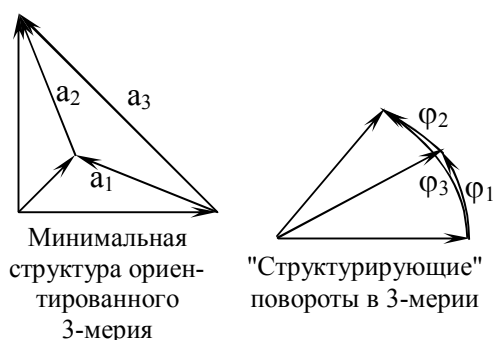


Рис. 20. Поворот аналогичен ориентации в 3-мерии, ϕ_i — повороты относительно осей, a_i — ориентирующие вектора

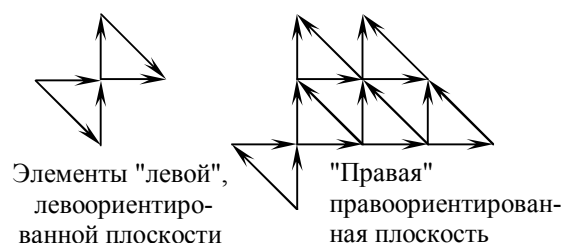


Рис. 22. Структура 2-мерия с ориентацией



Рис. 21. Поворот подобен ориентации

⁸⁹ Если бы такие вращения были возможны, то, например, некоторое вращение в 4-мерном пространстве Минковского позволяло бы оказаться в прошлом или в будущем времени описываемой системы.

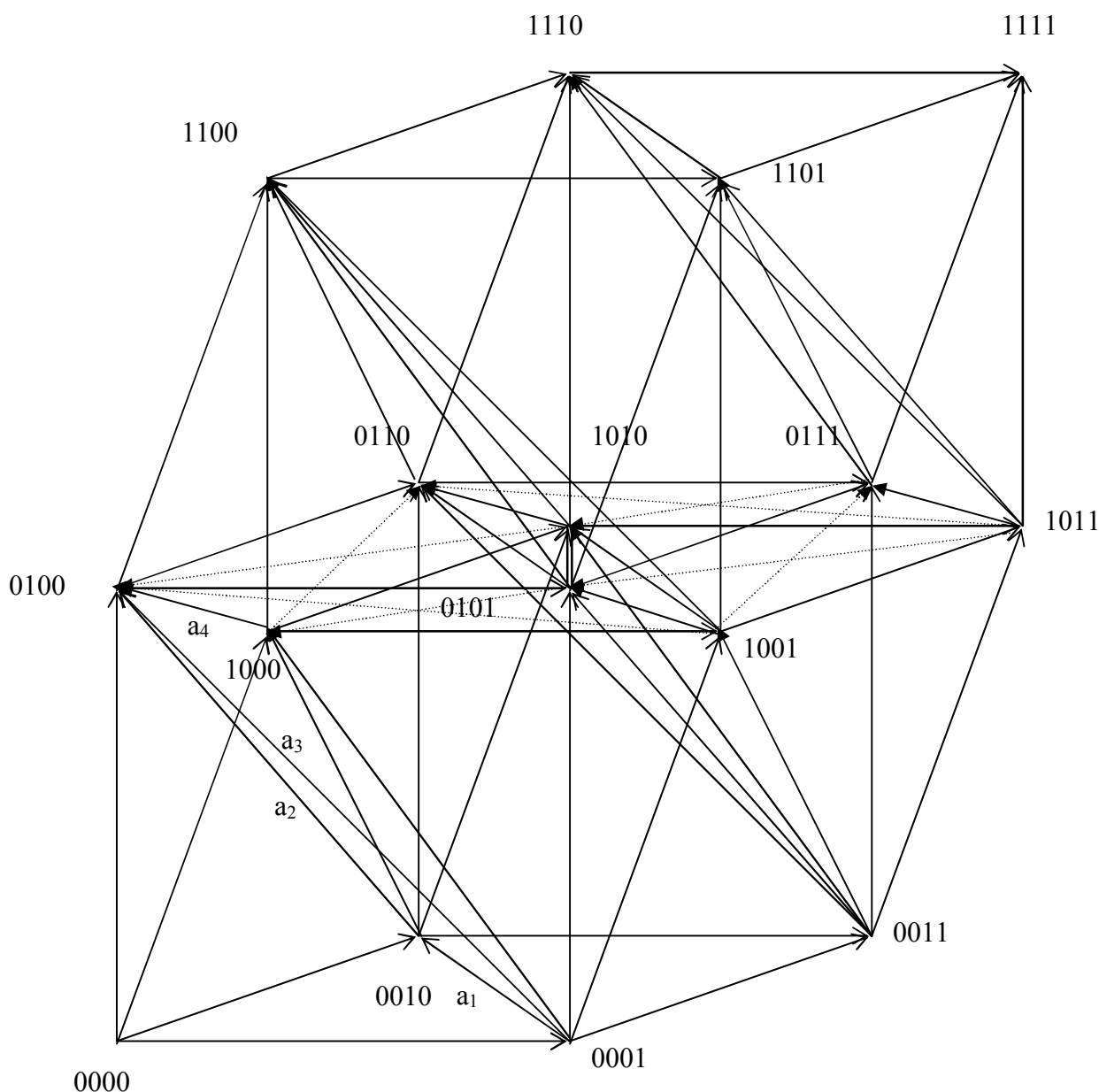


Рис. 23. Фиктивное 4-мерие

до поворота и радиус-вектором, получившимся в результате поворота, см рис. 20.

То есть имеется многомерная ориентированная структура, в которой ориентацию задаёт разложение поворота на элементарные вращения вокруг ортогональных осей, а базисными векторами являются начальный вектор и элементарные его повороты и их комбинации. В трёхмерном пространстве это выглядит примерно так, как указано на рис. 20. Повороты относительно осей φ_i задают ориентацию, аналогичную ориентирующим векторам a_i . Такая структура аналогична ориентации 3-мерного пространства.

Рассмотрим поворот в 4-мерном пространстве, изобразив сразу 4-мерную ориентирующую структуру в виде 4-мерного куба с ориенти-

рующими векторами (см. рис. 23). Ориентации a_i в этом случае аналогичны поворотам φ_i , задающим ориентацию вращения в 4-мерии. (Вся структура 4-мерного куба (параллелепипеда, получающегося при вращении) получена параллельными переносами базисных векторов и параллельными переносами ориентаций).

Однако известна теорема 7 (см. с. 26), утверждающая, что такая 4-мерная структура невозможна, ввиду противоречивой ориентации диагонали (1010–0101), выделенной на рис. 23 двойной линией.

Таким образом, поскольку полученная в 4-мерии ориентация — противоречива, то и противоречива ориентация, соответствующая вращению в 4-мерном пространстве, значит это вращение невозможно. Тем самым доказана теорема.

Теорема 35 (о вращении). Вращение возможно не более чем в 3-мерном пространстве. $\square$

Интерпретация описания возможных трёхмерных вращений в многомерном пространстве подлежит отдельному рассмотрению.⁹⁰

§57. Неподвижные точки и алгебра событий

В этом параграфе описана связь теоремы о неподвижных точках с особенностью алгебры событий, лежащих в основе вывода основного логистического уравнения ($x = 1 - x^x$); указано, что эта алгебра событий определяется одним событием В, — высвобождением общественно необходимого времени, которое обладает свойством $B^B = \neg B$; указанное по существу соответствует основной цели экономической деятельности — высвобождению общественно необходимого времени [88], [94], [89].

Вывод основного логистического уравнения, описывающего оборот общественно необходимого времени,

$$x = 1 - x^x, \quad (45)$$

с его приложениями к анализу инфляционных процессов описан ранее, см. [57], [94].

Решение уравнения (45) s_0 соответствует мере высвобождаемого общественно необходимого времени. Высвобождению времени соответствует событие В. Тогда, в вероятностной записи, аналогично тому,

⁹⁰ Приложение этого результата таково. Пространство Минковского, кроме обычного 3-мерного подпространства, имеет ещё и 4-ю ось — мнимозначную ось времени [29], — (x, y, z, it) . По теореме 1 вращение в 4-мерии невозможно, значит невозможно и вращение в 4-мерии, перемещающее материальный 3-мерный объект во времени. Это означает, что такие вращения невозможны и в пространствах большей размерности, моделирующих физическую реальность, поскольку пространство Минковского является их подпространством.

как это делалось при описании вывода уравнения (45) [94], запишется как

$$p(B) = 1 - p(B)^{p(B)}. \quad (46)$$

Допуская, кроме сложения и умножения, возведение вероятностей (и событий) в степень (46), переписывается так

$$p(B) = 1 - p(B^B). \quad (47)$$

т. е. для возводимых в степень событий

$$B^B = \neg B, \quad (48)$$

— возведённое в степень самого себя событие равно противоположному событию⁹¹

Обратное неверно, $\neg B^{\neg B} \neq B$, — легко проверить, что $p(\neg B)^{p(\neg B)} \neq p(B)$, $(1 - c_0)^{(1 - c_0)} \neq c_0$. То есть для выполнения условия (48) событие необходимо должно быть самоприменимым. Высвобождение общественно необходимого времени (событие B) — самоприменимо. А вот его затраты (событие $\neg B$) — несамоприменимо.

События B и B^B образуют полный набор событий, а этого, как известно, достаточно для построения σ -алгебры, на которой определяются вероятностные меры [31].

Таким образом, основное логистическое уравнение строится на σ -алгебре с (единственным определяющим всё множество событий) событием (B) — высвобождением времени. Эти математические построения совпадают с действительностью в том, что высвобождение времени в экономической деятельности — первично. Располагая временем люди свободно добровольно вступают в экономические отношения, которые определяют затраты общественно необходимого времени для его высвобождения⁹².

С математической стороны вышесказанное о событиях и их свойствах формализуется в теоремах:

Теорема 36 (о самоприменимом событии). Самоприменимое событие B , возведённое в степень самого себя B^B , совпадает с противоположным ему событием $B^B = \neg B$. □

Теорема 37 (о возведении вероятности в степень). Вероятность возведенного в степень самого себя самоприменимого события $p(B^B)$ равна возведённой в степень самой себя вероятности этого события $p(B^B) = p(B)^{p(B)}$. □

Следствие. Вероятность возведенного в степень самого себя самоприменимого события $p(B^B)$ равна вероятности противоположного

⁹¹ $\neg$ — знак отрицания.

⁹² Это соответствует и действующим правовым нормам современного Конституционного законодательства в России: "1. труд свободен.... 2. принудительный труд запрещён" (ст. 37 Конституции РФ) [23, с. 57].

события $p(B)^{p(B)} = p(\neg B)$. $\square$

При требовании строгой формальности определения самоприменимого события, формулировки вышеуказанных теорем и следствия из них являются определением самоприменимого события.

Связь вышеуказанного свойства самоприменимых событий с теоремой о неподвижной точке следующая. В процессе рекомбинации товаров и услуг неподвижные точки — это самопринадлежащие множества, — самопринадлежность в этом случае означает самоприменимость экономической деятельности; а самоприменимость экономической деятельности означает наличие определяющего события — высвобождения общественно необходимого времени (подробно экономический смысл этих построений описан в [94], [106]).

§58. Предикативность лямбда-исчисления

В этом параграфе на основании теоремы Нагорного об удвоении слов в алфавите показана предикативность лямбда-исчисления, т. е. неформализуемость в лямбда-исчислении непредикативных конструкций. Этот результат совпадает с аналогичным выводом, полученным в теории множеств с самопринадлежностью.

Предисловие

Лямбда-исчисление является основанием для построения семантики языков программирования (см. [5], [44], [42]). В 60-е гг. XX в. "Скотт описал в его <лямбда-исчисления> терминах семантику языков программирования" [5, с. 6]. С одной стороны, имеется результат о вложении лямбда-исчисления в модальную логику [4] (и далее — в более простые предикативные логики), а также доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления [96]. С другой стороны, интуитивные представления о неформализуемости непредикативных конструкций в лямбда-исчислении, изложенные в монографии [93], подлежат более строгому изложению, что и описано далее.

Иерархия логических структур

Гносеологические основания 6-уровневой иерархии математических представлений (понятий), в т. ч. логических, и их последовательность в истории математики рассмотрены ранее (см. [85]). В работе [93] описана иерархия логических структур от 5-го уровня (формальных систем и лямбда-исчисления), допускающая вложение структур одного уровня (начиная с 5-го) в более низкий уровень. Схема рассуждений такова.

Как указано в работе [4], лямбда-исчисление вкладывается в модельную логику. Далее, легко видеть, модальная логика вкладывается в некоторую многозначную логику. Многозначная логика вкладывается в декартово произведение двузначных логик. Двузначная логика реали-

зуюма на некоторых множествах (несамопринадлежащих), см. например диаграммы Венна или рис. 24.

О невозможности непредикативных конструкций в лямбда-исчислении из интуитивных соображений (на примерах результатов теории множеств с самопринадлежностью) уже сказано в [93]. Однако имеются и иные рассуждения относительно этого.

Предикативность лямбда-исчисления

Основной принцип лямбда-исчисления заключается в наличии лямбда-абстрактора. "Пусть $t (\equiv t(x))$ — выражение, содержащее, быть может, переменную x , тогда $\lambda x.t(x)$ — это такая функция f , которая сопоставляет аргументу a значение $t(a)$. Иными словами, имеет место $(\lambda x.t(x))a = t(a)$ " [5, с. 18]⁹³.

С другой стороны, в теории алгоритмов имеется следующий сильный результат [30]: "Для всякого алфавита A может быть указан такой нормальный алгоритм U над A , что невозможен нормальный алгоритм в A , эквивалентный U относительно $\langle$ этого же алфавита $\rangle A$.

В качестве такого алгоритма можно, например, взять удваивающий алгоритм над алфавитом A , т. е. такой, что нормальный алгоритм U над A , что $U(P) = PP$, где P — слово в A ."

То есть алгоритм удвоения слова в алфавите A обязательно содержит буквы вне этого алфавита (по крайней мере одну).

В лямбда-исчислении такой буквой, находящейся вне удвоения является символ " λ " лямбда-абстракции (эту лямбда-абстракцию задаёт человек, используя лямбда-исчисление). Соответственно гносеологической схемы отражения действительности в сознании для внешнего по отношению к сознанию отображения непредикативных конструкций необходимо удваивание образа действительности [93], [72]. То есть лямбда-абстракция не действует на саму себя, не является непредикативной, значит, предикативна. Доказана теорема.

Теорема 38. Лямбда-исчисление — предикативно. $\square$

Это означает, что непредикативные конструкции не реализуемы в лямбда-исчислении, а значит, и в использующих его для выражения семантики языках программирования.

⁹³ Дедуктивные возможности лямбда-исчисления таковы, что позволяют доказать наличие у любого (корректно записанного) лямбда-выражения неподвижной точки.

"Теорема (о неподвижной точке). $\forall F \exists X (FX = X)$.

Доказательство. Пусть $W = \lambda x.F(xx)$ и $x = WW$. Тогда имеем $X = WW \equiv (\lambda x.F(xx))W = F(WW) = FX$. $\square$ " [5, с. 36].

В том случае, если речь идёт о редукции выражений, рассуждения аналогичны: неподвижная точка понимается как редукция $X \rightarrow^* FX$, и в доказательстве имеется редукция $(\lambda x.F(xx))W \rightarrow^* F(WW)$ [5].

Сопоставление лямбда-исчисления и непредикативности

С одной стороны, лямбда-исчисление допускает модель в непредикативной семантике самопринадлежности [79], [96], [93]; с другой стороны, лямбда-исчисление является предикативным. Таким образом, предикативные конструкции являются частью вообще логических конструкций, среди которых необходимо есть и непредикативные. Этот содержательный результат аналогичен выделению в множестве всех множеств (самопринадлежащем, непредикативном) множества, содержащего все несамопринадлежащие множества [93].

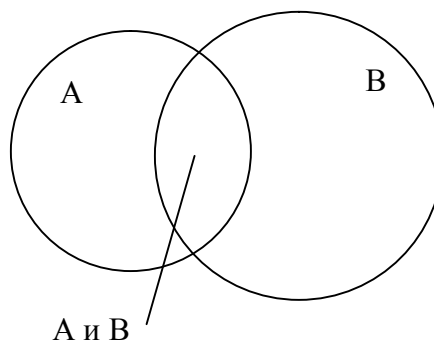


Рис. 24. Пример логики объёмов понятий на несамопринадлежащих множествах

Заключение

Таким образом, показано, что ввиду предикативности лямбда-исчисления и того, что оно реализует семантику языков программирования, непредикативные конструкции не реализуемы посредством языков программирования⁹⁴.

Дополнение: доказательство теоремы Нагорного

Ниже приведено по [82] описание краткого (в отличие от [30]) варианта доказательства теоремы Нагорного о том, что для построения удвоения слов в некотором алфавите необходим дополнительный по отношению к алфавиту символ⁹⁵.

Теорема Нагорного о том, что построения алгоритма удвоения слова в некотором алфавите A необходим дополнительный по отношению к этому алфавиту символ, известна достаточно давно [30]. О приложениях этой теоремы к анализу ограничений информационных систем писалось в [72], [84], [83]. Эти интерпретации указанной теоремы весьма важны для понимания специфики приложения информационных методов управления к системам, содержащим человека. Опубликован-

⁹⁴ Никакие предикативные алгоритмы (формальные системы, юридические законы сами по себе в виде писанных кодексов, и т. п.) не способны передать содержание непредикативных рассуждений (целей ценностей и т. п., составляющих основу человеческой жизни и требующих непосредственного присутствия человека). Этот очевидный факт имеет теперь и математическое выражение. Это своего рода "антропный принцип" информатики.

⁹⁵ Рукопись идеи этого доказательства случайно найдена среди архивных бумаг автора.

ное в [30] доказательство этой теоремы достаточно сложно для изложения в вузовском курсе. Ниже изложен краткий вариант доказательства этой теоремы.

Пусть имеется конечный алфавит A , состоящий из символов a_i ($i \in \mathbb{N}$). Попытаемся организовать процесс удвоения слова в этом алфавите. Имеется слово $a_{K1} a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn}$, удваивающая процедура копирует символ в начале слова и переносит его в конец слова (за конечный символ слова, на пустое место), получается $a_{K1} a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} a_{K1}$. Но для отличия скопированных символов от ещё неподвергшихся процедуре копирования необходим маркер, стоящий между двумя этими множествами символов, а также маркер конца исходного слова. Этот маркер может быть одной и той же буквой⁹⁶, тогда процесс удвоения слова выглядит так (маркер — символ «*»):

$$\begin{array}{l} * a_{K1} a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} * \\ a_{K1} * a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} * a_{K1} \\ a_{K1} a_{K2} * a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} * a_{K1} a_{K2} \\ \dots \\ a_{K1} a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} * * a_{K1} a_{K2} a_{K3} a_{K4} \dots a_{Kn} . \end{array}$$

Останов процедуры по достижении одним маркером другого.

Если этот маркер принадлежит алфавиту A , «*» = a_i , то отличить сам маркер от символов удваиваемого слова невозможно. Поэтому маркер — это внешний по отношению к алфавиту A символ. Доказана теорема.

Теорема 39 (о необходимости внешних символов для удвоения слов в алфавите). Для построения алгоритма для удвоения слов в некотором конечном алфавите A необходим по крайней мере один внешний по отношению к A символ. $\square$

Основная прикладная интерпретация этого результата, описанная в [72], [84], [83], — невозможность формализации процесса отражения действительности (содержащей и самого человека) в сознании человека. Процесс отражения действительности, требующий полного удвоения образа действительности, без внешних символов, изображённый на рис. 1б, — неалгоритмизуем.

⁹⁶ В аналогичных теоремах, предшествующих теореме Нагорного, предполагалось, что эти маркеры — разные символы (для удваивания слова требовались два символа вне исходного алфавита), Нагорный сократил требуемое количество внешних по отношению к исходному алфавиту символов до одного.

§59. Непротиворечивость лямбда-исчисления

В этом параграфе описано доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления в семантике самопринадлежности, в доказательстве используются результаты теории множеств с самопринадлежностью: теорема о непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью и теорема о модельной области лямбда-исчисления в этой теории.

Ранее было указано на то, что модельная область лямбда-исчисления строится естественным образом в теории множеств с самопринадлежностью, с сохранением основного требования к семантике этого исчисления, упоминаемого в [5, с. 99]. В модельной области лямбда-исчисления, построенной в теории множеств с самопринадлежностью, семантика для λ -исчисления состоит из области D , такой, что её пространство функций D^D , допускающее и многозначные отображения, изоморфно D , $D^D \rightarrow D$, или $\text{Exp}(D) \rightarrow D$.

Теорема 9. В теории множеств с самопринадлежностью модельными областями для λ -исчисления являются только конечные натуральные числа вида $1=\{1\}$, $2=\{1, 2\}$, $3=\{1, 2, 3\}$ и т. д., но не всё множество натуральных чисел $\mathbf{N}$.

Доказательство этой теоремы приведено на с. 35. Доказанный результат совпадает с действительностью, языки программирования, использующие в своих основаниях лямбда-исчисление, реализуются в ЭВМ на конечной области состояний двоичных слов, изоморфной некоторому конечному натуральному числу.

С другой стороны, известные теоремы о непротиворечивости лямбда-исчисления (см. [5]), используют гораздо более слабые условия на пространство функций, рассматривая весьма бедное его подпространство, в топологии Скотта, использующей бесконечные (а не конечные) модельные области [5]. Вложение $D \times D \rightarrow D$ в этой топологии аналогично пересчёту рациональных чисел.

Доказательства непротиворечивости лямбда-исчисления, приведённые в [5] действительны только для этой топологии Скотта, со слабым условием вложения пространства функций над множеством в само множество, поэтому необходимо переобосновать непротиворечивость лямбда-исчисления для богатой топологии, допускающей и многозначные отображения, соответствующей теореме 9. Известна теорема о непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью.

Теорема 4. Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в M объекты, — непротиворечива.

Доказательство теоремы приведено на с. 14, схема доказательства такова. Если высказыванием L описан объект A , то отрицание этого высказывания описывало бы дополнение B к объекту A в M , но по теореме

о недополнимости это невозможно, следовательно, высказывания об объектах из M непротиворечивы.

Поэтому "слабое" доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления выглядит так. Имеется модельная область лямбда-исчисления (по теореме 9), по теореме 4 высказывания, задающие в M (множестве всех множеств) множества в этой модельной области — непротиворечивы, поэтому лямбда-исчисление, погружённое в логику высказываний о множествах (реализуемое на модельной области) — непротиворечиво, теорема доказана.

Теорема 40 (слабая непротиворечивость лямбда-исчисления). Лямбда-исчисление над его модельной областью в теории множеств с самопринадлежностью — непротиворечиво. $\square$

"Сильное" доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления не использует понятия модельной области (т. е. не зависит от результатов теоремы 9). Рассмотрим множество всех множеств M . Множества в нём выделяются схемой свёртывания $A = \{x \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } L(x)\}$. Если высказывание L дополнить лямбда-абстрактором и внешней, по отношению к свёртыванию переменной, то имеется реализация лямбда-исчисления в теории множеств

$$A(y) = \{x \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } L_\lambda(x, \lambda y.y)\}(y), \quad \text{где } y \in M.$$

При этом, по теореме о непротиворечивости, высказывание $L_\lambda(x, y)$ не может задавать одновременно множество $A(y)$ и его дополнение, — таким образом, совокупность высказываний $L_\lambda(x, y)$ (для произвольных y из M) — непротиворечива (по теореме 4). Доказана теорема.

Теорема 41 (сильная непротиворечивость лямбда-исчисления). Лямбда-исчисление, реализуемое на теории множеств с самопринадлежностью, — непротиворечиво. $\square$

И затем уже к этой теореме применима теорема 9, о модельной области, задающая определённую модельную область, соответствующую топологии $D^D \rightarrow D$, или $\text{Exp}(D) \rightarrow D$, — сужающая реализацию лямбда-исчисления, указанную в теореме 41, до конечной, соответствующей действительности, области. $\square$

Таким образом, непротиворечивость лямбда-исчисления, с применением семантики самопринадлежности, доказана.

§60. Моделирование логических схем

В этом параграфе на основании известных теорем о непротиворечивости лямбда-исчисления, доказанных в семантике самопринадлежности, описан способ моделирования логических схем посредством теории множеств, использующий модель двузначной логики (изложено по [107]); из этих теорем о непротиворечивости следует непротиворечивость моделей логических схем.

В теории множеств с самопринадлежностью была построена адекватная модельная область для лямбда-исчисления, а также модель логики высказываний, кроме того, в семантике самопринадлежности были доказаны теоремы о непротиворечивости лямбда-исчисления. Эти результаты позволяют моделировать посредством теории множеств логические схемы с обоснованием того, что эти модели непротиворечивы. Ниже описан способ и примеры моделирования логических схем⁹⁷.

Обоснование моделирования

Теорема о непротиворечивости лямбда-исчисления доказана в слабой (для модельной области лямбда-исчисления) и сильной (на всём M) форме, см. выше. Для моделирования логических схем значима вторая (сильная) форма теоремы:

Теорема 41 (сильная непротиворечивость). Лямбда-исчисление, реализуемое на теории множеств с самопринадлежностью, — непротиворечиво.

Схема доказательства такова, что "сильное" доказательство непротиворечивости лямбда-исчисления не использует понятия модельной области (т. е. не зависит от результатов теоремы о слабой непротиворечивости). Рассматривается множество всех множеств M . Множества в нём выделяются схемой свёртывания $A = \{x \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } L(x)\}$. Если высказывание L дополнить лямбда-абстрактором и внешней, по отношению к свёртыванию переменной, то имеется реализация лямбда-исчисления в теории множеств

$$A(y) = \{x \in M \mid (x \in \emptyset) \text{ или } L_\lambda(x, \lambda y. y)\}(y), \quad \text{где } y \in M.$$

При этом, по теореме о непротиворечивости теории множеств, высказывание $L_\lambda(x, y)$ не может задавать одновременно множество $A(y)$ и его дополнение, — таким образом, совокупность высказываний $L_\lambda(x, y)$ (для произвольных y из M) непротиворечива, это и доказывает теорему. $\square$

Теорема 41 позволяет рассматривать в качестве выражений $L(\cdot)$ со внешней переменной не только произвольные лямбда-выражения, но и выражения, относящиеся к логике высказываний, для которой имеются модели в теории множеств с самопринадлежностью, см. табл. 4, 5.

Таким образом, наличие констант $\emptyset$ и M , а также отношений импликации $\in$ и отрицания ($\dots \in \emptyset$) позволяет строить модели логических схем, посредством теории множеств, причём по теореме 41, модели эти непротиворечивы.

⁹⁷ Первоначальные рукописные наброски этой работы относятся к зиме 1996–97 гг.

Таблица 4. Сопоставление элементов теорий, с. 40

Элемент теории	Теория множеств	Исчисление высказываний
Константа "невыполнимость"	$\emptyset$	0
Константа "выполнимость"	M	1
Импликация	$\in$	$\Rightarrow$
Отрицание	$(\dots \in \emptyset)$	$\neg$

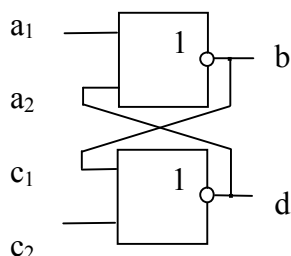


Рис.25. RS-триггер

Таблица 5. Выполнимость, с. 40

x	y	$x \in \emptyset$	$x \in y$	$((x \in \emptyset) \in \emptyset)$
$\emptyset$	$\emptyset$	M	M	$\emptyset$
$\emptyset$	M	M	M	$\emptyset$
M	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	M
M	M	$\emptyset$	M	M

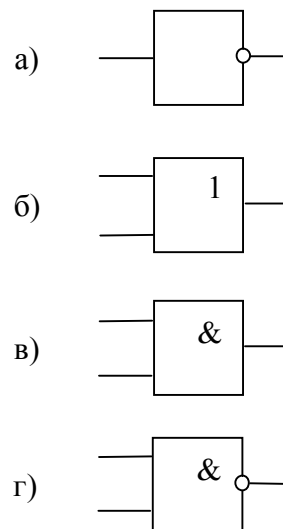


Рис. 26. Элементы логических схем:

а) инвертор НЕ, б) элемент 2ИЛИ, в) элемент 2И, г) элемент 2И-НЕ

Построения моделей схем

Входы логических схем (см. рис. 26) обозначаются a_i , выход — b .

Запись модели инвертора такова

$$b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = (a \in \emptyset)\} (a), \quad (49)$$

где a_i, b принимают значения $\emptyset, M$.

Модель элемента 2ИЛИ: $b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = ((a_1 \in \emptyset) \in a_2)\} (a_1, a_2)$.

Модель элемента 2И: $b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = ((a_1 \in (a_2 \in \emptyset)) \in \emptyset)\} (a_1, a_2)$.

Модель элемента 2И-НЕ: $b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = (a_1 \in (a_2 \in \emptyset))\} (a_1, a_2)$.

Эти логические элементы образуют базис, посредством которого строятся остальные более сложные логические схемы [34, с. 12].

В общем виде модель логического элемента — это схема свёртывания с высказыванием, дополненная внешними переменными

$$b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } L(x, y_1, \dots, y_n)\} (y_1, \dots, y_n). \quad (50)$$

По теореме 41 высказывание $L(\cdot)$ в схеме (50) задаёт некоторый объект, но не его дополнение, это означает, что построенные модели логических схем — непротиворечивы.

Аналогично строятся модели более сложных схем, например модель RS-триггера (рис. 25), построенного из двух элементов 2ИЛИ-НЕ. Модель RS-триггера состоит из двух взаимосвязанных выражений:

Таблица 7. Логические функции в базисе модели

Логич. функция	Выражение в базисе	Значения переменных			
x	x	∅	∅	М	М
y	y	∅	М	∅	М
не x	$(x \in \emptyset)$	М	М	∅	∅
не y	$(y \in \emptyset)$	М	∅	М	∅
$x \Rightarrow y$	$(x \in y)$	М	М	∅	М
x или y	$((x \in \emptyset) \in y)$	∅	М	М	М
x и y	$[(x \in (y \in \emptyset)) \in \emptyset]$	∅	∅	∅	М
$x = y$	$[(x \in y) \in ((y \in x) \in \emptyset)] \in \emptyset$	М	∅	∅	М
$x \neq y$	$[(x \in y) \in ((y \in x) \in \emptyset)]$	∅	М	М	∅

$$\begin{cases} b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = (((a_1 \in \emptyset) \in d) \in \emptyset)\} (a_1, d) \\ d = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x = (((c_2 \in \emptyset) \in b) \in \emptyset)\} (c_2, b) \end{cases}$$

Более сложные схемы строятся аналогично, набор основных логических функций реализуемых в базисе, указанном в табл. 4, приведён в табл. 7.

Замечание о модельной области

В модельной области лямбда-исчисления также строятся непротиворечивые модели, но иного вида, реализующие арифметику на подмножестве множества натуральных чисел, например модель сумматора двух чисел ($b = a_1 + a_2$) такова:

$$b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } x \in P^{a_2}(a_1)\} (a_1, a_2), \quad (51)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbf{N}$, $P^{a_2}(a_1)$ — простой последовательности степени a_2 , взятый от a_1 .

Известна следующая теорема [96]:

Теорема 40 (слабая непротиворечивость). Лямбда-исчисление над его модельной областью (конечные натуральные числа) в теории множеств с самопринадлежностью — непротиворечиво. □

Общий вид схемы свёртывания с высказыванием, дополненной внешними переменными, принимающими значения в конечной области натурального ряда K , $K \in \mathbf{N}$, $b, y_1, \dots, y_n \in K \in \mathbf{N}$, таков:

$$b = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } L(x, y_1, \dots, y_n)\} (y_1, \dots, y_n). \quad (52)$$

По теореме 40 высказывание $L(\cdot)$ в схеме (52) задаёт некоторый объект, но не его дополнение, это означает, что построенные модели над областью K натуральных чисел — непротиворечивы.

Заключение

Показано, что модели логических схем, строящиеся посредством теории множеств с самопринадлежностью, являются непротиворечивыми; приведены примеры построения базисных логических элементов и RS-триггера. Способ построения моделей логических схем использует модель двужначной логики, для которой ранее доказана теорема исключения третьего [71]. Таким образом, непротиворечивость получаемых мо-

делей обоснована посредством результатов теории множеств с самопринадлежностью.

§61. Моделирование нейросетей

В этом параграфе описана модель нейрона (нейронной сети) в терминах расширенной теории множеств с самопринадлежностью, при использовании множеств с переменным коэффициентом принадлежности, указано на недоказуемость в этом случае непротиворечивости модели, что отличает нейронные сети от лямбда-исчисления и дискретных логических схем.

Предисловие

Ограничения алгоритмической реализации нейросетей описывались ранее [83]. Было указано на свойства неполноты и неразрешимости алгоритмической реализации нейронных сетей (следующих из теорем Маркова и теорем Гёделя), а также на ограничения в описании существенных свойств субъекта (непредикативных конструкций отражения действительности). Однако основным прикладным свойством алгоритмической реализации является наличие непротиворечивости. Поскольку непротиворечивость доказана для теории множеств с самопринадлежностью (см. с. 14), то далее это свойство исследуется для построенной в семантике самопринадлежности модели нейросетей.

Модель нейрона (нейросети) в теории множеств

Для стандартной теории множеств с самопринадлежностью имеется расширение такое, что имеется переменный коэффициент принадлежности k для множеств A , отличного от пустого множества $\emptyset$ и множества всх множеств M , $k \in [0,1]$: $A \in_k A$ — A принадлежит A с коэффициентом самопринадлежности k . (В стандартной теории M и $\emptyset$ — самопринадлежащи, $k(M)=k(\emptyset)=1$, если же $B \notin B$ то $k(B)=0$.) Если $k(A)=0$, то $A \notin A$, если же $k(A)=1$, то $A \in A$ в обычном смысле.

Имеется теорема о транзитивности принадлежности для самопринадлежащих множеств.

Теорема 1 (О транзитивности принадлежности). Объекты, принадлежащие самопринадлежащему объекту A , который принадлежит B , принадлежат объекту B . $A \in A, A \in B \Rightarrow \forall a_i \in A, a_i \in B$. $\square$

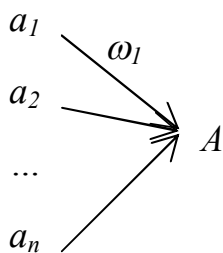


Рис. 27. Модель нейрона

Тогда нейрон (нейронная сеть) моделируется следующим образом, см. рис. 27, где стрелки означают принадлежность, а объекты a_i, A — самопринадлежащи с коэффициентом k_i, k_A соот-

ветственно, причём $k_i(a_i)$ соответствуют входным сигналам нейрона, а $k_A(A)$ — выходному сигналу, где коэффициент самопринадлежности для A определяется передаточной функцией нейрона $k_A(A)=f(\omega_i, k_i(a_i), i=1, n)$, ω_i — коэффициент принадлежности a_i множеству A , $a_i \in_{\omega_i} A$; ω_i подбирается при обучении сети (ср. [41, с. 45]).

Таким образом, модель нейрона (нейронной сети, строимой из таких нейронов) в терминах теории множеств — очевидна.

Отсутствие доказательства непротиворечивости

В теории множеств с самопринадлежностью имеется теорема о непротиворечивости этой теории.

Теорема 4 (О непротиворечивости). Пусть M — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в M объекты, — непротиворечива. $\square$

В схеме доказательства теоремы 4 используется тот факт, что если множество C принадлежит самопринадлежащему множеству D , то к C в D не существует дополнения.

Далее рассматривается дополнение к множеству, которое имеет переменный коэффициент самопринадлежности. Пусть $k(A) \in (0, 1)$. (Если $k(A)=0$ или $k(A)=1$, то получается стандартный случай, теорема 2 действительна). Пусть $A \in B$.

1) Пусть $B \notin B$. Дано $A \in_k A$, пытаемся построить дополнение $\neg A$ к A в B :

$\neg A = \{x \in M | (x \in \emptyset) \text{ или } ((x \in B) \text{ и } (x \notin A))\}$. Однако если A самопринадлежаще с коэффициентом k ($k(A) \in (0, 1)$), $A \in_k A$, то тогда же A и не принадлежит самому себе с коэффициентом $(1-k)$, $A \notin_{(1-k)} A$, откуда A принадлежит своему дополнению с коэффициентом $(1-k)$, $A \in_{(1-k)} \neg A$, — понятие дополнения для множества с коэффициентом самопринадлежности, отличным от 0 и 1, не имеет смысла.

2) Для $B \in B$ рассуждения аналогичны.

То есть, ввиду неопределимости понятия дополнения к множеству, при коэффициенте его самопринадлежности, отличном от 0 и 1, теорема о непротиворечивости множества B , соответствующего выходным сигналам нейросети, не доказуема в теории множеств с самопринадлежностью.

Отсутствие непротиворечивости в указанном смысле отличает нейронные сети от лямбда-исчисления [5], непротиворечивость которого доказана в теории множеств, и от непротиворечивости дискретных вычислительных схем, см. выше.

Заключение

Отсутствие доказательства непротиворечивости для нейронных сетей в содержательном смысле следует из вероятностного смысла по-

строения этих сетей (если переменные входные сигналы, выходные и внутренние коэффициенты перенормируемы к промежуткам $[0, 1]$ и при этом не являются дискретными значениями $0, 1$). Вышеприведённые рассуждения лишь иллюстрируют эти содержательные соображения.

§62. Интерпретация теоремы о стягивании циклов

В этом параграфе описана экономическая интерпретация теоремы о стягивании циклов с самопринадлежностью (изложено по [98]), — самопринадлежность связана с самоприменимостью товаров (услуг, бюджетных сфер) для их же производства, — ввиду наличия таких циклов самоприменимости и их стягивания в единые объекты — интегрирование по путям графов движения товаров (услуг, бюджетных сфер) не имеет экономического смысла, — определяющим для управления остаётся целостный анализ экономики, — определение меры удовлетворённости потребностей (10-частных) и безынфляционное нормирование прибыли.

Ранее при описании процесса рекомбинации товаров и услуг и интерпретации теоремы о неподвижных точках указывалось на то, что соответствующее удовлетворению системы потребностей (10-частной) производство товаров (услуг, составляющих бюджетных сфер) — самоприменимо. Это интерпретируемо и в более узком смысле. В современной, развитой, экономике Товар (услуга, бюджетная сфера) самоприменим для собственного производства. Например, производство энергии требует затрат энергии (на автоматизированное управление системами энергоснабжения и т. п.); производство стали требует стальных конструкций; новые компьютеры проектируются на предыдущих компьютерах; ... учителей тоже учат и т. п.

Отношение экономической самоприменимости соответствует математическому отношению самопринадлежности⁹⁸. Ввиду стадийности производства самоприменимость бывает не непосредственной, а опосредованной циклом производственных (и иных) стадий, — образуется некоторый цикл с самопринадлежностью:

$$\begin{array}{c} A_1 \in A_2 \in \dots \in A_n \in A_1 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad B \end{array} \quad (53)$$

По теореме о стягивании циклов товары (услуги, бюджетные сферы) в цикле (53) ввиду их самоприменимости (самопринадлежности $A_i \in A_i$)

⁹⁸ Введение меры самопринадлежности множества $A = \{a, A_\mu\}$, где $\mu \in [0, 1]$ — мера самопринадлежности, — не изменяет общности рассуждений в тексте... (более того, более общо, — мера μ может быть и больше единицы и вообще произвольной, в частности комплекснозначной).

стягиваются в один объект A , внешних по отношению к циклу объектов (B) это стягивание не касается. Таким образом экономический цикл (53) $A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$ эквивалентен одному объекту A , то же и для других циклов в экономике.

По путям движения товаров (услуг, бюджетных сфер), — а они все известны, — можно было бы написать интегралы, интегральные функционалы и т. п., соответствующие связям в экономической системе, и соответствующую систему дифференциальных уравнений для описания экономики как движения товаров (услуг, бюджетных сфер) по некоторым путям обмена; однако, ввиду стягивания циклов (см. выше) и того что нормативная экономика самоприменима, эти интегралы и уравнения не имеют смысла⁹⁹.

Таким образом, определяющей характеристикой экономики являются не пути движения товаров (услуг, бюджетных сфер), не объёмы торговли, а 1. структура экономики (в т. ч. вертикальная 6-уровневая), 2. высвобождение общественно необходимого времени (с сохранением безынфляционности) и 3. конечное потребление в виде меры удовлетворения 10-ти базовых потребностей, что уже обсуждалось отдельно достаточно подробно [94], [106].

§63. Обоснование вычислимости неподвижной точки

В данном параграфе на примере задачи управления качеством обосновывается вычислимость решения задачи (неподвижной точки) см. [112]. В задаче управления качеством химико-технологических процессов нахождение решения выполнимо по методу последовательных приближений. Однако как возможен за счетное количество шагов выбор некоторого решения из несчетной совокупности точек на прямой? Данная проблема решается за счёт счётности десятичных обозначений точек. При этом если имеется «конечная» точность, то решение находится за конечное число шагов.

Рассматривается задача нахождения решения управления качеством химико-технологических процессов (см. [102]). При однозначно определенных функциях зависимостей экономического параметра Z от параметра управления Y (и коррекции технологической нормы качества x_0 по минимуму дополнительных издержек), нахождение решения выполнимо методом последовательных приближений, т. е. имеется некоторый оператор A , обладающий свойством сжатия:

$$\|Ay_n\| < \|y_n\|. \quad (54)$$

⁹⁹ Если же в экономике имеется деструктивная (несамоприменимая) часть, то интегрально-дифференциальная модель опишет лишь эту деструктивную часть, ничего не давая для конструктивного управления экономикой.

Однако при рассмотрении последовательности приближений к решению в этом случае возникает вопрос: как возможен за счётное количество шагов выбор некоторого решения из несчётной совокупности точек на прямой? Данная проблема решается следующим образом: количество десятичных обозначений чисел, соответствующих прямой, является счётным, в отличие от несчётного количества точек на прямой. При этом при нахождении решения осуществляется выбор за счётное количество шагов из счётной совокупности. Счётность количества десятичных обозначений чисел обоснована выше (теорема 21 о счётности десятичных обозначений, с. 54). Схема доказательства теоремы о счётности десятичных отображений заключается в следующем: строится 10-дерево (см. рис. 10б), соответствующее всевозможным десятичным обозначениям чисел на интервале $[0, 1)$, и организуется пересчёт по слоям, т. е. по номеру цифры, стоящей за запятой; такой пересчёт выполним, следовательно, число десятичных обозначений чисел на указанном интервале является счётным. Поскольку имеется счётное количество интервалов длины 1 на прямой, то общее количество десятичных обозначений всех чисел, соответствующих прямой, остаётся счётным. (При этом количество точек на прямой, имеются в виду геометрические точки, а не десятичные обозначения, является несчётным¹⁰⁰).

При возможности выполнения бесконечного счётного числа операций нахождения решения путем применения оператора сжатия (54) находимо точное решение за счётное число шагов, однако на практике вычисления ограничены конечным числом итераций и точность вычислений не является абсолютной.

При этом очевидно, что при требовании «конечной» точности вычислений (лучшей чем $1/k$) имеется неравенство $\|y_n - y_{n+1}\| < 1/k$, где $k < \infty$, и решение задачи управления с требуемой точностью достигается за конечное число шагов. Таким образом, обоснована вычислимость решения задачи управления.

§64. О непредикативных основаниях права

Непредикативные конструкции и ограничения, вытекающие из теорем Гёделя, соотносимы с основаниями права. В этом параграфе указано на непредикативные (самоссылочные) основания права. Наличие непредикативности в основаниях права показано и посредством логико-математических результатов, относящихся к основаниям математики. Непредикативность наличествует в том, что конструктивная свободная деятельность личности является поощряемой конечными результатами

¹⁰⁰ Отношению порядка точек на прямой соответствуют недостижимые последовательности типа $\text{PO}(.)$.

самой таковой деятельности и служит примером для всех остальных. Система же наказаний (предикативная) за неправомерные деяния не обеспечивает сохранения оснований права, но лишь ограждает и охраняет область свобод.

В основаниях свободной (правовой) деятельности личности наличествует непредикативность (самоссылочность). Личность проступает свободно, и конечный результат её свободной деятельности является поощрением и её самой за это её свободное действие (имеющее и всеобщий смысл, об этом см. далее¹⁰¹). Если бы правильное поведение следовало бы только из наказаний (предикативно), то было бы неясно, кого и за что наказывать, что порождало бы неразрешимый конфликт интересов.

Имеется логико-математическое описание этой очевидной структурной закономерности. Как известно, система права состоит из 6-ти уровней [78]:

1. Право необходимой обороны личности (и военных действий государства) для защиты жизни (сопоставимо с древним правом "войны и мира").
2. Уголовное право.
3. Гражданское право.
4. Административное право (и его отрасли того же уровня, регулируемые в административном порядке, в т. ч. трудовое право, налоговое право и т. п.).
5. Конституционное право.
6. Свободы, охраняемые системой права.

Наличие уровней права связано с тем, что они являются регулятивами для определённых уровней отклоняющегося поведения (уровни 1–5, см. [75], [78], [73], [74]), — конечная цель этих регулятивов — охранение области свобод (6-го непредикативного уровня).

Система наказаний (и вообще кодифицированное право) построена как формальная предикативная система, с основными положениями A_i ("аксиомами") и следующими из них выводами (правоприменительными) — B_k . При этом правоприменительные следствия логически выводимы в предикативной формальной системе:

¹⁰¹ Этот общий смысл связан с наличием общей области на 6-м уровне отражения действительности, — общей системой ценностей (потребностей), и тем, что высшие ценности (потребности): 7. воспитание, 8. образование, 9. наука, 10. управление, — заключаются в свободной деятельности в интересах неограниченного круга третьих лиц, включающего себя и будущие поколения (см. преамбулу Конституции России: "...исходя из ответственности за свою Родину перед нынешними и будущими поколениями..." [23, с. 8.]).

$$(A_i, \dots, A_j, B_k, \dots, B_s) \models B_{s+1}, \quad (55)$$

где правая и левая части формулы (55) не пересекаются между собой.

Для такой формальной системы действительны теоремы Гёделя [93], показывающие, в интерпретации в данной предметной области, что из самой предикативной системы права:

- а) невозможно показать её непротиворечивость (т. е. разрешить конфликт интересов),
- б) невозможно показать её полноту (т. е. охватить все возможные правовые и неправовые деяния).

Таким образом, кодифицированное право, как и алгоритмическая система [83], имеет ограничения, и в силу этих ограничений само по себе не может являться основанием для правового, свободного поведения.

Свободная же, правовая деятельность (как уже сказано выше) — непредикативна, самоссылочна, и в формально-логическом обозначении такова, что соответствует непредикативной системе с непредикативными выводами вида:

$$(A_i, \dots, A_j, B_k, \dots, B_s, C_r) \models C_r, \quad (56)$$

где C_r — обозначение свободной деятельности, имеющей основание и в себе самой (содержится в правой и левой части формулы (56)).

Для непредикативных теорий имеются доказательства непротиворечивости средствами самих этих теорий¹⁰².

То есть непротиворечивость правоприменения связана с тем, что основанием свободной деятельности является непредикативное (самоссылочное) поведение с одной стороны (внутренне по отношению к личности), а с другой стороны (со стороны социальных обстоятельств) — свободная деятельность соответствует высшим потребностям, связанным со свободной деятельностью в интересах неограниченного круга третьих лиц (7. воспитание, 8. образование, 9. наука, 10. управление¹⁰³).

Таким образом, свободное конструктивное поведение существует не из-за наличия наказаний, а из-за того, что оно само является благом (по конечному результату) для самой действующей так личности, и ввиду всеобщности этой деятельности (в интересах и неограниченного круга третьих лиц) она является примером и для остальных, и опять же самоссылочно поддерживает правовое (свободное) поведение в обществе¹⁰⁴.

¹⁰² Лямбда-исчисление (логическая конструкция 5-го уровня, реализующая и логические конструкции низших уровней (4–1, включая модальную (4), многозначную (3) и классическую логику объёмов понятий (2)) имеет модельную область в непредикативной теории множеств [93], и, как показано в этой теории, непротиворечиво.

¹⁰³ В 10-ти частной системе потребностей.

¹⁰⁴ Такое понимание свободы содержательно совпадает и с этимологическим смыслом. *см. след. стр. —>*

§65. О непредикативности в психологии

В этом параграфе указывается необходимость интроспекции при познании непредикативных (самоссылочных) структур сознания; с гносеолого-методологической стороны процесса познания, посредством интерпретации теорем Гёделя.

Гносеологические основания психологического знания, ввиду общности схемы отражения действительности в сознании (см. рис. 1б) и общности иерархии уровней обобщения (абстракции) понятий таковы же, как для иных наук; однако описания психологией самого человека (ввиду специфики предметной области) имеют особенности, связанные с необходимостью описания непосредственно созерцаемых внутренних структур сознания, которые (ввиду их непредикативности — самоссылочности) не могут быть полно выражены во внешних по отношению к сознанию категориях. Таково, например, осознание общей системы ценностей на верхнем, 6-м, уровне отражения действительности [84]. Если предполагать отсутствие общей системы ценностей, потребностей в их всеобщем выражении, то тогда понимание субъектами друг друга остаётся невозможным, это показано описанной в [84] теоремой о свойствах отражений действительности в сознании, см. рис. 28 [94] (см. также рис. 1а, 1б). При отсутствии общей области в отражении действительности на высшем уровне субъекты являются только «внешними» по отношению друг к другу, не способными ощутить внутренние состояния и переживания другого. При наличии общей области на высшем (шестом) уровне отражения, свойство понимания внутренних состояний другого отчасти распространяется и на низшие уровни отражения. С учётом того, что процесс отражения действительности в сознании неалгоритмируем (это показано в [84], при интерпретации теоремы Нагорного о свойствах алгоритмов [30]), процесс понимания другого, на высшем (непредикативном) и более низших уровнях отражения также неалгоритмируем. Уже одно это теоретическое утверждение содержательно обосновывает необходимость интроспекции при исследовании психологии человека.

С другой стороны, психология является отчасти экспериментальной наукой даже при описании внутренних явлений сознания [114], тогда основания экспериментирования подлежат уточнению. Очевидно, что основанием экспериментального исследования свойств сознания (психики), в силу упомянутой теоремы [84], является верхний уровень отражения, задающий ценностные установки познания, см. рис. 28. Эта

лом слова "свобода" в русском языке [103].

очевидность иллюстрируема ниже в логико-методологических терминах.

Экспериментальный метод познания логико-методологически соответствует построению предикативной формальной системы (предикативность системы понимается в том смысле, что пересечение сукцедента и антецедента высказывания – пусто). В формальной записи:

$$(\{A_i\}_{i=1,n}; \{B_j\}_{j=1,m}; \{C_k\}_{k=1,p}) \models C_{p+1}, \quad (57)$$

где A_i – теоретические положения (аксиомы);

B_j – экспериментальные факты;

C_k – выводы теории (о связи экспериментальных фактов и теоретических положений теории),

$(\{A_i\}_{i=1,n}; \{B_j\}_{j=1,m}; \{C_k\}_{k=1,p}) \models L, L \cap C_{p+1} = \emptyset$ (— условие предикативности), знак " $\models$ " означает логический вывод (в произвольной логической системе) $\square$.

Аналогична этой записи и так называемая "рамсеизация" высказываний, упоминаемая в современной эпистемологической теории структурного реализма [124].

Верификация предикативной теории, содержащей высказывания вида (57), выполняема в 3-х планах:

$$(\{A_i\}_{i=1,n, i \neq s}; \{B_j\}_{j=1,m}; \{C_k\}_{k=1,p}) \models A_s \quad (58')$$

(– верификация теоретических положений),

$$(\{A_i\}_{i=1,n}; \{B_j\}_{j=1,m, j \neq r}; \{C_k\}_{k=1,p}) \models B_r \quad (58'')$$

(– верификация опытных фактов),

$$(\{A_i\}_{i=1,n}; \{B_j\}_{j=1,m}; \{C_k\}_{k=1,p, k \neq q}) \models C_q \quad (58''')$$

(– верификация высказываний о связи опытных фактов и теоретических положений).

Все эти верификации являются предикативными (несамоссылочными). При верификации теоретических положений теории (58') по некоторым теоретическим положениям и экспериментальным фактам посредством выводов теории проверяются отдельные теоретические положения (иные, чем те, посредством которых они проверяются).

При верификации опытных фактов по теоретическим положениям и некоторым, иным чем проверяемые, опытным фактам (58''), посредством выводов теории проверяется наличие некоторых опытных фактов.

При верификации высказываний о связи опытных фактов и теоретических положений (выводов теории) (58''') посредством теоретических положений, экспериментальных фактов и исходного набора выводов теории проверяются иные выводы теории.

Таким образом выполняется косвенная проверка взаимосвязанных элементов теории, с возможной доработкой теоретических положений и выводов теории.

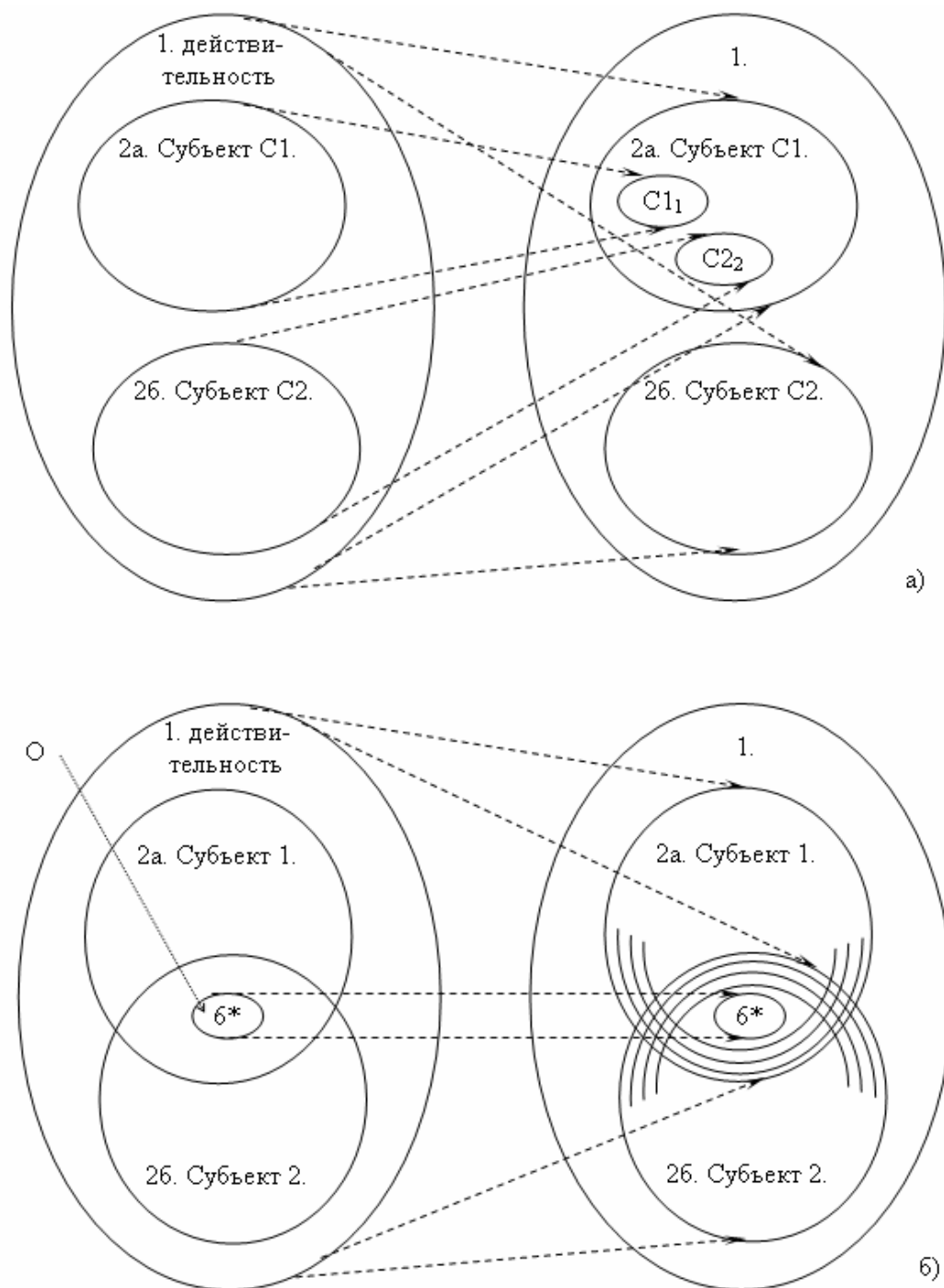


Рис. 28. Упрощённая схема отражения при 2-х субъектах.

а) Субъекты не имеют общей области в сознании, б) Общая область в сознании (на 6-м уровне) даёт общие области и на нижних уровнях.

6* — самоописание субъекта в самоописательной части описания мира

Однако предикативные формальные системы имеют ограничения, следующие из теорем Гёделя. В предикативной формальной системе недоказуема её непротиворечивость и эта система является неполной (т. е. в ней имеются положения, невыводимые из начальных положе-

ний). Эти же ограничения распространяемы и на экспериментальный метод познания в психологии с предикативной верификацией.

То есть, по теоремам Гёделя предикативная формальная психологическая теория, оперирующая внешними по отношению к сознанию фактами (игнорирующая самоссылочную интроспекцию) является а) неполной, б) показать её непротиворечивость, средствами самой теории, даже с привлечением предикативно верифицируемых опытных фактов (58) — невозможно.

Из этой интерпретации теорем Гёделя ясна ограниченность психологической теории, игнорирующей интроспекцию.

Если же рассматривать непредикативные структуры сознания, непосредственно связанные с "Я" человека, то упомянутый экспериментальный метод познания в этом случае оказывается неприменим, ввиду самоссылочности (непредикативности) таких гносеологических конструкций:

$$(A, B, \dots, "Я") \models (\dots "Я"), \quad (59)$$

где "Я" относится к непосредственному (самоссылочному) созерцанию ценностных и высших (на 6-м уровне) когнитивных категорий, относящихся к самоописанию субъекта в описании мира. (Говоря философски, такое непосредственное созерцание, в том числе и самого себя, является отправным этапом постижений истины, за которым следуют этап абстрактно-логического мышления, — планирования эксперимента, и этап практически выполняемого эксперимента [33]).

Исследование таких непредикативных конструкций необходимо не сводится только к предикативной логике эмпирического исследования (также и ввиду различия онтологически обусловленных структурных закономерностей познания. Корректность же непредикативного самопознания обусловлена тем, что сознание имеет одинаковую структуру (отражения действительности) и общую непредикативную часть [84], [93].

Интроспекция в психологическом познании необходима, во-первых, из соображений наличия высшего (непредикативного) уровня отражения в познании, и, во-вторых, исходя из того, что по теоремам Гёделя предикативные методы познания не обеспечивают описания высших (самоссылочных) структур. Таким образом, интроспекция — необходимая составляющая познания непредикативных структур (высших уровней абстракции) человеческого сознания.

Заключение

Описанная теория множеств с самопринадлежностью построена по типу исчисления (а не аксиоматически), — в начале из философских созерцательных соображений введения понятия отношения объектов (в том числе самопринадлежности), затем строится исчисление объектов, выделяющее схемой свёртывания из множества всех множеств некоторые объекты, устанавливаются свойства этих объектов и свойства самой теории; при этом, как видно из построения множества всех несамопринадлежащих множеств, объекты из множества всех множеств обладают собственной логикой построения, отличной от внешних предположений об их устройении.

Теория множеств с самопринадлежностью является на сегодняшний день (дек. 2012 г.) единственной теорией, для которой её непротиворечивость показана средствами самой теории.

Приложения результатов теории множеств с самопринадлежностью описаны отдельно, для экономических интерпретаций в [94], для обоснования метода управления технологическими процессами — в [102], приложения, связанные с областью философии права, упомянутые в [110], требуют отдельного подробного описания.

Широта приложений связана с тем, что разные части науки и практики имеют одинаковые онтологические и гносеологические основания, связанные с иерархией уровней отражения действительности в сознании.

Послесловие

Истоки написания этой книги отчасти связаны с простым детским соображением, которым автор задавался в ту пору, когда научился читать: "*содержание* в книгах должно указывать на ту страницу, где оно само находится". Сделать это оказалось достаточно просто: см. с. 4¹⁰⁵.

Начало же систематического описания автором множеств с самопринадлежностью относится к октябрю 1993 г. При работе над философией истории математики (имеющей те же гносеологические основания) было замечено, что теорема Кантора о порядке множества подмножеств имеет место только для несамопринадлежащих множеств. Впоследствии были описаны свойства множеств с самопринадлежностью, теоремы о порядках конечных множеств, доказательство непротиворечивости теории (составляющие содержание 2-й главы).

Результаты, относящиеся к упорядоченным структурам, получены в 1997–2003 гг. Теорема об ограниченности размерности доказана в 2003 г. Тогда же уточнены аналогии между историческими представлениями о числе и бесконечности и структурами теории множеств.

Приложения теоремы о размерности к обоснованию метода пространства состояний управления качеством технологических процессов оформились в этот же и последующий период (с 2003 г.).

Отчасти вышеуказанные результаты опубликованы автором в журнальных статьях (см. список литературы).

Основные недавние результаты, вошедшие в книгу,— это теоремы о порядке множества всех множеств и о его несамоподобии.

Во втором издании добавлены главы 13, 14 с ещё более поздними результатами по теме книги, содержащие описание как фундаментальных результатов, так и приложений теории.

Отзывы о содержании книги отправлять автору на адрес электронной почты chechulinvl@mail.ru

¹⁰⁵ Ссылка содержания на само содержание является неподвижной точкой отображения индексирования.

Список литературы

1. *Андреев И. Л.* Человек по имени «деньги» // Вопросы философии. 2003. №11. С. 60–72.
2. *Аристотель.* Собрание сочинений: в 4 т. / под ред. З. Н. Микеладзе. М.: Мысль, 1978. Т. 2.— 687 с.
3. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1987.
4. *Артёмов С. Н.* Погружение модального λ -исчисления в логику доказательств // Математическая логика и алгебра: труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2003. Т. 242. С. 44–58.
5. *Барендрегт Х.* Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика / пер. с англ. Г. Е. Минц. М.: Мир, 1985.— 606 с.
6. *Бесконечность* в математике: философские и исторические аспекты / под ред. А. Г. Барабашева. М.: Янус-К, 1997.— 400 с.
7. *Большая советская энциклопедия:* в 30 т. М.: Советская энциклопедия, 1970–1978.
8. *Бурбаки Н.* Теория множеств / ред., пер. с фр. В. А. Успенский.— М.: Мир, 1965.— 458 с.
9. *Верецагин Н. К., Шень А.* Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999.
10. *Гегель Г. В. Ф.* Наука логики. Т. 3: Субъективная логика или учение о понятии. М.: Мысль, 1972.— 376 с.
11. *Голдблатт Р.* Топосы, категорный анализ логики / пер. с англ. М.: Мир, 1983.— 488 с.
12. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Наука: Физматлит, 2000.— 544 с.
13. *Евклид.* Начала: в 3 т. / пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовский, при участ. И. Н. Веселовского. М.;Л., 1948–1950.
14. *Зенкин А. А.* Принцип разделения времени и анализ одного класса квазифинитных правдоподобных рассуждений (на примере теоремы Г. Кантора о несчётности) // Доклады Академии наук. 1997. Т. 356. №6. С. 733–735.
15. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / пер. с нем., ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Изд-во АН СССР, 1985. Сер. "Памятники науки".
16. *Канторович Л. В., Акилов А. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.— 744 с.
17. *Карпенко А. А.,* Логика на рубеже тысячелетий // Логические штудии. "Logical studies": интернет-журнал. URL: <http://www.logic.ru> (дата обращения: 10.10.2006).
18. *Карри Х.* Основания математической логики: пер. с англ. М.: Мир,

1969.— 568 с.

19. *Киносита К., Асада К., Карацу О.* Логическое проектирование СБИС: пер. с яп. Д. А. Ковтуна, Л. В. Поспелова. М.: Мир, 1988.— 305 с.

20. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: Иностр. лит, 1957.

21. *Клини С. К.* Математическая логика: пер. с англ. Ю. А. Гастева. М.: Комкнига, 2007.— 480 с.

22. *Колмогоров А. А., Драгалин Г. А.* Математическая логика. М.: Изд-во МГУ, 2002.— 240 с.

23. *Конституция Российской Федерации.* М.: Норма, 2003.— 160 с.

24. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум гипотеза: пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина. М.: Мир, 1969.— 344 с.

25. *Кураровский К., Мостовский А.* Теория множеств / пер. с англ., ред. М. И. Кратко, А. Д. Тайманов. М.: Мир, 1970.— 416 с.

26. *Кузанский Николай.* Соч.: в 2 т.: пер. с лат. А. Ф. Лосева.— М.: Мысль, 1980.— 488+472 с. Сер. "Философское наследие".

27. *Линдон Р.* Заметки по логике. М.: Мир, 1981.

28. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики (ранняя классика). М.: Высшая школа, 1963.— 584 с.

29. *Математический энциклопедический словарь* / гл. ред. Прохоров Ю. В. М.: БРЭ, 1995.— 848 с.

30. *Нагорный Н. М.* К усилению теоремы приведения теории алгоритмов // Доклады Академии Наук СССР. 1953. Т. 90. №3. С. 341–342.

31. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей / пер. с фр. Сазонов В. В. М.: Мир, 1969.— 312 с.

32. *Нечипоренко А. В.* Реконструкция онтологии Николая Кузанского с опорой на математические фрагменты // Философия науки. 2009. №1(40). С. 155–167.

33. *Подосетник В. М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины // Вопросы философии. 1954. №5. С. 77–81.

34. *Потёмкин И. С.* Функциональные узлы цифровой автоматики. М., 1988.— 320 с.

35. *Прокл.* Первоосновы теологии // Лосев А.Ф. История античной эстетики. Высокая классика. М.: Искусство, 1974.— 600 с.

36. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.— 278 с.

37. *Суслов В. В., Колчанов Н. А.* Дарвиновская эволюция и регуляторные генетические системы // Вестник ВОГиС. 2009. Т. 13. № 2. С. 410–439.

38. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.— 508 с.

39. *Тронский И. М.* Античные теории языка и стиля. М.;Л., 1936.

40. *Френкель А.* Основания теории множеств: пер с англ. Ю. А. Гастева, под. ред. А. С. Есенина-Вольпина / А. Френкель, И. Бар-Хиллел.— М.:

Мир, 1966.—366 с.

41. Хайкин С. Нейронные сети: Полный курс, 2-е изд.; пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2006.— 1104 с.

42. Хендерсон П. Функциональное программирование : пер. с англ. М.: Мир, 1983.

43. Хесин Р. Б. Непостоянство генома. М.: Наука, 1984.— 472 с.

44. Чёрч А. Введение в математическую логику: пер. с англ. М.: Иностран. лит., 1960.

45. Чечулин В. Л. О предельной норме прибыли // Социально-экономическая ситуация развития региона: матер. регион. конф. Березники, 2005. С. 270–283.

46. Чечулин В. Л. О множествах с самопринадлежностью / В. Л. Чечулин // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2005. Вып 2(2). С. 133–138.

47. Чечулин В. Л. К обеспечению долгосрочного биосферного равновесия // Экологический вестник России. 2007. №4. С. 47–48.

48. Чечулин В. Л. О связи экономических моделей и теории информации // Совершенствование управления корпоративными образованиями и региональная промышленная политика: проблемы и инновации: матер. Всерос. науч.-практ. конф. Пермь. 2007. С. 303–305.

49. Чечулин Л. П., Чечулин В. Л. К информатизации процесса хлорирования титаносодержащих шлаков // Вестник Пермского университета. Серия: Информационные системы и технологии. 2007. Вып. 10 (15). С. 94–98.

50. Чечулин В. Л. Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика. 2008. С. 37–46.

51. Чечулин В. Л., Загородских Н. В. О психолого-гносеологических ограничениях преподавания курса программирования // Рождественские чтения: матер. Всерос. конф. Пермь, 2008. С. 102–104.

52. Чечулин В. Л. К системному анализу структуры промышленной информационно-технологической системы // Матер. Междунар. конф. Инфоком-2. СевКав ГТУ. Ставрополь, 2006. С. 177–181.

53. Чечулин В. Л. О непредикативном определении понятия личности в психологии // Проблемы и перспективы развития Верхнекамского региона: матер. рег. конф. Березники, 2006. С. 108–112.

54. Чечулин В. Л., Павелкин В. Н., Кирич Ю. П. К информатизации процессов отгонки для обеспечения заданного качества продукта // Химическая промышленность. 2007. №8. С. 408–414.

55. Чечулин В. Л., Ардавичус В. Г., Колбасина О. В. К информатизации процесса получения формалина // Химическая промышленность. 2008. №1. С. 39–44.

56. Чечулин В. Л. Об одном варианте доказательства теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов // Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Вып. 4 (4). С. 86–87.
57. Чечулин В. Л., Мясникова С. А. Анализ стационарного режима оборота общественно необходимого времени, определяющего меру инфляции // Журнал экономической теории / РАН. 2008. №2. С. 240–245.
58. Чечулин В. Л. О кратком варианте доказательства теорем Гёделя // Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: матер. Междунар. конф. при ИПМ ДВО РАН. Хабаровск, 2009. С. 60–62.
59. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний для управления качеством сложных химико-технологических процессов // Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: матер. Междунар. конф. при ИПМ ДВО РАН. Хабаровск, 2009. С. 158–159.
60. Чечулин В. Л. Об инфляционных циклах // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7 (33). С. 76–83.
61. Чечулин В. Л., Пьянков А. С. Об инфляционных циклах // Журнал экономической теории / РАН. 2009. №3. С. 236–241.
62. Чечулин В. Л. Об условии повышения содержания рутильной формы TiO_2 в процессе парофазного гидролиза // Журнал прикладной химии. 2009. Т. 82. №8. С. 1401–1403.
63. Чечулин В. Л., Волчугова Е. В., Зайнуллина А. Ш. К информатизации процесса флотации // Химическая промышленность. 2006. Т. 83. №7. С. 351–354.
64. Чечулин В. Л. К информатизации процесса сушки // Промышленные АСУ и контроллеры. 2008. №8. С. 27–29.
65. Чечулин В. Л. Об информатизации процесса плавки титановых концентратов в рудно-термических печах // Цветная металлургия. 2009. №3. С. 37–40.
66. Чечулин В. Л. Об общей схеме построения систем оптимизации химико-технологических процессов // Автоматизированные системы управления и информационные технологии: матер. Всерос. конф. ПермГТУ. Пермь, 2006. С. 172–180.
67. Чечулин В. Л., Светлаков И. Ю. О структурной организации информационно-промышленных систем управления ... // Молодёжная наука Верхнекамья: матер. регион. конф. БФ ПГТУ. Березники, 2006. С. 126–131.
68. Чечулин В. Л. К информатизации производства алифатических аминов // Новые технологии в азотной промышленности: матер. 2-й Всерос. науч.-практич. конф. при Невиномысском технологическом ин-те. Невиномысск, 2007. С. 91–92.
69. Чечулин В. Л. Основные составляющие философии права // Развитие

и реформирование ... Матер. регион. науч.-практ. конф. при УрАкад-Госслужбы. Пермь, 2008. С. 165–167.

70. Чечулин В. Л. Дополнительное обоснование метода пространства состояний управления химико-технологическими процессами // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2009): сб. матер. IX Междунар. конф. при ИПУ РАН. М., 2009. С. 31.

71. Чечулин В. Л. О приложениях семантики самопринадлежности // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3 (29), С. 10–17.

72. Чечулин В. Л. Ограничения информационных методов // Искусственный интеллект: философия, методология, инновации. Матер. III Всерос. Конф. студ., аспирантов и молодых ученых. МИРЭА. М.: Связь-Принт. 2009. С. 47–48.

73. Чечулин В. Л. О предпосылках отклоняющегося и противоправного поведения // Социальная безопасность и защита человека в условиях новой общественной реальности: системные междисциплинарные исследования. Сб. матер. Всерос. научн. конф. Пермь. 2009. С. 144–147.

74. Чечулин В. Л. О месте сверхнормативной деятельности в иерархии видов деятельности // Психология познания в области психологии: материалы междунар. конф. Пермь, 2009. С. 81–85.

75. Чечулин В. Л. Об основаниях системы кризисов развития личности и структурировании отклоняющегося поведения // Университетские исследования, 2010 (раздел: психология).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/189_87481.doc

76. Чечулин В. Л. Периодичность в строении материи и её отличие от иных структурных закономерностей // Университетские исследования, 2009 (раздел: философия).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/20_52906.rtf

77. Чечулин В. Л. О свободе теории множеств с самопринадлежностью от известных парадоксов наивной теории множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010, Вып. 1 (1), С. 29–31.

78. Чечулин В. Л. О гносеолого-психологических основаниях философии права // Философия права. 2010. №1. С. 101–106.

79. Чечулин В. Л. Об одном варианте модельной области лямбда-исчисления // Синтаксис и семантика логических систем. Иркутск. 2010. С. 112–114.

80. Чечулин В. Л., Корепанова Д. С. Об уточнении свойств пустого множества // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/38_78980.doc

81. Чечулин В. Л. Применение метода пространства состояний в управлении качеством процесса хлорирования титаносодержащей шихты // Научно-технические ведомости СПбГПУ Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2010. №1. С. 177–184.
82. Чечулин В. Л. О кратком варианте доказательства теоремы Нагорного об условиях удвоения слов в конечном алфавите // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика).
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/258_9971.doc
83. Чечулин В. Л., Ясницкий Л. Н. Некоторые ограничения алгоритмически реализуемых нейронных сетей // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2010. №12. С. 3-6.
84. Чечулин В. Л. Теорема об одном свойстве гносеологического отражения // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика).
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/59_28971.doc
85. Чечулин В. Л. О последовательности 6 исторических этапов появления основных математических понятий // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2 (2), 2010, С. 115–124.
86. Чечулин В. Л. Иерархия 6-ти уровней основных математических понятий // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика).
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/191_31748.doc
87. Чечулин В. Л. О счётности простых деревьев и следствиях из неё // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 4 (4). 2010. С. 20–23.
88. Чечулин В. Л. О сигма-алгебре событий в экономических моделях // Университетские исследования, 2010 (раздел: математика)
URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/60_93400.doc
89. Чечулин В. Л. Алгебра событий в экономических моделях // Информационные системы и математические методы в экономике. Сб. научн. тр. ПермГУ. Пермь. 2010. Вып. 3. С. 119–120.
90. Чечулин В. Л. Об одной теореме о неподвижных точках многозначного отображения // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 3 (3). 2010. С. 54–56.
91. Чечулин В. Л. О непредикативности в определении натуральных чисел // Актуальные проблемы механики, математики, информатики, Матер. Всеросс. конф. ПГУ. Пермь. 2010. С. 251.
92. Чечулин В. Л. О мощности множества всех множеств в теории множеств с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета, сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4 (4). 2010. С. 18–9.
93. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010.– 100 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_teoriya_mnozhestv.pdf
94. Чечулин В. Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011. – 112 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_modeli_ekonomiki.pdf
95. Чечулин В. Л., Шалимов А. А. Программный калькулятор множеств подмножеств конечных множеств // Университетские исследования, 2011 (раздел: математика).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/274_58926.doc
96. Чечулин В. Л. О непротиворечивости лямбда-исчисления // В мире научных открытий. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. №1. С. 203–206. URL: <http://www.nkras.ru/articles/2011/1/vypusk12011.pdf>
97. Чечулин В. Л. О вращении в многомерных пространствах // Университетские исследования, 2011 (раздел: математика)

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/482_46703.doc
98. Чечулин В. Л. Теорема о стягивании циклов и неинтегрируемость путей в экономике // Университетские исследования, 2011 (раздел: экономика). URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/487_55858.doc

99. Чечулин В. Л. Теорема о стягивании конечных связных графов // Университетские исследования, 2011 (раздел: математика).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/483_11223.doc
100. Чечулин В. Л. Последовательность 6-ти этапов развития логики // Седьмые Смирновские чтения по логике: междунар. конф. М. 22–24 июня 2011.

URL: http://vfc.org.ru/rus/events/conferences/smirnov2011/members/http://vfc.org.ru/bitrix/tools/form_show_file.php?rid=605&hash=272e4e2648cd47d5dfale46e1b2a41ea&lang=ru&action=download

101. Чечулин В. Л., Резвухина М. П. О связи оператора суперпозиции и теоремы об ограничении размерности // В мире научных открытий. Серия: Математика. Механика. Информатика. №8.1(20). 2011. С. 422–429.

URL: <http://www.nkras.ru/articles/2011/81/vypusk0812011.pdf>
102. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011. — 114 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_mps.pdf
103. Чечулин В. Л. О различии этимологии слова «свобода» в русском и иных языках // Приволжский научный вестник. 2011. №1. С. 44–50.

URL: http://icnp.ru/sites/default/files/PNV/PNV_1.pdf
104. Чечулин В. Л. О структурном изоморфизме множеств подмножеств самопринадлежащих множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. №3(11). С. 14–16.

105. Чечулин В. Л. К обоснованию теории меры // Актуальные проблемы

математики, механики, информатики – 2012: сб. тез. Всеросс. науч.-практ. конф. ПГНИУ, Пермь, 2012, С. 47.

106. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В. Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 112 с. URL:

http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_legotkin_rusakov_me_ustojchivost.pdf

107. Чечулин В. Л. Моделирование логических схем посредством теории множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 1 (9). С. 19–21.

108. Чечулин В. Л. О транзитивности принадлежности для самопринадлежащих множеств // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 1 (9). С. 22–23.

109. Чечулин В. Л., Мазунин С. А., Моисеенков М. С. Плоскостность линий моновариантного равновесия в водно-солевых системах и её приложение / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 116 с. URL: http://psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_mazunin_moiseenkov_ploskostnost_linij.pdf

110. Чечулин В. Л. О непредикативных основаниях права // Университетские исследования, 2012 (раздел: юридические науки).

URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/554_3016.doc

111. Чечулин В. Л. О самопринадлежащих множествах как неподвижных точках // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. №3(11). С. 12–13.

112. Чечулин В. Л., Налдаева Е. Н. К обоснованию вычислимости решения задачи управления качеством // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта, CAD/CAM/PDM. Сборн. тез. 12-й междунар. конф. ИПУ РАН, М., 2012. С. 42.

113. Чечулин В. Л. Об онтологических основаниях экономико-математического моделирования // Университетские исследования, 2012 (раздел: экономика). URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/555_22375.doc

114. Чуприкова Н. И. Интроспекция и явления сознания в системе естественно-научной психологии // Вопросы психологии. 2010. №2. С. 3–19.

115. Шрагин И. В. Условия измеримости суперпозиций // Доклады АН СССР. 1971. Т. 197. С. 295–298.

116. Шрагин И. В. Суперпозиционная измеримость и оператор суперпозиции, Одесса: Феникс. 2006.— 103 с.

117. Эйлер Леонард. Дифференциальное исчисление: пер. с лат. М. Я. Выготского. М.;Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1949.— 580 с.

118. Chechulin V. L. About informatization of distillation process for providing required quality of product / V. L. Chechulin, V. N. Pavelkin V. N., Yu.

- P. Kirin, Yu. F. Masitova, V. K. Grigalashvili, A. B. Tankeev // Russian Journal of Applied Chemistry, MAIK Nauka/Interperiodica. 2008. Vol. 81. No. 3. P. 558–564.
119. *Chechulin V. L.* Informatization of the process of producing formalin / V. L. Chechulin, V. G. Ardavichus, O. V. Kolbasina // Russian Journal of Applied Chemistry, MAIK Nauka/Interperiodica 2008. Vol. 81. No. 6. P. 1112–1116.
120. *Chechulin V. L.* On the Condition of Rising the Content of the TiO_2 Rutile Form during a Vapor-Phase Hydrolysis / V. L. Chechulin // Russian Journal of Applied Chemistry, MAIK Nauka/Interperiodica. 2009. Vol. 82. No. 8. P. 1501–1503.
121. *Chechulin V. L.* About the selfconsidering semantic in the mathematical logic. / V. L. Chechulin // Bull. Symbolic Logic. 2010. Vol. 16. P. 111–112 (European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic: Logic Colloquium '09. Sofia, Bulgaria. 2009. July 31—August 5).
122. *Frege Gottlob*, The foundation of arifmetic. Oxford, 1980.— 120 p.
123. *Linnebo, Oystein*. Prtedicative fragments of Frege arithmetic // Bull. Symbol. Log. 2004. 10. №2. p. 153–174.
124. Worrall, J. and Zahar, E. (2001). “Ramsification and structural realism.” Appendix in E. Zahar, Poincaré's Philosophy: From Conventionalism to *Phenomenology*, pp. 236–251.
125. *Yuting Shen*. Paradox of the class of all grounded classes / Yuting Shen // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. №2. p. 114. (Реферат в РЖ Математика, 1954, №5027, референт А. В. Кузнецов).
126. *Чечулин В. Л., Бабушкин Е. В.* Программа реализации алгоритма "Определение точки оптимума метода пространства состояний методом главных компонент" // ОФАП РФ, свид-во об отраслевой регистрации №12314; № государственной регистрации 50200900340, 11 февр. 2009.
127. *Чечулин В. Л., Шалимов А. А.* Программный модуль "Определение структуры множества подмножеств с самопринадлежностью" // ОФЭР-НиО РФ, свид-во о регистрации электронного ресурса №16755 от. 25 фев. 2011, № государственной регистрации (ВНТИЦ) 50201100095, код по ЕСПД .0206971.00246-01.

Указатель имён

Аристотель, 66	Лейвелс, 30
Бэкон, 67	Маклорен, 31
Галилей, 67	Мириманов, 8, 49
Гегель, 67	Нейман, фон, 9
Дедекинд, 32	Прокл, 31
Декарт, 30	Пселл, 66
Демокрит, 30	Скотт, 34
Диофант, 30, 66	Ферма, 30
Евклид, 30	Фонтенель, 31
Ибн-Сина, 31	Цермело, 9
Кантор, 31	Эйлер, 31
Кузанский Николай, 31	

Предметный указатель

базис исчисления высказываний, 39	метод пространства состояний, 61
внутренность, 19, 52	многое, 10
единое, 10	множество
едино-многое, 10, 31	всех множеств, 11
изоморфизм	всех несамопринадлежащих
структурный, 22, 52, 75	множеств, 16
критерии истины, 7	пустое, 12
логика	самопринадлежащее, 11
двузначная, 69	модель RS-триггера, 101
многозначная, 68	модельная область
модальная, 68	исчисления высказываний, 41
объёмов понятий, 69	лямбда-исчисления, 36
лямбда-исчисление, 34, 68	непредикативность, 84
	нить, 19
	определение
	самоподобие, 24, 53

- собственно внутренний объект, 23, 53
- парадокс
 - Бурали-Форти, 50
 - Кантора, 49
 - Мириманова, 49
- полнота формальной системы, 39
- последователь
 - бесконечный PN , 21, 31
 - недостижимый PO , 22, 32
 - простой, 19
- приложение
 - теоремы Гёделя к генетике, 63
 - теоремы о размерности в матэкономике, 62
 - теоремы о размерности в управлении, 60
- пространство, 25
 - ориентированное, 26
- рекомбинация товаров и услуг, 57
- самоописательность, 32
- самопринадлежность
 - нематериальность, 65
- самоссылочность, 8, 84
- схема свёртывания, 11
- счётность $\text{PN}(\cdot)$, 71
- теорема
 - Гёделя о неполноте предикативной теории, 39
 - Гёделя о предикативной теории, 38
 - Кантора, 13
 - Нагорного, 96
 - о вращении, 91
 - о законе исключения третьего, 41
 - о количестве
 - несамопринадлежащих множеств, 73
 - о количестве точек на прямой
 - между разными точками, 55
 - о модели лямбда-исчисления, 35
 - о модельной области языка, 77
 - о мощности множества всех множеств, 55
 - о неделимости, 14
 - о недополнимости, 14
 - о неподвижных точках, 56
 - о непротиворечивости, 14, 39
 - о непротиворечивости лямбда-исчисления, 98
 - о несчётности точек на прямой, 53
 - о порядке конечных множеств, 79, 81
 - о предикативности лямбда-исчисления, 94
 - о размерности, 26, 47, 61
 - о самоприменимом событии, 92
 - о стягивании круга определений, 42
 - о стягивании циклов с самопринадлежностью, 42
 - о счётности десятичных обозначений, 54
 - о транзитивности принадлежности, 13
 - об изоморфизме множеств подмножеств, 22, 76, 77
 - об ограничении суперпозиций, 87
 - ограниченность предикативной теории, 52
- теория
 - непредикативная, 39
 - предикативная, 37
- число натуральное, 84

Научное издание

Чечулин Виктор Львович

**ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ С САМОПРИНАДЛЕЖНОСТЬЮ
(ОСНОВАНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ)**

Монография

Редактор Н. Е. Петрова
Корректор Е. Н. Пермякова
Компьютерная вёрстка автора

Подписано в печать 28.12.2012. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 7,32. Тираж 100 экз. Заказ №5.

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного национального
исследовательского университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в ООО "Учебный центр "Информатика""
614990. Пермь, ул. Букирева, 15