ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. В. Кувшинова, О. В. Сандакова,
Д. М. Янишевский

РОЖДЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВСЕЛЕННЫХ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"
Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е. В. Кувшинова, О. В. Сандакова, Д. М. Янишевский

РОЖДЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВСЕЛЕННЫХ

МОНОГРАФИЯ

Пермь 2020

УДК 531.5:524.8
ББК 22.635+22.31
К885

Кувшинова Е. В.

К885 Рождение и эволюция вращающихся вселенных [Электронный ресурс] : монография / Е. В. Кувшинова, О. В. Сандакова, Д. М. Янишевский ; под науч. ред. В. Ф. Панова ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 2,33 Мб ; 122 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/kuvshinova-sandakova-yanishevskij-rozhdenie-i-evoluciya-vrashchayushchihsya-vselennyh.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3487-3

Космология с расширением и вращением даёт возможность объяснять наблюдательные данные, которые не укладываются в рамки фридмановской теории. Возможное вращение Вселенной позволяет предсказать и изучать новые космологические эффекты, что дает возможность полнее познать физическую картину мира. В монографии предложены космологические модели с вращением в ОТО. Построены эволюционные космологические модели с расширением и вращением с метриками типа II, VIII и IX по Бьянки. Исследовано квантовое рождение моделей вселенных с различными метриками типа VIII и IX по Бьянки, при этом во всех моделях имеется вращающаяся анизотропная жидкость.

Книга предназначена для специалистов по космологии и гравитации, а также для аспирантов и студентов физических вузов и специальностей.

УДК 531.5:524.8
ББК 22.635+22.31

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: Институт проблем машиноведения Российской академии наук (рецензент – ведущий научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук ***Ю. В. Павлов***);

старший научный сотрудник института механики сплошных сред УрО РАН, канд. физ.-мат. наук ***В. И. Носков***

© Кувшинова Е. В., Сандакова О. В., Янишевский Д. М., 2020
© ПГНИУ, 2020

ISBN 978-5-7944-3487-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ 3
ВВЕДЕНИЕ 4
Глава 1. КВАНТОВОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ С ВРАЩЕНИЕМ 10
§ 1.1. Актуальность квантовой космологии 10
§ 1.2. Модель Бьянки IX с $\Lambda \neq 0$ 12
§ 1.3. Модель Бьянки IX с $\Lambda = 0$ 24
§ 1.4. Квантовое рождение вращающейся модели вселенной типа IX по Бьянки 28
§ 1.5. Квантовое рождение вселенной с метрикой типа VIII по Бьянки с вращением 33
§ 1.6. Модель квантового рождения Вселенной 37
§ 1.7. Квантовое рождение Вселенной с метрикой VIII типа Бьянки 41
Глава 2. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С МЕТРИКАМИ II, V, VIII ТИПОВ ПО БЬЯНКИ 45
§ 2.1. Модели с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением: метрика II типа Бьянки 45
§ 2.2. Модели с анизотропной жидкостью и излучением: метрика V типа по Бьянки 53
§ 2.3. Модели с источниками-жидкостями и полем излучения: метрика VIII типа Бьянки 59
§ 2.4. Модели с жидкостями, имеющими уравнение состояния газа Чаплыгина 69
§ 2.5. Модели с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением: метрика VIII типа Бьянки 74
§ 2.6. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в однородном изотропном пространстве открытого типа 78
Глава 3. ЭВОЛЮЦИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ВРАЩЕНИЕМ 84
§ 3.1. Модель с метрикой типа II по Бьянки 84
§ 3.2. Модель с метрикой типа VIII по Бьянки 92
§ 3.3. Модель с метрикой типа IX по Бьянки 102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 110
ЛИТЕРАТУРА 112

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет физика элементарных частиц, релятивистская космология и общая теория относительности Эйнштейна смогли сделать большие успехи в постижении физической картины мира. Были установлены некоторые связи этих теорий между собой в рамках различных объединительных подходов и космомикрофизики, но все указанные разделы содержат трудности. Кроме этого, до сих пор не создана единая картина физического мира [1-25]. Современный период в отношении гравитации можно назвать постэйнштейновским, а в отношении космологии – постфридмановским. Космология Фридмана, в свете последних открытий о возможном составе материи, а также описания общей эволюии Вселенной, является слишком упрощённой [8-10]. Для преодоления трудностей и приближения к построению единой физической теории необходимо признать возможность рассмотрения нескольких физических парадигм [4, 7, 26]. В настоящий момент имеются по крайней мере 10 независимых свидетельств существования темной материи во Вселенной [8]. В 1998-1999 гг. 2 группы астрономов, изучая отдаленные сверхновые, представили убедительные доказательства того, что расширение Вселенной ускоряется. Физическое происхождение космического ускорения пока остаётся загадкой. Если расширение ускоряется, то имеются две возможности, причем каждая из них должна привести к пересмотру наших основных физических представлений:

1) примерно 70% плотности энергии Вселенной существует в форме неизвестной субстанции (её называют тёмной энергией) с большим отрицательным давлением, обеспечивающим ускоренное расширение и (или)

2) общая теория относительности должна быть пересмотрена на космологических масштабах.

В данной монографии мы придерживаемся концепции существования темной энергии и используем эту концепцию для построения космологических моделей общей теории относительности (ОТО).

С целью устранения многочисленных недостатков модели Большого взрыва в космологических моделях, с возникновением теории инфляции, появмлост представление об ускоренном расширении Вселенной. Оказалось, что для того, чтобы избавиться от большинства недостатков модели Фридмана, достаточно экспоненциально быстрого ускоренного расширения Вселенной в самом начале её эволюции в течение всего около 10^{-35}с. Наиболее простым способом получения такого режима расширения является рассмотрение динамики Вселенной со скалярным полем.

Самая популярная в настоящее время модель Вселенной - это ΛCDM - модель, то есть модель, в которой доминирующей формой материи во Вселенной является холодная тёмная материя плюс тёмная энергия в виде лямбда (Λ)-члена. В работе [11] описываются основные результаты космической миссии «Планк» Европейского космического агентства, имеющие первостепенное значение для объяснения происхождения и эволюции Вселенной. В данной работе рассмотрены этапы получения астрофизической и космологической информации из данных космических микроволновых обзоров неба. Установлено, что не найдено подтверждений физической анизотропии расширяющейся Вселенной, которая описывается так называемыми моделями Бьянки [11] и, согласно [11], сделан вывод, что наблюдения телескопа «Планк» подтверждают основную (стандартную) космологическую модель ΛCDM .

Таким образом, на данный момент общепринятая точка зрения состоит в том, что наша Вселенная – однородна и изотропна. Однако имеются астрономические наблюдения, которые могут свидетельствовать в пользу крупномасштабных отклонений от изотропии наблюдаемой Вселенной [12,13] . Отметим, что существует особый тип анизотропии в четырехмерном пространстве – это анизотропия, которая обусловлена космологическим

вращением. Наша точка зрения состоит в том, что в настоящее время нельзя отвергать возможное малое вращение Вселенной и её слабую глобальную анизотропию. Берч в своей работе [27] заявил об обнаружении анизотропии поляризации радиоизлучения внегалактических источников, а в работе Андреасяна [28] указывается на подтверждение им результата наблюдений Берча. Результаты этих работ убедительно не опровергнуты, но и не были подтверждены другими группами астрономов. С точки зрения Берча, обнаруженную им крупномасштабную анизотропию Вселенной можно объяснить её вращением. Публикация работы Берча [27] дала толчок дальнейшим исследованиям по космологии с вращением. Из российских авторов можно отметить работы Иваненко, Обухова, Короткого, Панова, Кречета, Шикина, Сайбаталова, Фильченкова и других, из зарубежных авторов: Грен, Вайдья, Патель, Свистинс, Ребоуказ, Тиомно и другие. Чаще всего космологическое вращение (вращение материи Вселенной) понимается как вращение векторного поля 4-скорости жидкости, заполняющей Вселенную, т.е. это не твердотельное, а дифференциальное вращение.

Основы квантовой космологии были заложены в конце 60-х годов 20-го века Уилером и ДеВиттом. Однако до создания сценария раздувающейся Вселенной описание всего мира в целом в рамках квантовой механики большинству специалистов казалось излишеством. Действительно, квантовая механика при описании макроскопически больших объектов обычно приводит к тем же результатам, что и классическая механика. Если теперь учесть, что Вселенная является самым большим из макроскопических объектов, то возникает естественный вопрос об уместности ее описания с помощью квантовой теории.

В стандартной теории горячей Вселенной такой вопрос был вполне правомочен, поскольку согласно этой теории наблюдаемая часть Вселенной произошла за счет расширения области, которая всегда содержала примерно 10^{87} элементарных частиц. Однако согласно сценарию раздувающейся Вселенной, вся наблюдаемая часть Вселенной (а может быть, и вся

Вселенная) образовалась за счет быстрого расширения области размером $l \le M_p^{-1} \sim 10^{-33}$см, не содержащей, возможно, ни одной элементарной частицы [1]. В этом случае на ранних стадиях расширения Вселенной квантовые эффекты действительно могли играть определяющую роль.

В силу отсутствия завершённой квантовой теории гравитации вычисления в квантовой космологии реализуются различными подходами. Следует отметить суперсимметричное квантование гравитационно связанных однородных систем, служащее для построения космологических моделей с метриками Кантоновского-Сакса и различных типов по Бьянки[29], полуклассические пути к устранению сингулярности Большого Взрыва в однородных, анизотропных моделях[30] и уравнение Уиллера-ДеВитта, до последнего времени служащее основным рабочим инструментом в квантовой космологии и применяющееся как в стандартной, так и в многомерной космологии[31]. Волновая функция Вселенной представляет собой $\Psi(h_{ij}, \varphi)$, где h_{ij} – трехмерная пространственная метрика, φ – поля материи. Уравнение Уилера-ДеВитта является по сути дела уравнением Шредингера для волновой функции в стационарном случае $\partial\Psi/\partial t = 0$.Это уравнение описывает поведение величины Ψ в так называемом суперпространстве-пространстве всех трехмерных метрик h_{ij}. Однако наиболее интересные результаты в этой области были получены с помощью упрощенного подхода, в котором вместо полного суперпространства рассматривалась лишь его часть, называемая мини-супер-пространством и описывающая однородную Вселенную Фридмана, т. е. роль величин h_{ij} брал на себя масштабный фактор Вселенной [22].

В последние годы увеличилось число работ по квантовой космологии, исследуется квантовое рождение расширяющихся изотропных вселенных: закрытой, открытой и плоской [32-34]. Вместе с тем в работе [35] найдена волновая функция для однородной изотропной модели вселенной с электромагнитным полем, чистым излучением и вращающейся жидкостью,

классическое поведение которой описывается космологическим решением Вайдьи и Пателя [36]. Авторы работы [35] делают вывод, что космологические состояния с большими величинами глобального вращения являются маловероятными. В [35] в рамках формализма суперпространственного квантования рассматривается квантовая эволюция однородных вращающихся космологических моделей типа Гёделя со спинорным и скалярным полями. Там показано, что уравнение ДеВитта для вращающихся космологических моделей принимает форму уравнения Шредингера, в котором роль времени играет фаза спинорного поля, и возникает возможность корректного определения вероятности существования вращающихся моделей, у которых отсутствует начальная сингулярность. Квантовое рождение Вселенной с медленным вращением исследовано в [37, 38], причем авторы этих работ в рамках своего подхода установили, что вращение может как уменьшать, так и увеличивать коэффициент туннелирования Вселенной. Также квантовое рождение вселенных с вращением рассматривалось в [39–44]. Устранение (на полуклассическом уровне) сингулярности Большого взрыва с использованием метрик Бьянки проведено в работе [30].

Целью настоящей монографии является изложение результатов, полученных Е.В. Кувшиновой, О.В. Сандаковой и Д.М. Янишевского, представителей Пермской группы гравитационистов, за последнее 20 лет, в области построения и комплексного изучения космологии с расширением и вращением.

Актуальность монографии определяется тем, что космология с расширением и вращением даёт возможность объяснять наблюдательные данные, которые не укладываются в рамки фридмановской теории. Возможное вращение Вселенной позволяет предсказать и изучать новые космологические эффекты, что дает возможность полнее познать физическую картину мира. Мы считаем, что вопрос о том, вращается наша Вселенная или нет, далеко не выяснен и является предметом научной

дискуссии, это подтверждают публикации по данной теме, что говорит об актуальности проблемы глобального вращения. Исследование вращения Вселенной может установить возможную связь космологического вращения с вращением галактик. Выяснение роли вращения в квантовой космологии способствует развитию космологии ранней Вселенной. Необходимость построения наиболее реальной модели Вселенной, быть может с учётом вращения, определяет важность и научную значимость исследований в данной области.

Монография состоит из оглавления, введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении отмечаются особенности современного этапа развития космологии, отмечается значение космической миссии «Планк», указывается цель монографии и актуальность исследования космологического вращения, даётся краткое изложение глав монографии. В первой главе исследовано квантовое рождение моделей вселенных с различными метриками типа IX по Бьянки и типа VIII по Бьянки, при этом во всех моделях имеется вращающаяся анизотропная жидкость. Для каждой из рассматриваемых моделей получено уравнение Уиллера – ДеВитта. Вычислены коэффициенты туннелирования для исследуемых моделей вселенных. Во второй главе рассматриваются новые нестационарные космологические модели с вращением в ОТО (Общей теории относительности) для метрик типа VIII, II и V по Бьянки. В третьей главе построены космологические сценарии с учетом расширения и вращения с метриками типа II, VIII и IX по Бьянки. В заключении отмечаются основные результаты, описанные в данной монографии, полученные пермской группой гравитационистов по космологии с вращением и исследованиям по квантовому рождению и эволюции вращающихся вселенных.

ГЛАВА 1.
КВАНТОВОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ С ВРАЩЕНИЕМ

§ 1.1. Актуальность квантовой космологии

Квантовая космология — одна из наиболее сложных в идейном отношении областей теоретической физики. Это обстоятельство связано не только с такими трудностями квантовой теории гравитации, как проблема ультрафиолетовых расходимостей, но в первую очередь с тем, что сама постановка задачи в рамках квантовой космологии совершенно нетривиальна. Результаты соответствующих исследований зачастую выглядят парадоксально, и требуется большая степень непредубежденности для того, чтобы не отмахнуться от них с самого начала [22].

Основы квантовой космологии были заложены в конце 60-х годов Уилером и ДеВиттом. Однако до создания сценария раздувающейся Вселенной описание всего мира в целом в рамках квантовой механики большинству специалистов казалось излишней роскошью. Действительно, квантовая механика при описании макроскопически больших объектов обычно приводит к тем же результатам, что и классическая механика. Если теперь учесть, что Вселенная является самым большим из макроскопических объектов, то возникает вопрос, зачем нужно описывать ее с помощью квантовой теории?

В стандартной теории горячей Вселенной такой вопрос был вполне правомочен, поскольку согласно этой теории наблюдаемая часть Вселенной произошла за счет расширения области, которая всегда содержала примерно 10^{87} элементарных частиц. Однако согласно сценарию раздувающейся Вселенной, вся наблюдаемая часть Вселенной (а может быть, и вся Вселенная) образовалась за счет быстрого расширения области размером $l \leq M_p^{-1} \sim 10^{-33}$ см, не содержащей, возможно, ни одной элементарной

частицы! В этом случае на ранних стадиях расширения Вселенной квантовые эффекты действительно могли играть определяющую роль.

До последнего времени основным рабочим инструментом в квантовой космологии служило уравнение Уилера — ДеВитта для волновой функции Вселенной $\Psi(h_{ij},\varphi)$, где h_{ij} — трехмерная пространственная метрика, φ — поля материи. Уравнение Уилера — ДеВитта является, по сути дела, уравнением Шредингера для волновой функции в стационарном случае $\partial\Psi/\partial t=0$.Это уравнение описывает поведение величины Ψ в так называемом суперпространстве — пространстве всех трехмерных метрик h_{ij}. Однако наиболее интересные результаты в этой области были получены с помощью упрощенного подхода, в котором вместо полного суперпространства рассматривалась лишь его часть, называемая мини-супер-пространством и описывающая однородную Вселенную Фридмана, т. е. роль величин h_{ij} брал на себя масштабный фактор Вселенной *a* [22].

В последние годы увеличилось число работ по квантовой космологии, исследуется квантовое рождение расширяющихся изотропных вселенных: закрытой, открытой и плоской [32, 33, 45, 46]. Вместе с тем в работе [35] найдена волновая функция для однородной изотропной модели вселенной с электромагнитным полем, чистым излучением и вращающейся жидкостью, классическое поведение которой описывается космологическим решением Вайдьи и Пателя. Авторы работы [35] делают вывод, что космологические состояния с большими величинами глобального вращения являются маловероятными. В [34] в рамках формализма суперпространственного квантования рассматривается квантовая эволюция однородных вращающихся космологических моделей типа Гёделя со спинорным и скалярным полями. Там показано, что уравнение ДеВитта для вращающихся космологических моделей принимает форму уравнения Шредингера, в котором роль времени играет фаза спинорного поля, и возникает возможность корректного определения вероятности существования

вращающихся моделей, у которых отсутствует начальная сингулярность. Квантовое рождение Вселенной с медленным вращением исследовано в [37, 38], причем авторы этих работ в рамках своего подхода установили, что вращение может как уменьшать, так и увеличивать коэффициент туннелирования Вселенной. Квантовое рождение вселенной с произвольным вращением рассматривалось в [39-41]. Исследование роли вращения в описании ранней вселенной и при квантовом рождении вселенной представляется актуальным.

§ 1.2. Модель Бьянки IX с A≠0

В наших работах [38, 47] начато рассмотрение квантового рождения модели вселенной типа IX по Бьянки, заполненной вращающейся анизотропной жидкостью. Нами построена [39, 16] замкнутая космологическая модель с вращением с метрикой вида

$$ds^2 = -(dt + kC\omega^1)^2 + (\alpha C\omega^1)^2 + C^2\left((\omega^2)^2 + (\omega^3)^2\right), \qquad (1.2.1)$$

где $C = C(t),\ k, \alpha = const,\ \omega^1, \omega^2, \omega^3$- есть 1- формы, удовлетворяющие структурным отношениям типа IX по Бьянки. Для координат метрики (1.2.1) имеем $0 \le x^1 \le \pi,\ 0 \le x^2, x^3 \le 2\pi.$ Модель заполнена вращающейся анизотропной жидкостью с тензором энергии-импульса (ТЭИ)

$$T_{ik} = (\varepsilon + \pi)u_i u_k + (\sigma - \pi)\chi_i \chi_k + \pi g_{ik,} \qquad (1.2.2)$$

где $u_\nu u^\nu = -1, \chi_\mu \chi^\mu = 1, \chi^\mu u_\mu = 0, \varepsilon > 0, \sigma > \pi.$ Предполагается, что $u^\mu = \delta_0^\mu, \chi_0 = 0,\ \chi_1 = -\alpha C \sin x^3,\ \chi_2 = \alpha C \sin x^1 \cos x^3,\ \chi_3 = 0.$

У нас используется, что c=1, $\hbar = 1$, 8πG=1, где G - ньютоновская гравитационная постоянная. Из уравнений Эйнштейна получено

$$C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht),\ \text{H=const},$$

H - характеризует темп раздувания,

$$\varepsilon = \frac{-12C'^2(k^2-\alpha^2)+k^2\alpha^2+4\alpha^2-\alpha^4}{4C^2\alpha^2},$$

$$\sigma = \frac{12C'^2(k^2-\alpha^2)-k^2\alpha^2-4\alpha^2+\alpha^4}{4C^2\alpha^2}, \qquad (1.2.3)$$

$$\pi = \frac{12C'^2(k^2-\alpha^2)+3k^2\alpha^2-3\alpha^4}{4C^2\alpha^2},$$

условия $\sigma > \pi$ и $\varepsilon > 0$ будут обеспечены при

$$k^2+1<\alpha^2<k^2+4. \qquad (1.2.4)$$

(Если k=0, то у нас $1<\alpha^2<4$). Для нашей модели $k \geq 0, \alpha > 1$.

Расширение модели $\theta = \frac{3C'}{C}$, вращение жидкости $\omega = \frac{k}{2C}$, ускорение $a = \frac{kC'}{\alpha C}$, сдвиг отсутствует.

Для нашего решения $\sigma + \varepsilon = 0\,(\sigma = -\varepsilon)$, но $\sigma - \pi = \frac{\alpha^2 - k^2 - 1}{C^2}$. При $\alpha^2 > k^2+1$ будет $\sigma > \pi$. Так что наша жидкость не является вакуумоподобной. У нас

$$\varepsilon = 3(\alpha^2-k^2)\frac{H^2}{\alpha^2} + \frac{4\{1-(\alpha^2-k^2)\}}{ch^2Ht}\frac{H^2}{\alpha^2}.$$

Исключим из последнего выражения t, учитывая, что $C = \frac{\alpha}{2H}ch(Ht)$, тогда будем иметь

$$\varepsilon = 3(\alpha^2-k^2)\frac{H^2}{\alpha^2} + \frac{\{1-(\alpha^2-k^2)\}}{C^2}. \qquad (1.2.5)$$

Если $\alpha^2 = k^2+1, k \neq 0$, то наша космологическая модель переходит в модель, аналогичную модели Грёна [48], которая тоже заполнена "вакуумоподобной жидкостью". При $\alpha^2 = k^2+1, k \neq 0$ нашу модель, как и модель [48], нельзя считать вращающейся, так как "вакуумоподобная жидкость" не вращается в абсолютном смысле. При $k = 0, \alpha = 1$ наша модель переходит в модель де Ситтера.

У нас классическая модель заполнена вращающейся анизотропной жидкостью. При этом параметром, характеризующим вращение, является k, а скаляр вращения $\omega = \frac{k}{2C}$. В работе [39] исследуется квантовое рождение рассматриваемой модели вселенной из C=0, найдена волновая функция вселенной, вычислен коэффициент туннелирования вселенной. На этапе квантования анизотропная жидкость предполагается классической.

Получение уравнения Уилера - ДеВитта

Пространство-время с метрикой (1.2.1) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [16]. Для этого метрику (1.2.1) можно представить в виде

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \qquad (1.2.6)$$

а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t=const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a - реперный индекс, α - координатный индекс); $e_a^0 = 0,\ e_a^b = \delta_a^b$ $(a,b = 1,2,3)$; единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t=const имеет вид

$$n_\alpha = (-N,0,0,0),\ \alpha = 0,1,2,3.$$

Как известно, Ψ - волновая функция вселенной удовлетворяет уравнению Уилера-ДеВитта

$$T_\perp \Psi = 0 \qquad (1.2.7)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a \Psi = 0. \qquad (1.2.8)$$

Согласно литературе [16], уравнения связей можно записать в виде

$$T_\perp = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot {}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0, \qquad (1.2.9)$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \qquad (1.2.10)$$

Здесь

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K),$$

$$K_{ab} = -n_{a;b},$$

$$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}, T_{a\perp} = \sigma_0 n^{\alpha}e_a^{\beta}T_{\beta\alpha},$$

$\sigma_0 = -1,\ T_{\alpha\beta}$ - ТЭИ анизотропной жидкости.

В итоге для метрики (1.2.1) получено

$$T_{\perp} = \frac{C\sin x^1[4C^2(\alpha^4\varepsilon + k^2\alpha^2\sigma) - 12C'^2(\alpha^4 - 2\alpha^2k^2 + k^4)}{2\sqrt{\alpha^2 - k^2}\alpha^2} + \\ + \frac{\alpha^6 - 2\alpha^4k^2 - 4\alpha^4 + \alpha^2k^4 + 4\alpha^2k^2]}{2\sqrt{\alpha^2 - k^2}\alpha^2} = 0, \quad (1.2.11)$$

$$T_1 = -2C^4\sin x^1\sin x^3\alpha k(\varepsilon + \sigma) = 0, \\ T_2 = 2C^4\sin^2 x^1\cos x^3\alpha k(\varepsilon + \sigma) = 0, \quad (1.2.12)$$

$$T_3 = 0. \quad (1.2.13)$$

Учитывая, что для нашего решения $\sigma = -\varepsilon,$ то (1.2.12) удовлетворяются тождественно.

Для нашей модели лагранжиан гравитационного поля:

$$\Lambda_{\tilde{A}\acute{Y}} = -\frac{12C'^2(\alpha^2 - k^2) + \alpha^4 - k^2\alpha^2 - 4\alpha^2}{2C^2\alpha^2}, \quad (1.2.14)$$

$$g^{1/2} = C^3\sin x^1\sqrt{\alpha^2 - k^2},$$

$$N = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}.$$

Имеем

$$L_{\tilde{A}\acute{Y}} = \frac{1}{2}\int d^3x(Ng^{1/2}\Lambda_{\tilde{A}\acute{Y}}) = \frac{-2\pi^2C}{\alpha}\left\{12C'^2(\alpha^2 - k^2) + \alpha^4 - k^2\alpha^2 - 4\alpha^2\right\}. \quad (1.2.15)$$

Определим в духе минисуперпространственного квантования канонический импульс

$$\pi_C = \frac{\partial L_{\tilde{A}\acute{Y}}}{\partial C'} = -\frac{48\pi^2 C}{\alpha} C'(\alpha^2 - k^2). \qquad (1.2.16)$$

Тогда

$$T_\perp = \frac{C \sin x^1}{2\sqrt{\alpha^2 - k^2}\alpha^2}\{4C^2(\alpha^4 - \alpha^2 k^2)\varepsilon - \frac{12\pi_C^2\alpha^2}{(48\pi^2)^2 C^2} + \qquad (1.2.17)$$
$$+ \alpha^6 - 2\alpha^4 k^2 - 4\alpha^4 + \alpha^2 k^4 + 4\alpha^2 k^2\} = 0.$$

Осуществляем квантование

$$\pi_C = \frac{1}{i}\frac{d}{dC}, \pi_C^2 = -\frac{d^2}{dC^2}. \qquad (1.2.18)$$

В итоге уравнение Уилера-ДеВитта имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - C^2\left\{192\pi^4\left(\alpha^2 - k^2\right)\left(4 - \alpha^2 + k^2\right) - 768\pi^4\left(\alpha^2 - k^2\right)\varepsilon C^2\right\}\right]\Psi(C) = 0. \qquad (1.2.19)$$

Если обозначить $\varepsilon_0^2 = 192\pi^4$ и подставить в (1.2.19) $\varepsilon = \varepsilon(C)$ из (1.2.5), то уравнение (1.2.19) можно записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - U(C)\right]\Psi(C) = 0, \qquad (1.2.20)$$

где

$$U(C) = 3\varepsilon_0^2\left(\alpha^2 - k^2\right)^2 C^2\left(1 - \frac{4H^2}{\alpha^2}C^2\right). \qquad (1.2.21)$$

Обозначим для дальнейшего

$$\tilde{V} = \frac{4H^2}{\alpha^2}, C_0^2 = \frac{\alpha^2}{4H^2} = \frac{1}{\tilde{V}}. \qquad (1.2.22)$$

Квантовое туннелирование

Мы будем рассматривать квантовое рождение вселенной с вращением из С=0 в рамках туннелирующего подхода Виленкина с туннелирующей волновой функцией Ψ_{TV} [32, 33]. Функция Ψ_{TV} будет найдена как решение (1.2.20) по методу ВКБ и удовлетворяет условию

$$\left|\Psi_{TV}(C, \alpha, k, \varepsilon)\right| \to 1 \text{ при} \tilde{N} \to 0. \qquad (1.2.23)$$

Согласно [33], в осцилляторной области ($\tilde{V}C^2 > 1$) подходящая мода – решение уравнения (1.2.20), найденное по методу ВКБ, имеет вид

$$\Psi_{TV} = \frac{Ae^{i\pi/4}}{\sqrt[4]{-U(C)}} \exp\left\{ -i \int_{C_0}^{C} \sqrt{-U(C)}\, dC \right\}, \qquad (1.2.24)$$

где A некоторая константа.

Используя процедуру ВКБ [33] можно получить решение уравнения (1.2.20) в туннелирующей области($\tilde{V}C^2 < 1$), которое соответствует моде (1.2.24) в осцилляторной области и имеет вид

$$\Psi_{TV} = \frac{A}{2\sqrt[4]{U(C)}} \exp\left(-\int_{C}^{C_0} (U(C))^{1/2} dC \right) + \frac{iA}{\sqrt[4]{U(C)}} \exp\left(\int_{C}^{C_0} (U(C))^{1/2} dC \right). \qquad (1.2.25)$$

У нас

$$\sqrt{-U(C)} = \sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) C \left(\frac{4H^2}{\alpha^2} C^2 - 1 \right)^{1/2}, \qquad (1.2.26)$$

$$\sqrt{U(C)} = \sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) C \left(1 - \frac{4H^2}{\alpha^2} C^2 \right)^{1/2}. \qquad (1.2.27)$$

Тогда решение (1.2.25) можно записать в виде

$$\Psi_{TV} = \frac{A}{2\left(\sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) C \left(1 - \tilde{V}C^2\right)^{1/2}\right)^{1/2}} \exp(-\sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) *$$
$$* \frac{1}{3\tilde{V}} \left(1 - \tilde{V}C^2\right)^{3/2}) + \frac{iA}{\left(\sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) C \left(1 - \tilde{V}C^2\right)^{1/2}\right)^{1/2}} * \qquad (1.2.28)$$
$$* \exp(\sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) \frac{1}{3\tilde{V}} \left(1 - \tilde{V}C^2\right)^{3/2}).$$

Можно считать, что $\tilde{V} << 1$. Тогда в области $\tilde{V}C^2 << 1$ (даже при больших конечных C) уравнение (1.2.20) можно приближенно заменить уравнением

$$\frac{d^2\Psi}{dC^2} - 3\varepsilon_0^2 (\alpha^2 - k^2)^2 C^2 \Psi = 0. \qquad (1.2.29)$$

Введя обозначения $\Psi' = \frac{d\Psi}{dC}$, $\nu = 3\varepsilon_0^2 (\alpha^2 - k^2)^2$,

(у нас ν - не малая величина), уравнение (1.2.29) перепишем в виде

$$\Psi'' - \nu C^2 \Psi = 0. \qquad (1.2.30)$$

Если ввести новые переменные

$$z = \frac{\sqrt{\nu}}{2} C^2, \Psi = z^{1/4} y(z),$$

то (1.2.30) сведется к модифицированному уравнению Бесселя

$$z^2 y''_{zz} + z y'_z - (z^2 + \frac{1}{16}) y = 0. \qquad (1.2.31)$$

В области $\tilde{V} C^2 << 1$ (при больших конечных C; у нас $\tilde{V} << 1$) Ψ_{TV} из (1.2.28) можно представить приближенно в виде

$$\Psi_{TV} \approx \frac{A}{2 \cdot 2^{1/4} \nu^{1/8} z^{1/4}} e^{-\sqrt{\nu}/3\tilde{V}} e^z + i \frac{A}{2^{1/4} \nu^{1/8} z^{1/4}} e^{\sqrt{\nu}/3\tilde{V}} e^{-z}. \qquad (1.2.32)$$

Точное решение уравнения (1.2.30) можно записать через решения уравнения (1.2.31), т.е. через модифицированные функции Бесселя. Решение уравнения (1.2.31) можно записать в виде

$$y(z) = A f_1 e^{-\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}} \left[I_{1/4}(z) + I_{-1/4}(z) \right] + i A f_2 e^{\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}} K_{1/4}(z). \qquad (1.2.33)$$

Тогда в области $\tilde{V} C^2 << 1$ функцию Ψ_{TV} через переменную z можно представить как решение уравнения (1.2.30) в следующем виде

$$\Psi_{TV} = A z^{1/4} \left\{ f_1 e^{-\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}} \left[I_{1/4}(z) + I_{-1/4}(z) \right] + i f_2 e^{\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}} K_{1/4}(z) \right\}. \qquad (1.2.34)$$

Здесь f_1 и f_2 - пока неизвестные постоянные.

Известно асимптотическое поведение модифицированных функций Бесселя при больших конечных z [49, 33]:

$$I_{1/4}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}} e^z, \qquad (1.2.35)$$

$$I_{-1/4}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}} e^z, \qquad (1.2.36)$$

$$K_{1/4}(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2z}} e^{-z}. \qquad (1.2.37)$$

Используя (1.2.35)-(1.2.37), получим из (1.2.34) при больших конечных C (в области $\tilde{V}C^2 << 1$) приближенное выражение для Ψ_{TV}:

$$\Psi_{TV} \approx A\frac{2f_1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^{1/4}}e^{-\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}e^{z} + iA\sqrt{\frac{\pi}{2}}f_2 e^{\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}\frac{1}{z^{1/4}}e^{-z}. \qquad (1.2.38)$$

Сравнивая (1.2.32) и (1.2.38) найдем постоянные f_1 и f_2:

$$f_1 = \frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}},\ f_2 = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}}. \qquad (1.2.39)$$

Подставляя (1.2.39) в (1.2.34), получим

$$\Psi_{TV} = Az^{1/4}\left\{\frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}}e^{-\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\left[I_{1/4}(z)+I_{-1/4}(z)\right]+i\frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}}e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}K_{1/4}(z)\right\}. \qquad (1.2.40)$$

Учитывая, что $\tilde{V}C^2 << 1$ будет и при C→0, то значит решение (1.2.40) справедливо и при z→0. Согласно [286], можно приближенно при z→0 считать:

$$I_{1/4}(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{\tilde{A}(5/4)},\ I_{-1/4}(z) \approx \left(\frac{2}{z}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{\tilde{A}(3/4)},$$
$$\mathrm{K}_{1/4}(z) \approx \frac{1}{2}\tilde{A}(1/4)\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{1/4}. \qquad (1.2.41)$$

На основе (1.2.40) с учетом формул (1.2.41) при z→0 можно считать:

$$\Psi_{TV} \approx A\frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}}e^{-\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\frac{2^{1/4}}{\tilde{A}(3/4)} + i\frac{A2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}}e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\frac{2^{1/4}}{2}\tilde{A}(1/4). \qquad (1.2.42)$$

Далее учитывая, что

$$e^{\frac{-\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}} << e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}, \qquad (1.2.43)$$

из выполнения условия $\left|\Psi_{TV}\right| \to 1$ при $z \to 0$ ($\tilde{N} \to 0$) можно получить

$$A \sim \nu^{1/8}e^{\frac{-\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}. \qquad (1.2.44)$$

Таким образом, туннелирующая волновая функция Ψ_{TV} для рассматриваемой модели вселенной задается формулами (1.2.24)-(1.2.27), (1.2.44).

Коэффициент туннелирования

Используя решение (1.2.24)-(1.2.27), (1.2.44) или опираясь на известную формулу квантовой механики, можно получить коэффициент туннелирования вселенной (ВКБ коэффициент прохождения через потенциальный барьер) в виде

$$D = \exp\left(-2\int_0^{C_0} \sqrt{U(C)}dC \right) = \\ = \exp\left(-2\int_0^{C_0} \sqrt{3}\varepsilon_0 \left(\alpha^2 - k^2\right) C \left(1 - \frac{4H^2}{\alpha^2} C^2\right)^{1/2} dC \right). \qquad (1.2.45)$$

Коэффициент туннелирования дает вероятность рождения вселенной. В итоге имеем

$$D = \exp\left(\frac{-4\pi^2 \left(\alpha^2 - k^2\right)\alpha^2}{H^2} \right). \qquad (1.2.46)$$

Исследуем при разных постановках задачи, в каких случаях в рамках нашей модели вероятность квантового рождения вселенной с вращением больше, чем вселенной без вращения, в каких случаях эта вероятность меньше для вселенной с вращением, и когда вероятности рождения вселенных с вращением и без вращения одинаковы. Согласно (1.2.5), и исключив из σ и π в формулах (1.2.3) t, учтя, что $C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht),$ будем иметь

$$\varepsilon = 3\left(\alpha^2 - k^2\right)\frac{H^2}{\alpha^2} + \frac{\left\{1 - \left(\alpha^2 - k^2\right)\right\}}{C^2}, \\ \sigma = -3\left(\alpha^2 - k^2\right)\frac{H^2}{\alpha^2} - \frac{\left\{1 - \left(\alpha^2 - k^2\right)\right\}}{C^2}, \qquad (1.2.47) \\ \pi = -3\left(\alpha^2 - k^2\right)\frac{H^2}{\alpha^2}.$$

У нас параметрами модели являются α, k и H.

В дальнейшем знаком "~" будем обозначать все параметры, относящиеся к модели вселенной без вращения.

Вначале поставим задачу сравнения следующим образом. Потребуем, чтобы уравнения состояния анизотропной жидкости были одинаковы для вселенных с вращением и без вращения, т.е. пусть

$$\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon},\ \sigma \equiv \tilde{\sigma},\ \pi \equiv \tilde{\pi}. \qquad (1.2.48)$$

Равенства (1.2.48) выполняются тождественно при любом C, одинаковом для обеих моделей. Пусть $\alpha, k(k>0)$ и H - параметры, относящиеся к вращающейся вселенной, а $\tilde{\alpha}, \tilde{k}=0, \tilde{H}$ - параметры невращающейся вселенной. Так как

$$\tilde{\varepsilon} = 3\tilde{H}^2 + \frac{\left\{1-\tilde{\alpha}^2\right\}}{C^2}, \qquad (1.2.49)$$

то выполнение $\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}$ приводит

$$\frac{\left(\alpha^2-k^2\right)H^2}{\alpha^2} = \tilde{H}^2,\ \left(\alpha^2-k^2\right) = \tilde{\alpha}^2. \qquad (1.2.50)$$

Условия (1.2.50) обеспечивают выполнение (1.2.48). Для вращающейся модели коэффициент прохождения D вычисляется по формуле (1.2.46), а для невращающейся вселенной имеем

$$\tilde{D} = \exp\left(-\frac{4\pi^2\tilde{\alpha}^4}{\tilde{H}^2}\right). \qquad (1.2.51)$$

Несложно показать, что при выполнении (1.2.50) будет $D=\tilde{D}$. Таким образом, в случае выполнения (1.2.48) (и соответственно(1.2.50)) вращающаяся и невращающаяся модели имеют одинаковую вероятность квантового рождения, и если для вращающейся модели параметры в метрике: α и k, то для невращающейся модели: $\tilde{\alpha}=\sqrt{\alpha^2-k^2}, \tilde{k}=0$. Сравним сейчас H и $\tilde{H}$, которые характеризуют темпы раздувания на классическом этапе. Для вселенной с вращением $k>0$, поэтому $\alpha > \tilde{\alpha}$ и, согласно (1.2.50), имеем $\tilde{H} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}H$, откуда $\tilde{H} < H$. При требовании (1.2.48) $\tilde{\alpha}$ не может быть равна α, а $\tilde{H}$ не может быть равна H, т.е. при выполнении (1.2.48) нельзя требовать равенства темпов раздувания (констант $\tilde{H}$ и H) для невращающейся и

вращающейся моделей. При этом у нас ширина потенциального барьера для вращающейся вселенной $C_0 = \frac{\alpha}{2H}$, а для невращающейся $\tilde{C}_0 = \frac{\tilde{\alpha}}{2\tilde{H}}$. При выполнении (1.2.48) (и (1.2.50)) $C_0 = \tilde{C}_0$.

Рассмотрим другую постановку задачи сравнения. Исследуем вероятности рождения двух вселенных с одинаковой константой H и соответственно параметрами в метриках: $\alpha, k(k>0)$ - у вращающейся модели и $\tilde{\alpha} = \alpha, \tilde{k} = 0$ - у невращающейся модели. Константа анизотропии α одинакова в этих двух моделях. Из (1.2.47), (1.2.49) видно, что если H одинакова для обеих моделей, то нельзя требовать $\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}$. Согласно неравенствам, наложенным ранее на константы метрики, имеем для вращающейся модели $k^2+1<\alpha^2<k^2+4$ и для невращающейся модели $1<\alpha^2<4$. Для сравнения моделей две группы неравенств должны выполняться совместно

$$\begin{cases} 1<\alpha^2<4, \\ k^2+1<\alpha^2<k^2+4, \ (k>0). \end{cases} \qquad (1.2.52)$$

Совместно эти неравенства выполняются, если $k^2+1<\alpha^2<4$. Значит следует рассматривать только такие α и k, что

$$1<\alpha<2, \ 0<k^2<\alpha^2-1. \qquad (1.2.53)$$

Таким образом, при $1<\alpha<2$ и $0<k<\sqrt{\alpha^2-1}$ увеличение k в (1.2.46) увеличивает вероятность рождения модели вселенной: вероятность рождения вселенной с вращением будет больше, чем вероятность рождения вселенной без вращения.

Пусть сейчас рассматриваются две модели с одинаковыми k и H, но у первой модели $\tilde{\alpha}^2 = k^2+1$, а у второй $\alpha^2 > k^2+1$. Тогда, согласно (1.2.46), для первой модели

$$D_1 = \exp\left(-\frac{4\pi^2(k^2+1)}{H^2}\right), \qquad (1.2.54)$$

а для второй модели

$$D_2 = \exp\left(-\frac{4\pi^2(\alpha^2 - k^2)\alpha^2}{H^2}\right). \qquad (1.2.55)$$

Учитывая, что у нас $\alpha^2 > k^2 + 1$, имеем

$$D_1 > D_2. \qquad (1.2.56)$$

Получаем в этом случае, что вероятность рождения модели с $\tilde{\alpha}^2 = k^2 + 1$ (которую следует считать невращающейся) будет больше, чем у всех вращающихся моделей (для которых $\alpha^2 > k^2 + 1$).

Как уже отмечалось, при $k = 0, \alpha = 1$ наша модель переходит в модель де Ситтера. Пусть у модели де Ситтера и нашей модели с вращением параметры H одинаковые, но у нашей модели с вращением параметры в метрике: $\alpha\,(\alpha^2 > k^2 + 1)$ и $k > 0$, а у модели де Ситтера: $\tilde{k} = 0, \tilde{\alpha} = 1$. Для модели де Ситтера коэффициент туннелирования будет

$$D_0 = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{H^2}\right), \qquad (1.2.57)$$

а для нашей модели с вращением D определяется формулой (1.2.46). Легко видеть, что $D_0 > D$. Значит вероятность рождения модели де Ситтера будет больше, чем вероятность рождения нашей модели с вращением (где $\alpha > (k^2 + 1)^{1/2}$ и $k > 0$).

Наконец рассмотрим следующую постановку задачи сравнения вероятностей. Рассмотрим вращающуюся модель с параметрами α , k и невращающуюся модель с параметрами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{k} = 0$, причем H в обеих моделях одна и та же. При фиксированной $\tilde{\alpha}$ составим функцию

$$\varphi(\alpha^2) = \alpha^2(\alpha^2 - k^2) - \tilde{\alpha}^4, \qquad (1.2.58)$$

где $\tilde{\alpha}$ и α должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} &1 < \tilde{\alpha}^2 < 4, \\ &k^2 + 1 < \alpha^2 < k^2 + 4. \end{aligned} \qquad (1.2.59)$$

Несложный анализ знака $\varphi(\alpha^2)$ с учетом (1.2.59) приводит к следующим результатам. Если $0 < k^2 < \tilde{\alpha}^4 - 1$ и α^2 удовлетворяет неравенству

$$\frac{k^2+\sqrt{k^4+4\tilde{\alpha}^4}}{2}<\alpha^2<k^2+4, \qquad (1.2.60)$$

то $\varphi(\alpha^2)>0$ и в этом случае вероятность рождения модели вселенной без вращения будет больше, чем вероятность рождения модели вселенной с вращением.

Если $0<k^2<\tilde{\alpha}^4-1$ и α^2 удовлетворяет неравенству

$$k^2+1<\alpha^2<\frac{k^2+\sqrt{k^4+4\tilde{\alpha}^4}}{2}, \qquad (1.2.61)$$

то $\varphi(\alpha^2)<0$ и в этом случае вероятность рождения вселенной с вращением будет больше, чем вселенной без вращения.

Если же $k^2\geq\tilde{\alpha}^4-1$, то при $k^2+1<\alpha^2<k^2+4$ будет $\varphi(\alpha^2)>0$, т.е. вероятность рождения вселенной с вращением будет меньше, чем вселенной без вращения.

Наконец, если $0<k^2<\tilde{\alpha}^4-1$, то при $\alpha^2=\frac{k^2+\sqrt{k^4+4\tilde{\alpha}^4}}{2}$ будет $\varphi(\alpha^2)=0$ и в этом случае $D=\tilde{D}$, т.е. вероятности рождения моделей вселенных с вращением и без вращения будут равны.

§ 1.3. Модель Бьянки IX с A=0

Нами построена [50] замкнутая космологическая модель с вращением с метрикой вида

$$ds^2=(dt)^2-(\alpha C\omega^1)^2-C^2\left((\omega^2)^2+(\omega^3)^2\right), \qquad (1.3.1)$$

где $C=C(t)$, $\alpha=const$, $\omega^1,\omega^2,\omega^3$- есть 1- формы, удовлетворяющие структурным отношениям типа IX по Бьянки. Для координат метрики (1.3.1) имеем $0\leq x^1\leq\pi, 0\leq x^2, x^3\leq 2\pi$. Модель заполнена вращающейся несопутствующей анизотропной жидкостью с тензором энергии-импульса (ТЭИ)

$$T_{ik}=(\varepsilon+\pi)u_iu_k+(\sigma-\pi)\chi_i\chi_k-\pi g_{ik,} \qquad (1.3.2)$$

где $u_\nu u^\nu = 1, \chi_\mu \chi^\mu = -1, \chi^\mu u_\mu = 0, \varepsilon > 0, \sigma > \pi.$ Положим $u_\nu = (u_0, u_1, 0, 0)$, $\chi_\nu = (\chi_0, \chi_1, 0, 0)$. У нас используется, что c=1, $\hbar = 1$, 8πG=1, где G - ньютоновская гравитационная постоянная. Из уравнений Эйнштейна получено

$$C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht), \text{ H=const,}$$

H - характеризует темп раздувания,

$$\varepsilon = \frac{12C'^2 - \alpha^2 + 4}{4C^2},$$

$$\sigma = \frac{-12C'^2 + \alpha^2 - 4}{4C^2}, \qquad (1.3.3)$$

$$\pi = \frac{-12C'^2 - 3\alpha^2}{4C^2}.$$

Для нашего решения $\sigma + \varepsilon = 0\,(\sigma = -\varepsilon)$, но $\sigma - \pi = \frac{\alpha^2 - 1}{C^2}$. При $\alpha^2 > 1$ будет $\sigma > \pi$. Так что наша жидкость не является вакуумоподобной. У нас

$$\varepsilon = 3H^2 + \frac{4\{1 - \alpha^2\}}{ch^2 Ht} \frac{H^2}{\alpha^2}.$$

Исключим из последнего выражения t, учитывая, что $C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht)$, тогда будем иметь

$$\varepsilon = 3H^2 + \frac{\{1 - \alpha^2\}}{C^2}. \qquad (1.3.4)$$

У нас классическая модель заполнена вращающейся несопутствующей анизотропной жидкостью. В работе [51] исследуется квантовое рождение рассматриваемой модели вселенной из C=0, найдена волновая функция вселенной, вычислен коэффициент туннелирования вселенной. На этапе квантования анизотропная жидкость предполагается классической.

Получение уравнения Уилера - ДеВитта

Пространство-время с метрикой (1.3.1) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [16]. Для этого метрику (1.3.1) можно представить в виде

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \qquad (1.3.5)$$

а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t=const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a - реперный индекс, α - координатный индекс); $e_a^0 = 0, e_a^b = \delta_a^b$ $(a,b = 1,2,3)$; единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t=const имеет вид

$$n_\alpha = (-N,0,0,0), \alpha = 0,1,2,3.$$

Как известно, Ψ - волновая функция вселенной удовлетворяет уравнению Уилера-ДеВитта

$$T_\perp \Psi = 0 \qquad (1.3.6)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a \Psi = 0. \qquad (1.3.7)$$

Согласно литературе [16] уравнения связей можно записать в виде

$$T_\perp = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot{}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0, \qquad (1.3.8)$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \qquad (1.3.9)$$

Здесь

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K),$$

$$K_{ab} = -n_{a;b},$$

$$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta, T_{a\perp} = \sigma_0 n^\alpha e_a^\beta T_{\beta\alpha},$$

$\sigma_0 = -1$, $T_{\alpha\beta}$ - ТЭИ анизотропной жидкости.

В итоге для метрики (1.3.1) получено

$$T_{\perp} = \frac{C \sin x^1 \alpha [4C^2 (sh^2 f)\varepsilon + 4C^2 (sh^2 f)\sigma + 4C^2 \varepsilon - 12C'^2 + \alpha^2 - 4)}{2} = 0, \quad (1.3.10)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -2C^4 ch(f) sh(f) \sin x^1 \sin x^3 \alpha^2 (\varepsilon + \sigma) = 0, \\ T_2 &= 2C^4 ch(f) sh(f) \sin^2 x^1 \cos x^3 \alpha^2 (\varepsilon + \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

$$T_3 = 0. \quad (1.3.12)$$

Учитывая, что для нашего решения $\sigma = -\varepsilon$, то (1.3.11) удовлетворяются тождественно.

Для нашей модели лагранжиан гравитационного поля:

$$\Lambda_{\text{ГЭ}} = -\frac{12C'^2 + \alpha^2 - 4}{2C^2}, \quad (1.3.13)$$

$$g^{1/2} = C^3 \sin x^1 \alpha$$

$$N = 1.$$

Имеем

$$L_{\text{ГЭ}} = \frac{1}{2} \int d^3 x (N g^{1/2} \Lambda_{\tilde{A}\acute{Y}}) = -2\pi^2 C \alpha \{12C'^2 + \alpha^2 - 4\}. \quad (1.3.14)$$

Определим в духе минисуперпространственного квантования канонический импульс

$$\pi_C = \frac{\partial L_{\text{ГЭ}}}{\partial C'} = -48\pi^2 C C' \alpha. \quad (1.3.15)$$

Тогда

$$T_{\perp} = \frac{C \sin x^1 \alpha}{2} \{4C^2 \varepsilon + \alpha^2 - 4 - \frac{12\pi_C^2}{(48\pi^2)^2 \alpha^2 C^2}\} = 0. \quad (1.3.16)$$

Осуществляем квантование

$$\pi_C = \frac{1}{i} \frac{d}{dC}, \pi_C^2 = -\frac{d^2}{dC^2}. \quad (1.3.17)$$

В итоге уравнение Уилера-ДеВитта имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - 192\pi^4 C^2 \alpha^2 \left[3\alpha^2 - 12H^2 C^2 \right] \right] \Psi(C) = 0. \quad (1.3.18)$$

Уравнение (1.3.18) можно записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - U(C)\right]\Psi(C) = 0, \qquad (1.3.19)$$

где

$$U(C) = 192\pi^4 C^2\alpha^2(3\alpha^2 - 12H^2C^2) \qquad (1.3.20)$$

У нас U(C) обращается в 0 только при C=0 и $C_0 = \frac{\alpha}{2H}$. Опираясь на известную формулу квантовой механики, можно получить коэффициент туннелирования вселенной в виде

$$D = \exp\left(-2\int_0^{C_0}\sqrt{U(C)}dC\right) = \exp\left(-2\int_0^{C_0}\sqrt{192\pi^4\alpha^2}C\left(3\alpha^2 - 12H^2C^2\right)^{1/2}dC\right) \qquad (1.3.21)$$

Коэффициент туннелирования дает вероятность квантового рождения модели вселенной. В итоге имеем

$$D = \exp\left(\frac{-4\pi^2\alpha^4}{H^2}\right). \qquad (1.3.22)$$

Отметим, что вращение модели не входит в коэффициент туннелирования.

§ 1.4. Квантовое рождение вращающейся модели вселенной типа IX по Бьянки

В работе [39] исследовано квантовое рождение модели вселенной типа IX по Бьянки, заполненной вращающейся анизотропной жидкостью. При этом метрика классической модели вселенной, и используемая в [39], отличается от метрики модели вселенной, рассматриваемой в настоящей работе.

В работе [52] была построена замкнутая космологическая модель с вращением с метрикой вида

$$ds^2 = -(dt + A\omega^1)^2 + (C\omega^1)^2 + C^2\left((\omega^2)^2 + (\omega^3)^2\right). \qquad (1.4.1)$$

Если обозначить $z = A^2$, то условие $\sigma - \pi > 0$ сведется к неравенству

$$-C^2z'' + CC'z' + z(2C'^2 - 3/2) > 0. \qquad (1.4.2)$$

В (1.4.2) $z' = \frac{dz}{dt}$.

Если считать, что A=A(C), то (1.4.2) приводит к

$$\ddot{z}\left[-H^2C^4+\frac{C^2}{4}\right]+\dot{z}\left(-\frac{C}{4}\right)+z\left[2H^2C^2-2\right]>0, \qquad (1.4.3)$$

где $\dot{z}=\frac{dz}{dC}$.

Неравенство (1.4.3) должно выполняться в некоторой области при $C\geq\frac{1}{2H}$, в этой же области требуем, чтобы $C > A(C)$.

У нас классическая модель заполнена вращающейся анизотропной жидкостью (имеется и Λ-член). При этом скаляр вращения $\omega=\frac{A}{2C^2}$. В работе [52] исследуется квантовое рождение рассматриваемой модели вселенной из C=0, вычислен коэффициент туннелирования вселенной. На этапе квантования анизотропная жидкость предполагается классической.

Пространство-время с метрикой (1.4.1) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [16]. Как известно, Ψ - волновая функция вселенной удовлетворяет уравнению Уилера-ДеВитта

$$T_{\perp}\Psi=0 \qquad (1.4.4)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a\Psi=0. \qquad (1.4.5)$$

Уравнения связей получены для нашей метрики (1.4.1) в виде

$$T_{\perp}=\frac{\sin x^1}{2\sqrt{C^2-A^2C^2}}\cdot[4C^6(\Lambda+\varepsilon)-12C^4C'^2-4C^4A^2\Lambda+4C^4A^2\sigma-3C^4+ \qquad (1.4.6)$$
$$+8C^3C'A'A+16C^2C'^2A^2+2C^2A^2-8CC'A'A^3-4C'^2A^4+A^4]=0,$$

$$T_1=-2C^3A\sin x^1\sin x^3(\varepsilon+\sigma)=0, \qquad (1.4.7)$$
$$T_2=2C^3A\cos x^3\sin^2 x^1(\varepsilon+\sigma)=0,$$

$$T_3=0. \qquad (1.4.8)$$

Учитывая, что для нашего решения $\sigma=-\varepsilon$, то (1.4.7) удовлетворяются тождественно.

Для нашей модели лагранжиан гравитационного поля

$$\Lambda_{ГЭ} = \frac{-12C^2C'^2 + 3C^2 + 8CC'A'A + 4C'^2A^2 + A^2}{2C^4}, \qquad (1.4.9)$$

Вычисляя

$$L_{ГЭ} = \frac{1}{2}\int d^3x(Ng^{1/2}\Lambda_{ГЭ}), \qquad (1.4.10)$$

где

$$g^{1/2} = C^2 \sin x^1 (C^2 - A^2)^{1/2},$$

$$N = \frac{C}{\sqrt{C^2 - A^2}},$$

получим

$$L_{ГЭ} = \frac{2\pi^2}{C}[-12C^2C'^2 + 3C^2 + 8CC'A'A + 4C'^2A^2 + A^2]. \qquad (1.4.11)$$

Определим в духе минисуперпространственного квантования канонический импульс

$$\pi_C = \frac{\partial L_{ÃÝ}}{\partial C'} = \frac{2\pi^2}{C}[-24C^2C' + 16C\dot{A}AC' + 8A^2C']. \qquad (1.4.12)$$

При этом мы учли, что

$$A' = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dC}\cdot\frac{dC}{dt} = \dot{A}\cdot C' = \dot{A}(C)C'. \qquad (1.4.13)$$

Тогда из (1.4.12) получим

$$C' = \frac{\pi_C C}{2\pi^2[-24C^2 + 16C\dot{A}A + 8A^2]}. \qquad (1.4.14)$$

Исключим из выражений ε и σ t, учитывая, что $C = \frac{1}{2H}ch(Ht)$. Тогда будем иметь

$$\varepsilon = \frac{-(4A^2H^2C^2 - 2A^2 + 8A\dot{A}H^2C^3 - 2A\dot{A}C)}{4C^4},$$
$$\sigma = \frac{4A^2H^2C^2 - 2A^2 + 8A\dot{A}H^2C^3 - 2A\dot{A}C}{4C^4}. \qquad (1.4.15)$$

Подставляя в (1.4.6) выражения (1.4.14) и (1.4.15), получим

$$T_{\perp} = \frac{\sin x^1\sqrt{C^2 - A^2}}{2C^2(-3C^2 + 2AC\dot{A} + A^2)} *$$
$$* \left\{ \frac{\pi_C^2 C^2}{64\pi^4} + (-3C^2 + 2AC\dot{A} + A^2)^2 \cdot (1 - 4C^2H^2) \right\} = 0. \qquad (1.4.16)$$

Осуществляем квантование

$$\pi_C = \frac{1}{i}\frac{d}{dC}, \pi_C^2 = -\frac{d^2}{dC^2}. \qquad (1.4.17)$$

В итоге уравнение Уилера-ДеВитта имеет вид

$$\frac{d^2\Psi(C)}{dC^2} - U(C)\Psi(C) = 0, \qquad (1.4.18)$$

где

$$U(C) = \frac{64\pi^4}{C^2}(-3C^2 + 2AC\dot{A} + A^2)^2(1 - 4C^2H^2). \qquad (1.4.19)$$

Будем далее рассматривать такое $A = A(C)$, что $U(C)$ обращается в 0 только при C=0 и $C_0 = \frac{1}{2H}$.

Опираясь на известную формулу квантовой механики, можно получить коэффициент туннелирования вселенной в виде

$$D = \exp\left(-2\int_0^{C_0} \sqrt{|U(C)|}dC \right). \qquad (1.4.20)$$

Коэффициент туннелирования дает вероятность квантового рождения модели вселенной.

Учитывая, что $z = A^2$, можно получить

$$|U(C)|^{1/2} = \frac{8\pi^2}{C}\left[3C^2 - (zC)\dot{}\right]\sqrt{1 - 4C^2H^2}. \qquad (1.4.21)$$

Тогда (1.4.20) приводит

$$D = e^{-48\pi^2 \int_0^{C_0} C\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC} \cdot e^{16\pi^2 \int_0^{C_0} \frac{(z\dot{C})}{C}\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC} = e^{\frac{-4\pi^2}{H^2}} \cdot e^{16\pi^2 \int_0^{C_0} \frac{(z\dot{C})}{C}\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC}. \qquad (1.4.22)$$

Рассмотрим сейчас конкретную модель вселенной, когда

$$z = A^2 = kC^2e^{-\alpha C}, \qquad (1.4.23)$$

где $\alpha > 0, 0 < k < 1$. (Если $k = 0$, то будет модель без вращения).

Несложно показать, что если $\alpha > 16H$, то неравенство (1.4.3) при z из (1.4.23) будет выполнятся при $C = C_0 = \frac{1}{2H}$. Значит и в некоторой окрестности точки $C_0 = \frac{1}{2H}$ (где $C > \frac{1}{2H}$) будет удовлетворяться неравенство (1.4.3) (при $\alpha > 16H$), а стало быть будет $\sigma > \pi$, что нужно для классического решения; хотя при этом будет обоснована только короткая стадия инфляции. Отметим, что у нас при рассматриваемых α и k будет $C^2 - A^2 > 0$.

Подставим (1.4.23) в (1.4.21), тогда получим

$$|U(C)|^{1/2} = 8\pi^2 C\left[3 - 3ke^{-\alpha C} + k\alpha Ce^{-\alpha C}\right]\sqrt{1-4C^2H^2}. \qquad (1.4.24)$$

Уравнение

$$3 - 3ke^{-\alpha C} + k\alpha Ce^{-\alpha C} = 0 \qquad (1.4.25)$$

не имеет корней в области $C > 0$, при $\alpha > 0, 0 < k < 1$. Поэтому $U(C)$ в (1.4.23) обращается в 0 в случае $C \geq 0$ только при $C = 0$ и $C = C_0 = \frac{1}{2H}$.

Подставим (1.4.23) в (1.4.22), тогда получим

$$D = e^{\frac{-4\pi^2}{H^2}} \cdot e^{16\pi^2 \int_0^{C_0} C(3ke^{-\alpha C} - k\alpha Ce^{-\alpha C})\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC}. \qquad (1.4.26)$$

Будем далее считать для нашей модели, что $H^2 << 1$.

Покажем сейчас, что

$$I = \int_0^{C_0} C(3e^{-\alpha C} - \alpha Ce^{-\alpha C})\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC > 0. \qquad (1.4.27)$$

Имеем

$$I = \int_0^{3/\alpha} C(3e^{-\alpha C} - \alpha C e^{-\alpha C})\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC +$$
$$+ \int_{3/\alpha}^{C_0} C(3e^{-\alpha C} - \alpha C e^{-\alpha C})\sqrt{1-4C^2H^2}\,dC >$$
$$\sqrt{1-\frac{36H^2}{\alpha^2}}\int_0^{C_0} C(3e^{-\alpha C} - \alpha C e^{-\alpha C})dC = \quad (1.4.28)$$
$$= \sqrt{1-\frac{36H^2}{\alpha^2}}\left[e^{-\frac{\alpha}{2H}}\left(\frac{1}{4H^2} - \frac{1}{2H\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\right].$$

Пусть $\alpha = \tilde{k}H$, обозначим

$$\varphi(\tilde{k}) = \frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\tilde{k}} - \frac{1}{\tilde{k}^2}\right). \quad (1.4.29)$$

У нас $\alpha > 16H$, что соответствует $\tilde{k} > 16$. Очевидно, что при $\tilde{k} > 16$ имеем $\varphi(\tilde{k}) > 0$. Таким образом, на основании (1.4.28) будет

$$I > 0. \quad (1.4.30)$$

Тогда с учетом (1.4.26) и (1.4.30) можно заключить, что для нашего конкретного случая (определяемого (1.4.23)) вероятность рождения модели с вращением ($k > 0$) будет больше, чем вероятность рождения модели без вращения ($k = 0$).

§ 1.5. Квантовое рождение вселенной с метрикой типа VIII по Бьянки с вращением

Нами построена нестационарная космологическая модель типа VIII по Бьянки с вращением. Метрика модели имеет вид

$$ds^2 = -(dt + kC\omega^1)^2 + (\alpha C\omega^1)^2 + C^2\left((\omega^2)^2 + (\omega^3)^2\right), \quad (1.5.1)$$

где $C = C(t),\ k, \alpha = const,\ \omega^1, \omega^2, \omega^3$- есть 1-формы, удовлетворяющие структурным отношениям типа VIII по Бьянки. Модель заполнена вращающейся анизотропной жидкостью с тензором энергии-импульса (ТЭИ)

$$T_{ik} = (\varepsilon + \pi)u_i u_k + (\sigma - \pi)\chi_i\chi_k + \pi g_{ik,}, \quad (1.5.2)$$

где $u_\nu u^\nu = -1, \chi_\mu \chi^\mu = 1, \chi^\mu u_\mu = 0, \sigma > \pi.$ Примем, что $c = 1,\ \hbar = 1,\ 8\pi G = 1$, где G - ньютоновская гравитационная постоянная. Из уравнений Эйнштейна получено

$C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht),$ H=const,

H - характеризует темп раздувания,

$$\varepsilon = \frac{-12C'^2(k^2 - \alpha^2) + k^2\alpha^2 - 4\alpha^2 - \alpha^4}{4C^2\alpha^2},$$

$$\sigma = \frac{12C'^2(k^2 - \alpha^2) - k^2\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^4}{4C^2\alpha^2}, \qquad (1.5.3)$$

$$\pi = \frac{12C'^2(k^2 - \alpha^2) + 3k^2\alpha^2 - 3\alpha^4}{4C^2\alpha^2},$$

условия $\sigma > \pi$ и $\varepsilon > 0$ будут обеспечены при

$$\alpha^2 > k^2. \qquad (1.5.4)$$

Расширение модели $\theta = \frac{3C'}{C}$, вращение жидкости $\omega = \frac{k}{2C}$, ускорение $a = \frac{kC'}{\alpha C}$, сдвиг отсутствует.

Для нашего решения $\sigma + \varepsilon = 0\ (\sigma = -\varepsilon)$. У нас

$$\varepsilon = 3(\alpha^2 - k^2)\frac{H^2}{\alpha^2} + \frac{4\{-1 - (\alpha^2 - k^2)\}}{ch^2 Ht}\frac{H^2}{\alpha^2}.$$

Исключим из последнего выражения t, учитывая, что $C = \frac{\alpha}{2H} ch(Ht),$ тогда будем иметь

$$\varepsilon = 3(\alpha^2 - k^2)\frac{H^2}{\alpha^2} + \frac{\{-1 - (\alpha^2 - k^2)\}}{C^2}. \qquad (1.5.5)$$

Классическая модель заполнена вращающейся анизотропной жидкостью. При этом параметром, характеризующим вращение, является k, а скаляр вращения $\omega = \frac{k}{2C}$. В работе исследуется квантовое рождение рассматриваемой модели вселенной из $C = 0$, найдена волновая функция

вселенной, вычислен коэффициент туннелирования вселенной. На этапе квантования анизотропная жидкость предполагается классической.

Получение уравнения Уилера - ДеВитта

Пространство-время с метрикой (1.5.2) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [16]. Для этого метрику (1.5.1) можно представить в виде

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \qquad (1.5.6)$$

а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра $t = const$ определяется триадой касательных векторов e_a^α (a - реперный индекс, α - координатный индекс); $e_a^0 = 0, e_a^b = \delta_a^b$ $(a,b = 1,2,3)$; единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра $t = const$ имеет вид

$$n_\alpha = (-N,0,0,0), \alpha = 0,1,2,3.$$

Как известно, Ψ- волновая функция вселенной удовлетворяет уравнению Уиллера – ДеВитта

$$T_\perp \Psi = 0 \qquad (1.5.7)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a \Psi = 0. \qquad (1.5.8)$$

Согласно литературе [3], уравнения связей можно записать в виде

$$T_\perp = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot{}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0, \qquad (1.5.9)$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \qquad (1.5.10)$$

Здесь

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K),$$

$$K_{ab} = -n_{a;b},$$

$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, T_{a\perp} = \sigma_0 n^\alpha e_a^\beta T_{\beta\alpha},$

$\sigma_0 = -1,\ T_{\alpha\beta}$ - ТЭИ анизотропной жидкости.

В итоге для метрики (1.5.2) получено

$$T_\perp = \frac{C\sqrt{\alpha^2 - k^2}[4C^2\alpha^2\varepsilon - 12C'^2(\alpha^2 - k^2) + \alpha^4 + 4\alpha^2 - \alpha^2 k^2]}{\alpha^2} = 0, \qquad (1.5.11)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 4C^4\alpha k(\varepsilon + \sigma) = 0, \\ T_2 &= 4C^4\alpha k(x_1^2(\varepsilon + \sigma) + \varepsilon + \sigma) = 0, \end{aligned} \qquad (1.5.12)$$

$$T_3 = -4C^4\alpha k(x_1^2 x_2(\varepsilon + \sigma) - x_1(\varepsilon + \sigma) + x_2(\varepsilon + \sigma)) = 0. \qquad (1.5.13)$$

Учитывая, что для нашего решения $\sigma = -\varepsilon,$ то (1.5.12, 1.5.13) удовлетворяются тождественно.

Подставим (1.5.5) в (1.5.11) и получим

$$T_\perp = \frac{3C\left(\alpha^2 - k^2\right)^{3/2}[4H^2C^2 - 4C'^2 - \alpha^2]}{\alpha^2} = 0. \qquad (1.5.14)$$

Будем квантовать уравнение связи (1.5.14) по аналогии с работой [16] с помощью замены t конформным временем η: $dt = Cd\eta$ и заменой производной $\frac{dC}{d\eta}$ оператором $\frac{1}{i}\frac{d}{dC}$, где i – мнимая единица.

В итоге уравнение Уиллера – ДеВитта имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - U(C)\right]\Psi(C) = 0, \qquad (1.5.15)$$

где

$$U(C) = \frac{\alpha^2 C^2}{4}\left(1 - \frac{4H^2}{\alpha^2}C^2\right). \qquad (1.5.16)$$

Обозначим для дальнейшего

$$\tilde{V} = \frac{4H^2}{\alpha^2}, C_0^2 = \frac{\alpha^2}{4H^2} = \frac{1}{\tilde{V}}. \qquad (1.5.17)$$

Отметим, что квантование можно проводить и по-другому. Если осуществить квантование в канонических импульсах π^{ab}, заменив t

конформным временем η: $dt = Cd\eta$ и заменой производной $\frac{dC}{d\eta}$ оператором $\frac{1}{i}\frac{d}{dC}$.

Коэффициент туннелирования

Используя решение (1.5.127)-(1.5.130), или опираясь на известную формулу квантовой механики, можно получить коэффициент туннелирования вселенной (ВКБ коэффициент прохождения через потенциальный барьер) в виде

$$D = \exp\left(-2\int_0^{C_0} \sqrt{U(C)}dC \right) = \exp\left(-\int_0^{C_0} \alpha C\left(1 - \frac{4H^2}{\alpha^2}C^2 \right)^{1/2} dC \right). \qquad (1.5.18)$$

Коэффициент туннелирования дает вероятность рождения вселенной. В итоге имеем

$$D = \exp\left(\frac{-\alpha^3}{12H^2} \right). \qquad (1.5.19)$$

Вращение жидкости $\omega = \frac{k}{2C}$, ускорение $a = \frac{kC'}{\alpha C}$. Если эволюция скорости остается неизменной, а изменяется 4-х ускорение за счет изменения параметра α, то можно сделать вывод, что увеличение 4-х ускорения вселенной увеличивает вероятность квантового рождения вселенной.

§ 1.6. Модель квантового рождения Вселенной

Для метрики типа IX по Бьянки, ранее рассматриваемой в работах [53, 54], получено инфляционное космологическое решение уравнений Эйнштейна.

Источниками гравитации являются: вакуумоподобная жидкость, несопутствующая пыль, а также скалярное поле.

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = (\pi + \rho)u_\alpha u_\beta - \pi\eta_{\alpha\beta}. \qquad (1.6.1)$$

Тензор энергии-импульса несопутствующей пыли имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = \varepsilon \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta . \qquad (1.6.2)$$

Полагаем, что $\tilde{u}_\alpha = (\sqrt{1+u_1^2}, u_1, 0, 0), u_\alpha = (1,0,0,0), \chi_\alpha = (0,1,0,0)$.

Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$T_{AB}^{(3)} = (\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \left\{ \frac{1}{2}\varphi_{,k}\varphi_{,l}g^{kl} - U(\varphi) \right\} g_{\alpha\beta}) e_A^\alpha e_B^\beta \ , \qquad (1.6.3)$$

где e_A^α - лоренцева тетрада.

При этом скалярное поле удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi_{,k} \right) + \frac{dU}{d\varphi} = 0 . \qquad (1.6.4)$$

Потенциал скалярного поля, следуя работе [55], выбран в виде:

$$U(\varphi) = A(\varphi_0 - \varphi(t))^2 . \qquad (1.6.5)$$

Запишем уравнения Эйнштейна в тетрадной форме:

$$\begin{aligned} &G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \\ &G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \\ &T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(1)} + T_{\alpha\beta}^{(2)} + T_{\alpha\beta}^{(3)}. \end{aligned} \qquad (1.6.6)$$

Также заранее предполагаем, что идеальная жидкость «вакуумоподоб-ная», то есть $\pi = -\rho$.

В результате получим систему уравнений:

$$G_{00} \equiv -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \frac{\nu_1^2}{K_1^2} + 3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2K_1^2 + K_2^2}{4R^2 K_2^4} =$$

$$\rho + \varepsilon(u_1^2 + 1) + \frac{\varphi'^2}{2}(1 + \frac{\nu_1^2}{K_1^2}) + U(\varphi) \ , \qquad (1.6.7)$$

$$G_{11} \equiv -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) + 3\frac{R'^2}{R^2}\frac{\nu_1^2}{K_1^2} + \frac{-K_2^2 + 2\nu_1^2}{4R^2 K_2^4} =$$

$$= \pi + \varepsilon u_1^2 + \frac{\varphi'^2}{2}(1 + \frac{\nu_1^2}{K_1^2}) - U(\varphi), \qquad (1.6.8)$$

$$G_{22} \equiv G_{33} \equiv \left(2\frac{R''}{R}+\frac{R'^2}{R^2}\right)\left(-1+\frac{\nu_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right)+\frac{-K_1^{\,2}+\nu_1^{\,2}}{4R^2K_2^{\,4}}=$$

$$=\pi+\frac{\varphi'^2}{2}\frac{K_2^2}{K_1^2}-U(\varphi), \qquad (1.6.9)$$

$$G_{01} \equiv 2\left(-\frac{R''}{R}+\frac{R'^2}{R^2}\right)\frac{\nu_1}{K_1}+\frac{K_1\nu_1}{2R^2\left(K_2K_3\right)^2}=\varepsilon u_1\sqrt{1+u_1^{\,2}}+\varphi'^2\frac{\nu_1}{K_1}. \qquad (1.6.10)$$

Уравнение для скалярного поля (1.6.4) имеет вид:

$$3\frac{R'}{R}\varphi'+\varphi''+\frac{K_1^2}{K_2^2}\frac{dU(\varphi)}{d\varphi}=0. \qquad (1.6.11)$$

Решая совместно систему уравнений Эйнштейна с уравнением скалярного поля, полагаем, что $\varphi(t)=\varphi_0-\alpha e^{-Ht}$, и получим

$$u_1=\frac{\nu_1}{K_2},$$
$$R=R_0e^{Qt},$$
$$\varepsilon=\frac{1}{2R_0^2e^{2Qt}K_2^2}-\frac{\alpha^2H^2K_2^2}{e^{2Ht}K_1^2}, \qquad (1.6.12)$$
$$\rho=-\pi=3Q^2\frac{K_2^{\,2}}{K_1^{\,2}}+\frac{1}{4R_0^2e^{2Qt}K_2^4}+\frac{\alpha^2H^2K_2^2}{2e^{2Ht}K_1^2}-\frac{A\alpha^2}{e^{2Ht}}.$$

Получение уравнения Уилера-Де Витта

Пространство-время с данной метрикой можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре. Для этого метрику можно представить в виде

$$ds^2=-N^2dt^2+g_{ab}(dx^a+N^adt)(dx^b+N^bdt), \qquad (1.6.13)$$

а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t=const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a - реперный индекс, α - координатный индекс); $e_a^0=0$, $e_a^b=\delta_a^b$ $(a,b=1,2,3)$; единичный времени-подобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t=const имеет вид

$$n_\alpha = (-N,0,0,0),\ \alpha = 0,1,2,3. \qquad (1.6.14)$$

Как известно, Ψ- волновая функция Вселенной - удовлетворяет уравнению Уилера-Де Витта

$$T_\perp \Psi = 0 \qquad (1.6.15)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a \Psi = 0. \qquad (1.6.16)$$

Согласно литературе [16], уравнения связей можно записать в виде

$$T_\perp = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot {}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0,$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \qquad (1.6.17)$$

Здесь

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K),$$

$$K_{ab} = -n_{a;b}, \qquad (1.6.18)$$

$$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta,\ T_{a\perp} = \sigma_0 n^\alpha e_a^\beta T_{\beta\alpha}.$$

$\sigma_0 = -1,\ T_{\alpha\beta}$ - ТЭИ источников гравитации данной модели.

В результате вычислений получим для нашей метрики:

$$T_\perp = -\frac{\cos yRK_2}{2K_1^2}(12R'^2K_2^4 - R^2(3\varphi'^2K_2^4 + 4VK_2^2K_1^2 + 4\varepsilon K_2^4u_0^2 + 4\rho K_1^4 +$$
$$+4\pi K_1^2v_1^2) + 3K_1^2),$$
$$T_1 = -2\cos^2 y\cos zR^4K_2^2v_1K_1(\rho+\pi) \equiv 0, \qquad (1.6.19)$$
$$T_2 = 2\cos y\cos zR^4K_2^2v_1K_1(\rho+\pi) \equiv 0,$$
$$T_3 = 0.$$

Канонический импульс:

$$\pi_R = -\frac{48\pi^2RR'K_2^4}{K_1}. \qquad (1.6.20)$$

Определим в духе минисуперпространственного квантования:

$$\pi_R = \frac{1}{i}\frac{d}{dR};\ \pi_R^2 = -\frac{d^2}{dR^2}. \qquad (1.6.21)$$

Выразим R' из условия (1.6.20) и подставим в (1.6.19).

Составляем уравнение Уилера-Де Витта. В нашем случае оно будет иметь вид

$$\left[\frac{d^2}{d\ R^2}-U(R)\right]\Psi(R)=0. \tag{1.6.22}$$

Подставив ранее найденные значения параметров жидкостей, получим:

$$U(R)=-\frac{384\pi^4R^4K_2^8}{K_1^2}\left(6Q^2-\alpha^2H^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2H/Q}\right). \tag{1.6.23}$$

При этом, потребуем: $\frac{H}{Q}<2.$

Очевидно, что потенциал равен нулю в двух точках

$$\left(\tilde{R}_0\right)_{(1)}=0,$$

$$\left(\tilde{R}_0\right)_{(2)}=R_0\left(\frac{\alpha H}{\sqrt{6}Q}\right)^{Q/H}. \tag{1.6.24}$$

Коэффициент туннеллирования вселенной (ВКБ коэффициент прохождения через потенциальный барьер) вычисляем в следующем виде:

$$D=\exp\left(-2\int_0^{\tilde{R}_0}\sqrt{U(R)}dR\right)=\exp\left(-\frac{8\sqrt{6}\pi^2K_2^4H\alpha^3R_0^3}{9K_1}\right). \tag{1.6.25}$$

§ 1.7. Квантовое рождение Вселенной с метрикой VIII типа Бьянки

В настоящем параграфе рассматривается квантовое рождение Вселенной с метрикой (2.3.1) – (2.3.2) при условии $\nu_A=\{0,0,1\}$, $K_A=\{a,a,b\}$, $A=(\overline{1,2,3})$. Источниками гравитации являются анизотропная жидкость и две изотропных жидкости(с пылевым и ультрарелятивистским уравнениями состояний), в итоге правая часть уравнений Эйнштейна(в тетрадной форме) имеет вид

$$\begin{aligned}T_{ik}&=(p+\rho)u_iu_k+(\sigma-p)\chi_i\chi_k-p\eta_{ik}+\\&+\mu\nu_i\nu_k+(\varepsilon+\pi)V_iV_k-\pi\eta_{ik},\end{aligned} \tag{1.7.1}$$

где ρ, p, σ – соответственно плотность энергии и давления анизотропной жидкости, χ_i – вектор её анизотропии, μ – плотность энергии пылевидной жидкости, ε и π – плотность энергии и давление ультрарелятивистской жидкости.

С учётом нулевого значения ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса зависимость масштабного фактора от времени даётся формулой

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{-b^2}{4a^4} + \frac{\mu_0(a+b)}{3bR} + \frac{\varepsilon_0(a+b)}{3bR^2} + DR^2}}, \qquad (1.7.2)$$

где ε_0, μ_0, D – константы.

Пространство-время с данной метрикой можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре. Для этого метрику можно представить в виде

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \qquad (1.7.3)$$

где N – функция хода, N^a – вектор сдвига [56], а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t=const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a - реперный, α - координатный индекс); $e_a^0 = 0,\ e_a^b = \delta_a^b \quad (a,b = 1,2,3)$. Единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t=const имеет вид

$$n_\alpha = (-N,0,0,0),\ \alpha = 0,1,2,3. \qquad (1.7.4)$$

Как известно, Ψ - волновая функция Вселенной - удовлетворяет уравнению Уилера-Де Витта

$$T_\perp \Psi = 0 \qquad (1.7.5)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a \Psi = 0. \qquad (1.7.6)$$

В соответствии с [16] уравнения связей можно записать в виде

$$T_{\perp} = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot {}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0, \qquad (1.7.7)$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \qquad (1.7.8)$$

Здесь обозначены: скаляр единичной нормали σ_0, суперметрика де-Витта

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd}\right), \qquad (1.7.9)$$

канонически сопряжённые компонентам g_{ab} импульсы

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K), \qquad (1.7.10)$$

внешняя кривизна

$$K_{ab} = -n_{a;b}, \qquad (1.7.11)$$

проекции тензора энергии-импульса на векторы нормального базиса

$$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta},\ T_{a\perp} = \sigma_0 n^{\alpha}e_a^{\beta}T_{\beta\alpha}. \qquad (1.7.12)$$

Введём конформное время $dt=Rd\eta$, заменим $dR/d\eta$ оператором $-i\nabla = -i\frac{d}{dR}$, тогда из (1.7.7) - (1.7.8) с учётом (1.7.3) следует

$$T_{\perp} = \frac{\sqrt{a^4(b^2-1)R^6Ch^2y}}{6a^2b^3R^4}\left(4a^2\varepsilon_0(3a(b^2-1)+b(5b^2-3)) - 9b^3(b^2-1)R^2 + \right.$$

$$\left. + 12\mu_0 a^2(b^2-1)(a+b)R + 36a^2b(b^2-1)DR^4 + 36a^2b(b^2-1)\nabla^2\right), \qquad (1.7.13)$$

$$T_1 = -2\sqrt{\frac{b^2}{b^2-1}}(\rho+\sigma)R\sqrt{a^4(b^2-1)R^6Ch^2(y)}Sh(y),$$

$$T_2 = 0 \qquad (1.7.14)$$

$$T_3 = -2\sqrt{\frac{b^2}{b^2-1}}(\rho+\sigma)R\sqrt{a^4(b^2-1)R^6Ch^2(y)}.$$

Чтобы выполнялось (1.7.6), из (1.7.14) следует

$$\rho + \sigma = 0, \qquad (1.7.15)$$

а (1.7.5) приводит к уравнению Уиллера-де Витта:

$$\frac{d^2\Psi}{dR^2} - U(R)\Psi = 0, \qquad (1.7.16)$$

где

$$U(R)=\frac{R(-12a^2bDR^3+3b^3R-4a^2(a+b)\mu_0)}{12a^2b}-\frac{4a^2(b(5b^2-3)+3a(b^2-1))\varepsilon_0}{9b(b^2-1)}. \quad (1.7.17)$$

Коэффициент туннелирования

$$\zeta=\exp\left(-2\int_{R_1}^{R_2}\sqrt{U(R)}dR\right), \quad (1.7.18)$$

где R_1 и R_2 – нули $U(R)$, в данном случае не всегда можно вычислить точно, поскольку интеграл в общем виде не выражается в элементарных функциях, однако несложно увидеть, что при физически осмысленных ограничениях на константы и коэффициенты метрики наличие ультрарелятивистской и пылевидной материй, как правило, увеличивает(по сравнению со случаем, рассмотренным в [57]) коэффициент туннелирования, а с ним и вероятность рождения Вселенной [58].

Отметим основное значение работ [39, 40, 41, 51] для развития квантовой космологии. Квантовое рождение Вселенной в основном рассматривается для изотропных моделей. Для неизотропных моделей имеются в этой области лишь отдельные результаты. В работах [39, 40, 41, 51] исследуется квантовое рождение новых неизотропных моделей вселенных с вращением в точной, а не численной постановке. Для точной космологической модели с вращением скорость вращения ранней Вселенной может быть значительна, что сказывается на вероятности квантового рождения такой модели. В работах [39, 40, 41, 51] и §§ 2,3,4 главы 1 данной диссертации впервые для точных моделей установлено, что в определенных случаях наличие космологического вращения может увеличить вероятность квантового рождения моделей вселенных. С этой стороны, приближенные численные оценки роли вращения для вероятности квантового рождения моделей вселенных с вращением имеют меньшую ценность, чем подход, опирающийся на точные космологические модели с вращением, пусть даже частные.

ГЛАВА 2.
КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С МЕТРИКАМИ II, V, VIII ТИПОВ ПО БЬЯНКИ

В настоящее время не исключена малая анизотропия Вселенной, в том числе вызванная космологическим вращением, поэтому модели в однородных, но не изотропных метриках представляют интерес, связанный с прошлым Вселенной и поведением материи вблизи сингулярного состояния. Выбор материальных источников гравитационного поля из-за не решённой пока проблемы тёмной материи и тёмной энергии достаточно широк [59,60,61-63], однако при моделировании анизотропии в космологии используются, как правило, метрики однородного, но не изотропного пространства. Метрики различных типов по Бьянки применяются как в рамках общей теории относительности [57, 64-68, 69-72, 73], так и в геометрических теориях гравитации более общего вида [169-173].

§ 2.1. Модели с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением: метрика II типа Бьянки

Метрика II типа широко используется в космологии, достаточно упомянуть работы [50, 74-78, 71, 77-79]. Отметим работу [78], автор которой предлагает два эксперимента, позволяющие обнаружить вращение однородной Вселенной с корректной в причинном смысле геометрией. Используя симметрии задачи, он находит первые интегралы геодезических, соответствующих изотропным векторам – траектории световых лучей в приближении геометрической оптики. В метрике II типа по Бьянки, рассматриваемой в [78], данные траектории – нуль геодезические являются винтовыми линиями постоянного радиуса и переменного шага, проходящими через любого наблюдателя, и в некоторых направлениях вырождающимися в окружности. Короткий отмечает, что наличие замкнутых световых лучей, проходящих через наблюдателя, могло бы быть доказательством глобального

вращения. Дело в том, что, если предположить, что замкнутый луч света, испущенный «домашней» галактикой наблюдателя, не пересёкся нигде с другими галактиками и вернулся назад через некоторое время T, то в противоположных частях небесной сферы будут видны два изображения исходной галактики на T лет моложе. Это – первый предлагаемый эксперимент. Второй эксперимент заключается в наблюдении удалённой галактики, свет от которой беспрепятственно доходит до наблюдателя по замкнутой нуль-геодезической с обеих сторон. В этом случае наблюдатель обнаружит в противоположных частях небесной сферы изображения удалённой галактики, возраст которых может оказаться как равным, так и существенно различающимся. Реализация такого опыта подразумевает исследование каталога изображений галактик на предмет противоположности направлений их наблюдения и тождественности форм и размеров [78].

В данном параграфе используется та же параметризация метрики, что и в [78]:

$$ds^2 = R^2(t)\left(\left(dt - \sqrt{b}(dx - zdy)\right)^2 - (a+b)(dx - zdy)^2 - dz^2 - dy^2\right), \qquad (2.1.1)$$

где $a > 0, b > 0$ – константы.

Источниками гравитации являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся темную энергию, чистое излучение а также скалярное поле. Расчёты, связанные с уравнениями Эйнштейна, проведены с использованием тетрадного формализма. Будем искать для метрики (2.1.3) космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \qquad (2.1.2)$$

Здесь используется такая система единиц, что скорость света и гравитационная постоянная, умноженная на 8π, равны единице. При этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = \left(p + \rho \right) u_\alpha u_\beta + (\pi - p)\chi_\alpha \chi_{_\beta} - p\eta_{\alpha\beta}, \qquad (2.1.3)$$

Тензор энергии-импульса излучения

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = wk_\alpha k_\beta. \qquad (2.1.4)$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля в тетрадном представлении даётся выражением

$$T_{\alpha\beta}^{(3)} = \varphi_{,i}\,\varphi_{,k}\, e_\alpha{}^i e_\beta{}^k - ((1/2)\varphi_{,i}\,\varphi_{,k}\, e_\gamma{}^i e^{\gamma k} - U)\eta_{\alpha\beta,} \qquad (2.1.5)$$

причём тетрадные компоненты 4-скорости жидкости $u_\alpha = \{1,0,0,0\}$,

волнового вектора излучения $k_\alpha = \{k_0, k_1, 0, 0\}$, $k_0 = k_1$.

В системе уравнений Эйнштейна результирующий тензор энергии-импульса даётся формулой

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(1)} + T_{\alpha\beta}^{(2)} + T_{\alpha\beta}^{(3)}. \qquad (2.1.6)$$

Скалярное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}\, g^{ik}\varphi_{,k}) + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \qquad (2.1.7)$$

Рассмотрены 3 вида потенциальной функции массивного скалярного поля:

$$U = \frac{m^2\varphi^2}{2}, \qquad (2.1.8)$$

$$U = \frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}, \qquad (2.1.9)$$

$$U = -\frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}. \qquad (2.1.10)$$

Уравнение (2.1.7) в метрике (2.1.1) принимает вид

$$\frac{a(3\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi})}{(a+b)R} + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \qquad (2.1.11)$$

В итоге уравнения Эйнштейна записываются следующим образом:

$$-\frac{(a-2b)(a+b)-4(3a+2b)\dot{R}^2+8bR\ddot{R}}{4(a+b)R^2}=\rho+wk_0{}^2+U+\frac{(a+2b)\dot{\varphi}^2}{2(a+b)}, \qquad (2.1.12)$$

$$-\frac{a(a+b+4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4(a+b)R^2}=p-U+\frac{a\dot{\varphi}^2}{2(a+b)}, \qquad (2.1.13)$$

$$\frac{-4(a-2b)\dot{R}^2+(a+b)(3a+2b-8R\ddot{R})}{4(a+b)R^2}=\pi+wk_0{}^2-U+\frac{(a+2b)\dot{\varphi}^2}{2(a+b)}, \qquad (2.1.14)$$

$$\frac{\sqrt{b}(a+b+4(\dot{R}^2-R\ddot{R}))}{2\sqrt{a+b}R^2}=wk_0{}^2+\frac{\sqrt{b}\dot{\varphi}^2}{\sqrt{a+b}}. \qquad (2.1.15)$$

Из этой системы получаются выражения для параметров материи:

$$\rho=\frac{-(a+b)(a-2b+2\sqrt{b}\sqrt{a+b})+4(3a+2b-2\sqrt{b}\sqrt{a+b})\dot{R}^2-4R^2(a+b)U(\varphi)}{4(a+b)R^2}+$$

$$+\frac{2R^2(2\sqrt{b}\sqrt{a+b}-a-2b)\dot{\varphi}^2+8\sqrt{b}(-\sqrt{b}+\sqrt{a+b})R\ddot{R}}{4(a+b)R^2}, \qquad (2.1.16)$$

$$\pi=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}4U(\varphi)+\dfrac{3a+2b-2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{R^2}+\left(\dfrac{12b}{a+b}-\dfrac{8\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-4\right)\dfrac{\dot{R}^2}{R^2}+\\ +2\left(\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{a}{a+b}-2\right)\dot{\varphi}^2-\dfrac{8(1-\sqrt{b}/\sqrt{a+b})\ddot{R}}{R},\end{array}\right) \qquad (2.1.17)$$

$$p=\frac{-a(a+b+4\dot{R}^2)+R^2\left(4(a+b)U(\varphi)-2a\dot{\varphi}^2\right)-8aR\ddot{R}}{4(a+b)R^2}, \qquad (2.1.18)$$

$$k_0{}^2=\frac{\sqrt{b}\left(a+b+4\dot{R}^2-2R^2\dot{\varphi}^2-4R\ddot{R}\right)}{2\omega\sqrt{a+b}R^2}. \qquad (2.1.19)$$

Во всех трёх случаях рассмотрим следующую зависимость полевой функции от времени:

$$\varphi=\varphi_0 e^{-Qt}. \qquad (2.1.20)$$

Решение с потенциалом вида (2.1.8)

Подставив (2.1.8), (2.1.11) и (2.1.20) в систему уравнений (2.1.16)-(2.1.19) и решив её, определим эволюцию масштабного фактора и параметров материи. Из (2.1.8), (2.1.11) следует

$$R = R_0 e^{Ht}, \tag{2.1.21}$$

где $H = \frac{Q}{3} + \frac{m^2(a+b)}{3aQ}$.

В координатном представлении волновой вектор принимает следующий вид:

$$k = \left\{k_0, -\sqrt{b}k_0 R + \sqrt{a+b}k_0 R, k_0 zR - \sqrt{a+b}k_0 R, 0\right\} \tag{2.1.22}$$

Тогда система уравнений (2.1.16) – (2.1.19) может быть решена без использования уравнений состояния, если все константы считать известными.

Плотность энергии анизотропной жидкости:

$$\rho = \frac{3aH^2}{a+b} - \frac{(a-2b)e^{-2Ht}}{4R_0{}^2} - \frac{2\sqrt{b}\sqrt{a+b}e^{-2Ht}}{4R_0{}^2} -$$

$$-\varphi_0{}^2 e^{-2Qt}\left(\frac{m^2 e^{-2Qt}}{2} + Q^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{b}}}{\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{b}}} + \frac{a}{2(a+b)} - 1\right)\right), \tag{2.1.23}$$

давления:

$$\pi = \frac{(3a+2b)e^{-2Ht}}{4R_0{}^2} - \frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}e^{-2Ht}}{2R_0{}^2} + \varphi_0{}^2 e^{-2Qt}\left(\frac{m^2 e^{-2Qt}}{2} + Q^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{b}}}{\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{b}}} + \frac{-a-2b}{2(a+b)}\right)\right) -$$

$$-\frac{3aH^2}{a+b}, \tag{2.1.24}$$

$$p = \frac{e^{-2Ht}\left(-a(a+b) - 2e^{2Ht}R_0{}^2(6aH^2 + a\varphi_0{}^2 e^{-2Qt} - (a+b)m^2\varphi_0{}^2 Q^2 e^{-2Qt})\right)}{4(a+b)R_0{}^2}, \tag{2.1.25}$$

волновой вектор:

$$k_0{}^2 = \frac{\sqrt{b}\left(a+b-2e^{2(H-Q)t}R_0{}^2Q^2\right)}{2\omega\sqrt{a+b}R_0{}^2e^{2Ht}}. \qquad (2.1.26)$$

При $t\to\infty\ \rho\to\frac{3aH^2}{a+b}$, $p\to-\frac{3aH^2}{a+b}$, $\pi\to-\frac{3aH^2}{a+b}$, т.е. анизотропная жидкость асимтотически изотропизируется и её уравнение состояния становится вакуумоподобным.

Решение с потенциалом вида (2.1.9)

Если потенциал поля даётся формулой(2.1.9), то из (2.1.11) и (2.1.20) следует

$$R = R_0e^{f(t)}, \qquad (2.1.27)$$

где $f(t)=\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)t-\frac{\lambda\varphi_0{}^2(a+b)e^{-2Qt}}{6Q}$.

Плотность энергии анизотропной жидкости и её давление:

$$\rho=\frac{1}{4}\left(\frac{12a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda\varphi_0{}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{2b-a-2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{R_0{}^2e^{2f(t)}}+\right.$$
$$+\frac{4\sqrt{b}Q^2\varphi_0{}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}-\frac{2\varphi_0{}^2\left((a+b)m^2+(a+2b)Q^2\right)}{(a+b)e^{2Qt}}+ \qquad (2.1.28)$$
$$\left.+\frac{2Q\lambda\varphi_0{}^2(a+b)}{3e^{2Qt}}\left(\frac{8b}{a+b}-\frac{8\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)-\frac{\lambda\varphi_0{}^4}{e^{4Qt}}\right)$$

$$\pi=\frac{1}{4}\left(-\left(\frac{12a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda\varphi_0{}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{3a+2b-2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{R_0{}^2e^{2f(t)}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4\sqrt{b}Q^2\varphi_0{}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}+\frac{2\varphi_0{}^2\left((a+b)m^2-(a+2b)Q^2\right)}{(a+b)e^{2Qt}}-\frac{16Q\lambda\varphi_0{}^2(a+b)}{3e^{2Qt}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-1\right)\right)\right.$$

(2.1.29)

$$p=\frac{-3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda{\varphi_0}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{4aQ\lambda{\varphi_0}^2}{e^{2Qt}}+\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{e^{4Qt}}+$$

$$+\frac{\left((a+b)m^2-aQ^2\right)}{2(a+b)e^{2Qt}}-\frac{ae^{-2f(t)}}{{R_0}^2},$$

волновой вектор:

$${k_0}^2=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{2{R_0}^2e^{2f(t)}}-\frac{\sqrt{b}Q^2{\varphi_0}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}+\frac{4Q\lambda{\varphi_0}^2\sqrt{a+b}\sqrt{b}}{3e^{2Qt}}\right), \qquad (2.1.30)$$

При этом $\rho\to\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2$, $\pi\to-\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2$,

$p\to-\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}+\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2$, $k_0\to 0$, при $t\to\infty$.

Решение с потенциалом вида (2.1.9)

Если потенциал поля даётся формулой(2.1.9), то из (2.1.11) и (2.1.20) следует

$$R=R_0e^{f(t)},$$

(2.1.31)

где $f(t)=\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)t-\frac{\lambda{\varphi_0}^2(a+b)e^{-2Qt}}{6Q}$.

Плотность энергии анизотропной жидкости и её давление:

$$\rho=\frac{1}{4}\left(\frac{12a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda{\varphi_0}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{2b-a-2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{{R_0}^2e^{2f(t)}}+\right.$$

$$+\frac{4\sqrt{b}Q^2{\varphi_0}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}+\frac{2{\varphi_0}^2\left((a+b)m^2-(a+2b)Q^2\right)}{(a+b)e^{2Qt}}+ \qquad (2.1.32)$$

$$\left.+\frac{2Q\lambda{\varphi_0}^2(a+b)}{3e^{2Qt}}\left(\frac{8b}{a+b}-\frac{8\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)-\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{e^{4Qt}}\right)$$

$$\pi=\frac{1}{4}\left(-\left(\frac{12a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda{\varphi_0}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{3a+2b-2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{{R_0}^2e^{2f(t)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4\sqrt{b}Q^2{\varphi_0}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}-\frac{2{\varphi_0}^2\left((a+b)m^2+(a+2b)Q^2\right)}{(a+b)e^{2Qt}}-\frac{16Q\lambda{\varphi_0}^2(a+b)}{3e^{2Qt}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-1\right)\right)\right),$$

(2.1.33)

$$p=\frac{-3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}+\frac{\lambda{\varphi_0}^2(a+b)e^{-2Qt}}{3}\right)^2+\frac{4aQ\lambda{\varphi_0}^2}{e^{2Qt}}+\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{e^{4Qt}}-$$

$$-\frac{\left((a+b)m^2+aQ^2\right)}{2(a+b)e^{2Qt}}-\frac{ae^{-2f(t)}}{{R_0}^2},\qquad(2.1.34)$$

волновой вектор:

$${k_0}^2=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{2{R_0}^2e^{2f(t)}}-\frac{\sqrt{b}Q^2{\varphi_0}^2}{\sqrt{a+b}e^{2Qt}}+\frac{4Q\lambda{\varphi_0}^2\sqrt{a+b}\sqrt{b}}{3e^{2Qt}}\right).\qquad(2.1.35)$$

Параметры материи ведут себя следующим образом:

$$\rho\to\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2,\ \pi\to-\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2,$$

$p\to-\frac{3a}{a+b}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2(a+b)}{3aQ}\right)^2$, ${k_0}\to 0,$ при $t\to\infty.$ Кинематические параметры модели: параметр расширения $\theta=\frac{3\dot{R}}{R}$, ускорение $A=\frac{\sqrt{b}\dot{R}}{\sqrt{a+b}R}$, угловая скорость вращения $\omega=\frac{\sqrt{b}}{2R}$, сдвиг отсутствует. Таким образом, видно, что во всех трёх рассматриваемых случаях вращение анизотропной жидкости со временем затухает, а сама жидкость асимптотически изотропизируется. Следует отметить, что в [50] доказана причинность метрики (2.1.1). Настоящая же работа может рассматриваться как обобщение работы [77] на

случай анизотропной жидкости в качестве материального источника, а полученные решения позволяют моделировать первую стадию инфляции.

§ 2.2. Модели с анизотропной жидкостью и излучением: метрика V типа по Бьянки

Данная метрика с успехом применялась разными авторами в ряде работ: в связи с вопросом о связи реликтового излучения с параметрами изотропных космологических моделей [80], при построении модели с динамикой, аналогичной фридмановской [81], при рассмотрении спинорных полей в космологии на предмет исследования соответствующих космологических режимов[82] и по другим поводам [83-85]. Здесь мы построим космологические модели с вращением и без такового.

Модель без вращения

Метрика V типа по Бьянки имеет вид

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}\eta_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \qquad (2.2.1)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ - элементы диагональной лоренцевой матрицы, θ_α - ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом: $\theta^0 = dt - R\, v_A\, e^A$, $\theta^A = R\, \mathrm{K}_A\, e^A$, при этом константы $K_A=\{a,b,c\}$, $v_A=\{d,0,0\}$, $A = 1,2,3$.

1 – формы e^A имеют следующий вид [86]:

$$\begin{aligned} e^1 &= dx, \\ e^2 &= e^x\, dy, \\ e^3 &= e^x\, dz. \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik} = \left(p + \rho\right)u_i u_k + (\sigma - p)\chi_i\chi_k - p\eta_{ik}, \qquad (2.2.3)$$

где p, σ - давления анизотропной жидкости, ρ- плотность энергии идеальной жидкости, $\chi_i = \{0,1,0,0\}$ - вектор анизотропии, $u^i = \delta_0^i$ - вектор 4 – скорости

анизотропной жидкости в проекции на тетраду. Координатные компоненты 4-скорости жидкости равны $U^i = \delta_0^i$, т.е. жидкость является сопутствующей.

В метрике (2.2.1) найдено решение уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = T_{ik} \tag{2.2.4}$$

(используется такая система единиц, что скорость света и умноженная на 8π гравитационная постоянная равны единице), при этом (2.2.4) решается в тетрадном формализме.

Из (2.2.4) для метрики (2.2.1) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{-3 - 4d\dot{R} + (3a^2 - d^2)\dot{R}^2 - 2d^2 R\ddot{R}}{a^2 R^2} = \rho, \\ \dfrac{1 + 4d\dot{R} - (a^2 - 3d^2)\dot{R}^2 - 2a^2 R\ddot{R}}{a^2 R^2} = \sigma, \\ \dfrac{1 + 2d\dot{R} + (d^2 - a^2)\dot{R}^2 + 2(d^2 - a^2)R\ddot{R}}{a^2 R^2} = p, \\ \dfrac{2d(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{aR^2} = 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Система (2.2.5) имеет нестатическое решение:

$$R = R_0 e^{Ht}, \tag{2.2.6}$$

$$\rho = \frac{3(a^2 - d^2)H^2}{a^2} - \frac{4Hd}{a^2 R_0 e^{Ht}} - \frac{3}{a^2 R_0{}^2 e^{2Ht}}, \tag{2.2.7}$$

$$\sigma = -\frac{3(a^2 - d^2)H^2}{a^2} + \frac{4Hd}{a^2 R_0 e^{Ht}} + \frac{1}{a^2 R_0{}^2 e^{2Ht}}, \tag{2.2.8}$$

$$p = -\frac{3(a^2 - d^2)H^2}{a^2} + \frac{2Hd}{a^2 R_0 e^{Ht}} + \frac{1}{a^2 R_0{}^2 e^{2Ht}}. \tag{2.2.9}$$

При выполнении условий $a^2 > d^2$, $HR_0 \geq \dfrac{2d + \sqrt{9a^2 - 5d^2}}{3(a^2 - d^2)}$ энергия анизотропной жидкости будет положительной, а при больших временах

происходит асимптотическая её изотропизация и уравнения состояния становятся вакуумоподобными.

Определим, является ли нестатическая модель с метрикой, определяемой условиями (2.2.1) и (2.2.2) причинной. Для этого предположим существование замкнутых времениподобных кривых, тогда на каждой из которых найдётся точка, удовлетворяющая условию $dt/ds = 0,$ тогда как $V_\mu V^\mu > 0$ в силу времениподобности. Чтобы удовлетворить этим двум условиям, квадратичная форма из компонент касательного вектора, с матрицей коэффициентов из пространственных компонент метрического тензора, должна быть положительно определена. Матрица пространственной части рассматриваемой метрики имеет вид

$$\begin{pmatrix} (d^2 - a^2)R^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 e^{2x} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 e^{2x} R^2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.10)$$

Вид этой матрицы с учётом положительной плотности энергии влечёт за собой неположительную определённость соответствующей квадратичной формы. Таким образом, возникает противоречие с гипотезой о существовании замкнутых времениподобных линий, следовательно, рассмотренная модель причинная.

Параметр расширения $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R},$ ускорение $A = \frac{d\dot{R}}{aR},$ вращение и сдвиг отсутствуют.

Модель с вращением

Если метрика по-прежнему имеет вид (2.2.1), но ортонормированные 1-формы

$\theta^0 = dt - R\, v_A\, e^A,\ \theta^A = R\, \mathrm{K}_A\, e^A,$ содержат константы $K_A=\{a,b,b\},\ v_A=\{d,d,0\},\ A = 1,2,3,$ а помимо анизотропной жидкости с тензором энергии-импульса $T_{ik}^{(1)} = (p+\rho)u_i u_k + (\sigma - p)\chi_i \chi_k + (\pi - p)\xi_i \xi_k - p\eta_{ik},$ где p, π, σ - давления анизотропной жидкости, ρ- плотность энергии

жидкости, $\chi=\{0,0,1,0\}$, $\xi=\{0,0,0,1\}$ - векторы анизотропии, $u^i=\delta_0^i$ - вектор 4-скорости сопутствующей анизотропной жидкости,среди материальных источников есть ещё и поле чистого излучения

$T_{ik}^{(2)}=wk_ik_k,(w>0),\ k_i=\{k_{0,}k_1,k_{1,},0\},\ T_{ik}=T_{ik}^{(1)}+T_{ik}^{(2)},$

то система уравнений Эйнштейна примет вид

$$-\frac{12b^2-3d^2+4\dot{R}\left(4b^2d+\left(-3a^2b^2+(a^2+b^2)d^2\right)\dot{R}\right)+8\left(a^2+b^2\right)d^2R\ddot{R}}{4a^2b^2R^2}=$$

$$=\rho+wk_0{}^2,$$

$$\frac{4b^2+d^2+4\dot{R}\left(4b^2d+\left(3d^2b^2+(d^2-b^2)a^2\right)\dot{R}\right)+8\left(d^2-b^2\right)a^2R\ddot{R}}{4a^2b^2R^2}=$$

$$=p+wk_1{}^2,$$

$$\frac{d\left(\dot{R}(d+2b^2\dot{R})-2b^2R\ddot{R}\right)}{ab^2R^2}=wk_0k_1, \qquad (2.2.11)$$

$$-\frac{d\left(1+2\dot{R}(d-2a^2\dot{R})+4a^2R\ddot{R}\right)}{2a^2bR^2}=wk_0k_1,$$

$$\frac{d\left(\dot{R}+2d\dot{R}^2-2dR\ddot{R}\right)}{abR^2}=wk_1{}^2,$$

$$\frac{4b^2+d^2+8b^2d\dot{R}+4\left(-a^2b^2+\left(3a^2+b^2\right)d^2\right)\dot{R}^2+8b^2\left(d^2-a^2\right)R\ddot{R}}{4a^2b^2R^2}=$$

$$=\sigma+wk_1{}^2,$$

$$\frac{4b^2-d^2+8b^2d\dot{R}+4\left(-a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)d^2\right)\dot{R}^2+8\left(-a^2b^2+(a^2+b^2)d^2\right)R\ddot{R}}{4a^2b^2R^2}=\pi.$$

Из (2.2.11) получается уравнение для масштабного фактора

$$4a(a-b)\dot{R}^2-4a(a-b)R\ddot{R}-2\left(\frac{a+b}{b}\right)d\dot{R}=1 \qquad (2.2.12)$$

и параметры материи:

$$\rho = \frac{3d^2 - 12b^2 - 4d\left(4b^2 + \sqrt{2}ad\dot{R}\right) - 4\left(2\sqrt{2}ab^2 d + b^2 d^2 + a^2\left(-3b^2 + d^2\right)\right)\dot{R}^2}{4a^2 b^2 R^2} +$$

$$+\frac{8d\left(\sqrt{2}ab^2 - a^2 d - b^2 d\right)R\ddot{R}}{4a^2 b^2 R^2}, \qquad (2.2.13)$$

$$k_0{}^2 = \frac{2d\left(\dot{R} + 2d\dot{R}^2 + 4a^2 R\ddot{R}\right)}{wabR^2}, \qquad (2.2.14)$$

$$k_1{}^2 = \frac{d\left(\dot{R} + 2d\dot{R}^2 + 4a^2 R\ddot{R}\right)}{wabR^2}, \qquad (2.2.15)$$

$$p = \frac{4b^2 + d^2 - 4(a-4b)bd\dot{R} - 4\left(2abd^2 - 3b^2 d^2 + a^2(b^2 - d^2)\right)\dot{R}^2 + 8a\left(ad^2 + bd^2 - ab^2\right)R\ddot{R}}{4a^2 b^2 R^2}, \qquad (2.2.16)$$

$$\sigma = \frac{4b^2 + d^2 + 4(2b-a)bd\dot{R} - 4\left(2abd^2 - 3b^2 d^2 + a^2(b^2 - 3d^2)\right)\dot{R}^2 + 8b\left(ad^2 + bd^2 - ab^2\right)R\ddot{R}}{4a^2 b^2 R^2}, \qquad (2.2.17)$$

$$\pi = \frac{4b^2 - d^2 + 8b^2 d\dot{R} + 4\left(d^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2\right)\dot{R}^2 + 8\left(d^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2\right)R\ddot{R}}{4a^2 b^2 R^2}. \qquad (2.2.18)$$

Если $a \neq b$, (2.2.12) заменой $\dot{R} = y(R)$ сводится к

$$\frac{dR}{R} = \frac{ydy}{y^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}y - \frac{1}{\alpha}}, \quad \text{где } \alpha = 4a(a-b),\ \beta = \frac{(a+b)d}{b}, \quad \text{что в итоге приводит}$$

к

$$\ln R = \frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}y - \frac{1}{\alpha}\right| + \frac{\beta}{2\sqrt{\beta^2 + \alpha}}\ln\left|\frac{y - \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha}{\alpha^2}}}{y - \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha}{\alpha^2}}}\right| - \ln A^2. \qquad (2.2.19)$$

Обозначим $y_1 = \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha}{\alpha^2}}$, $y_2 = \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha}{\alpha^2}}$, тогда (2.2.19) перепишется в виде

$$\ln R^2 = \ln\left|(y-y_1)(y-y_2)\right| + \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2+\alpha)}}\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right| - \ln A^2. \qquad (2.2.20)$$

Если ввести функции $z_1 = \ln\left|(y-y_1)(y-y_2)\right|$ и $z_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\alpha}}\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right|$, то

они обе возрастают при $y>y_1$.

Т.к. нас интересует расширение, ограничимся требованием $y>y_1$, тогда и z_1 и z_2 возрастают. Кроме того, $\frac{y-y_1}{y-y_2} = 1 + \frac{y_2-y_1}{y-y_2} < 1$ при любых $y>0$. Тогда с учётом $\dot{R} > 0$ и при условии $\frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} + A^2R^2} >> \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}}$ на больших временах примерно получится $R \approx R_0 e^{Ht}$, $H=A$. В этом случае будет выполняться уравнения

$$\rho = \frac{-d^2\left(-3+4\sqrt{2}aR_0He^{Ht}+12a^2R_0{}^2H^2e^{2Ht}\right) - 4b^2\left(3+4R_0dHe^{Ht}-3R_0{}^2\left(a^2-d^2\right)H^2e^{2Ht}\right)}{4a^2b^2R_0{}^2e^{2Ht}}, \qquad (2.2.21)$$

$$p = \frac{-4abdR_0He^{Ht} + d^2\left(1+12a^2R_0{}^2H^2e^{2Ht}\right) + 4b^2\left(1+4R_0dHe^{Ht}-3R_0{}^2\left(a^2-d^2\right)H^2e^{2Ht}\right)}{4a^2b^2R_0{}^2e^{2Ht}}, \qquad (2.2.22)$$

$$\sigma = \frac{-4abdR_0He^{Ht} + d^2\left(1+12a^2R_0{}^2H^2e^{2Ht}\right) + 4b^2\left(1+2R_0dHe^{Ht}-3R_0{}^2\left(a^2-d^2\right)H^2e^{2Ht}\right)}{4a^2b^2R_0{}^2e^{2Ht}}, \qquad (2.2.23)$$

$$\pi = \frac{4b^2-d^2+8b^2dR_0He^{Ht}+4\left(d^2(a^2+b^2)-a^2b^2\right)R_0{}^2H^2e^{2Ht}}{4a^2b^2R_0{}^2e^{2Ht}} +$$

$$+\frac{8\left(d^2(a^2+b^2)-a^2b^2\right)R_0{}^2H^2e^{2Ht}}{4a^2b^2R_0{}^2e^{2Ht}}, \qquad (2.2.24)$$

$$k_0{}^2 = \frac{d^2He^{-Ht}}{ab^2R_0}. \qquad (2.2.25)$$

Матрица пространственной части метрики

$$\begin{pmatrix} (d^2-a^2)R^2 & d^2e^xR^2 & 0 \\ d^2e^xR^2 & (d^2-b^2)e^{2x}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2e^{2x}R^2 \end{pmatrix}$$

является отрицательно определённой при условии $a^2 > d^2$, что влечёт за собой причинность пространства-времени.

Кинематические параметры тёмной энергии(анизотропной жидкости): параметр расширения $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R}$, ускорение $A = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)d^2\dot{R}^2}{a^2b^2R^2}}$, параметр вращения $\omega = \frac{d}{2abR}$, сдвиг $\sigma = \frac{d}{2abR}$. На больших временах

$$\rho \to \frac{3H^2\left(a^2b^2 - d^2(a^2+b^2)\right)}{a^2b^2},$$

$$p \to \frac{3H^2\left(d^2(a^2+b^2) - a^2b^2\right)}{a^2b^2}, \sigma \to \frac{3H^2\left(d^2(a^2+b^2) - a^2b^2\right)}{a^2b^2},$$

$$\pi \to \frac{3H^2\left(d^2(a^2+b^2) - a^2b^2\right)}{a^2b^2},$$ т.е. жидкость асимптотически изотропизируется и становится вакуумоподобной.

§ 2.3. Модели с источниками-жидкостями и полем излучения: метрика VIII типа Бьянки

Космологические модели в пространстве-времени с метриками типа VIII по Бьянки довольно распространены в классической [87-89,71,73] и квантовой [57, 90] космологии.

Текущий параграф посвящён двум моделям: анизотропной модели Вселенной, заполненной изотропной и анизотропной жидкостями и модели с анизотропной жидкостью и полем излучения.

Метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}\eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \qquad (2.3.1)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ - элементы диагональной лоренцевой матрицы, θ_α - ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом: $\theta^0 = dt - R\, v_A\, e^A$, $\theta^A = R\, K_A\, e^A$, при этом константы $v_A=\{0,0,d\}$, $K_A=\{a,a,c\}$, $A = 1,2,3$.

1 – формы e^A имеют следующий вид [86]:

$$e^1 = ch\, y \cos z\, dx - \sin z\, dy,$$
$$e^2 = ch\, y \sin z\, dx + \cos z\, dy, \qquad (2.3.2)$$
$$e^3 = sh\, y\, dx + dz.$$

В метрике (2.1.2) найдено решение уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = T_{ik} \qquad (2.3.3)$$

(используется такая система единиц, что скорость света и умноженная на 8π гравитационная постоянная равны единице), при этом (2.1.3) решается в тетрадном формализме.

В первой модели анизотропная жидкость описывает вращающуюся темную энергию, а идеальная жидкость с уравнением состояния пыли - барионную и тёмную материю. Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik}^{(1)} = \left(p + \rho \right) u_i u_k + (\pi - p)\chi_i \chi_k - p\eta_{ik}, \qquad (2.3.4)$$

где p, π - давления анизотропной жидкости, ρ- плотность энергии идеальной жидкости, $\chi_i = \{0,0,0,1\}$ - вектор анизотропии, $u^i = \delta_0^i$ - вектор 4 – скорости анизотропной жидкости в проекции на тетраду. Несложно показать, что и координатные компоненты этой 4-скорости равны $U^i = \delta_0^i$, т.е. жидкость является сопутствующей.

Тензор энергии - импульса идеальной пылевидной жидкости имеет вид:

$$T_{ik}^{(2)} = \mu v_i v_k, \qquad (2.3.5)$$

где $v_i = \{v_0, 0, 0, v_3\}$, μ – плотность жидкости. В итоге тензор энергии-импульса даётся выражением

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} = (p + \rho)u_i u_k + (\pi - p)\chi_i \chi_k - p\eta_{ik} + \mu v_i v_k. \qquad (2.3.6)$$

Из (2.3.3) для метрики (2.3.1) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{c^2(3d^2 - c^2 - 4a^2) + 4a^4(3c^2 - d^2)\dot{R}^2 - 8a^4 d^2 R\ddot{R}}{4a^4 c^2 R^2} = \mu {v_0}^2 + \rho, \\ \dfrac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 c^2 R^2} = p, \\ \dfrac{c^2(4a^2 + 3c^2 - d^2) + 4a^4(3d^2 - c^2)\dot{R}^2 - 8a^4 c^2 R\ddot{R}}{4a^4 c^2 R^2} = \pi + \mu {v_3}^2 \\ \dfrac{d(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R}))}{2a^4 c R^2} = \mu v_0 v_3. \end{cases} \qquad (2.3.7)$$

В данном случае число неизвестных превышает число уравнений. Избавляемся от этой проблемы наложением следующих условий:

$$v_0 = S v_3, \ S > 1, \qquad (2.3.8)$$

$$\rho = k / a^2 R^2, \ k > 0. \qquad (2.3.9)$$

Из (2.3.7) при условиях (2.3.8) и (2.3.9) следует уравнение для определения масштабного фактора:

$$\begin{aligned} &2d(cS - d)R\ddot{R} + (3c^2 - d^2 - 2cdS)\dot{R}^2 = \\ &= c^2(4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2) / 4a^4. \end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

Если $cS = d$, то найдутся такие *c* и *d*, что решение уравнения (2.1.10) даётся соотношением

$$R = R_0 t, \qquad (2.3.11)$$

где

$$R_0 = c\sqrt{\frac{4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2}{(3c^2 - d^2 - 2cdS)4a^4}}. \qquad (2.3.12)$$

Эволюция параметров материи даётся (2.3.10) и следующими уравнениями:

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0{}^2)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 t^2}, \tag{2.3.13}$$

$$v_3 = const, \tag{2.3.14}$$

$$\mu = \frac{d(c^2 + 4a^4 R_0{}^2)}{2S v_3{}^2 a^4 c R_0{}^2 t^2}, \tag{2.3.15}$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)R_0{}^2 + c^2(2cd + d^2 S - 4a^2 S - 3c^2 S)4a}{4a^4 c^2 R_0{}^2 t^2}. \tag{2.3.16}$$

Рассмотрим ситуацию, когда вместо (2.3.9) выполняется следующее соотношение: $\mu = \alpha / R^2,\ \alpha > 0.$ В этом случае из (2.3.7) и (2.3.8) следует

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \tag{2.3.17}$$

где

$$L = \frac{\alpha c S v_3{}^2}{2d} - \frac{c^2}{4a^4}. \tag{2.3.18}$$

Решение уравнения (2.3.18) даётся интегралом $\int \frac{dR}{\sqrt{L + DR^2}} = \int dt$, где D – постоянная. Рассмотрим, как меняется решение уравнения (2.3.18) в зависимости от знаков D и L.

Если $L>0$, $D>0$, то существует решение $R = R_0 sh(Ht),$ где $H = \sqrt{D},$ $R_0 = const,$ а эволюция материальных параметров даётся системой уравнений

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2 R_0{}^2 ch^2(Ht) + 8a^4(cS - d)dH^2 R_0{}^2 sh^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 sh^2(Ht)},$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0{}^2 H^2 (ch^2(Ht) + 2sh^2(Ht))}{4a^4 c^2 R_0{}^2 sh^2(Ht)}, \tag{2.3.19}$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2 S + 3c^2 S - d^2 S) + 4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)H^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 sh^2(Ht)} +$$

$$+ \frac{8a^4 c(d - cS)H^2 R_0{}^2 sh^2(Ht)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 sh^2(Ht)}.$$

При $t \to \infty \;\; \mu \to 0, \rho \to 3(c^2 - d^2)H^2 / c^2, \;\; p \to 3(d^2 - c^2)H^2 / c^2,$

$\pi \to 3(d^2 - c^2)H^2 / c^2,$ т.е. анизотропная жидкость в рассматриваемом случае вакуумоподобна и асимптотически изотропизируется.

Если $L<0$, $D>0$, то $R = R_0 ch(Ht),$ где $H = \sqrt{D}, \;\; R_0 = \sqrt{-L / D}$.

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2 R_0{}^2 sh^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)} +$$

$$+ \frac{8a^4(cS - d)dH^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)},$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0{}^2 H^2(2ch^2(Ht) + sh^2(Ht))}{4a^4 c^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)}, \qquad (2.3.20)$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)H^2 R_0{}^2 sh^2(Ht) + 8a^4 c(d - cS)H^2 R_0{}^2 ch^2(Ht)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 sh^2(Ht)} +$$

$$+ \frac{c^2(-2cd + 4a^2 S + 3c^2 S - d^2 S)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 sh^2(Ht)}.$$

Если $L=0$, $D>0$, то $R = R_0 e^{Ht}$, где $H = \sqrt{D}$. В данном случае для параметров материи также выполняются соотношения, аналогичные (2.3.20) при замене гиперболических функций экспонентой.

Если $L>0$, $D<0$, то при некоторых условиях $R = R_0 \sin(Ht),$ где $H = \sqrt{-D}.$ При этом

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2 R_0{}^2 \cos^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 \sin^2(Ht)} -$$

$$- \frac{8a^4(cS - d)dH^2 R_0{}^2 \sin^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0{}^2 \sin^2(Ht)},$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0{}^2 H^2(1 - 3\sin^2(Ht))}{4a^4 c^2 R_0{}^2 \sin^2(Ht)},$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2 S + 3c^2 S - d^2 S) + 4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)H^2 R_0{}^2 \cos^2(Ht)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 \sin^2(Ht)} -$$

$$- \frac{8a^4 c(d - cS)H^2 R_0{}^2 \sin^2(Ht)}{4a^4 c^2 S R_0{}^2 \sin^2(Ht)},$$

$$\mu = \frac{\alpha}{R_0{}^2 \sin^2(Ht)}, \qquad (2.3.21)$$

т.е. имеет место модель осциллирующей вращающейся вселенной.

Помимо рассмотренных ситуаций, возможен ещё и случай особого решения при условии $L>0$, с точностью до значения R_0 описывающийся формулой(2.3.11). Эволюция плотностей и давлений такой модели имеет вид, аналогичный уравнениям (2.3.13)-(2.3.16).

Наконец, отметим особое решение уравнения(2.3.17), соответствующее ситуации $L=0$, а именно, $R=const$. Для данного статического решения имеют место следующие обладающие физическим смыслом при всех d вне промежутка

$$\left[\left(cS-\sqrt{c^2(S^2+3)+12a^2}\right)/3;\ \left(cS+\sqrt{c^2(S^2+3)+12a^2}\right)/3\right]$$

значения плотностей и давлений:

$$\rho=\frac{3d^2-4a^2-c^2-2cdS}{4a^4R^2},$$

$$p=\frac{(d^2-c^2)}{4a^4R^2}, \qquad (2.3.22)$$

$$\pi=\frac{-2cd+4a^2S+3c^2S-d^2S}{4a^4SR^2},$$

$$\mu=\frac{\alpha}{R_0{}^2}.$$

Во всех случаях модель является причинной, если $a^2>(c^2-d^2)$ при условии $|c|>|d|$, что легко проверяется анализом метрики на предмет отсутствия замкнутых времениподобных линий [103].

Кинематические параметры принимают следующий вид: $\Theta=3\dot{R}/R$ - параметр расширения, $A=d\dot{R}/cR$ - ускорение, $\omega=d/2a^2R$ - параметр вращения, сдвиг отсутствует.

Вторая космологическая модель настоящего параграфа соответствует метрике (2.3.1) с набором 1-форм (2.3.2), при этом $v_A=\{0,0,d\}$, $K_A=\{a,b,c\}$, $A=1,2,3$. Источниками гравитационного поля являются анизотропная

жидкость и поле излучения. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik}^{(1)} = \big(p+\rho\big)u_i u_k + (\sigma - p)\chi_i\chi_k + (\pi - p)\xi_i\xi_k - p\eta_{ik}, \qquad (2.3.23)$$

где p, π, σ - давления анизотропной жидкости, ρ- плотность энергии идеальной жидкости, $\chi_i = \{0,0,1,0\}$, $\xi_k = \{0,0,0,1\}$ - векторы анизотропии, $u^i = \delta_0^i$ - вектор 4 - скорости сопутствующей анизотропной жидкости;

тензор энергии - импульса чистого излучения

$$T_{ik}^{(2)} = wk_i k_k, (w>0), \qquad (2.3.24)$$

где $k_i k^i = 0,$ причём в настоящей работе $k_0 = k_3,$ т.е. $k_i = \{k_0(t),0,0,k_0(t)\}.$

Окончательно имеем

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}. \qquad (2.3.25)$$

В итоге (2.3.3) даёт

$$\begin{gathered}
\frac{-(a^4+2a^2(-b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-3c^2d^2+4a^2b^2((d^2-3c^2)\dot{R}^2+2d^2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \rho + wk_0{}^2, \\
\frac{3a^4+2a^2(-b^2+c^2)-(b^2+c^2)^2+c^2d^2-4a^2b^2(c^2-d^2)(\dot{R}^2+2\ddot{R}R)}{4a^2b^2c^2R^2} = p, \qquad (2.3.26) \\
\frac{-(a^4-3b^4-2b^2c^2+c^4+2a^2(b^2+c^2)-c^2d^2+4a^2b^2(c^2-d^2)(\dot{R}^2+2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \sigma \\
\frac{-(a^4+b^4-2b^2c^2-3c^4-2a^2(b^2+c^2)+c^2d^2+4a^2b^2((c^2-3d^2)\dot{R}^2+2c^2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \pi + wk_0{}^2, \\
\frac{d(c^2/a^2b^2+4\dot{R}^2-4\ddot{R}R)}{2cR^2} = wk_0{}^2, \\
\frac{d(a^2-b^2)\dot{R}}{abc^2R^2} = 0.
\end{gathered}$$

Последнее уравнение из (2.3.26) открывает два возможных космологических решения: статическое, если масштабный фактор не зависит от времени, и динамическое, когда *a*=*b*.

Статическое решение

Если dR/dt=0, то из (2.3.26) следует, что материальные параметры равны следующим величинам:

$$\rho = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - 2c^2(a^2+b^2) - b^4 - c^4 - 2c^3d + 3c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2},$$

$$p = \frac{3a^4 + 2a^2(c^2-b^2) - (b^2+c^2)^2 + c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2},$$

$$\sigma = \frac{-a^4 + 3b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + c^2d^2 - 2a^2(b^2+c^2)}{4a^2b^2c^2R^2},$$

$$\pi = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 + 2c^2(a^2+b^2) - b^4 + 3c^4 - 2c^3d - c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2},$$

$$wk_0{}^2 = \frac{cd}{2a^2b^2R^2}. \qquad (2.3.27)$$

При достаточно больших d>0, как и положено, ρ>0. Кинематические характеристики принимают следующий вид:

$\Theta = 3\dot{R}/R$ - параметр расширения, $A = d\dot{R}/cR$ - ускорение, $\omega = d/2abR$ - параметр вращения. Данное решение можно использовать для исследования космологических эффектов, обусловленных только вращением Вселенной.

Нестатическое решение

Если a=b, то из (2.1.26) следует, что $\sigma = p$, а также

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)\dot{R}^2 + 8a^4(c-d)dR\ddot{R}}{4a^4c^2R^2},$$

$$\pi + \rho = \frac{(c-d)^2(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R}))}{2a^4c^2R^2},$$

$$p + \rho = \frac{-c(2a^2 + (c-d)(c+2d)) + 4a^4(c-d)(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4cR^2}. \qquad (2.3.28)$$

В данном случае представляют интерес модели с вращением и ускорением, поэтому рассмотрим нашу жидкость в качестве вакуумоподобной среды вдоль одной оси.

В случае уравнения состояния $p=-\rho$ получается следующее уравнение:

$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L,$ где $L = c(2a^2 + (c-d)(c+2d)) / 4(c-d)a^4.$

Оно имеет возможные решения:

$$R = R_0 sh(Ht),\ R_0 = const,\ \text{если}\ L>0, \tag{2.3.29}$$

$$R = R_0 ch(Ht),\ \text{если}\ L<0, \tag{2.3.30}$$

$$R = R_0 e^{Ht},\ L=0. \tag{2.3.31}$$

Постоянная интегрирования H характеризует темп раздувания.

Кроме того, при L>0 существует ещё и особое решение

$$R = \sqrt{L}t. \tag{2.3.32}$$

При L>0, например, (2.1.28) даёт выражения

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)+4a^4(3c^2-2cd-d^2)H^2R_0{}^2ch^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)}$$
$$+\frac{8a^4(c-d)dH^2R_0{}^2sh^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)},$$
$$p = \frac{c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)-4a^4(3c^2-2cd-d^2)H^2R_0{}^2ch^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)} -$$
$$-\frac{8a^4(c-d)dH^2R_0{}^2sh^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)},$$
$$k_0{}^2 = \frac{d(c^2+4a^4H^2R_0{}^2)}{2wca^4R_0{}^2sh^2(Ht)}, \tag{2.3.33}$$
$$\pi = \frac{c^2(4a^2+3c^2-2cd-d^2)-4a^4(c^2+2cd-3d^2)H^2R_0{}^2ch^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)}+$$
$$+\frac{8a^4(d-c)cH^2R_0{}^2sh^2(Ht)}{4a^4c^2R_0{}^2sh^2(Ht)}.$$

Чтобы плотность энергии была положительной , требуется выполнение условия $c^2 > d^2.$ Легко убедиться, что при $t\to\infty$ $\rho \to 3(c^2-d^2)H^2/c^2,$ $k_0 \to 0$, $p \to 3(d^2-c^2)H^2/c^2,$ $\pi \to 3(d^2-c^2)H^2/c^2$, т.е. на больших временах анизотропная жидкость энергетически доминирует, а её

давление асимптотически изотропизируется. В случаях (2.3.30) и (2.3.31) имеет место такое же асимптотическое поведение материи.

Если в рамках использования уравнения состояния $p=-\rho$ имеет место особое решение при условии (2.3.32), то эволюция материальных параметров даётся следующими соотношениями:

$$\rho=\frac{-c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)+4a^4(3c^2-2cd-d^2)L}{4a^4c^2Lt^2},$$

$$p=\frac{c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)-4a^4(3c^2-2cd-d^2)L}{4a^4c^2Lt^2},$$

$$k_0{}^2=\frac{d(c^2+4a^4L)}{2wca^4Lt^2}, \qquad (2.3.34)$$

$$\pi=\frac{c^2(4a^2+3c^2-2cd-d^2)-4a^4(c^2+2cd-3d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}.$$

В случае уравнения состояния $\pi=-\rho$ из (2.3.28) получается следующее уравнение:

$$R\ddot{R}-\dot{R}^2=c^2/4a^4. \qquad (2.3.35)$$

Его общее решение $R=Me^{Ht}+c^2e^{-Ht}/(16MH^2a^4)$ выбором константы интегрирования приводится к виду $R=R_0ch(Ht)$ и является несингулярным независимо от коэффициентов метрики. Его асимптотическое поведение аналогично случаю, охватываемому уравнениями (2.3.33), т.е. и в этом случае положительность плотности энергии обеспечивается условием $c^2>d^2,$ а давления p и π стремятся к общему пределу. Кинематические характеристики принимают следующий вид: $\Theta=3\dot{R}/R$ - параметр расширения, $A=d\dot{R}/cR$ - ускорение, $\omega=d/2a^2R$ - параметр вращения, сдвиг отсутствует.

Определим, является ли нестатическая модель с метрикой, определяемой условиями (2.3.1) и (2.3.2) причинной. Для этого предположим существование замкнутых времениподобных кривых, тогда на каждой из которых найдётся точка, удовлетворяющая условию $dt/ds=0,$ тогда как

$V_\mu V^\mu > 0$ в силу времениподобности. Чтобы удовлетворить этим двум условиям, квадратичная форма из компонент касательного вектора, с матрицей коэффициентов из пространственных компонент метрического тензора, должна быть положительно определена. Матрица пространственной части метрики:

$$\begin{pmatrix} -(1/2)(a^2-c^2+d^2+(a^2+c^2-d^2)ch(2y))R^2 & 0 & (d^2-c^2)R^2sh(y) \\ 0 & -a^2R^2 & 0 \\ (d^2-c^2)R^2sh(y) & 0 & (d^2-c^2)R^2 \end{pmatrix}.$$

Вид этой матрицы, в силу условия $c^2 - d^2 > 0$ при выполнении неравенства $a^2 > c^2 - d^2$ таков, что с помощью критерия Сильвестра легко убедиться в неположительной определённости соответствующей квадратичной формы. Таким образом, мы пришли к противоречию с гипотезой о существовании замкнутых времениподобных линий, следовательно, рассмотренные в работе модели при соответствующих ограничениях на коэффициенты являются причинными.

Темная энергия, которая может быть или квинтэссенцией, или фантомной материей, является вращающейся, причём одна её составляющая всё время имеет вакуумоподобное уравнение состояния [91].

Построенные в данном параграфе динамические модели согласуются с современным значением постоянной Хаббла и могут быть использованы для исследования различных физических эффектов в космологии с вращением.

§ 2.4 Модели с жидкостями, имеющими уравнение состояния газа Чаплыгина

Моделирование ответственной за ускоренное расширение тёмной энергии посредством введения космологической постоянной влечёт за собой некоторые теоретические проблемы, связанные с моментом начала ускоренного расширения и сопоставимыми порядками величины плотностей тёмной энергии и пылевидной материи, а также «вечным» ускорением [61].

Одним из подходов, позволяющих более гибко моделировать тёмную энергию, является феноменологическое сопоставление ей жидкости с уравнением состояния

$$p = -\frac{A}{\rho^{\alpha}}, \qquad (2.4.1)$$

где $A > 0$, $0 < \alpha \leq 1$,

введённым по иному поводу Чаплыгиным в 1904 году [92].

Мотивировка использования (2.4.1) в космологии состоит в том, что, во-первых, жидкость с таким экзотическим уравнением состояния позволяет в некоторых случаях моделировать единым образом тёмную материю и тёмную энергию, а во-вторых, обеспечивает возможности суперсимметричного обобщения и перехода к струнной космологии [93-95]. Отметим космологические модели в пространствах I типа по Бьянки с газом Чаплыгина – источником гравитационного поля [96-97] и сопоставление такой космологии с экспериментальными данными [98], а также работы[53, 99].

В данном параграфе представлены две космологические модели. Источниками гравитации первой из них являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся темную энергию и идеальная жидкость, описывающая барионную и тёмную материю. Во второй модели правая часть уравнений Эйнштейна представлена анизотропной жидкостью, идеальной жидкостью и космологической постоянной.

Рассмотрим первую модель. В соответствии с вышеуказанным тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = (p + \rho)u_i u_k + (\pi - p)\chi_i \chi_k - p\eta_{ik} + \mu v_i v_k, \qquad (2.4.2)$$

где, как обычно, ρ – плотность анизотропной жидкости, p и π – её давления, χ_i – вектор анизотропии, μ – плотность изотропной пылевидной жидкости, u,v – соответствующие 4-скорости. Уравнения (2.3.1) в тетрадной форме и с учётом (2.4.1) дадут систему

$$\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}=\mu(1+v_3{}^2)+\rho,$$
$$\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}=p,$$
$$\frac{b^2(4a^2+3b^2-1)+4a^4(3-b^2)\dot{R}^2-8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}=\pi+\mu v_3{}^2, \qquad (2.4.3)$$
$$\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}=\mu v_3\sqrt{1+v_3{}^2}.$$

Если давление p удовлетворяет уравнению состояния газа Чаплыгина

$$p=-\frac{\alpha}{\rho},\ \alpha>0, \qquad (2.4.4)$$

то из (2.4.3) и (2.4.4) получаем

$$\rho=\frac{4a^4b^2R^2\alpha}{(b^2-1)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))} \qquad (2.4.5)$$

$$\pi=\frac{b^2(4a^2+3b^2-1)+4a^4(3-b^2)\dot{R}^2-8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}-$$
$$-\frac{\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)}{\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha},$$

(2.4.6)

$$\mu=\frac{\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha}{\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)}-$$

$$-\frac{\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)}{\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha},$$

(2.4.7)

$$v_3^{\,2}=\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)^2\Bigg/$$

$$\Bigg/\left((f+\alpha)^2-\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)^2\right), \quad (2.4.8)$$

где введено обозначение

$$f=\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right) \quad (2.4.9)$$

Поскольку число уравнений превышает число неизвестных, наложим дополнительное условие

$$p=\left(\left(\frac{3\ddot{R}}{R}\right)+\frac{l}{R^2}\right)\left(\frac{1-b^2}{b^2}\right), \quad (2.4.10)$$

которое позволяет найти масштабный фактор как решение уравнения

$$\dot{R}^2-R\ddot{R}=L,\ \ L=l-b^2/4a^4. \quad (2.4.11)$$

Его решение даётся комбинацией экспонент, выбором постоянных интегрирования всегда приводящихся к одному из следующих выражений:

$$R=(\sqrt{L}/H)sh(Ht),\ \ L>0, \quad (2.4.12)$$

$$R=(\sqrt{-L}/H)ch(Ht),\ \ L<0, \quad (2.4.13)$$

$$R=R_0e^{Ht},\ \ L=0. \quad (2.4.14)$$

Данными зависимостями можно моделировать как современную стадию ускоренного расширения, так и стадию первой инфляции.

Кинематические параметры вращающейся анизотропной жидкости имеют следующий вид: параметр расширения $\Theta=3\dot{R}/R,$ ускорение $A=\dot{R}/bR,$ параметр вращения $\omega=1/2a^2R$, сдвиг отсутствует.

Рассмотрим вторую модель, её тензор энергии-импульса даётся выражением

$$T_{ik}=(\rho+\pi)u_iu_k+(\sigma-\pi)\chi_i\chi_k-\pi\eta_{ik}+(\varepsilon+p)v_iv_k-p\eta_{ik}+\Lambda\eta_{ik}, \quad (2.4.15)$$

где ρ – плотность анизотропной жидкости, π и σ – её давления, χ_i – вектор анизотропии, u_i – 4-скорость; ε, p, v_i – соответственно плотность, давление и 4-скорость идеальной жидкости, Λ – космологическая постоянная.

Примем в (2.4.15) $v_i = \{1,0,0,0\}$, а также уравнения состояния идеальной жидкости $\pi = \beta\rho, \quad p = -\alpha / \varepsilon.$ Тогда уравнения Эйнштейна в проекции на тетраду примут следующий вид:

$$\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \rho+\varepsilon+\Lambda,$$

$$\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2} = p+\pi-\Lambda, \qquad (2.4.16)$$

$$\frac{b^2(4a^2+3b^2-1)+4a^4(3-b^2)\dot{R}^2-8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = p+\sigma-\Lambda,$$

$$\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2} = 0.$$

Последнее уравнение системы (2.4.16) имеет решение

$$R = (b/2a^2H)ch(Ht), \qquad (2.4.17)$$

а из первых двух уравнений (2.4.16) с учётом $\pi = \beta\rho$ и $p = -\alpha / \varepsilon$ следует

$$\varepsilon = \frac{\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 4\alpha}}{2}, \qquad (2.4.18)$$

где

$$\varsigma = \frac{\beta b^2(3-b^2-4a^2)+b^2(b^2-1)+4a^4(\beta(3b^2-1)+b^2-1)\dot{R}^2}{4a^4b^2R^2} +$$

$$+\frac{8a^4(b^2-1-\beta)R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} - \Lambda(\beta+1). \qquad (2.4.19)$$

Плотность энергии всегда положительна при условиях

$$b > \sqrt{1+\beta}, \quad a^2 < \frac{1}{4}\left(3-b^2+\frac{b^2-1}{\beta}\right), \quad \beta < \frac{2H^3(b^2-1)+b^2}{2H^3+\Lambda b^2}. \qquad (2.4.20)$$

Отметим, что кинематические параметры этой модели аналогичны параметрам, рассмотренным в предыдущем случае. При этом вращение затухает, но анизотропная жидкость, в отличие от ситуации, имеющей место в отсутствие газа Чаплыгина, не изотропизируется. Из полученных решений следует, что материя, описываемая уравнением состояния газа Чаплыгина, может использоваться не только в связи с унификацией тёмной материи с тёмной энергии, при этом найденная космологическая модель может использоваться в инфляционной космологии [100].

§ 2.5. Модели с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением: метрика VIII типа Бьянки

Существуют космологические модели с изотропной жидкостью, скалярным полем и излучением в метрике II типа Бьянки [73] и анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением [43], в которых инфлатонное поле, ответственное за ускоренное расширение на стадии инфляции, моделируется экспоненциально убывающим скалярным полем. Нами построена соответствующая модель в метрике VIII типа Бьянки.

В данной работе [101] с метрикой (2.1.1) - (2.1.2) при условиях на коэффициенты $\nu_A = \{0,0,1\}$, $K_A = \{a,a,b\}$, $A = (\overline{1,2,3})$ получена космологическая модель с тремя видами потенциала скалярного поля, удовлетворяющего уравнению (2.1.7). В тетрадном представлении решаются уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}, \tag{2.5.1}$$

при этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости имеет вид

$$T^{(1)}_{\alpha\beta} = \left(p+\rho\right)u_\alpha u_\beta + (\pi - p)\chi_\alpha\chi_\beta - p\eta_{\alpha\beta}, \tag{2.5.2}$$

тензор энергии-импульса излучения даётся формулой

$$T^{(2)}_{\alpha\beta} = wk_\alpha k_\beta \ (k_\alpha k^\alpha = 0), \tag{2.5.3}$$

а тензор энергии-импульса скалярного поля представлен выражением

$$T^{(3)}_{\alpha\beta} = \varphi_{,i}\,\varphi_{,k}\,e_{\alpha}{}^{i}e_{\beta}{}^{k} - ((1/2)\varphi_{,i}\,\varphi_{,k}\,e_{\gamma}{}^{i}e^{\gamma k} - U)\eta_{\alpha\beta,} \qquad (2.5.4)$$

где ρ – плотность анизотропной жидкости, p и π – её давления, χ_α – вектор анизотропии. Тетрадные компоненты 4-скорости жидкости равны $u_\alpha = \{1,0,0,0\}$, компоненты волнового вектора излучения $k_\alpha = \{k_0,0,0,k_3\}$, а результирующий тензор энергии-импульса даётся суммой $T_{\alpha\beta} = T^{(1)}_{\alpha\beta} + T^{(2)}_{\alpha\beta} + T^{(3)}_{\alpha\beta}$.

Полевое уравнение (1.3.22) в метрике (2.1.1)-(2.1.2) принимает вид

$$\frac{(b^2-1)(3\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi})}{b^2 R} + \frac{dU}{d\varphi} = 0, \qquad (2.5.5)$$

а из (2.5.1)-(2.5.4) получается система уравнений

$$\frac{b^2(3-b^2-4a^2) + 4a^4(3b^2-1)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2} = \rho + wk_0{}^2 + U + \frac{(1+b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \qquad (2.5.6)$$

$$\frac{(1-b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2} = p - U + \frac{(-1+b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \qquad (2.5.7)$$

$$\frac{b^2(4a^2+3b^2-1) + 4a^4(3-b^2)\dot{R}^2 - 8a^4 b^2 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2} = \pi + wk_0{}^2 - U + \frac{(1+b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \qquad (2.5.8)$$

$$\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 bR^2} = wk_0{}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{b}. \qquad (2.5.9)$$

В данной работе рассмотрены 3 вида потенциальной функции массивного скалярного поля:

$$U = \frac{m^2\varphi^2}{2}, \qquad (2.5.10)$$

$$U = \frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}, \qquad (2.5.11)$$

$$U = -\frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}, \qquad (2.5.12)$$

при этом во всех трёх случаях полевая функция убывает со временем, т.е. согласно теории инфляции постулируется:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-Qt}, \quad Q > 0. \tag{2.5.13}$$

Решение с потенциалом (2.5.10)

Из (2.5.5) и (2.5.13) следует, что

$$R = R_0 e^{Ht}, \tag{2.5.14}$$

где $H = Q/3 + b^2 m^2 / 3Q(b^2 - 1)$, а R_0 – постоянная интегрирования, что вместе с (2.5.6) - (2.5.9) приводит к уравнениям

$$\rho = \frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 3)R_0{}^2 H^2 e^{2Ht}}{4a^4 b^2 R_0{}^2 e^{2Ht}} - \frac{m^2 \phi_0{}^2}{2e^{2Qt}} - \frac{b}{2a^4 R_0{}^2 e^{2Ht}} + \frac{Q^2 \phi_0{}^2}{be^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0{}^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \tag{2.5.15}$$

$$p = \frac{(1 - b^2)(b^2 + 12a^4 R_0{}^2 H^2 e^{2Ht})}{4a^4 b^2 R_0{}^2 e^{2Ht}} + \frac{m^2 \phi_0{}^2}{2e^{2Qt}} + \frac{(1 - b^2)Q^2 \phi_0{}^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \tag{2.5.16}$$

$$\pi = \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - 3b^2)R_0{}^2 H^2 e^{2Ht}}{4a^4 b^2 R_0{}^2 e^{2Ht}} + \frac{m^2 \phi_0{}^2}{2e^{2Qt}} - \frac{b}{2a^4 R_0{}^2 e^{2Ht}} + \frac{Q^2 \phi_0{}^2}{be^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0{}^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \tag{2.5.17}$$

$$wk_0{}^2 = \frac{b}{2a^4 R_0{}^2 e^{2Ht}} - \frac{Q^2 \varphi_0{}^2}{be^{2Qt}}. \tag{2.5.18}$$

При $t \to \infty$ $k_0 \to 0$, $\rho \to \frac{3(b^2 - 1)H^2}{b^2}$, $p \to \frac{3(1 - b^2)H^2}{b^2}$, $\pi \to \frac{3(1 - b^2)H^2}{b^2}$,

т.е. излучение затухает, а анизотропная жидкость асимптотически изотропизируется и становится вакуумоподобной.

Решение с потенциалом (2.5.11)

Из (2.5.5), (2.5.11) и (2.5.13) следует

$$R = R_0 e^{A(t)}, \tag{2.5.19}$$

где

$$A(t)=\left(\frac{m^2b^2}{3Q(b^2-1)}+\frac{Q}{3}\right)t-\frac{\lambda b^2{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{6Q^2(b^2-1)}. \qquad (2.5.20)$$

В этом случае (2.5.6) – (2.5.9) даёт

$$\rho=\frac{3-b^2-2b-4a^2}{4a^4{R_0}^2e^{2A(t)}}+\left(\frac{3b^2-3}{b^2}\right)\left(\frac{m^2b^2}{3Q(b^2-1)}+\frac{Q}{3}+\frac{\lambda b^2{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{3Q(b^2-1)}\right)^2-$$

$$-\frac{4\lambda{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{3(b+1)}-\frac{m^2{\varphi_0}^2}{2e^{2Qt}}-\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{4e^{4Qt}}-\frac{(b-1)^2{\varphi_0}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.21)$$

$$p=\frac{1-b^2}{4a^4{R_0}^2e^{2A(t)}}-\frac{b^2}{3(b^2-1)}\left(\frac{m^2}{Q}+\frac{Q(b^2-1)}{b^2}+\frac{\lambda{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{Q}\right)^2+\frac{4\lambda{\varphi_0}^2}{3e^{2Qt}}+\frac{m^2{\varphi_0}^2}{2e^{2Qt}}+$$

$$+\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{4e^{4Qt}}+\frac{(1-b^2)Q^2{\varphi_0}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.22)$$

$$\pi=\frac{4a^2+3b^2-2b-1}{4a^4{R_0}^2e^{2A(t)}}+\frac{3(1-b^2)}{b^2}\left(\frac{m^2b^2}{3Q(b^2-1)}+\frac{Q}{3}+\frac{\lambda b^2{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{3Q(b^2-1)}\right)^2+\frac{4\lambda b^2{\varphi_0}^2}{3(b+1)e^{2Qt}}+$$

$$+\frac{m^2{\varphi_0}^2}{2e^{2Qt}}+\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{4e^{4Qt}}-\frac{(b-1)^2Q^2{\varphi_0}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.23)$$

$$w{k_0}^2=\frac{b}{2a^4{R_0}^2e^{2A(t)}}+\frac{4b\lambda{\varphi_0}^2}{3(b^2-1)e^{2Qt}}-\frac{Q^2{\varphi_0}^2}{be^{2Qt}}. \qquad (2.5.24)$$

Решение с потенциалом Хиггса (2.5.12)

Из (2.5.5), (2.5.12) и (2.5.13) следует

$$R=R_0e^{B(t)}, \qquad (2.5.25)$$

где

$$B(t)=\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2b^2}{3Q(b^2-1)}\right)t-\frac{\lambda b^2{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{6Q^2(b^2-1)}. \qquad (2.5.26)$$

В этом случае (2.5.6) – (2.5.9) приводит к

$$\rho=\frac{3-b^2-2b-4a^2}{4a^4{R_0}^2e^{2B(t)}}+\left(\frac{3b^2-3}{b^2}\right)\left(\frac{-m^2b^2}{3Q(b^2-1)}+\frac{Q}{3}+\frac{\lambda b^2{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{3Q(b^2-1)}\right)^2-$$

$$-\frac{4\lambda{\varphi_0}^2e^{-2Qt}}{3(b+1)}+\frac{m^2{\varphi_0}^2}{2e^{2Qt}}-\frac{\lambda{\varphi_0}^4}{4e^{4Qt}}-\frac{(b-1)^2{\varphi_0}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.27)$$

$$p=\frac{1-b^2}{4a^4R_0{}^2e^{2B(t)}}-\frac{b^2}{3(b^2-1)}\left(\frac{-m^2}{Q}+\frac{Q(b^2-1)}{b^2}+\frac{\lambda\varphi_0{}^2e^{-2Qt}}{Q}\right)^2+\frac{4\lambda\varphi_0{}^2}{3e^{2Qt}}-\frac{m^2\varphi_0{}^2}{2e^{2Qt}}+$$

$$+\frac{\lambda\varphi_0{}^4}{4e^{4Qt}}+\frac{(1-b^2)Q^2\varphi_0{}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.28)$$

$$\pi=\frac{4a^2+3b^2-2b-1}{4a^4R_0{}^2e^{2B(t)}}+\frac{3(1-b^2)}{b^2}\left(\frac{Q}{3}-\frac{m^2b^2}{3Q(b^2-1)}+\frac{\lambda b^2\varphi_0{}^2e^{-2Qt}}{3Q(b^2-1)}\right)^2+\frac{4\lambda b^2\varphi_0{}^2}{3(b+1)e^{2Qt}}+$$

$$-\frac{m^2\varphi_0{}^2}{2e^{2Qt}}+\frac{\lambda\varphi_0{}^4}{4e^{4Qt}}-\frac{(b-1)^2Q^2\varphi_0{}^2}{2b^2e^{2Qt}}, \qquad (2.5.29)$$

$$wk_0{}^2=\frac{b}{2a^4R_0{}^2e^{2B(t)}}+\frac{4b\lambda\varphi_0{}^2}{3(b^2-1)e^{2Qt}}-\frac{Q^2\varphi_0{}^2}{be^{2Qt}}. \qquad (2.5.30)$$

Легко показать, что во всех трёх случаях изначально анизотропная жидкость асимптотически изотропизируется, становится вакуумоподобной, а поле излучения затухает. Данные космологические модели могут использоваться начиная с планковских времён при моделировании первой стадии инфляции с интерпретацией φ как инфлатонного поля.

§ 2.6 Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в однородном изотропном пространстве открытого типа

В [102] приведён ряд примеров спонтанного нарушения симметрии скалярного поля с самодействием во внешних полях. К спонтанному нарушению симметрии приводит, в частности, взаимодействие с сильным статическим либо высокочастотным переменным электрическими полями. В [102] показано, что гравитационное поле, описываемое метрикой однородного изотропного пространства открытого типа, также служит инициатором спонтанного нарушения симметрии в первоначально симметричной системе.

Этот эффект представляет интерес, во-первых, потому, что может дать механизм возникновения ненулевых масс элементарных частиц, обусловленных кривизной пространства - времени, т.е. в конечном счете

наличием материи во Вселенной. Во-вторых, эффект спонтанного нарушения симметрии в искривленном пространстве-времени может связать единые калибровочные теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий с возможным изменением геометрии на малых расстояниях [102]. В большинстве теорий спонтанное нарушение симметрии вводится искусственно путем приписывания отрицательного квадрата голой массы хиггсовской частице.

В [102] также отмечено, что в гравитационном поле эффект перестройки вакуума должен учитываться при решении таких вопросов космологии и астрофизики, как барионная асимметрия, пространственная плоскостность Вселенной, природа сингулярного состояния и ряда других.

Для возникновения спонтанного нарушения симметрии во внешнем гравитационном поле, вообще говоря, существенно то, что скалярное поле описывается уравнением с конформной связью. При этом член R/6 может играть ту же роль, что и отрицательный квадрат массы, т.е. приводить к спонтанному нарушению симметрии. Однако эффект спонтанного нарушения симметрии связан не столько со знаком R, сколько с отрицательным знаком кривизны 3-пространства в моделях открытого типа. Так, эффект имеется в открытой модели Фридмана с уравнением состояния вещества фона

$$P_b = \varepsilon_b / 3. \qquad (2.6.1)$$

В [102] описывается самодействующее комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ в открытой модели Фридмана, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_i \nabla^i \phi(x) + (m^2 + R/6)\phi(x) + (\Lambda/3)\phi^*(x)\phi^2(x) = 0, \qquad (2.6.2)$$

где $\Lambda>0$, которое конформно-инвариантно при m=0. (2.6.2) можно получить как полевое уравнение из плотности лагранжиана

$$L = \sqrt{-g}[g^{ik}\partial_i\phi^*\partial_k\phi - (m^2 + R/6)\phi^*\phi - (\Lambda/6)(\phi^*\phi)^2]. \qquad (2.6.3)$$

Лагранжиан (2.6.3), очевидно, инвариантен относительно калибровочных преобразований. Состояние |0> - это гейзенберговское вакуумное состояние,

определенное при η=0. Из пространственной однородности рассматриваемой метрики вытекает, что если вакуумное среднее φ отлично от нуля, то оно может зависеть только от η:

$$<0|\phi(\eta,x)|0>=<0|\phi(\eta,0)|0>\equiv g(\eta). \qquad (2.6.4)$$

Вследствие C – инвариантности вакуумного состояния величина g вещественна. Отличие g от нуля означает спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Показано, что такое нарушение действительно происходит в открытом пространстве Фридмана [102].

Усредняя (2.6.2) по состоянию |0> и полагая в древесном приближении

$$<0|\phi^*\phi^2|0>\approx<0|\phi^*|0><0|\phi|0>^2= g^3, \qquad (2.6.5)$$

с учетом (2.6.4) можно получить

$$\ddot{g}+\frac{2\dot{a}}{a}\dot{g}+\left(m^2a^2-1+\frac{\ddot{a}}{a}\right)g+\frac{\Lambda a^2}{3}g^3=0. \qquad (2.6.6)$$

Замена в (2.6.6)

$$g(\eta)=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\frac{f(\eta)}{a(\eta)} \qquad (2.6.7)$$

приводит к уравнению для $f(\eta)$

$$\ddot{f}+(m^2a^2-1)f+f^3=0. \qquad (2.6.8)$$

Следует заметить, что слагаемое $-f$ в (2.6.8), играющее роль члена с отрицательным квадратом массы, появляется вследствие наличия у 3-пространства кривизны равной -1.

Если при η=0 имеется сингулярность $a(0)=0$, то это позволяет в качестве асимптотики решения (2.6.8) при $\eta\to 0$ взять решение уравнения Дюффинга

$$\ddot{f}-f+f^3=0. \qquad (2.6.9)$$

Известно, что решение этого уравнения $f=0$ неустойчиво, а $f(\eta)=\pm 1$ - устойчивые решения, поэтому в качестве начальных условий для решения (2.6.8) следует взять

$$f(0)=\pm 1,\ \dot{f}(0)=0. \qquad (2.6.10)$$

Уравнение (2.6.8) имеет тогда ненулевое решение, соответствующее спонтанному нарушению симметрии. Для безмассового поля (2.6.8) совпадает с (2.6.9) и устойчивые решения при всех η суть $f(\eta)=\pm 1$. В этом случае начальное условие можно задать не в сингулярности, а в произвольный момент. В итоге реализуется несимметричное вакуумное состояние |0>. Оно должно быть энергетически более выгодным, чем симметричный вакуум.

Для безмассового поля вакуумное состояние со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией обладает отрицательной энергией и потому является предпочтительным (по сравнению с обладающим нулевой энергией симметричным состоянием) на всех стадиях эволюции. Для массивного же поля плотность энергии отрицательна лишь в определённом интервале времени, оценка которого проведена в [102] в предположении эволюции масштабного фактора по степенному закону. Там же решается задача о роли вакуумных плотности энергии и давлении, когда они определяют метрику пространства-времени, а обычное вещество отсутствует, при этом обнаруживается несингулярное решение уравнений Эйнштейна, эволюция масштабного фактора которого даётся законом гиперболического косинуса(в конформном времени).

В настоящей работе рассмотрено [103] спонтанное нарушение симметрии с метрикой (2.3.1) с набором 1-форм (2.3.2) и $\nu_A=\{0,0,1\}$, $K_A=\{a,b,c\}$, $A=\overline{(1,2,3)}$. Из (2.6.3) получается полевое уравнение ($\tilde{R}$ - скалярная кривизна):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)+\left(m^2-\frac{\tilde{R}}{6}\right)\phi+\frac{\Lambda}{3}\phi^*\phi^2=0, \qquad (2.6.11)$$

которое при введении вакуумного среднего $<0|\phi(t,x,y,z)|0>=\mathrm{q(t)}$ в древесном приближении принимает вид

$$\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(\ddot{q}+\frac{3}{R}\dot{R}\dot{q}\right)+\left(m^2-\frac{\tilde{R}}{6}\right)q+\frac{\Lambda}{3}q^3=0. \qquad (2.6.12)$$

Если при этом $R(t)=const$, $q(t)=const,$ то

$$\mathrm{q}_1=0,\ \mathrm{q}_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{\Lambda}\left(\frac{\tilde{R}}{6}-m^2\right)}. \qquad (2.6.13)$$

Метрический тензор энергии импульса

$$T_\mu^\nu=\nabla_\mu\phi^*\nabla^\nu\phi+\nabla^\nu\phi^*\nabla_\mu\phi-\delta_\mu^\nu\left[\nabla^\alpha\phi^*\nabla_\alpha\phi-m^2\phi^*\phi\right]-$$
$$-\frac{1}{3}\left[-R_\mu^\nu+\frac{1}{2}\delta_\mu^\nu\tilde{R}+\nabla^\nu\nabla_\mu-\delta_\mu^\nu\Box\right]\phi^*\phi+\frac{\Lambda}{6}\delta_\mu^\nu(\phi^*\phi)^2 \qquad (2.6.14)$$

приводит к выражению для осреднённой по вакууму плотности энергии скалярного поля

$$E=<0|T^0{}_0|0>=\frac{\Lambda q^4}{6}-\frac{\tilde{R}q^2}{6}+g^{00}\dot{q}^2+\frac{R^0{}_0}{3}q^2+m^2q^2, \qquad (2.6.15)$$

что влечёт за собой значения плотности энергии состояний

$$E(q_1)=0,\ E(q_{2,3})=-\frac{3}{2\Lambda}\left(\frac{\tilde{R}}{6}-m^2\right)^2<0 \qquad (2.6.16)$$

при условии $\left(\frac{\tilde{R}}{6}-m^2\right)\neq 0.$ Также для существования действительных $\mathrm{f}_{2,3}$ должно выполняться условие $\frac{\tilde{R}}{6}-m^2>0,$ т.е.

$$\frac{4a^2+b^2-c^2}{12a^4R^2}>m^2. \qquad (2.6.17)$$

Следовательно, когда плотность энергии скалярного поля в соответствии с (2.6.16) отрицательна, то имеет место эффект спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Предпочтительность выбора решений $\mathrm{q}_{2,3}\neq 0$ из соображений минимума энергии дает возможность выявить

спонтанное нарушение калибровочной симметрии. В этом случае несимметричное вакуумное состояние энергетически выгоднее, нежели симметричный вакуум.

Если R(t)=vt, m=0, то

$$\tilde{R} = \frac{b^2(4a^2 + b^2 - c^2) - 12a^4(b^2 - c^2)v^2}{2a^4b^2v^2t^2} = \frac{\tilde{R}_0}{t^2}, \tag{2.6.18}$$

$$\tilde{R}_0 = \frac{b^2(4a^2 + b^2 - c^2) - 12a^4(b^2 - c^2)v^2}{2a^4b^2v^2}. \tag{2.6.19}$$

Уравнение поля принимает вид:

$$\ddot{q} + \frac{3\dot{q}}{t} - \frac{b^2(4a^2 + b^2 - c^2) - 12a^4(b^2 - c^2)v^2}{12a^4(b^2 - c^2)v^2}\frac{q}{t^2} + \frac{\Lambda b^2}{3(b^2 - c^2)}q^3 = 0$$

(2.6.20)

и имеет неустойчивое решение q_1 и устойчивые q_2, q_3:

$$q_1 = 0,\ q_{2,3} = \pm\frac{1}{t}\sqrt{\frac{4a^2 + b^2 - c^2}{4a^4v^2\Lambda}}. \tag{2.6.21}$$

Энергия устойчивого состояния:

$$E(q_{2,3}) = \frac{1}{t^4}\left(\frac{4a^2 + b^2 - c^2}{4a^4v^2\Lambda}\right)\left(\frac{48a^4(b^2 - c^2)v^2 - b^2(4a^2 + b^2 - c^2)}{24a^4b^2v^2}\right) < 0.$$

(2.6.22)

Если $b^2 > c^2,\ 4a^2 + b^2 - c^2 > 0,$ то условие нарушения симметрии имеет вид

$$v^2 < \frac{b^2(4a^2 + b^2 - c^2)}{48a^4(b^2 - c^2)}. \tag{2.6.23}$$

Таким образом, эффект спонтанного нарушения калибровочной симметрии имеет место и в нестатической модели наподобие (2.6.1-2.6.11).

ГЛАВА 3
ЭВОЛЮЦИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ВРАЩЕНИЕМ

§ 3.1. Модель с метрикой типа II по Бьянки

Построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки. Модель описывает фридмановский этап эволюции Вселенной, с последующим переходом к ускоренному экспоненциальному расширению, наблюдаемому в современную эпоху. Источником гравитационного поля в нашей космологической модели являются: ультрарелятивистское вещество, пыль и сопутствующая анизотропная вращающаяся темная энергия. Обсуждается возможность проявления космологического вращения в ходе астрофизических наблюдений.

1. Введение

Согласно наблюдений телескопа «Планк», статистическая значимость аномалии – глобальной анизотропии – остается низкой и результаты телескопа «Планк» полностью удовлетворяют Стандартной космологической ΛCDM – модели [11]. Так что на данный момент общепринятая точка зрения состоит в том, что наша Вселенная – однородна и изотропна. Однако известны астрономические наблюдения, которые могут свидетельствовать в пользу крупномасштабных отклонений от изотропии в наблюдаемой Вселенной. Первый тип наблюдений касается исследования векторов поляризации электромагнитного излучения, пришедшего от далеких квазаров [12]. Оказалось, что вектора поляризации ориентированы не случайным образом, а имеют преимущественное направление [12]. Причем это направление явно проявляется для тех векторов, которые соответствуют достаточно удаленным квазарам. Второй тип наблюдений связан с так называемыми спиральными галактиками. Согласно последнему анализу [13], в одной части небесной сферы преобладают влево закрученные галактики, в другой части - вправо закрученные. На основе этой асимметрии была

найдена выделенная ось в пространстве. Укажем здесь, что есть особый тип анизотропии в 4-х пространстве – это анизотропия, обусловленная космологическим вращением. Поэтому в современной космологии сохраняют актуальность исследования возможного вращения Вселенной. Укажем некоторые из работ, посвященных космологическому вращению [57, 104, 105, 106]. В данных работах рассматриваются следующие космологические метрики: обобщение метрики Гёделя, метрики типов II, VIII по Бьянки, и используются различные источники тяготения. При теоретическом моделировании космологического вращения целесообразно использовать метрики различных типов по Бьянки, которые не противоречат наблюдательным данным.

Отметим, что в современной космологии весьма актуально исследование темной энергии (неизвестной субстанции, которая приводит к ускоренному космологическому расширению), а также темной материи [8, 9]. Укажем, что предсказаны и открыты [107] локальные области космического пространства, в которых эйнштейновское антитяготение, создаваемое темной энергией, сильнее ньютоновского тяготения, создаваемого темной материей и барионами.

В данной работе в рамках общей теории относительности построен космологический сценарий с вращением на основе метрики типа II по Бьянки вида

$$ds^2 = dt^2 - 2R(t)\sqrt{b}e^{(1)}dt - R^2(t)\left[A\left(e^{(1)}\right)^2 + \left(e^{(2)}\right)^2 + \left(e^{(3)}\right)^2\right], \qquad (3.1.1)$$

где $A, b - const, A > 0, b > 0, e^{(1)} = dx - zdy, e^{(2)} = dy, e^{(3)} = dz$.

Источниками гравитации являются три жидкости с соответствующими уравнениями состояния.

Построенная космологическая модель отлична от ранее найденных космологических решений для метрики (3.1.1). Рассматривается значение найденного космологического решения для астрофизических наблюдений.

2. Нестационарная космологическая модель с вращением

Итак, будем искать для метрики (3.1.1) космологическое решение уравнений тяготения Эйнштейна, записанных в тетрадной форме

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}R = \aleph T_{ik}. \qquad (3.1.2)$$

У нас используется лоренцевая тетрада и выбрано $\aleph = 1, c = 1.$

Тензор энергии – импульса сопутствующей анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik}^{(1)} = (\pi + \rho)\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_k + (\sigma - \pi)\chi_i\chi_k - \pi\eta_{ik}, \qquad (3.1.3)$$

где π, σ - компоненты давления анизотропной жидкости, ρ - плотность энергии анизотропной жидкости, χ_i={0,1,0,0} - тетрадные компоненты пространственноподобного вектора анизотропии, $\tilde{\tilde{u}}^i = \delta_0^i$ - вектор 4-х скорости сопутствующей анизотропной жидкости в проекции на тетраду.

Тензор энергии – импульса несопутствующей идеальной пылевидной жидкости

$$T_{ik}^{(2)} = \varepsilon u_i u_k, \qquad (3.1.4)$$

где ε - плотность пыли, u_i - тетрадные компоненты ее скорости.

Тензор энергии – импульса несопутствующей идеальной ультрарелятивистской жидкости

$$T_{ik}^{(3)} = (\varepsilon_1 + p)\tilde{u}_i\tilde{u}_k - p\eta_{ik} = \frac{4}{3}\varepsilon_1\tilde{u}_i\tilde{u}_k - \frac{\varepsilon_1}{3}\eta_{ik}, \left(p = \frac{\varepsilon_1}{3}\right), \qquad (3.1.5)$$

где ε_1 - плотность энергии, p - давление, $\tilde{u}_i$ - 4-х скорость данной жидкости.

В системе уравнений Эйнштейна (3.1.2)

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} + T_{ik}^{(3)}. \qquad (3.1.6)$$

Из закона сохранения тензора энергии – импульса и отсутствия взаимодействия между данными жидкостями следует, что ковариантная 4-дивергенция должна быть равна нулю для каждого из слагаемых в (3.1.6). Это приводит к следующим условиям (в координатной форме)

$$T_{;\nu}^{\mu\nu(1)} = 0, \qquad (3.1.7)$$

$$T_{;\nu}^{\mu\nu(2)} = 0. \qquad (3.1.8)$$

Из уравнений (3.1.7) и (3.1.8) получено

$$u_i = \tilde{u}_i = \left(\frac{\sqrt{A+b}}{\sqrt{A}}; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{A}}; 0; 0 \right), \tag{3.1.9}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4}, (\tilde{\varepsilon}_0 > 0), \tag{3.1.10}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{R^3}, (\varepsilon_0 > 0), \tag{3.1.11}$$

здесь $\varepsilon_0, \tilde{\varepsilon}_0 - const.$

Законы (3.1.10) и (3.1.11) соответствуют зависимостям плотностей энергии от масштабного фактора во фридмановских космологических моделях.

Система уравнений (3.1.2) с учетом (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.9) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{-8\ddot{R}Rb + 12\dot{R}^2A + 8\dot{R}^2b - A^2 + Ab + 2b^2}{4R^2(A+b)} = \varepsilon u_0^2 + \frac{4}{3}\varepsilon_1 \tilde{u}_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{3} + \rho, \\
&\frac{-\sqrt{b}\left(4\ddot{R}R - 4\dot{R}^2 - A - b\right)}{2R^2\sqrt{A+b}} = \varepsilon u_0 u_1 + \frac{4}{3}\varepsilon_1 \tilde{u}_0 \tilde{u}_1, \\
&\frac{-8\ddot{R}RA - 8\ddot{R}Rb - 4\dot{R}^2A + 8\dot{R}^2b + 3A^2 + 5Ab + 2b^2}{4R^2(A+b)} = \varepsilon u_1^2 + \frac{4}{3}\varepsilon_1 \tilde{u}_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{3} + \sigma, \\
&\frac{-8\ddot{R}RA - 4\dot{R}^2A - A^2 - Ab}{4R^2(A+b)} = \frac{\varepsilon_1}{3} + \pi.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Из этой системы с учетом (3.1.10) и (3.1.11) получено

$$t = \int \frac{\sqrt{6}RdR}{\sqrt{6\tilde{c}R^4 - 6\alpha R^2 + 4\beta R + 3\gamma}}, \tag{3.1.13}$$

$$\alpha = \frac{A+b}{4}; \beta = \frac{\tilde{\varepsilon}(A+b)}{2A}; \gamma = \frac{2\tilde{\varepsilon}_1(A+b)}{3A}, \ \tilde{c} = const.$$

Интеграл (3.1.13) не выражается в элементарных функциях, однако можно качественно исследовать решения на различных космологических стадиях.

Космологическое вращение у нас понимается как вращение поля 4-скорости жидкости. Ввиду того, что в нашей модели вращается только тёмная энергия (моделируемая анизотропной жидкостью), будем «сохранять» её на всех стадиях, в то время как на стадии преобладания ультрарелятивистского вещества положим в системе (3.1.12) $\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4}$, а на стадии

доминирования пылевидной материи будем пренебрегать ультрарелятивистским веществом: $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{R^3}$.

3. Стадия преобладания ультрарелятивистского вещества

Считая, что на данной стадии: $\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4}$, из (3.1.12) можно получить

$$\pi = \frac{-3A\tilde{c}}{A+b}, \tilde{c} > 0,$$
$$\rho = \frac{3A\tilde{c}R^2 - A(A+b)}{R^2(A+b)}, \qquad (3.1.14)$$
$$\sigma = \frac{-3A\tilde{c}R^2 + A(A+b)}{R^2(A+b)},$$

Уравнения состояния анизотропной жидкости для разных компонент давления имеют вид

$$\pi + \rho = -\frac{A}{R^2},\ \sigma + \rho = 0. \qquad (3.1.15)$$

При этом R=R(t) удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{R}R^3 - \dot{R}^2R^2 - \alpha R^2 + \beta_1 = 0, \qquad (3.1.16)$$

где

$$\alpha = \frac{A+b}{4}; \beta_1 = \frac{2\tilde{\varepsilon}_0(A+b)}{3A}. \qquad (3.1.17)$$

Решение уравнения (3.1.16) дает

$$t = \int \frac{\sqrt{2}RdR}{\sqrt{2\tilde{c}R^4 - 2\alpha R^2 + \beta_1}}. \qquad (3.1.18)$$

На стадии доминирования ультрарелятивистского вещества, считаем, что

$$\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4}, \varepsilon_1 >> \rho.$$

У нас

$$\rho = \frac{3A\tilde{c}}{A+b} - \frac{A}{R^2}, \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4} >> \frac{3A\tilde{c}}{A+b} - \frac{A}{R^2}. \qquad (3.1.19)$$

Будем полагать, что

$$\frac{3A\tilde{c}}{A+b} >> \frac{A}{R^2}. \qquad (3.1.20)$$

Тогда из (3.1.18) имеем

$$t=\sqrt{\frac{3A}{2(A+b)}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}RdR}{R^2\sqrt{\frac{3A\tilde{c}}{A+b}-\frac{3A}{4R^2}+\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{R^4}}}, \tag{3.1.21}$$

и можно получить

$$t\approx\sqrt{\frac{3A}{(A+b)\tilde{\varepsilon}_0}}\cdot\int RdR. \tag{3.1.22}$$

В итоге на стадии доминирования ультрарелятивистского вещества имеем

$R\sim\sqrt{t}.$

4. Стадия преобладания пылевидного вещества

Считая, что на данной стадии $\varepsilon_1=0,\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{R^3}$, из (3.1.12) можно получить

$$\begin{aligned}&\pi=\frac{-3A\tilde{c}}{A+b},\tilde{c}>0,\\&\rho=\frac{3A\tilde{c}R^2-A(A+b)}{R^2(A+b)},\\&\sigma=\frac{-3A\tilde{c}R^2+A(A+b)}{R^2(A+b)}.\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Уравнения состояния анизотропной жидкости для разных компонент давления имеют вид (3.1.15) и в этом случае.

При этом R(t) удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{R}R^2-\dot{R}^2R-\alpha R+\beta=0, \tag{3.1.24}$$

где

$$\alpha=\frac{A+b}{4};\beta=\frac{\varepsilon_0(A+b)}{2A}. \tag{3.1.25}$$

Решение уравнения (3.1.24) даёт

$$t=\int\frac{\sqrt{3R}dR}{\sqrt{3\tilde{c}R^3-3\alpha R+2\beta}}. \tag{3.1.26}$$

На стадии доминирования пылевидного вещества считаем, что

$\varepsilon_1=0,\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{R^3},\varepsilon>>\rho.$

У нас сейчас

$$\rho = \frac{3A\tilde{c}}{A+b} - \frac{A}{R^2}. \qquad (3.1.27)$$

Пусть

$$\frac{3A\tilde{c}}{A+b} >> \frac{A}{R^2},\ \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{R}^3} >> \frac{3A\tilde{c}}{A+b}. \qquad (3.1.28)$$

Тогда из (3.1.26) имеем

$$t = \sqrt{\frac{A}{A+b}} \cdot \int \frac{\sqrt{3}dR}{R\sqrt{\frac{3A\tilde{c}}{A+b} - \frac{3A}{4R^2} + \frac{\varepsilon_0}{R^3}}}, \qquad (3.1.29)$$

и можно получить

$$t \approx \sqrt{\frac{3A}{(A+b)\varepsilon_0}} \cdot \int \sqrt{R}dR. \qquad (3.1.30)$$

В итоге на стадии доминирования пылевидной материи: $R \sim t^{2/3}$.

5. Стадия доминирования темной энергии

Считая, что на данной стадии $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{R^3}$ и $\rho >> \varepsilon$. Имеем

$$\rho - \varepsilon = \frac{3A\tilde{c}}{A+b} - \frac{A}{R^2} - \frac{\varepsilon_0}{R^3} >> 0. \qquad (3.1.31)$$

Тогда из (3.1.29) получим

$$t \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}}} \cdot \int \frac{dR}{R} = \frac{1}{H}\int \frac{dR}{R}. \qquad (3.1.32)$$

Тогда $R \sim e^{Ht}, \left(\mathrm{H} = \sqrt{\tilde{\mathrm{c}}}\right)$.

6. Заключение

Кинематические параметры анизотропной жидкости (темной энергии) в нашей модели имеют вид: расширение $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R}$, вращение $\omega = \frac{\sqrt{b}}{2R}$, ускорение $a = \frac{\sqrt{b}\dot{R}}{\sqrt{A+bR}}$. Сдвиг отсутствует. Параметр расширения пылевидной жидкости у нас равен $\tilde{\Theta} = \frac{3\sqrt{A}\dot{R}}{\sqrt{A+bR}}$, вращение, и сдвиг, и ускорение для пыли отсутствуют. Наша модель описывает фридмановский этап эволюции Вселенной с последующим переходом к ускоренному экспоненциальному

расширению. При этом нами не построена первая космологическая стадия инфляции для модели с метрикой (3.1.1). Укажем, что в работе [106] построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки вида (3.1.1), когда источниками гравитации являются идеальная жидкость, чистое излучение и скалярное поле. При этом идеальная жидкость описывает вращающуюся фантомную материю. Этим решением можно моделировать первую стадию инфляции. При этом на первой стадии инфляции вращение фантомной материи $\omega \sim \frac{1}{R}\left(\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{b}}}{2\mathrm{R}}\right)$.

Будем считать на качественном уровне, что на первой стадии инфляции в рамках нашей модели с метрикой (3.1.1) в ней присутствует скалярное поле, анизотропная вращающаяся жидкость и еще несколько источников тяготения, при этом вращение анизотропной жидкости $\omega \sim \frac{1}{R}$. Будем при этом полагать, что анизотропная жидкость (моделирующая темную энергию) не передает вращение другим видам материи и на фридмановском этапе – рожденным частицам материи. На наш взгляд, данное предположение представляется обоснованным, когда уравнение состояния анизотропной жидкости для одной компоненты давления близко к вакуумоподобному состоянию, но не совпадает с ним, а для другой компоненты давления – вакуумоподобное уравнение состояния. (Отметим, что, согласно [108], момент импульса вращающейся идеальной жидкости $L \sim (\rho + p)R^5\omega$, где $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{3}\Theta = \frac{1}{3}u^{a}_{;a}$).

Тогда при моделировании нашим сценарием всей эволюции Вселенной (с учетом на качественном уровне первой инфляционной стадии), считая, что масштабный фактор Вселенной эволюционирует при раздувании и последующем расширении от планковского значения $R_{pl} \approx 10^{-33}$см до современного размера наблюдаемой Вселенной $R_c \approx 10^{28}$см, и полагая при этом, что в планковскую эпоху скорость вращения темной энергии

$\omega_{pl} = 10^{43}\,1/c$, а на всей эволюции Вселенной $\omega \sim \frac{1}{R}$, можно считать, что в современную эпоху скорость вращения анизотропной жидкости (темной энергии) порядка $\omega_c = 10^{-11}$ 1/год, что совпадает со значением угловой скорости вращения Вселенной, принятой в работе [104].

В работах [109, 110] исследовано воздействие кривизны пространства – времени на относительный позиционный угол Δ между направлением максимальной вытянутости радиоисточника и направлением интегральной плоскости поляризации при распространении излучения от источника к наблюдателю. Более детальный анализ выполнен для космологической модели с глобальным вращением (метрика типа Гёделя). В [109] обнаружено, что глобальное вращение Вселенной индуцирует анизотропию с $\Delta \sim \sin^2\theta$ (θ - угол между направлением луча и осью вращения). По всей видимости, эффект анизотропии, найденный в [109], должен быть и в других однородных космологических моделях с вращением с метриками разных типов по Бьянки. В [109] данный эффект найден для метрики типа Гёделя. В этой работе установлено, что при скорости вращения Вселенной $\Omega_0 = 10^{-13}$ рад/год величина угла Δ может быть $4\cdot10^{-6}$. Если во Вселенной имеется вращающаяся со скоростью $\omega = 10^{-11}$ 1/год темная энергия (анизотропная жидкость), то величина угла Δ для ряда радиогалактик может быть ещё больше. Это должно привлечь внимание астрофизиков к поискам анизотропии, обусловленной глобальным вращением тёмной энергии Вселенной на основе наблюдательных исследований угла Δ для различных радиогалактик.

§ 3.2. Модель с метрикой типа VIII по Бьянки

В нашей работе [111] построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки. Модель описывает фридмановский этап эволюции Вселенной, с последующим переходом к

ускоренному экспоненциальному расширению, наблюдаемому в современную эпоху. Источником гравитационного поля в нашей космологической модели являются: ультрарелятивистское вещество, пыль и сопутствующая анизотропная вращающаяся темная энергия.

В рамках общей теории относительности построена анизотропная космологическая модель [112] с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \quad \alpha,\beta=0,1,2,3, \tag{3.2.1}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ - элементы диагональной лоренцевой матрицы, θ^a - ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом:

$$\theta^0 = dt - Rv_A e^A, \ \theta^A = RK_A e^A, \tag{3.2.2}$$

при этом $v_A = \{0,0,1\}$, $K_A = \{a,a,b\}$, $A = 1,2,3$. 1 – формы e^A представляют собой следующие выражения:

$$\begin{aligned} e^1 &= chy\cos z dx - \sin z dy, \\ e^2 &= chy\sin z dx + \cos z dy, \\ e^3 &= shy dx + dz. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Источниками гравитации у нас являются три жидкости с соответствующими уравнениями состояния и скалярное поле.

В работе используются уравнения Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} \ . \ (\aleph = 1) \tag{3.2.4}$$

Тензор энергии – импульса скалярного поля в координатной форме имеет следующий вид:

$$T_{ij} = \varphi_{,i}\varphi_{,j} - \left\{\frac{1}{2}\varphi_{,k}\varphi_{,l}g^{kl} - U(\varphi)\right\}g_{ij} \tag{3.2.5}$$

Уравнение скалярного поля:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\varphi_{,k}\right) + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \tag{3.2.6}$$

Тензор энергии-импульса сопутствующей анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ab} = (p + \rho)u_a u_b + (\sigma - p)\chi_a \chi_b - p\eta_{ab}, \qquad (3.2.7)$$

где p, σ – компоненты давления анизотропной жидкости, ρ – плотность энергии анизо-тропной жидкости, $\chi_a = \{0,0,0,1\}$ - проекция на тетраду вектора анизотропии, $u_a = \delta_0^a$ - вектор 4 – скорости сопутствующей анизотропной жидкости в проекции на тетраду.

Тензор энергии - импульса несопутствующей идеальной пылевидной жидкости

$$T_{ab} = \mu \upsilon_a \upsilon_b, \qquad (3.2.8)$$

где μ – плотность энергии пыли, υ_a – тетрадные компоненты её 4-скорости.

Используется тензор энергии – импульса (ТЭИ) несопутствующей идеальной ультрарелятивистской жидкости

$$T_{ab} = (\varepsilon + \pi)V_a V_b - \pi\eta_{ab}, \qquad (3.2.9)$$

где ε – плотность энергии, π – давление, V_a – тетрадные компоненты 4-скорости данной жидкости. Уравнение состояния идеальной ультрарелятивистской жидкости имеет вид

$$\pi = \varepsilon / 3. \qquad (3.2.10)$$

1. Описание первой стадии инфляции

Мы считаем, что на первой стадии инфляции Вселенная заполнена скалярным полем с ТЭИ (3.2.5) и анизотропной жидкостью с ТЭИ (3.2.7). Анизотропная жидкость у нас описывает темную энергию. Тогда из уравнений Эйнштейна (3.2.4) для метрики (3.2.1) – (3.2.3) можно получить уравнение для получения масштабного фактора $R = R(t)$:

$$R\ddot{R} - \dot{R}^2 = \frac{b^2}{4a^4}. \qquad (3.2.11)$$

Следовательно, на данном этапе масштабный фактор

$$R = \frac{b}{2a^2 H} ch(Ht). \qquad (3.2.12)$$

Уравнение скалярного поля (3.2.6) принимает вид:

$$3\frac{\dot{R}}{R}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} + \frac{dU}{d\varphi}\frac{b^2}{\left(1-b^2\right)} = 0, \quad \text{где } \varphi(t) = \varphi_0 e^{-Ht}. \qquad (3.2.13)$$

Из (3.2.12) следует, что

$$\frac{\dot{R}}{R} = Hth(Ht) = H\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\varphi_0^2 + \varphi^2}. \qquad (3.2.14)$$

Из (3.2.13) следует, что

$$\dot{\varphi} = -H\varphi, \ \ddot{\varphi} = H^2\varphi. \qquad (3.2.15)$$

Найдем потенциал скалярного поля. Учитывая (3.2.14) - (3.2.15), из (3.2.13) получим:

$$U = \frac{H^2(1-b^2)}{b^2}\left(3\varphi_0^2 \ln\left(\varphi_0^2 + \varphi^2\right) - 2\varphi^2\right). \qquad (3.2.16)$$

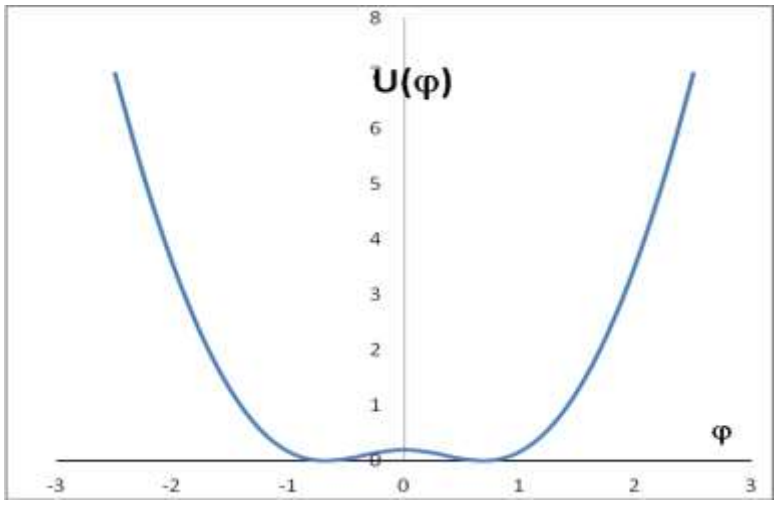
Исследуем функцию $U(\varphi)$.

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{H^2(1-b^2)}{b^2}\frac{2\varphi_0^2\varphi - 4\varphi^3}{\varphi_0^2 + \varphi^2}. \qquad (3.2.17)$$

При $\left(1-b^2\right) < 0$ получим три точки экстремума:

$$\varphi_1 = 0 - \max, \quad \varphi_{2,3} = \pm\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} - \min. \qquad (3.2.18)$$

Построим график потенциала скалярного поля $U(\varphi)$:



Для данного графика мы полагали, что

$$\frac{\left(1-b^2\right)}{b^2}H^2=-1,\ \ U(0)\approx 0,2,\ U\left(\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}\right)=0,\ \ \varphi_0^2=\frac{2}{3}e^{1/3}\approx 0,93. \qquad (3.2.19)$$

Из уравнений Эйнштейна, с учетом (3.2.12), (3.2.13) и (3.2.16), получим:

плотность энергии анизотропной жидкости

$$\rho=-\frac{H^2\left(4a^2+\left(1-b^2\right)\left(2+3ch^2(Ht)\right)\right)}{b^2ch^2(Ht)}+\frac{1}{2}\varphi_0^2H^2e^{-2Ht}\frac{\left(1-3b^2\right)}{b^2}-$$
$$-\frac{H^2(1-b^2)}{b^2}\left(3\varphi_0^2\ln\left(\varphi_0^2+\varphi_0^2e^{-2Ht}\right)-2\varphi_0^2e^{-2Ht}\right), \qquad (3.2.20)$$

компоненты анизотропного давления

$$p=\frac{H^2(1-b^2)}{b^2}\left(3-\frac{5}{2}\varphi_0^2e^{-2Ht}+3\varphi_0^2\ln\left(\varphi_0^2+\varphi_0^2e^{-2Ht}\right)\right),$$
$$\sigma=\frac{H^2\left(4a^2+\left(b^2-1\right)\left(4-3ch^2(Ht)\right)\right)}{b^2ch^2(Ht)}-\frac{1}{2}\varphi_0^2H^2e^{-2Ht}\frac{\left(1-b^2\right)}{b^2}+ \qquad (3.2.21)$$
$$+\frac{H^2(1-b^2)}{b^2}\left(3\varphi_0^2\ln\left(\varphi_0^2+\varphi_0^2e^{-2Ht}\right)-2\varphi_0^2e^{-2Ht}\right).$$

В работе [111] для космологической модели с вращением мы рассматривали, что первая стадия инфляции начинается в планковское время. Однако в духе работы [24] можно обоснованно считать, что первая инфляция начинается в период Великого объединения. Поэтому будем полагать, что первая инфляция начинается при $t_1=10^{-37}$с, а заканчивается при $t_2=10^{-34}$с. Масштабный фактор $R(t)$ при этом равен 10^{-27}см в момент $t_1=10^{-37}$с. Мы считаем феноменологически, что после окончания первой инфляции энергия скалярного поля переходит в энергию рожденных частиц.

2. Фридмановские этапы эволюции Вселенной

Мы считаем, что на фридмановских этапах Вселенная заполнена ультрарелятивистской жидкостью, пылевидной жидкостью и анизотропной жидкостью. Тогда в системе уравнений Эйнштейна (3.2.4) имеем:

$$T_{ab} = T_{ab}^{(1)} + T_{ab}^{(2)} + T_{ab}^{(3)}, \qquad (3.2.22)$$

где $T_{ab}^{(1)}$ имеет вид (3.2.7), $T_{ab}^{(2)}$ имеет вид (3.2.8), $T_{ab}^{(3)}$ имеет вид (3.2.9).

Из закона сохранения тензора энергии – импульса и отсутствия взаимодействия между данными феноменологическими жидкостями следует, что ковариантная 4-дивергенция должна быть равна нулю для каждого из слагаемых в (3.2.22). Воспользуемся этим условием в следующем виде:

$$T_{;\nu}^{\mu\nu(2)} = 0, \quad T_{;\nu}^{\mu\nu(3)} = 0. \qquad (3.2.23)$$

В нашей метрике изотропные жидкости нельзя считать сопутствующими, поскольку это условие несовместимо с единичным значением модуля 4-скорости и одновременно условием унимодулярности определителя метрики, поэтому было взято (в координатах)

$$V_i = \upsilon_i = \{\sqrt{(a+b)/b}, 0, 0, 0\}. \qquad (3.2.24)$$

С учетом (3.2.24), уравнения (3.2.23) имеют следующие решения:

$$\mu = \mu_0 / R^3, \ \varepsilon = \varepsilon_0 / R^4, \qquad (3.2.25)$$

где μ_0, ε_0- произвольные постоянные. Соотношения (3.2.25) соответствуют уравнениям зависимости плотностей энергии от масштабного фактора во фридмановских космологических моделях.

Система уравнений (3.2.4) с учетом (3.2.22) – (3.2.25):

$$-\frac{b^2\left(4a^2+b^2-3\right)+4a^4\left(1-3b^2\right)\dot{R}^2+8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \rho + \frac{\left(4a+3b\right)\varepsilon_0+3\left(a+b\right)\mu_0 R}{3bR^4},$$

$$\frac{\left(1-b^2\right)\left(b^2+4a^4\left(\dot{R}^2+2R\ddot{R}\right)\right)}{4a^4b^2R^2} = p + \frac{\varepsilon_0}{3R^4},$$

$$\frac{b^2\left(4a^2+3b^2-1\right)+4a^4\left(3-b^2\right)\dot{R}^2-8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \sigma + \frac{\left(4a+4b+b^3\right)\varepsilon_0+3\left(a+b\right)\mu_0 R}{3b^3R^4},$$

$$\frac{b^2+4a^4\left(\dot{R}^2-R\ddot{R}\right)}{2a^4bR^2} = \frac{\left(a+b\right)\left(4\varepsilon_0+3\mu_0 R\right)}{3b^2R^4}. \qquad (3.2.26)$$

Последнее уравнение системы (3.2.26) позволяет найти зависимость $R = R(t)$.

На стадии доминирования ультрарелятивистской жидкости у нас $\varepsilon = \varepsilon_0 / R^4$. Пренебрегая пылевидной жидкостью, из системы уравнений Эйнштейна при данном предположении получим:

масштабный фактор

$$R = R_0\sqrt{t}\,, \qquad R_0 = \sqrt[4]{\frac{4\varepsilon_0(a+b)}{3}}\,, \tag{3.2.27}$$

плотность энергии анизотропной жидкости

$$\rho = -\frac{\left(4a^2+b^2-3\right)\sqrt{3}}{8a^4 t\sqrt{\varepsilon_0\left(a+b\right)}} + \frac{3b^2+1}{4b^2t^2} - \frac{4a+3b}{4b(a+b)t^2}, \tag{3.2.28}$$

компоненты давления анизотропной жидкости

$$p = \frac{\left(1-b^2\right)\sqrt{3}}{8a^4 t\sqrt{\varepsilon_0\left(a+b\right)}} - \frac{\left(1-b^2\right)}{2b^2t^2} - \frac{1}{4(a+b)t^2}, \tag{3.2.29}$$

$$\sigma = \frac{\left(4a^2+3b^2-1\right)\sqrt{3}}{8a^4 t\sqrt{\varepsilon_0\left(a+b\right)}} + \frac{\left(3+b^2\right)}{4b^2t^2} - \frac{\left(4a+4b+b^3\right)}{4b^3(a+b)t^2}. \tag{3.2.30}$$

На стадии доминирования пылевидной жидкости мы считаем, что $\mu = \mu_0 / R^3,\ \varepsilon = 0$**.** При этом получаем решения уравнений Эйнштейна (3.2.4):

$$R = R_0 t^{2/3}, \qquad \rho = \frac{\left(3-4a^2-b^2\right)}{4a^4R_0^2t^{4/3}} + \frac{4}{3t^2} - \frac{\left(a+b\right)\mu_0}{bR_0^3t^2}, \tag{3.2.31}$$

$$p = \frac{\left(1-b^2\right)}{4a^4R_0^2t^{4/3}}, \qquad \sigma = \frac{\left(4a^2+3b^2-1\right)}{4a^4R_0^2t^{4/3}} + \frac{4}{3t^2} - \frac{\left(a+b\right)\mu_0}{b^3R_0^3t^2}. \tag{3.2.32}$$

На стадии доминирования анизотропной жидкости (темной энергии) получаем:

$$R = R_0 e^{Ht}, \qquad \rho = \frac{\left(3-4a^2-b^2\right)}{4a^4R_0^2e^{2Ht}} + \frac{3(b^2-1)H^2}{b^2}, \tag{3.2.33}$$

$$p = \frac{1-b^2}{4a^4R_0^2e^{2Ht}} + \frac{3(1-b^2)H^2}{b^2}, \quad \sigma = \frac{\left(4a^2+3b^2-1\right)}{4a^4R_0^2e^{2Ht}} + \frac{3(1-b^2)H^2}{b^2}. \tag{3.2.34}$$

Получим, на данной стадии, что $\rho + p = \frac{\left(4 - 4a^2 - 2b^2\right)}{4a^4 R_0^2 e^{2Ht}} > 0$, если $b^2 < 2 - 2a^2$;

$\rho + p < 0$, если $b^2 > 2 - 2a^2$; $\rho + \sigma = \frac{\left(2 + 2b^2\right)}{4a^4 R_0^2 e^{2Ht}} > 0$ при любых значениях констант.

3. Сопоставление этапа первой инфляции и стадии доминирования ультрарелятивистской жидкости

Наша задача – состыковать компоненты анизотропной жидкости в конце стадии первой инфляции и в начале ультрарелятивистской стадии.

Для этого приравниваем составляющие плотности энергии и компонент давления анизотропной жидкости на каждой из этих стадий на момент времени окончания этапа первой инфляции $t = 10^{-34} c$. Мы считаем, что радиационная стадия эволюции Вселенной начинается сразу после первой стадии инфляции.

Из наших уравнений выразим

$$\varphi_0^2\left(6\ln\left(2\varphi_0\right) + 1{,}5\right) = \frac{b^2}{\left(1 - b^2\right)H^2}\left(-\frac{2H^2}{b^2} - \frac{1}{4b * 10^{-68}}\left(\frac{3b^2 + 1}{b} - \frac{4a + 3b}{a + b}\right)\right). \qquad (3.2.35)$$

Для простоты расчетов разложим функцию $f\left(\varphi_0\right) = 6\ln\left(2\varphi_0\right) + 1{,}5$ в ряд в окрестностях точки $\varphi_0 = 0{,}5$ и получим приближенно $f\left(\varphi_0\right) = 12\varphi_0 - 4{,}5$.

В ходе решения для φ_0 из (3.2.35) было получено:

$$\varphi_0^3 - 0{,}375\varphi_0^2 + K = 0, \qquad (3.2.36)$$

где $K = \frac{b^2}{12\left(1 - b^2\right)H^2}\left(\frac{2H^2}{b^2} + \frac{1}{4b \cdot 10^{-68}}\left(\frac{3b^2 + 1}{b} - \frac{4a + 3b}{a + b}\right)\right)$. (3.2.37)

Согласно формуле Кардано, для уравнения вида

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (3.2.38)$$

возможны 3 варианта решений: один действительный и 2 комплексных

корня; три действительных корня, два из которых кратные; три кратных действительных корня.

Если $Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$, то $y_1=A+B,\ y_{2,3}=-\frac{A+B}{2}\pm i\sqrt{3}\frac{A-B}{2}$, (3.2.39)

где $A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}},\ B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}},\ A\cdot B=-\frac{p}{3}.$ (3.2.40)

При $Q=0$, $A=B$ и два корня являются кратными: $y_1=2A, y_2=y_3=-A$. При $A=0$ все три корня являются кратными: $y_1=y_2=y_3=0$. Значения корней y_1, y_2, y_3 из формулы (3.2.39) справедливы и для случая $Q<0$.

Приводим уравнение (3.2.36) к виду (3.2.38). Для этого сделаем замену в уравнении (3.2.36):

$\varphi_0=y+0{,}125.$ (3.2.41)

Преобразованное уравнение (3.2.36) имеет вид:

$y^3-0{,}047y+K-0{,}004=0.$ (3.2.42)

В этой формуле $y=\varphi_0-0{,}125,\ p=-0{,}047,\ q=-0{,}004+K.$ (3.2.43)

Решаем уравнение (3.2.42):

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-\frac{1}{8^6}+\left(-0{,}002+\frac{1}{12\left(1-b^2\right)}\left(1+\frac{\left(3b^2+1\right)(a+b)-4ab-3b^2}{8H^2\cdot10^{-68}\cdot(a+b)}\right)\right)^2. \quad (3.2.44)$$

При $Q>0$ находим интересующий нас корень φ_0:

$$\varphi_0=y_1+0{,}125=$$
$$=\sqrt[3]{\left(0{,}002-\frac{1}{12\left(1-b^2\right)}\left(1+\frac{\left(3b^2+1\right)(a+b)-4ab-3b^2}{8H^2\cdot10^{-68}\cdot(a+b)}\right)\right)+\sqrt{-\frac{1}{8^6}+\left(-0{,}002+\frac{1}{12\left(1-b^2\right)}\left(1+\frac{\left(3b^2+1\right)(a+b)-4ab-3b^2}{8H^2\cdot10^{-68}\cdot(a+b)}\right)\right)^2}}+$$
$$+\sqrt[3]{\left(0{,}002-\frac{1}{12\left(1-b^2\right)}\left(1+\frac{\left(3b^2+1\right)(a+b)-4ab-3b^2}{8H^2\cdot10^{-68}\cdot(a+b)}\right)\right)-\sqrt{-\frac{1}{8^6}+\left(-0{,}002+\frac{1}{12\left(1-b^2\right)}\left(1+\frac{\left(3b^2+1\right)(a+b)-4ab-3b^2}{8H^2\cdot10^{-68}\cdot(a+b)}\right)\right)^2}}+0{,}125$$

Таким образом, количество констант у нас достаточно, чтобы состыковать плотности энергии и компоненты давления анизотропной жидкости в конце стадии первой инфляции и в начале стадии доминирования ультрарелятивистской жидкости.

4. Заключение

Кинематические параметры вращающейся анизотропной жидкости (тёмной энергии) в данной модели имеют вид: $\Theta = 3\dot{R}/R$ - расширение, $A = \dot{R}/bR$ - ускорение, $\omega = 1/2a^2R$ - вращение, сдвиг отсутствует. На всех стадиях фридмановской эволюции зависимости масштабного фактора от времени совпадают с аналогичными во фридмановской космологии.

Будем считать на качественном уровне, что до первой стадии инфляции, в рамках нашей модели с метрикой (3.2.1), в ней присутствует анизотропная вращающаяся жидкость (тёмная энергия) и ещё некоторые поля – источники тяготения и при этом вращение анизотропной жидкости $\omega \sim R^{-1}$ на протяжении всей эволюции, описываемой нашей моделью. При этом положим, что тёмная энергия, моделируемая вышеуказанной жидкостью, не передаёт вращение другим видам материи (частицам, рождённым по окончании инфляции) и на фридмановском этапе. Тогда при моделировании нашим сценарием всей космологической эволюции, считая, что масштабный фактор Вселенной эволюционирует при раздувании и последующем расширении от планковского значения $R_{Pl} \approx 10^{-33}$ см до современного размера наблюдаемой вселенной $R_c \approx 10^{28}$ см и полагая при этом, что в планковскую эпоху скорость вращения тёмной энергии $\omega_{Pl} \approx 10^{43}$ с$^{-1}$, можно получить угловую скорость вращения анизотропной жидкости (тёмной энергии) $\omega_c \approx 10^{-11}$ 1/год, что совпадает со значением угловой скорости вращения Вселенной, полученной в [104] и [111]. Это должно привлечь внимание астрофизиков к поискам анизотропии, обусловленной глобальным вращением Вселенной, на основе наблюдательных исследований относительного позиционного угла Δ для различных радиогалактик. В работах [106, 110] исследовано воздействие кривизны пространства-времени на относительный позиционный угол между направлением максимальной

вытянутости радиоисточника и направлением интегральной плоскости поляризации при распространении излучения от источника к наблюдателю.

§ 3.3. Модель с метрикой типа IX по Бьянки

В рамках общей теории относительности построена анизотропная космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа IX по Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \quad (\alpha,\beta = 0,1,2,3) \tag{3.3.1}$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, θ^α — ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом:

$$\theta^0 = dt - R\, v_A\, e^A, \;\; \theta^1 = R\, K_1\, e^1, \; \theta^2 = R\, K_2\, e^2, \; \theta^3 = R\, K_3\, e^3, \tag{3.3.2}$$

где $R = R(t)$, а K_A, v_A = const, причём $K_A > 0$, при $A = 1, 2, 3$.

1 – формы e^A имеют вид

$$\begin{aligned} e^1 &= \cos y \cos z\, dx - \sin z\, dy, \\ e^2 &= \cos y \sin z\, dx + \cos z\, dy, \\ e^3 &= -\sin y\, dx + \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

В работе уравнения Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = T_{ab} \tag{3.3.4}$$

проецируются на лоренцеву тетраду.

Тензор энергии-импульса сопутствующей анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T^{(1)}_{ab} = (\pi + \rho) u_a u_b + (\sigma - \pi)\chi_a\chi_b - \pi\eta_{ab}, \tag{3.3.5}$$

где π, σ – компоненты давления анизотропной жидкости, ρ – плотность энергии анизотропной жидкости, $\chi_i = \{0,1,0,0\}$ - проекция на тетраду вектора

анизотропии, $u_a = \delta_0^a$ - вектор 4 – скорости сопутствующей анизотропной жидкости в проекции на тетраду.

Тензор энергии - импульса несопутствующей идеальной пылевидной жидкости:

$$T_{ab}^{(2)} = \varepsilon v_a v_b, \tag{3.3.6}$$

где ε – плотность энергии пыли, v_a – тетрадные компоненты её 4-скорости.

Тензор энергии – импульса идеальной ультрарелятивистской жидкости:

$$T_{ab}^{(3)} = (\varepsilon_1 + p) V_a V_b - \pi \eta_{ab}, \tag{3.3.7}$$

где ε_1 – плотность её энергии, p – давление, V_a – тетрадные компоненты 4-скорости данной жидкости. Уравнение состояния идеальной ультрарелятивистской жидкости имеет вид

$$p = \varepsilon_1 / 3. \tag{3.3.8}$$

1. Описание первой стадии инфляции

Для рассмотрения этой стадии введём скалярное поле, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g}\, g^{ik} \phi_{,k}) + \frac{dU}{d\phi} = 0 \tag{3.3.9}$$

с потенциалом

$$U = -\frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda \phi^4}{4}, \tag{3.3.10}$$

Называемый потенциалом Хиггса, а также чистое излучение с волновым вектором, в проекции на тетраду принимающим вид $k_\alpha = \{k_0, k_0, 0, 0\}$, тогда тензор энергии-импульса материи

$$T_{ab} = (\pi + \rho) u_a u_b + (\sigma - \pi) \chi_a \chi_b - \pi \eta_{ab} + \phi_{,i}\, \phi_{,k}\, e_a^{\ i} e_b^{\ k} -$$
$$- \left((1/2) \phi_{,i}\, \phi_{,k}\, e_\gamma^{\ i} e^{\gamma k} - U \right) \eta_{ab} + \omega k_a k_b \tag{3.3.11}$$

в сочетании с полевым уравнением (3.3.9) в рассматриваемой метрике (3.3.1)

$$3\frac{R'}{R}\varphi' + \varphi'' + \frac{K_1^2}{K_2^2}\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = 0 \qquad (3.3.12)$$

приводит к системе уравнений Эйнштейна (3.3.4) в форме

$$-\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}} + 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2K_1^{\,2} + K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}R^2} = \rho + U + \omega k_0^{\,2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 + \frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right), \qquad (3.3.13)$$

$$-\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right) + 3\frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2K_1^{\,2} - 3K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}R^2} = \sigma - U + \omega k_0^{\,2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 + \frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right), \qquad (3.3.14)$$

$$\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\left(\frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}} - 1\right) - \frac{1}{4K_2^{\,2}R^2} = \pi - U + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{v_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right), \qquad (3.3.15)$$

$$2\left(-\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_1 K_1}{2K_2^{\,4}R^2} = \omega k_0^{\,2} + \frac{v_1\dot{\varphi}^2}{K_1}. \qquad (3.3.16)$$

Положим в (3.3.12) $\varphi = \varphi_0 e^{-Ht}$, тогда решение системы (3.3.13)-(3.3.16) даётся выражениями

$$R = R_0 e^{\alpha(t)}, \qquad \alpha(t) = Qt - \frac{K_1^{\,2}\lambda\varphi_0^{\,2}}{6HK_2^{\,2}e^{2Ht}},\ Q = \frac{H}{3} - \frac{K_1^{\,2}m^2}{3HK_2^{\,2}}, \qquad (3.3.17)$$

$$\omega k_0^{\,2} = \frac{4K_1 v_1 \lambda\varphi_0^{\,2}}{3K_2^{\,2}e^{2Ht}} + \frac{K_1 v_1}{2R_0^{\,2}e^{2\alpha(t)}K_2^{\,4}} - \frac{\varphi_0^{\,2}H^2 v_1}{K_1 e^{2Ht}}, \qquad (3.3.18)$$

$$\pi = -3\left(Q + \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{3HK_2^2e^{2Ht}}\right)^2\frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4\lambda\varphi_0^2}{3e^{2Ht}} - \frac{1}{4R_0^2e^{2\alpha(t)}K_2^2} - \frac{\varphi_0^2H^2}{2e^{2Ht}}\frac{K_2^2}{K_1^2} - \\ -\frac{m^2\varphi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda\varphi_0^4}{4e^{4Ht}}, \qquad (3.3.20)$$

$$\sigma = -3\left(Q + \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{3HK_2^2e^{2Ht}}\right)^2\frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4K_1\lambda\varphi_0^2(K_1 - v_1)}{3K_2^2e^{2Ht}} + \frac{-K_2^2 + 2v_1^2 - 2K_1v_1}{4R_0^2e^{2\alpha(t)}K_2^4} - \\ -\frac{m^2\varphi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda\varphi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\varphi_0^2H^2}{2e^{2Ht}}\frac{(K_1 - v_1)^2}{K_1^2}, \qquad (3.3.21)$$

$$\rho = 3\left(Q + \frac{K_1^{\,2}\lambda\varphi_0^{\,2}}{3HK_2^{\,2}e^{2Ht}}\right)^2\frac{K_2^{\,2}}{K_1^{\,2}} - \frac{4v_1\lambda\varphi_0^{\,2}(K_1 - v_1)}{3K_2^{\,2}e^{2Ht}} + \frac{2K_1^{\,2} + K_2^{\,2} - 2K_1v_1}{4R_0^{\,2}e^{2\alpha(t)}K_2^{\,4}} + \frac{m^2\varphi_0^{\,2}}{2e^{2Ht}} -$$

$$-\frac{\lambda\varphi_0{}^4}{4e^{4Ht}}-\frac{H^2\varphi_0{}^2(K_1-\nu_1)^2}{2e^{2Ht}K_1{}^2}. \qquad (3.3.22)$$

2. Фридмановские этапы эволюции Вселенной

Мы полагаем, что на фридмановских этапах Вселенная заполнена ультрарелятивистской жидкостью, пылевидной жидкостью и анизотропной жидкостью. Тогда в системе уравнений Эйнштейна (3.3.4) имеем:

$$T_{ab}=T_{ab}^{(1)}+T_{ab}^{(2)}+T_{ab}^{(3)}. \qquad (3.3.23)$$

Ковариантные дивергенции тензоров энергии-импульса идеальных жидкостей:

$$T_{;b}^{ab(2)}=0\,,\ \ T_{;b}^{ab(3)}=0, \qquad (3.3.24)$$

совместные с (3.3.24) 4-скорости материи

$$V_a=v_a=(\sqrt{u_1{}^2+1},u_1,0,0),$$

с учетом (3.3.6) – (3.3.8) уравнения (3.3.24) дают:

$$\varepsilon=\tilde{\varepsilon}/R^3,\varepsilon_1=\tilde{\varepsilon}_1/R^4 \qquad (3.3.25)$$

где $\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon}_1$- произвольные постоянные. Тогда система уравнений (3.3.4) примет форму:

$$\begin{aligned}
&-\left(2\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\frac{\nu_1{}^2}{K_1{}^2}+3\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{2K_1{}^2+K_2{}^2}{4K_2{}^4R^2}=\rho+\left(\varepsilon+\frac{4}{3}\varepsilon_1\right)(u_1{}^2+1)-\frac{\varepsilon_1}{3},\\
&-\left(2\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)+3\frac{\dot{R}^2}{R^2}\frac{\nu_1{}^2}{K_1{}^2}+\frac{2K_1{}^2-3K_2{}^2}{4K_2{}^4R^2}=\sigma+\left(\varepsilon+\frac{4}{3}\varepsilon_1\right)u_1{}^2+\frac{\varepsilon_1}{3}, \qquad (3.3.26)\\
&\left(2\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\left(\frac{\nu_1{}^2}{K_1{}^2}-1\right)-\frac{1}{4K_2{}^2R^2}=\pi+\frac{\varepsilon_1}{3},
\end{aligned}$$

Эволюция масштабного фактора получается из (3.3.26) в виде

$$2\left(-\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\frac{\nu_1}{K_1}+\frac{\nu_1K_1}{2K_2{}^4R^2}=\left(\varepsilon+\frac{4}{3}\varepsilon_1\right)u_1\sqrt{1+u_1{}^2}. \qquad (3.3.27)$$

Отсюда

$$t = \int \frac{RdR}{\sqrt{DR^4 - AR^2 + \frac{2}{3}CR + \frac{B}{2}}}, \qquad (3.3.28)$$

где

$$A = \frac{K_1^{\,2}}{4K_2^{\,4}}, \quad B = \frac{2K_1}{3\nu_1}\tilde{\varepsilon}_1 u_1\sqrt{u_1^{\,2}+1}, \quad C = \frac{K_1}{2\nu_1}\tilde{\varepsilon}u_1\sqrt{u_1^{\,2}+1},\ D \ -\ \text{константы.}$$

Данный интеграл (3.3.28) в общем случае не выражается в элементарных функциях, поэтому рассмотрим его асимптотическое поведение при больших и малых значениях масштабного фактора R и соответствующим им временам.

При малых R получим приближённо

$$R = R_0\sqrt{t},\ R_0 = \sqrt[4]{2B}. \qquad (3.3.29)$$

при этом из (3.3.25) следует, что в этот период ультрарелятивистская материя энергетически доминирует. Эволюция параметров анизотропной жидкости принимает вид

$$\pi = -\frac{1}{4R_0^{\,2}K_2^{\,2}t^{4/3}} - \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{3R_0^{\,4}t^{8/3}}, \qquad (3.3.30)$$

$$\sigma = \left(\frac{4\nu_1^{\,2}}{3K_1^{\,2}} - \frac{u_1^{\,2}\tilde{\varepsilon}}{R_0^{\,3}}\right)\frac{1}{t^2} + \frac{2K_1^{\,2} - 3K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}R_0^{\,2}t^{4/3}} - \frac{(4u_1^{\,2}+1)\tilde{\varepsilon}_1}{3R_0^{\,4}t^{8/3}}, \qquad (3.3.31)$$

$$\rho = \left(\frac{4}{3} - \frac{(u_1^{\,2}+1)\tilde{\varepsilon}}{R_0^{\,3}}\right)\frac{1}{t^2} + \frac{2K_1^{\,2} + K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}R_0^{\,2}t^{4/3}} - \frac{(4u_1^{\,2}+3)\tilde{\varepsilon}_1}{3R_0^{\,4}t^{8/3}}. \qquad (3.3.32)$$

На промежуточной стадии при $R << \min\{\frac{2C}{3A}, \sqrt[3]{\frac{2C}{3D}}\}$, $R >> \frac{3B}{4C}$ доминирует пылевидная материя. Эволюция масштабного фактора даётся выражением

$$R = \tilde{R}_0 t^{2/3},\ R_0 = \sqrt[3]{3C/2}, \qquad (3.3.33)$$

а анизотропная жидкость имеет следующие давления и плотность энергии:

$$\pi = -\frac{1}{4R_0^{\,2}K_2^{\,2}t^{4/3}} - \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{3\tilde{R}_0^{\,4}t^{8/3}}, \qquad (3.3.34)$$

$$\sigma = \left(\frac{4\nu_1^{\,2}}{3K_1^{\,2}} - \frac{u_1^{\,2}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{R}_0^{\,3}} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{2K_1^{\,2} - 3K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}\tilde{R}_0^{\,2} t^{4/3}} - \frac{(4u_1^{\,2}+1)\tilde{\varepsilon}_1}{3\tilde{R}_0^{\,4} t^{8/3}}, \qquad (3.3.35)$$

$$\rho = \left(\frac{4}{3} - \frac{(u_1^{\,2}+1)\tilde{\varepsilon}}{\tilde{R}_0^{\,3}} \right) \frac{1}{t^2} + \frac{2K_1^{\,2} + K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}\tilde{R}_0^{\,2} t^{4/3}} - \frac{(4u_1^{\,2}+3)\tilde{\varepsilon}_1}{3\tilde{R}_0^{\,4} t^{8/3}}. \qquad (3.3.36)$$

Из (3.3.25), (3.3.26) и (3.3.36) следует также, что в период времени, удовлетворяющий условиям

$$t < 2^{3/2} K_2^{\,6} R_0^{\,3} \frac{\left(\frac{u_1^{\,2}+2}{R_0^{\,3}} - \frac{4}{3} + \sqrt{\left(\frac{u_1^{\,2}+2}{R_0^{\,3}} - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{(2K_1^{\,2}+K_2^{\,2})(4u_1^{\,2}+3)\tilde{\varepsilon}_1}{3K_2^{\,4}R_0^{\,6}}} \right)^{3/2}}{\left(2K_1^{\,2}+K_2^{\,2}\right)^{3/2}}, \qquad (3.3.37)$$

$$t > \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon} R_0} \right)^{3/2}, \qquad (3.3.38)$$

пылевидная материя энергетически доминирует.

Кинематические характеристики пылевидной жидкости – параметры расширения, ускорения и вращения даются соответственно выражениями

$$\theta = 3\frac{\dot{R}}{R} \frac{K_1\sqrt{u_1^{\,2}+1} - \nu_1 u_1}{K_1}, \qquad (3.3.39)$$

$$A = 3\frac{\dot{R}}{R} \frac{K_1 u_1 - \nu_1\sqrt{u_1^{\,2}+1}}{K_1}, \qquad (3.3.40)$$

$$\omega = \frac{K_1 u_1 - \nu_1\sqrt{u_1^{\,2}+1}}{2K_2^{\,2}R}, \qquad (3.3.41)$$

сдвиг отсутствует.

3. Современная стадия космологической эволюции

При больших временах $R \to \infty$, а расширение Вселенной становится ускоренным:

$$R = \widehat{R}_0 e^{Ht},\ H = \sqrt{D}, \tag{3.3.41}$$

а из системы (3.3.26) тогда следует приблизительно, что

$$\pi = 3H^2\left(\frac{\nu_1^{\,2} - K_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right) - \frac{1}{4K_2^{\,2}\widehat{R}_0^{\,2}e^{2Ht}} - \frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{3\widehat{R}_0^{\,4}e^{2Ht}}, \tag{3.3.42}$$

$$\sigma = -H^2\left(3 - \frac{3\nu_1^{\,2}}{K_1^{\,2}}\right) + \frac{2K_1^{\,2} - 3K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}\widehat{R}_0^{\,2}e^{2Ht}} - \frac{\widetilde{\varepsilon}u_1^{\,2}}{\widehat{R}_0^{\,3}e^{3Ht}} - \frac{(4u_1^{\,2}+1)\widetilde{\varepsilon}_1}{3\widehat{R}_0^{\,4}e^{4Ht}}, \tag{3.3.43}$$

$$\rho = -H^2\left(3\frac{\nu_1^{\,2}}{K_1^{\,2}} - 3\right) + \frac{2K_1^{\,2} + K_2^{\,2}}{4K_2^{\,4}\widehat{R}_0^{\,2}e^{2Ht}} - \frac{\widetilde{\varepsilon}(u_1^{\,2}+1)}{\widehat{R}_0^{\,3}e^{3Ht}} - \frac{(4u_1^{\,2}+3)\widetilde{\varepsilon}_1}{3\widehat{R}_0^{\,4}e^{4Ht}}. \tag{3.3.44}$$

4. Склейка I стадии инфляции со стадией доминирования ультрарелятивистской жидкости

Если приравнять плотность энергии и давления анизотропной жидкости, посчитанные на каждой из этих стадий во время окончания инфляционного этапа($t=10^{-34}c$), считая переход одной стадии в другую мгновенным, то принимая $e^{10^{-34}} \approx 1$, $\varphi^2 \approx \varphi_0^{\,2}$, $\dot{\varphi}^2 \approx H^2\varphi_0^{\,2}$, обнаружим, что число констант φ_0, λ, m, $\widetilde{\varepsilon}_1, \omega k_0^2$, H, K_1, K_2, R_0, u_1 превышает число уравнений. Из (3.3.17)-(3.3.22), (3.3.30)-(3.3.32) находим

$$u_1^{\,2} = \frac{1}{K_2^{\,4}}\left(4K_1\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}(2K_1^{\,2} + K_2^{\,2}) - 10K_1^{\,4} + 10K_1^{\,2}K_2^{\,2} - 3K_2^{\,4}\right), \tag{3.3.45}$$

$$\frac{3R_0^{\,4}}{\widetilde{\varepsilon}_1} = \frac{4K_1}{\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}}u_1\sqrt{u_1^{\,2}+1}, \tag{3.3.46}$$

$$\omega k_0^{\,2} = \frac{\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}}{K_1}\left(1 - \frac{K_1}{u_1\sqrt{1+u_1^{\,2}}\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}}\right), \tag{3.3.47}$$

$$\varphi_0^{\,2} = \frac{m^2}{\lambda} + \sqrt{\frac{m^4}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}}{\lambda K_1 u_1\sqrt{1+u_1^{\,2}}}}, \tag{3.3.48}$$

$$H^2 = \frac{K_1}{\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}u_1\sqrt{1+u_1^{\,2}}}\Bigg/\left(\frac{m^2}{\lambda} + \sqrt{\frac{m^4}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{K_1^{\,2} - K_2^{\,2}}}{\lambda K_1 u_1\sqrt{1+u_1^{\,2}}}}\right). \tag{3.3.49}$$

Параметры расширения, ускорения и вращения тёмной энергии (анизотропной жидкости) имеют вид

$$\theta = 3\frac{\dot{R}}{R}, \tag{3.3.50}$$

$$a = \frac{\dot{R}}{R}\frac{\nu_1}{K_1}, \tag{3.3.51}$$

$$\omega = \frac{\nu_1}{2K_2{}^2 R}, \tag{3.3.52}$$

сдвиг также отсутствует

Имея в виду, что (3.3.42)-(3.3.44) имеет место лишь при условии (3.3.41), получим асимпотически, что при $t \to \infty$, $\rho \to 3H^2 \frac{K_1{}^2 - \nu_1{}^2}{K_1{}^2}$ и, как видно из (3.3.42) – (3.3.44), $\pi \to -\rho$, $\sigma \to -\rho$, т.е. жидкость вакуумоподобна, начиная с некоторого момента энергетически доминирует, асимптотически изотропизируется, а её вращение замедляется.

В представленном сценарии на всех стадиях фридмановской эволюции зависимость масштабного фактора от времени совпадает с аналогичной во фридмановской космологии, а на поздних временах предсказывается наблюдаемое ускоренное расширение.

Повторяя рассуждения § 3.2 о характере вращения в планковскую эпоху, можно прийти к современному значению угловой скорости анизотропной жидкости(тёмной энергии) $\omega_c \approx 10^{-11}$1/год, согласующимся с результатами [21] и [24]. Это может представлять интерес для поисков анизотропии, обусловленной глобальным вращением Вселенной, на основе наблюдательных исследований относительного позиционного угла Δ для различных радиогалактик [61].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии проведено комплексное построение космологии с вращением.

1. Исследовано квантовое рождение моделей вселенных с различными метриками типа IX по Бьянки, при этом во всех моделях имеется вращающаяся анизотропная жидкость. Для каждой из рассматриваемых моделей получено уравнение Уиллера – ДеВитта. Вычислены коэффициенты туннелирования для исследуемых моделей вселенных. Установлено, что наличие космологического вращения может как увеличить, так и уменьшить вероятность квантового рождения моделей вселенных в рассматриваемых случаях. Исследовано квантовое рождение модели вселенной с метрикой типа VIII по Бьянки, при этом в модели имеется вращающаяся анизотропная жидкость.
2. Предложены космологические модели с учетом вращения в ОТО, что актуально ввиду возможной анизотропии Метагалактики, обусловленной ее вращением. В рамках общей теории относительности построены нестационарные космологические модели с вращением с метриками типов VIII, II и V по Бьянки. При этом в качестве источников гравитации используются: идеальная жидкость с потоком тепла, идеальная жидкость, несопутствующая пылевидная жидкость, чистое излучение, сопутствующая анизотропная жидкость, газ Чаплыгина, космологическая постоянная, скалярное поле (рассматриваются различные потенциалы), электромагнитное поле. При этом несколько космологических моделей содержат вращающуюся темную энергию. Для построенных моделей вычислены кинематические параметры: расширение, вращение, сдвиг, ускорение. Отметим, что в наших моделях часто уравнение состояния жидкости не задается изначально, а ищется из уравнений тяготения Эйнштейна и

далее в ряде случаев полученному уравнению придается тот или иной физический смысл. Например, так мы поступаем при нахождении уравнений состояния для двух компонент давления анизотропной жидкости. В одной из космологических моделей уравнение состояния для одной из компонент давления соответствует либо квинтэссенции, либо фантомной материи. Дело в том, что природа темной энергии не выяснена, поэтому для моделирования темной энергии можно рассматривать различные материальные среды.

3. Построены космологические сценарии с учетом расширения и вращения с метриками типа II по Бьянки. Данная космологическая модель описывает фридмановский этап эволюции Вселенной, с последующим переходом к ускоренному экспоненциальному расширению, наблюдаемому в современную эпоху. Источником гравитационного поля в нашей космологической модели являются: ультрарелятивистское вещество, пыль и сопутствующая анизотропная вращающаяся темная энергия. Обсуждается возможность проявления космологического вращения в ходе астрофизических наблюдений. Построены космологические сценарии с учетом расширения и вращения с метриками типа VIII и IX по Бьянки.

Результаты, изложенные в монографии могут быть использованы в исследованиях по космологии, астрофизике, теории поля. Ценность работы состоит в дальнейшем развитии космологии на «постфридмановском» этапе с учетом не только расширения, но и вращения. Это дает возможность приблизиться к адекватной модели Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва.– М.: Изд–во ЛКИ, 2008. – 552с.

2. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория.– М.: КРАСАНД, 2010. – 568 с.

3. Вайнберг Стивен. Космология. Пер. с англ./ Под ред. и с предисл. И.Я.Арефьевой, В.И.Санюка.– М: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.– 608 с.

4. Владимиров Ю.С. Пространство–время: явные и скрытые размерности. Изд. 2–е, перераб. и доп. – М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.–208 с.

5. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. – Киев: Наукова думка, 1985.– 198 с.

6. Архангельская И.В., Розенталь И.Л., Чернин А.Д. Космология и физический вакуум. – М.: КомКнига, 2006. – 216 с.

7. Грин Брайан. Скрытая реальность: Параллельные миры и глубинные законы космоса. Пер. с англ. Под ред. В.О.Малышенко. – М: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.– 400 с.

8. Черепащук А.М. История истории Вселенной // УФН. – 2013. – Т. 183. – №5. – С. 535 – 556.

9. Долгов А.Д. Космология: от Померанчука до наших дней // УФН. – 2014. – Т. 184. – №2. – С. 211 – 221.

10. Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Лемец О.А. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? // УФН. – 2012. – Т. 182. – №9. – С. 941 – 986.

11. Верходанов О.В. Космологические результаты космической миссии «Планк». Сравнение с данными экспериментов WMAP и BICEP2 // УФН. – 2016. – Т. 186. – №1. – С. 3 – 46.

12. Payez , J.R. Cudell , D. Hutsemekers New constraints on very light pseudoscalars / arXiv:1204.6614 [astro-ph.CO] (2012).

13. Michael J. Longo Detection of a Dipole in the Handedness of Spiral Galaxies with Redshifts z ~ 0.04 / arXiv:1104.2815 [astro-ph.CO] (2011).

14. Гуц А.К. Элементы теории времени. – Омск: Изд–во Наследие. Диалог – Сибирь, 2004. – 364 с.

15. Гуц А.К. Физика реальности. – Омск: Изд–во КАН, 2012. – 424 с.

16. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. – М.: Энергоатомиздат. – 1985. – 168 с.

17. Станюкович К.П., Мельников В.Н. Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.

18. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. – М.: Атомиздат.– 1980. – 296 с.

19. Бабурова О.В., Фролов Б.Н. Математические основы современной теории гравитации. – М.: МПГУ.– 2012. – 132 с.

20. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 736 с.

21. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – М.: Изд–во МГУ, 1988. – 199с.

22. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 280 с.

23. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.

24. Фильченков М.Л., Лаптев Ю.П. Квантовая гравитация: От микромира к мегамиру. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 304 с.

25. С.В.Червон, И.В.Фомин, А.С.Кубасов. Скалярные и киральные поля в космологии // Ульяновск, ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н.Ульянова», 2015. – 216 с.

26. Hakim R. The inflationary Universe: A primer // Gravitation, geometry and relativistic physics.– Berlin: Springer – Verlag, 1984.– V.212.– P. 302 – 332.

27. Birch P. Is the universe rotating? // Nature. – 1982. – Vol.298, N 5873. – P.451 – 454.

28. Андреасян Р.Р. Исследование вопроса о наличии крупномасштабной анизотропии в метагалактическом пространстве // Астрофизика. – 1986. – Т.24, вып.2. – С.363 – 375.

29. Donets E.E., Tentyukov M.N., Tsulaia M.M. Towards N=2 SUSY homogenous quantum cosmology: Einstein-Yang-Mills systems// Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 59. – 023515

30. Moriconi R., Montani G. Behaviour of the Universe anisotropy at a big-bounce cosmology// Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 95. – 123533

31. Pandey S. Anisotropic n-dimensional cosmological model fluid// The European Physical Journal C. – 2019. – Vol.79. – 487

32. Vilenkin A. Wave function discord // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol.58. – P.067301 (1 – 3).

33. Kontoleon N., Wiltshire D.L. Operator ordering and consistency of the wave function of the Universe // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol.59. – P.063513(1 – 8).

34. Fil'chenkov M.L., Saibatalov R.X. Quantum model of a universe with rotation // Contributions to V Intern. Conf. on Gravitat. and Astrophys. of Asian – Pacific Countries. – M., 2001. – P.104 – 105

35. Fang L.Z., Mo H.J. Wavefunction of a rotating Universe // Phys. Lett. – 1987. – Vol.B186, N 3 – 4. – P.297 – 302.

36. Patel L.K., Vaidya P.C. A rotating mass embedded in an Einstein – Godel Universe // Gen. Relat. and Gravit. – 1983. – Vol.15, N 8. – P.777 – 783.

37. Панов В.Ф., Кувшинова Е.В. Волновая функция вращающейся вселенной // V Международная конференция по гравитации и астрофизике стран Азиатско – Тихоокеанского региона / Тезисы. – М., 2001. – С.93 - 94.

38. Fil'chenkov M.L., Saibatalov R.X. Quantum Rotating Universe //Abstracts of 11th Intern. Conf. on Theoret. and Experim. Probl. of Gener. Relat. and Gravitat. – Tomsk, 2002. – P.37 – 38.

39. Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. Квантовое рождение вращающейся Вселенной // Изв. вузов. Физика. – 2003. – Т.46, №10. – С.40 – 47.

40. Panov V.F., Kuvshinova E.V. Quantum birth of the Universe with rotation // Gravitation&Cosmology. – Moscow, 2004. – Vol.10, N 1 – 2 (37 – 38). – P.156 – 160.

41. Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. Квантовое рождение вращающейся модели вселенной типа IX по Бьянки // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т.47, №6. – С.71 – 75.

42. M.L.Fil'chenkov, R.X.Saibatalov Quantum birth of a rotation universe // Gravitation & Cosmology. – 2005. – V.11. – pp.116 – 118.

43. M.L.Fil'chenkov. Quantum cosmology with rotation // Int. J. Mod. Phys. – 2005. – v.A20. – pp. 2388 – 2392.

44. Пономарёв В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 168с.

45. Coule D.H., Martin J. Quantum Cosmology and Open Universes // Preprint gr – qc/9905056. – 1999.

46. Linde A.D. Quantum creation of an open inflationary universe // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol.58. – P.083514(1 – 21).

47. Panov V.F. A Quantum Birth of the Universe with Rotation //Abstracts of 11th Internat. Conf. on Theoret. and Experim. Probl. of Gener. Relat. and Gravitat. – Tomsk, 2002. – P.92.

48. Gron O. Transition of a rotating Bianchi type – IX cosmological model into an inflationary era // Phys. Rev. – 1986. – Vol.D33, N 4. – P.1204 – 1205.

49. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990.

50. Кувшинова Е.В. Нестационарные космологические модели с вращением // Изв. вузов. Физика. – 2004. – Т.47, №2. – С.19 – 21.

51. Кувшинова Е.В. Квантовое рождение вращающейся вселенной // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т.47, №10. – С.13 – 20.

52. Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. Квантовое рождение вращающейся модели вселенной типа IX по Бьянки // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т.47, №6. – С.71 – 75.

53. Kuvshinova E.V., Panov V.F., Sandakova O.V. A cosmological model with rotation of a Bianchi type IX // 12 Rus. Grav. Conf. – Int. Conf. on Gravitation, Cosmology and Astrophysics. – Kazan.Russia. – June 20-26. – 2005. – PP. 94 – 95.

54. Kuvshinova E.V., Panov V.F., Sandakova O.V. A cosmological model with rotation of a Bianchi type IX // Physical Interpretations of Relativity Theory. PIRT – 2005. – Moscow. – 4-7 July. – 2005. – P. 127.

55. Чевон С.В. Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. Ульяновск:УлГУ. 1997.

56. Абрамян М.Г., Седракян Д.М. Угловые моменты гравитирующих систем // Тез. докл. VI Совет. гравит. конф. – М.: Изд – во МГПИ, 1984. – С.96 – 97.

57. V.F.Panov, E.V.Kuvshinova, O.V.Sandakova. Quantum birth of the Bianchi type VIII universe with rotation // Russian Physics Journal. 2012. Vol. 55, No. 5, pp. 592-595.

58. Янишевский Д. М. Космологическая модель в метрике типа VIII по Бьянки: квантовое рождение вселенной // Вестник пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2018. - №4(43). – С. 45 – 47.

59. Lam Hui, Jeremiah P. Ostriker, Scott Tremaine, Edward Witten , ”Ultralight scalars as cosmological dark matter”, arXiv:1610.08297, Phys. Rev. D 95, 043541 (2017).

60. Latham Boyle, Kieran Finn, Neil Turok, ”The Big Bang, CPT, and neutrino dark matter”, arXiv:1803.08930

61. Саха Б. Спинорные поля в анизотропной космологии / Докт. дис. – М.: РУДН, 2009.

62. Rivero A.D., Miranda V., Dvorkin C. Observable predictions for massive-neutrino cosmologies with model-independent dark energy// Phys. Rev. D. – 2019. - Vol. 100, 063504.

63. Zhuravlev E.M., Kornilov D.A., Savelova E.P. Dark matter, dark energy, and fields with negative energy// Gravitation and cosmology. – 2006. – Vol. 12, №4. – P. 283-288.

64. Matzner R.A., Shepley L.C., Warren J.B. Dynamics of S0 (3, R) homogeneous cosmologies // Ann. Phys. – 1970. – Vol.57, N 2. – P.401 – 460.

65. Ryan M.P. General form of the Einstein equations for a Bianchi type IX Universe // I.Math.Phys. – 1969. – V.10. – N.9. – P.1724 – 1728.

66. Matzner R.A. Rotation in closed perfect – fluid cosmologies // I.Math.Phys. – 1970. – V.11. – N.8. – P.2432 – 2440.

67. Matzner R.A. Collision less rotation in closed cosmologies // Communs Math. Phys. – 1971. – Vol.20, N 1. – P.1 – 8.

68. Ryan M.P. Qualitative cosmology: diagrammatic solutions for Bianchi type IX Universe with expansion, rotation, and shear. I The symmetric case // Ann. Phys. – 1971. – V.65. – N.1 – 2. – P.506 – 537.

69. Fennelly A.J. Observer reference triad rotation, magnetic fields, and rotation in Euclidean cosmological models // Astrophys. J. – 1982. – Vol.252, N . – Pt.1. – P.410 – 417.

70. Reboucas M.J. Time – dependent, Bianchi II, rotating Universe // Nuovo cim. – 1982. – Vol.B67, N 1. – P.120 – 126.

71. Lorenz – Petzold D. Electromagnetic rotating Universe // Astrophys. and Space Sci. – 1983. – Vol.96, N 2. – P.343 – 349.

72. Reboucas M.J., L'Olival J.B.S. Imparting rotation to a Bianchi type II space – time // J.Math.Phys. – 1986. – Vol.27, N 1. – P.417 – 418

73. Panov V.F., Pavelkin V.N., Kuvshinova E.V., Sandakova O.V. Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy// Gravitation and Cosmology, 2014, Vol. 20, No. 2, pp. 141-143.

74. Reboucas M.J. Time – dependent, Bianchi II, rotating Universe // Nuovo cim. – 1982. – Vol.B67, N 1. – P.120 – 126.

75. Lorenz – Petzold D. Electromagnetic rotating Universe // Astrophys. and Space Sci. – 1983. – Vol.96, N 2. – P.343 – 349.

76. Reboucas M.J., L'Olival J.B.S. Imparting rotation to a Bianchi type II space – time // J.Math.Phys. – 1986. – Vol.27, N 1. – P.417 – 418

77. Panov V.F., Kuvshinova E.V., Sandakova O.V. Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observation // Gravitation and Cosmology, 2014, Vol. 20, No. 2, pp. 138-140

78. Короткий В.А. Как обнаружить космологическое вращение // Ярославский педагогический вестник. – 2010. Т.13. – №1. – С.68 – 71.

79. Yadav, M.K., Jain, V.C. LRS Bianchi type II disordered radiation model with a varying Λ term in self creation theory //Astrophys. Space Sci. – 2011.- Vol. 331. – pp. 343–349

80. Hawking S.W. On the rotation of the Universe // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. – 1969. – Vol.142, N 2. – P.129 – 141.

81. Batakis N., Cohen J.M. Cosmological model with expansion, shear and vorticity // Phys. Rev. – 1975. – Vol. D12.– N. 6. – P.1544 – 1550.

82. Saha B. Nonlinear spinor fields in Bianchi type V space-time // Chinese Journal of physics. – 2015. – Vol.53. – 110114(13p.)

83. Barrow J.D., Juszkiewicz R., Sonoda D.H. Universal rotation: how large can it be? // Mon. Notic. Roy. Astron. Son. – 1985. – Vol.213, N 4. – P.917 – 943.

84. Wolfe A.M. New limits on the shear and rotation of the Universe from the X – ray background // Astrophis. J. – 1970. – Vol.159, N 1. – Pt.2. – P.61 – 67.

85. Banerjee A., Sanyal A.K. Irrotational Bianchi V viscous fluid cosmology with heat flux // Gen. Rel. and Grav. – 1988 – Vol. 20, №2. – pp. 103-113.

86. Obukhov Yu.N. Observations in rotating cosmologies // Gauge Theories of Fundamental Interactions. Proc. of Banach Intern. Center (Autumn semester, 1988) / Eds.R.Raczka, M.Pawlowski.

87. Bradley J.M., Sviestins E. Some rotating, time – dependent Bianchi type VIII cosmologies with heat flow // Gen. Relat. And Gravit. – 1984. – Vol.16, N 12. – P.1119 – 1133.

88. Панов В.Ф. Вращающиеся модели ранней Вселенной // Изв. вузов. Физика. – 1989. – №6. – С.67 – 70.

89. Панов В.Ф. Вращающиеся космологические модели типа VIII по Бьянки // Там же. – 1989. – №5. – С.98 – 103.

90. Berkowitz D. New solutions to the Bianchi VIII Wheelere deWitt equation and leading order solutions for $\Lambda \neq 0$ and a primordial magnetic field. – https://arxiv.org/abs/2002.03800

91. Янишевский Д. М. Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 380–389.

92. Чаплыгин С.А. О газовых струях / [Соч.]// - М.: Унив. тип., 1904. – V – (Учен. зап. Имп. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат.; Вып. 21). – 121с.

93. Kamenshchik A. Y., Moschella U., Pasquier V. An Alternative to Quintessence // Phys. Rev. Lett. B. - 2001. - Vol. 511. - P. 265-268

94. Разина О.В., Сагидуллаева Ж.М. Газ Чаплыгина и решаемая фермионная космология// Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилёва – Серия: «Естественно-технические науки». – 2013. – Вып.№6(97). – С. 233-237.

95. Bento M.C., Bertolami O., Sen A.A. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification //Phys. Rev. D. -2002.- Vol. 66. – 043507

96. Alvarado R. Exact solutions of a Chaplygin gas in an space-time of Petrov D //Advanced Studies in Theoretical Physics. – 2017. – Vol.11, 2017, №12. – pp.609-619.

97. Fayaz V., Hossienkhani H. Effect of anisotropy on generalized Chaplygin gas scalar field and its interaction with other dark energy models// Eur. Phys. J. Plus. – 2017. – Vol. 132. - pp. 193-209.

98. Alcaniz J.S., Lima J.A.S. Measuring the Chaplygin Gas Equation of State from Angular and Luminosity Distances// The Astrophysical Journal. – 2005. – Vol.68, №1. – pp.16-22.

99. Сандакова О.В. Космологическая модель типа IX по Бьянки с газом Чаплыгина / II-я Российская школа-семинар "Современные проблемы теории гравитации и космологии " - GRACOS – 2009. – 24-29 августа 2009. – Казань-Яльчик. Труды семинара. Казань: Изд-во «Фолиантъ», 2009. – с. 154.

100. Янишевский Д. М. Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 393–398.

101. Янишевский Д. М. Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 192–198.

102. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. – 2-е изд., переработ. и доп. - М.: Энергоатомиздат.– 1988. – 288 с.

103. Кувшинова Е.В., Янишевский Д.М. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в метриках типа III и VIII по Бьянки // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т.62, №1. – С.42 – 46.

104. В. Г. Кречет, Известия вузов. Физика №3, 3 (2005).

105. Е. И. Бобровских, В. Ф. Панов, Известия вузов. Физика №4, 113 (2012).

106. E.V.Kuvshinova, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Gravitation and Cosmology 20, 138 (2014).

107. А. Д. Чернин, УФН 183, 741 (2013).

108. J. L. Sanz, J. Math. Phys. 23, 1732 (1982).

109. Панов В.Ф., Сбытов Ю.Г. О возможности объяснения наблюдательной анизотропии Берча космологическим вращением // ЖЭТФ. – 1992. – Т.101, вып.3. – С.769 – 778.

110. Панов В.Ф., Сбытов Ю.Г. Поведение пучка лучей, формирующих изображение источников в космологических моделях с вращением // ЖЭТФ. – 1998. – Т.114, вып.3. – С.769 – 776.

111. Panov V.F., Kuvshinova E.V., Yanishevsky D.M., and Sandakova O.V. // Int. J. Geometric Methods Mod. Phys. -2018. -V. 15. -No. 1. -P. 1850016 (9 p.)

112. Panov V.F., O. V. Sandakova, D. M. Yanishevsky, M. R. Cheremnykh Model of Evolution of the Universe with the Bianchi Type VIII Metric // Russian Physics Journal. 2019. Vol. 61, No. 9, pp. 1629-1637.

Научное издание

Кувшинова Елена Владимировна
Сандакова Ольга Васильевна
Янишевский Даниил Михайлович

Рождение и эволюция вращающихся вселенных

Монография

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка: *Е. В. Кувшинова*

Объем данных 2,33 Мб
Подписано к использованию 06.07.2020

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15