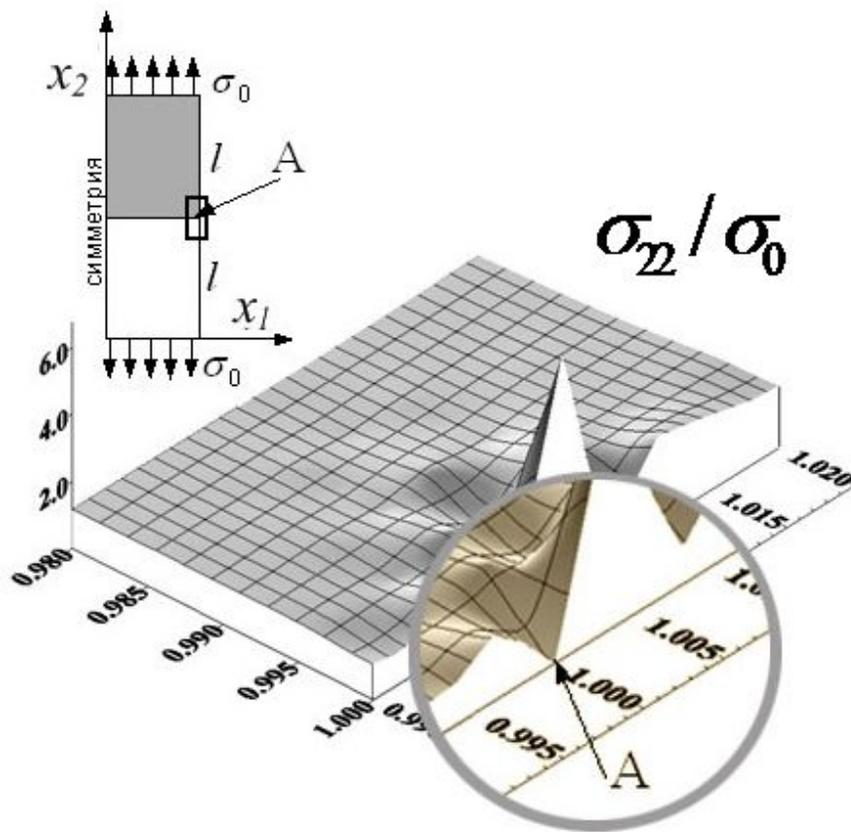


В. М. Пестренин
И. В. Пестренина
Л. В. Ландик

Задачи механики упругих тел с особыми точками



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. М. Пестренин, И. В. Пестренина, Л. В. Ландик

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ УПРУГИХ ТЕЛ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

МОНОГРАФИЯ



Пермь 2019

УДК 531
ББК 22.251
П286

Пестренин В. М., Пестренина И. В., Ландик Л. В.

П286 Задачи механики упругих тел с особыми точками [Электронный ресурс]: монография / В. М. Пестренин, И. В. Пестренина, Л. В. Ландик; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 4,16 Мб; 217 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/zadachi-mexaniki-uprugix-tel-s-osobymi-tochkami.pdf>. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3320-3

В монографии на основе представления особой точки упругого тела в виде точки континуума и связанного с ней элементарного объема изучается напряженное состояние непосредственно в особых точках и их окрестностях: вершинах плоских однородных и кусочно-однородных клиньев, конусов и пирамид; точках однородных и составных ребер, во внутренних особых точках. Рассматриваемые задачи являются неклассическими задачами механики деформируемого твердого тела. Приводятся постановки таких задач, предлагается итерационный численно-аналитический метод их решения, приводятся примеры.

Монография представляет интерес для студентов механических специальностей университета, специалистов в области механики деформируемого твердого тела.

**УДК 531
ББК 22.251**

*Издается по решению кафедры вычислительной и экспериментальной механики
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра «Вычислительная математика, механика и биомеханика» ПНИПУ (зав. кафедрой, профессор, д-р тех. наук **В. Ю. Столбов**); профессор кафедры «Прикладная математика» Уральского энергетического института УрФУ, д-р физ.-мат. наук **А. Ф. Шориков** ведущий научный сотрудник института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, д-р физ.-мат. наук **М. Д. Коваленко**

ISBN 978-5-7944-3320-3

© ПГНИУ, 2019

© Пестренин В. М., Пестренина И. В.,
Ландик Л. В., 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. ДВА ПОДХОДА К ИЗУЧЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК.....	9
2. ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ОСОБУЮ ТОЧКУ	14
2.1. Постановка статической задачи упругости для тела, содержащего особые точки. Теорема единственности	14
2.2. Алгоритм решения задачи (2.1) – (2.7).....	15
2.3. Изменение угла между направлениями \vec{n} , \vec{m} в малой окрестности точки сплошной среды.....	17
3. ПЛОСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ	19
3.1. Клины, образующие которого свободны от нагрузок	19
3.2. Клины с жесткозащемленными образующими.....	21
3.3. Клины, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая свободна от нагрузки	23
3.4. Клины, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая проскальзывает без трения вдоль жесткой стенки	26
3.5. Клины, одна из сторон которого свободна от напряжений, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности.....	28
3.6. Клины, образующие которого нагружены поверхностными усилиями	29
3.7. Клины, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая нагружена поверхностными усилиями	31
3.8. Клины, одна из сторон которого скользит без трения по жесткой поверхности, а другая нагружена	34
3.9. Растяжение однородной пластинки с V-образной особенностью	35
4. ПЛОСКИЕ СОСТАВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.....	37
4.1. Кусочно-однородный элемент конструкции с особенностью в виде клина, образующие которого свободны от нагрузки.....	37
4.1.1. Ограничения на компоненты напряжений в особых точках	37
4.1.2. Классический случай задачи о растяжении составной прямоугольной пластинки	42
4.1.3. Неклассическая задача о растяжении составной прямоугольной пластинки	44
4.1.4. Температурное нагружение составной пластинки	45
4.2. Составной элемент конструкции с особенностью в виде клина, образующие которого нагружены поверхностными усилиями.....	46
4.3. Составной элемент конструкции с особенностью в виде клина, одна из образующих которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности	50

4.3.1. Температурная нагрузка элемента конструкции	51
4.3.1.1. Исследование решений уравнений (4.33) в зависимости от ранга расширенной матрицы	52
4.3.1.2. Частные случаи скрепления элементов клина	54
4.3.2. Нагружение элемента конструкции поверхностными усилиями	59
4.3.2.1. Исследование решений уравнений (4.33) в случаях, когда α, β определяются равенствами (4.36).....	59
4.3.2.2. Частные случаи скрепления элементов клина	60
4.3.3. Пример. Нагружение прямоугольной составной пластинки	66
4.3.4. Пример. Растяжение составной пластинки с V-образным вырезом	68
4.4. Ограничения на параметры состояния в особых точках составного клина с жесткозащемленными образующими	69
4.4.1. Постановка задачи о формировании ограничений в представительных объемах при вершине клина.....	69
4.4.2. Общее исследование системы уравнений (4.78).....	71
4.4.2.1. $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0$	71
4.4.2.2. $\sin \alpha = 0, \sin \beta \neq 0, (\alpha = \pi)$	72
4.4.2.3. $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta = 0, (\beta = \pi)$	73
4.4.2.4. $\sin \alpha = 0, \sin \beta = 0, (\alpha = \beta = \pi)$	73
4.4.3. Частные случаи соединения элементов	74
4.4.3.1. $\alpha = \beta, \sin \alpha \neq 0$	74
4.4.3.2. $\alpha + \beta = \pi / 2$	76
4.4.3.3. $\alpha + \beta = \pi, (0 < \alpha < \pi)$	78
4.4.3.4. $\alpha + \beta = 2\pi, (0 < \alpha < 2\pi)$	80
4.4.4. Пример. Температурное нагружение составного клина с развернутым углом при вершине ($\alpha = \beta = \pi / 2$).....	81
4.5. Ограничения на параметры состояния в вершине составного клина, одна из образующих которого жестко закреплена	83
4.5.1. Постановка задачи о формулировке ограничений на параметры состояния в вершине составного клина.....	83
4.5.2. Общее исследование системы уравнений (4.116)	85
4.5.3. Частные случаи соединения элементов	86
4.5.3.1. $\alpha = \beta (0 < \alpha \leq \pi)$	86
4.5.3.2. $\alpha + \beta = \pi / 2$	89
4.5.3.3. $\alpha + \beta = \pi$	92
4.5.3.4. $\alpha + \beta = 2\pi$	95

5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ТЕЛА.....	96
5.1. Постановка задачи об исследовании задаваемых в точках ребра однородного упругого тела ограничений на параметры состояния	96
5.2. Ребро, образующие которого свободны от нагрузок	97
5.3. Ребро, образующие поверхности которого нагружены поверхностными усилиями	99
5.4. Ребро, одна из образующих поверхностей которого жестко закреплена, а другая свободна от нагрузки.....	101
5.5. Ребро, одна из образующих которого жестко закреплена, а другая нагружена	103
5.6. Ребро, одна из образующих поверхностей которого свободна от нагрузки, а другая скользит без трения по жесткой поверхности.....	106
5.7. Ребро, одна из образующих поверхностей которого нагружена, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности.....	108
5.8. Ребро, образующие поверхности которого жестко закреплены	110
5.9. Ребро, одна из образующих поверхностей которого жестко закреплена, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности	112
5.10. Пример. Растяжение элемента, составленного из двух усеченных конусов	115
6. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА СОСТАВНОГО ТЕЛА.....	117
6.1. Составное ребро, образующие которого свободны от нагрузок	117
6.2. Составное ребро под действием поверхностных нагрузок	124
6.3. Примеры решения неклассических задач для составных конструкций	137
6.3.1. Температурное нагружение составного цилиндра	137
6.3.2. Кручение составного цилиндра.....	138
7. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА	140
7.1. Компоненты напряжений на линии особых точек свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра.....	140
7.1.1. Постановка задачи	140
7.1.2. Построение ограничений на параметры состояния в особых точках	142
7.1.2.2. Случай $\alpha + \beta = \pi$	146
7.1.3. Пример. Температурное нагружение двухслойного полого цилиндра.....	150
7.2. Компоненты напряжений на линии особых точек нагруженной поверхностными усилиями торцевой поверхности слоистого цилиндра.....	152
7.2.1. Постановка задачи	152
7.2.2. Исследование ограничений на параметры состояния в точках края поверхности соединения цилиндров	154
7.2.2. Пример. Растяжение полого двухслойного цилиндра.....	159

8. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ	160
8.1. Постановка плоской задачи	161
8.1.1. Исследование свойств решений системы уравнений (8.6), (8.7).....	162
8.2. Постановка пространственной задачи	165
8.2.1. Исследование свойств систем уравнений (8.18) – (8.20).....	166
9. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ВЕРШИНЕ КРУГОВОГО КОНУСА	169
9.1. Круговой конус, поверхность которого нагружена	169
9.2. Круговой конус, боковая поверхность которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности	171
9.3. Круговой конус с защемленной боковой поверхностью	172
9.4. Составной конус (внутренняя коническая точка)	173
10. КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАГРУЗКУ В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД	176
10.1. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной треугольной пирамиды	176
10.1.1. Постановка задачи	176
10.1.2. Исследование системы уравнений (10.6) – (10.14).....	179
10.1.3. Частные случаи	180
10.1.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях тетраэдра	180
10.1.3.2. Грани тетраэдра нагружены нормальными поверхностными нагрузками.....	181
10.1.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$	181
10.1.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями τ_n, τ_m, τ_l	182
10.2. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной четырёхугольной пирамиды	182
10.2.1. Постановка задачи	182
10.2.2. Исследование системы уравнений (10.45)	186
10.2.3. Частные случаи	188
10.2.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях пирамиды	188
10.2.3.2. Грани пирамиды нагружены нормальными поверхностными нагрузками.....	188
10.2.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l, \vartheta_k$	188
10.2.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\tau_n, \tau_m, \tau_l, \tau_k$	189
10.3. Ограничения на компоненты напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в упругое тело.....	189
10.3.1. Правильная треугольная пирамида, погруженная в упругое тело	189
10.3.1.1. Постановка задачи	189
10.3.1.2. Исследование системы уравнений (10.64)	192
10.3.1.3. Исследование системы уравнений (10.65)	193

10.3.1.4. Ограничения на компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды	194
10.3.2. Правильная четырехугольная пирамида, погруженная в упругое тело	196
10.3.2.1. Постановка задачи	196
10.3.2.2. Исследование системы уравнений (10.93)	199
10.3.2.3. Исследование системы уравнений (10.94)	200
10.3.2.4. Компоненты напряжений тел 1,2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды	200
11. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И НАГРУЗКИ В ВЕРШИНЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ С РОМБИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ	201
11.1. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, нагруженная поверхностными силами вблизи вершины	201
11.1.1 Постановка задачи	201
11.1.2. Исследование системы уравнений (11.7)	204
11.1.3. Частные случаи	205
11.1.3.1. Случай нормальной поверхностной нагрузки	205
11.1.3.2. Случай касательной поверхностной нагрузки	206
11.2. Четырех угольная пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело....	207
11.2.1. Постановка задачи	207
11.2.2. Исследование систем уравнений (11.22), (11.23).....	209
11.2.3. Компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1,2, содержащих вершину пирамиды	210
Заключение	211
Список литературы	213

1. ВВЕДЕНИЕ. ДВА ПОДХОДА К ИЗУЧЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Особые точки упругих тел – это вершины трещин, клиньев, конусов, пирамид, линии пересечения образующих поверхностей (ребра), точки края линий (поверхностей) соединения составных элементов конструкций и т. п. Особые точки являются потенциальными концентраторами напряжений, способствуют преждевременному разрушению конструкций, ограничивают предельные нагрузки. Исследованию особенностей распределения напряжений вблизи особых точек с использованием классических моделей механики деформируемого твердого тела (далее классический подход) посвящено большое число публикаций. В частности, напряженно- деформированное состояние (НДС) упругих тел с особыми точками изучали M.L. Williams, D.V. Bogy, G.V. Sinclear, Я.С. Уфлянд, О.К. Аксентян, В.А. Кондратьев, А.Г. Аветисян, К.С. Чобанян, Т.О. Корепанова, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков, M. Paggi, A. Carpintery, А.В. Андреев, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, И.Т. Денисюк, О.Н. Луцик, В.З. Партон, П.И. Перлин, С.В. Галаджиев, С.Е. Михайлов, О.С. Гоголева, М.Д. Коваленко, Д.В. Трубников, L.R. Xu, Н. Kuai, S. Sengupta, С.Г. Минакова, Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева, V.A. Kozlov, V.G. Mazyа, C. Schwab, P.A. Ширинян и многие другие.

При этом использовались методы: операционного исчисления, функций комплексного переменного, функции Эри, интегральных уравнений, конечных элементов, граничных элементов, граничных состояний, разложения по различным функциям, Two-state M- integral, консервативного интеграла, основанного на принципе взаимности, и другие.

Обычно авторы, изучающие элементы конструкции с особыми точками, в полном объеме задаваемые условия непосредственно в особых точках не рассматривают. В аналитических исследованиях в такую точку помещается полюс криволинейной системы координат. В полюсе отсутствует взаимно однозначное соответствие между точками континуума и их координатами. Поэтому здесь не определены тензоры напряжений и деформаций. Следовательно, в особой точке не могут быть заданы условия, накладываемые на параметры состояния. Так как условия непосредственно в особой точке не задаются, она исключается из рассмотрения. В такой точке возможны лишь асимптотические представления о параметрах состояния. При этом асимптотические решения оказываются не согласованными со всеми реальным условиям в этой граничной точке. Поэтому такое решение достоверно лишь вне малой окрестности особой точки. Асимптотическое решение используется

авторами классического подхода для определения показателей сингулярности – параметров решения характеристических уравнений однородных задач. Полагается, что при выполнении определенного критерия для таких параметров решение задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) будет иметь сингулярный характер при стремлении расстояния r до особой точки к нулю. Утверждение о сингулярном поведении решения в окрестности особой точки при выполнении критерия, накладываемого на параметры решения характеристического уравнения однородных задач, не является достаточным условием. Имеются примеры, в которых критерий выполняется, а неограниченного роста асимптотического решения не происходит. Видим, что классический (асимптотический) подход достоверно описывает поведение решения в элементах конструкции, содержащих особые точки лишь вне их малой окрестности. Исследование решения о параметрах состояния непосредственно в особой точке и ее малой окрестности требует дополнительного исследования. Такому исследованию посвящена настоящая работа. В ней изучение параметров состояния в особых точках проводится на основе следующих общепринятых базовых понятий механики сплошных сред.

Представительный объем. Представительный объем (ПО) – это наименьшая частица реального тела, обладающая его макроскопическими материальными свойствами. Для представительного объема определяются представления о его параметрах состояния (напряжениях и деформациях). Параметры состояния ПО – это средние значения по данному объему микронапряжений и микродеформаций. Из определения параметров состояния ПО следует, что в пределах ПО они постоянны. Геометрической характеристикой представительного объема является его характерный размер (линейный масштаб).

Континуальная модель реальной сплошной среды. При построении континуальной модели сплошной среды каждому ПО реального тела ставится в соответствие объем точек континуума (континуальный объем (КО)). Характерный размер КО совпадает с соответствующим размером ПО. На КО переносятся представления о материальных свойствах и параметрах состояния, определенных для ПО. Континуальные объемы, отвечающие различным ПО, могут пересекаться.

Элементарный объем. Для каждой точки континуума строится множество всех КО ее содержащих. Полученное множество точек континуума образует элементарный объем (ЭО), соответствующий данной точке. Все КО, образующие элементарный объем, находятся в однородном состоянии, но в общем случае различном. Вследствие того что характерные размеры континуальных объемов малы, а параметры состояния непрерывны, различие

параметров состояния в пределах элементарного объема будет незначительным. Поэтому принимается, что элементарные объемы находятся в однородном состоянии (например, напряжения в ЭО – осредненные по этому объему значения микронапряжений).

Формулировка задаваемых условий в особых точках. Представление о том, что с каждой точкой континуума связан элементарный объем, необходимо использовать, в частности, при формулировке задаваемых условий в особых точках деформируемых тел. Напряжения и деформации являются параметрами состояния элементарных объемов, а не точек континуума. Следовательно, налагаемые в точке континуума условия на такие параметры должны строиться для соответствующего ей элементарного объема. Сформулированные для элементарного объема условия принимаются за условия в рассматриваемой точке континуума. Это (кажущееся очевидным) обстоятельство всегда используется при формулировке задаваемых условий в обычной (не особой) граничной точке, однако, как правило, не принимается во внимание при формулировке условий, задаваемых в особых точках деформируемых тел. Приведем примеры формулировки задаваемых условий в особых точках.

Плоский клин. Особая точка – вершина A клина. Элементарный объем, соответствующий точке A , – множество точек континуума, примыкающих к вершине. Этот элементарный объем находится в однородном напряженно деформированном состоянии.

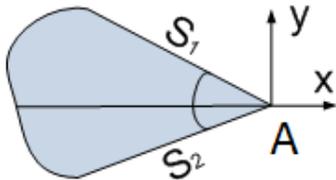


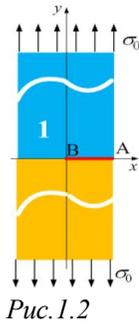
Рис.1.1

Для него заданы четыре условия – нормальные и касательные напряжения на поверхностях S_1 , S_2 равны нулю:

$$\begin{aligned} \text{на } S_1: \sigma_{n1} = 0, \tau_{n1} = 0, \\ \text{на } S_2: \sigma_{n2} = 0, \tau_{n2} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Количество граничных условий (четыре) превышает количество условий (два), задаваемое в обычной точке контура в плоской задаче.

Точка края линии скрепления двух прямоугольных пластин. Точка A – край линии скрепления двух прямоугольных пластин – особая точка. В каждой пластине точке A соответствует свой элементарный объем. Для этих элементарных объемов формулируем условия взаимодействия с внешней средой и друг с другом.



С внешней средой:

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = 0, \sigma_{12}^{(2)} = 0.$$

Верхний индекс указывает номер пластины.

Условия взаимодействия по линии контакта:

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}. \quad (1.4)$$

Все эти условия являются условиями, задаваемыми в точке A .

Необходимость рассматривать связанный с особой точкой элементарный объем обуславливает формулировку в ней избыточного количества задаваемых условий. Выше это было продемонстрировано на примере плоского клина. Поясним сказанное и на примере задачи о растяжении составной пластинки (рис. 1.2). В классическом случае условие (1.4) в особой точке не рассматривается. По-видимому, считается, что оно выполняется автоматически вследствие непрерывности перемещений. Покажем, что это не так. Запишем условие (1.4) через напряжения (случай плосконапряженного состояния):

$$\frac{1}{E_1}(\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{22}^{(1)}) = \frac{1}{E_2}(\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{22}^{(2)}).$$

С использованием условий (2), (3) это равенство приводится к виду

$$\left[\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right] \sigma_{22} = 0. \quad (1.5)$$

Равенство (1.5) не является тождеством, поэтому условие непрерывности относительных удлинений (1.4) автоматически не выполняется. Оно выполняется, если материальные параметры скрепляемых тел связаны соотношением

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}. \quad (1.6)$$

Если материальные параметры подчиняются соотношению (1.6), точка A не является особой, напряженное состояние в составной пластинке однородное ($\sigma_{22} = q_0$, $\sigma_{ij} = 0, (i \neq 2, j \neq 2)$). В случае, когда материальные параметры не связаны соотношением (1.6), для выполнения условия (1.4), как следует из равенства (1.5), напряжения σ_{22} в элементарных объемах, содержащих точку A , должны обращаться в нуль, т.е. $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22} = 0$. В итоге получается, что напряженное состояние в рассматриваемых элементарных объемах полностью определено. Количество задаваемых ограничений для этих элементов оказывается большим (равным трем), чем количество ограничений, задаваемых в обычной точке контура (равное двум). В этом смысле задача для тела, содержащего особую точку,

оказывается неклассической. Ее решение не может быть получено классическими методами МДТТ, так как они не в состоянии подчинить решение избыточно заданным ограничениям.

Приведенный пример показывает, что в задачах механики деформируемых тел, содержащих особые точки, список ограничений в этих точках не может быть указан без предварительного исследования задаваемых в них условий. В результате такого исследования, в зависимости от сочетания материальных и геометрических параметров, устанавливаются возможные постановки задач. В случае, когда количество ограничений на параметры состояния в особых точках оказывается большим, чем требуют классические подходы, задачи для тел с особыми точками оказываются неклассическими.

В предлагаемой работе изучаются ограничения на параметры состояния и на компоненты нагрузки в особых точках упругих элементов конструкций, приводятся соответствующие задаваемым ограничениям постановки задач, строится численно-аналитический итерационный метод решения характерных для упругих тел с особыми точками неклассических задач механики деформируемого твердого тела. Рассматриваются решения неклассических упругих задач для плоских и пространственных элементов конструкций, содержащих особые точки.

2. ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ОСОБУЮ ТОЧКУ

2.1. Постановка статической задачи упругости для тела, содержащего особые точки. Теорема единственности

Во введении было показано, что задача МДТТ, содержащего особую точку, становится неклассической, когда количество ограничений на параметры состояния в этой точке превышает количество ограничений, предписанного классической постановкой. Здесь приводится постановка соответствующей задачи статики для линейно упругого тела, составленного из двух изотропных тел путем непрерывного скрепления по поверхности S_{12} . В рассматриваемой задаче особыми точками являются, в частности, точки края поверхности скрепления. Пусть V – объем составного тела, S – его поверхность, x^* – множество особых точек. Тело подвергается механической и однородной температурной нагрузке. Математическая модель данной задачи включает:

– уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \Sigma^{(k)} + \bar{f} = 0, \quad (k=1,2); \quad (2.1)$$

– зависимости, выражающие тензор деформаций через перемещения

$$E^{(k)} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u}^{(k)} + \nabla \bar{u}^{(k)T}); \quad (2.2)$$

– физические уравнения термоупругости

$$(E^{(k)} - \omega_k G \Delta T) = \lambda_k I^{(k)} G + 2\mu_k \Sigma^{(k)}; \quad (2.3)$$

– граничные условия в напряжениях

$$\bar{n} \cdot \Sigma^{(k)} = \bar{p}_n, \quad \bar{x} \in S_\Sigma, \quad x \neq x^*; \quad (2.4)$$

– граничные условия в перемещениях

$$\bar{u}^{(k)} = \bar{u}_0, \quad \bar{x} \in S_U, \quad x \neq x^*, \quad S_\Sigma \cup S_U = S; \quad (2.5)$$

– условия непрерывности напряжений и деформаций на границе S_{12} соединяемых тел

$$g_l = g_l^0, \quad \bar{x} \in S_{12}, \quad x \neq x^*, \quad l=1,2,\dots,L; \quad (2.6)$$

– ограничения на параметры состояния в особых точках

$$h_m = h_m^0, \quad x = x^*, \quad m=1,2,\dots,M. \quad (2.7)$$

Обозначено: \bar{x} – радиус-вектор точек тела; ∇ – оператор Гамильтона; Σ – тензор напряжений; I – первый инвариант тензора напряжений; \bar{f} – плотность объемных сил; λ_k, μ_k – материальные константы Ламе; \bar{p}_n –

заданный вектор напряжений; \bar{u}^0 – заданный вектор перемещений; g_l, h_m – линейные относительно параметров состояния функции; g_l^0, h_m^0 – постоянные, зависящие от внешних воздействий; L, M – количество ограничений. Требуется определить вектор перемещений, тензоры напряжений и деформаций, удовлетворяющие соотношениям (2.1) – (2.7).

Утверждается, что если решение задачи (2.1) – (2.7) существует, то оно единственное. Действительно, допустим, что имеются два различных решения, удовлетворяющих всем уравнениям задачи. Для параметров, являющихся разностями этих решений ($\tilde{\Sigma}^{(k)}, \tilde{E}^{(k)}, \tilde{u}^{(k)}$), путем вычитания соответствующих различным решениям равенств (2.1) – (2.7) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\Sigma}^{(k)} &= 0, \quad \tilde{E}^{(k)} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u}^{(k)} + \nabla \tilde{u}^{(k)T}), \\ \tilde{E}^{(k)} &= \lambda_k \tilde{I}^{(k)} G + 2\mu_k \tilde{\Sigma}^{(k)}, \\ \bar{n} \cdot \tilde{\Sigma}^{(k)} &= 0, \quad \bar{x} \in S_\Sigma, \quad x \neq x^*, \\ \tilde{u}^{(k)} &= 0, \quad \bar{x} \in S_U, \quad x \neq x^*, \quad S_\Sigma \cup S_U = S, \\ g_l &= 0, \quad \bar{x} \in S_{l2}, \quad x \neq x^*, \quad l = 1, 2, \dots, L, \\ h_m &= 0, \quad x = x^*, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Равенства (2.8) являются уравнениями упругой задачи для составного тела V , содержащего множество особых точек \bar{x}^* . Внешние воздействия в этой задаче отсутствуют, поэтому работа деформации в теле V равна нулю. Вследствие положительной определенности квадратичной формы работы деформации обращаются в нуль компоненты тензоров $\tilde{E}^{(k)}$ и в соответствии с физическими уравнениями равны нулю компоненты тензоров $\tilde{\Sigma}^{(k)}$. При этом обращаются в нуль и все функции g_l, h_m , т.к. в данной задаче они являются однородными. Таким образом, задача (2.8) имеет лишь нулевое решение, что и доказывает утверждение.

2.2. Алгоритм решения задачи (2.1) – (2.7)

Принципиальное отличие задачи (2.1) – (2.7) от задачи для упругого тела с особыми точками в классической постановке состоит в ограничениях на параметры состояния (2.7). В классической постановке особая точка не ассоциируется с элементарным объемом тела, поэтому какие-либо параметры состояния в ней не рассматриваются и, следовательно, для них не могут быть сформулированы ограничения. Равенства вида (2.7) не участвуют в постановке задачи.

В примерах, приводимых в настоящей работе, решение задачи (2.1) – (2.7) для составного тела V строится итерационным численно-аналитическим

методом с использованием смешанного вариационного принципа, в котором независимыми функциями являются перемещения и деформации [9, 46, 51]. Перемещения разыскиваются в классе непрерывных функций во всем теле V . Их первые производные непрерывны в элементах, составляющих тело V . Нулевое приближение строится путем решения задачи методом конечных элементов в классической постановке (ограничения (2.7) не учитываются). На заданной конечно-элементной сетке условия (2.1) – (2.7) представляются равенством

$$AU = b, \quad (2.9)$$

где U – глобальный вектор перемещений, b – вектор заданных констант. Перемещения в узлах, где заданы условия (2.1)–(2.7), образуют вектор U_p , вектор U представляется объединением векторов меньшей размерности $U = U_p \cup U_l$. Матрица A представляется объединением двух прямоугольных матриц $A = A_p \cup A_l$ так, что оказывается справедливым равенство

$$A_p U_p = b - A_l U_l, \quad (2.10)$$

на основе которого организуется итерационный процесс $A_p U_p^{(n)} = b - A_l U_l^{(n-1)}$, $n = 1, 2, \dots$. Матрица A_p этой системы оказывается прямоугольной, число строк в ней превышает число столбцов, поэтому решение уравнений (2.10) существует лишь в обобщенном смысле (псевдорешение). На каждом шаге последовательных приближений оно разыскивается методом сингулярного разложения [5]. Под псевдорешением уравнений (2.10) понимается либо их единственное решение (если оно существует), либо решение в смысле наименьшего среднеквадратического значения величины вектора невязок $(AU^{(n)} - b)$. Вектор $U_p^{(n)}$ используется как граничное условие при построении n -го приближения решения термоупругой задачи. Уменьшение величины вектора невязок в последовательных итерациях свидетельствует о сходимости итерационного процесса. Величина вектора невязок характеризует погрешность выполнения заданных условий в особых точках.

2.3. Изменение угла между направлениями \bar{n} , \bar{m} в малой окрестности точки сплошной среды

При построении ограничений на параметры состояния в особых точках возникает необходимость вычисления изменения угла между двумя направлениями при деформировании твердого тела.

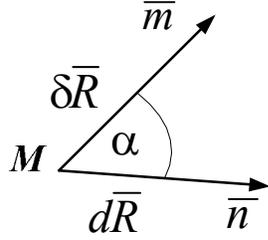


Рис.2.1. Линейные элементы $d\bar{R}$ и $\delta\bar{R}$ в точке M

В данном пункте строится соответствующая формула. Пусть в некоторой точке M сплошной среды заданы два направления ортами \bar{n} и \bar{m} . Направим по \bar{n} и \bar{m} линейные элементы $d\bar{R}$ и $\delta\bar{R}$ (рис. 2.1).

$$d\bar{R} = dx_i \bar{e}_i, \quad \delta\bar{R} = \delta x_i \bar{e}_i,$$

где \bar{e}_i – орты ортонормированной декартовой системы координат, по повторяющемуся индексу проводится суммирование от 1 до 3. В результате деформирования тела векторы $d\bar{R}$ и $\delta\bar{R}$ переходят в векторы $d\hat{R}$ и $\delta\hat{R}$ соответственно по формулам [28].

$$d\hat{R} = F \cdot d\bar{R}, \quad \delta\hat{R} = F \cdot \delta\bar{R},$$

где $F = (\delta_{ki} + \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}) \bar{e}_i \bar{e}_k$, δ_{ki} – компоненты единичного тензора, ε_{ki} – компоненты тензора деформаций, ω_{ki} – компоненты тензора поворота. Для $d\hat{R}$ и $\delta\hat{R}$ получаем

$$d\hat{R} = (\delta_{ki} + \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}) \bar{e}_i dx_k, \quad \delta\hat{R} = (\delta_{ki} + \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}) \bar{e}_i \delta x_k.$$

Обозначим через dS и δS длины линейных элементов $d\bar{R}$ и $\delta\bar{R}$, а через $d\hat{S}$ и $\delta\hat{S}$ длины $d\hat{R}$ и $\delta\hat{R}$. Кроме того, пусть $\hat{\alpha}$ – угол между элементами $d\hat{R}$ и $\delta\hat{R}$. Тогда с точностью до малых величин первого порядка справедливы равенства

$$\cos \alpha = \frac{\delta_{kp} dx_k \delta x_p}{dS \delta S}, \quad \cos \hat{\alpha} = \frac{(\delta_{kp} + 2\varepsilon_{kp}) dx_k \delta x_p}{d\hat{S} \delta\hat{S}}. \quad (2.11)$$

Пусть η_n и η_m – относительные удлинения в направлении ортов \bar{n} , \bar{m} . С использованием этих параметров получим

$$d\hat{S} = (1 + \eta_n) dS, \quad \delta\hat{S} = (1 + \eta_m) \delta S.$$

Формула для $\cos \hat{\alpha}$ (2.11) приводится к виду (малые величины выше первого порядка не учитываются)

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{(\delta_{kp} + 2\varepsilon_{kp}) dx_k \delta x_p}{dS \delta S} (1 - \eta_n)(1 - \eta_m) = \quad (2.12)$$

$$\delta_{kp} \frac{dx_k}{dS} \frac{\delta x_p}{\delta S} - (\eta_n + \eta_m) \delta_{kp} \frac{dx_k}{dS} \frac{\delta x_p}{\delta S} + 2\varepsilon_{kp} \frac{dx_k}{dS} \frac{\delta x_p}{\delta S}.$$

Из равенств (2.11) и (2.12) получаем выражение для изменения косинуса угла α :

$$\cos \alpha - \cos \hat{\alpha} = (\eta_n + \eta_m) \delta_{kp} \frac{dx_k}{dS} \frac{\delta x_p}{\delta S} - 2\varepsilon_{kp} \frac{dx_k}{dS} \frac{\delta x_p}{\delta S}. \quad (2.13)$$

Пусть φ – изменение угла α . $\varphi = \alpha - \hat{\alpha}$. С точностью до малых первого порядка

$$\cos \hat{\alpha} = \cos \alpha + \varphi \sin \alpha. \quad (2.14)$$

Из равенств (2.13) и (2.14) следует формула для вычисления изменения угла между направлениями \bar{n} , \bar{m} :

$$\varphi \sin \alpha = [2\varepsilon_{kp} - (\eta_n + \eta_m) \delta_{kp}] n_k m_p. \quad (2.15)$$

Здесь учтены обозначения

$$\frac{dx_k}{dS} = n_k, \quad \frac{\delta x_p}{\delta S} = m_p;$$

n_k, m_p – координаты ортов \bar{n} , \bar{m} .

3. ПЛОСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Классический подход к изучению напряженного состояния вблизи вершин плоских однородных клиньев базируется на асимптотической идее Уильямса [53]. Применительно к плоским элементам конструкции асимптотические методы исследования развивались многими авторами [1, 2, 4, 14, 15, 23, 32, 33, 36, 37, 40 – 43, 45, 46, 48, 51, 52, 55, 57, 70, 72, 73, 76 и др.]. В асимптотическом подходе особая точка не рассматривается как материальная частица, поэтому не принимаются во внимание и задаваемые в ней ограничения на параметры состояния. Пределы применимости классического подхода обсуждаются во введении. В данной главе представление о точке сплошной среды в виде точки континуума и связанного с ней элементарного объема используется для изучения параметров состояния в вершине однородного клина при различных его взаимодействиях с внешней средой [59, 64].

3.1. Клины, образующие которого свободны от нагрузок

Рассматривается элемент конструкции, имеющий особенность в виде клина. По биссектрисе угла 2α при вершине A клина направим ось x_1 декартовой ортонормированной системы координат x_1, x_2 .

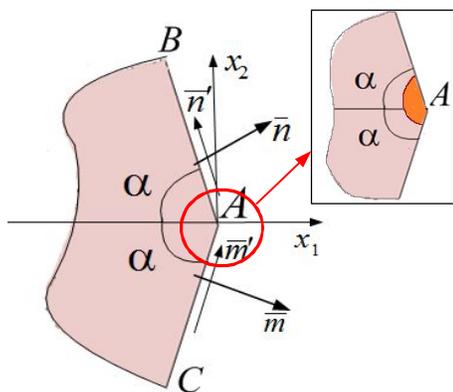


Рис.3.1. Элемент конструкции в виде клина и элементарный объем.

Внешние нормали к образующим клина обозначим через \vec{n} , \vec{m} . Через \vec{n}' , \vec{m}' обозначим соответственно перпендикулярные им орты (рис. 3.1,а). Для компонент тензора напряжений принимаются обозначения σ_{ij} , для нормальных напряжений – σ_m, σ_n , для касательных – τ_m, τ_n . В соответствии с принятой в данной работе концепцией задаваемые условия в особой точке (вершине клина) формулируются для

элементарного объема тела, примыкающего к точке A (рис. 3.1,б). Векторы напряжений на образующих клина AB и AC равны нулю, поэтому граничные условия для элементарного объема, примыкающего к точке A , записываются равенствами

$$\sigma_n = 0, \tau_n = 0, \sigma_m = 0, \tau_m = 0. \quad (3.1)$$

Равенства (3.1) представляют собой систему четырех линейных однородных уравнений относительно трех неизвестных напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из матрицы системы уравнений (3.2) можно построить четыре различных определителя третьего порядка Δ_i ($i=1,2,3,4$). Эти определители выражаются равенствами

$$\Delta_1 = \Delta_2 = -4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \Delta_3 = -\Delta_4 = \cos 2\alpha \sin 2\alpha. \quad (3.3)$$

Приравнивая к нулю определители (3.3), находим условия, при которых ранг матрицы системы уравнений (3.2) оказывается меньше трех:

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi. \quad (3.4)$$

Следовательно, для решений уравнений (3.2) возможны три случая.

1) $\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$. Матрица системы уравнений (3.2) имеет ранг, равный трем. Поэтому решение будет тривиальным: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае НДС элементарного объема в вершине клина полностью известно и не зависит ни от материальных свойств конструкции, ни от способа ее нагружения. Оно обусловлено заданными условиями вблизи точки A . Построенные для элементарного объема условия принимаются в качестве задаваемых ограничений в вершине клина. Количество заданных независимых условий оказывается избыточным, равным трем (в обычной точке граничного контура задаются два условия). Это говорит о том, что задача механики для деформируемого твердого тела, содержащего такую точку, оказывается неклассической.

2) $\alpha = \pi/2$. Граница тела не имеет угловой точки. Из уравнений (2.2) определяются напряжения $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{22} из системы уравнений не определяются, она должна находиться из решения задачи о расчете рассматриваемого элемента конструкции в соответствии с его нагружением. Число граничных условий для рассматриваемого элементарного объема равно двум, что соответствует классической задаче.

3) $\alpha = \pi$. Вершина клина в этом случае оказывается вершиной трещины. Из уравнений (3.2) определяются напряжения в элементарном объеме, содержащем особую точку, $\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{11} должна находиться из решения задачи о расчете рассматриваемого элемента конструкции. Избыточные условия для элементарного объема при вершине клина

отсутствуют. Возможные случаи ограничений на напряжения в вершине клина со свободными от нагрузок образующими приведены в табл. 3.1. В табл.3.1 и других таблицах, приводимых в этом разделе, в столбце «Количество ограничений» приводится количество ограничений на параметры состояния, сложенное с количеством ограничений на перемещения. Параметры состояния с перемещениями связаны дифференциальными соотношениями, поэтому ограничения на параметры состояния и ограничения на перемещения алгебраически независимы. Все ограничения в особой точке разбиваются на две группы: первая группа составляет классические ограничения (задаваемые при классической постановке рассматриваемой задачи); во вторую группу включаются оставшиеся ограничения, которые считаются избыточными. На первом шаге задача с особой точкой рассматривается в классической постановке. Построенное решение проверяется на выполнение всех задаваемых в особой точке ограничений. Если ограничения выполняются не в полном объеме, реализуется второй шаг – решение уточняется описанным в разделе 2 итерационным методом.

Таблица 3.1

Варианты формулировки ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$	Три
2	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$	Два
3	$\alpha = \pi$	$\sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$	Два

3.2. Кли́н с жесткозашемленными образующими

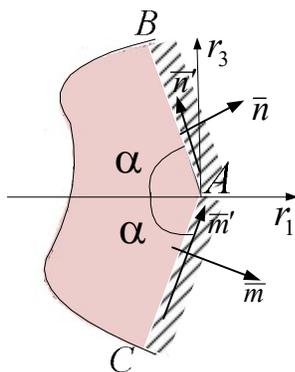


Рис. 3.2. Элемент конструкции в виде клина с зашемленными образующими

Пусть образующие клина AB и AC (рис. 3.2) жестко заделаны, точки этих образующих неподвижны в процессе деформирования элемента конструкции. Из этого следует, что удлинение в направлении ортов \bar{n}' , $-\bar{m}'$, а также сдвиги между ними обращаются в нуль. Эти условия накладывают ограничения на параметры состояния элементарного объема, примыкающего к вершине клина (особой точке).

Указанные ограничения выражаются равенствами

$$\varepsilon_{ij}n'_i n'_j = 0, \quad \varepsilon_{ij}m'_i m'_j = 0, \quad \varepsilon_{ij}n'_i m'_j = 0. \quad (3.5)$$

Третье из равенств (3.5) получено с использованием формулы (2.15).

Равенства (3.5) в результате подстановки координат ортов \bar{n}' , \bar{m}' приводятся к системе линейных однородных уравнений относительно деформаций ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ -\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (3.6) $\Delta = \sin^3 2\alpha$ обращается в нуль при $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны такие случаи решения системы (3.6):

1) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (3.6) равен трем. Ее решение $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$. Напряжения в вершине клина в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) также обращаются в нуль $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = 0$.

Если элемент конструкции подвергается температурному нагружению ($\Delta T \neq 0$), в элементарном объеме при вершине клина возникают нормальные напряжения (в случае плосконапряженного состояния для линейно упругого материала):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - \nu}, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (3.7)$$

Обозначено ω – коэффициент линейной температурной деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Как видим, для элементарного объема, примыкающего к вершине клина, все компоненты напряжений и деформаций оказываются заданы. Построенные для элементарного объема ограничения на параметры состояния принимаются задаваемыми условиями в вершине клина.

2) $\alpha = \pi/2$. Угловая точка в вершине клина отсутствует. Из уравнений (3.6) определяется компонента деформаций $\varepsilon_{22} = 0$. Деформации ε_{11} , ε_{12} находятся из решения задачи о НДС рассматриваемого тела. В отсутствие температурного нагружения с использованием физических уравнений находится зависимость между напряжениями (случай плосконапряженного состояния) $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11}$. При температурной нагрузке эта зависимость принимает вид $\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} = -\omega \Delta T E$.

3) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущему случаю из уравнений (3.6) определяется компонента деформаций $\varepsilon_{11} = 0$. В отсутствие температурного нагружения напряжения связаны равенством $\sigma_{11} = \nu \sigma_{22}$. При температурной

нагрузке $\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = -\omega\Delta T E$. Различные случаи ограничений на параметры состояния элементарного объема в вершине клина с заземленными образующими приводятся в табл. 3.2. Эти ограничения являются следствием условий, задаваемых вблизи и непосредственно в особой точке. Сжимаемая элементарный объем к вершине клина, полагаем, что параметры состояния в ней подчинены таким же ограничениям. Задаваемые в особой точке нулевые перемещения в табл. 3.2 не отражены.

Таблица 3.2.

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на $\alpha, \Delta T$	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi, \Delta T = 0$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$	Пять
2	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi, \Delta T \neq 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\omega\Delta T E}{1-\nu}, \sigma_{12} = 0$	Пять
3	$\alpha = \pi/2, \Delta T = 0$	$\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} = 0$	Три
4	$\alpha = \pi/2, \Delta T \neq 0$	$\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} = -\omega\Delta T E$	Три
5	$\alpha = \pi, \Delta T = 0$	$\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} = 0$	Три
6	$\alpha = \pi, \Delta T \neq 0$	$\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = -\omega\Delta T E$	Три

Задачи, отвечающие первым двум строкам табл. 3.2, являются неклассическими, так как напряженное состояние в особой точке полностью определено.

3.3. Клины, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая свободна от нагрузки

Пусть образующая AB свободна от нагрузки, а образующая AC жестко закреплена (рис. 3.3). Тогда для элементарного объема в вершине клина на площадке, ориентируемой ортом \vec{n} , обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на площадке, ориентируемой ортом \vec{m} , обращается в нуль относительное удлинение в направлении орта $-\vec{m}'$.

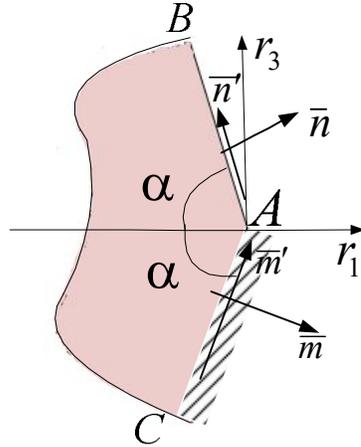


Рис.3.3. Элемент конструкции
в виде клина с заземленной и свободной образующими

Эти условия записываются системой уравнений (плоское напряженное состояние, линейно-упругое тело):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1 + \nu) \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) &= -\omega E \Delta T. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (3.8) $\Delta = 1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_2 &= -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_4 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_4 &= -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если угол α не удовлетворяет условиям (3.9), ранг матрицы системы уравнений (3.8) равен трем. В этом случае в отсутствие температурной нагрузки ($\Delta T = 0$) все напряжения в элементарном объеме при вершине клина обращаются в нуль $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$. При температурном нагружении ($\Delta T \neq 0$) рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение:

$$\sigma_{11} = -\frac{\omega E \Delta T \cos^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}; \quad \sigma_{12} = \frac{\omega E \Delta T \sin \alpha \cos \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}; \quad \sigma_{22} = -\frac{\omega E \Delta T \sin^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}.$$

Приведенные решения принимаются за ограничения в вершине клина. Из них следует, что напряженное состояние в особой точке полностью известно,

такое количество ограничений избыточно, задача МДТТ оказывается неклассической.

В случае, когда выполняется одно из условий (3.9), ранг матрицы системы уравнений (3.8) равен двум. В отсутствие температурной нагрузки ($\Delta T = 0$) два напряжения могут быть выражены через третье $\sigma_{11} = \sigma_{22} \text{ctg}^2 \alpha$, $\sigma_{12} = -\sigma_{22} \text{ctg} \alpha$, $\alpha = \alpha_i$ ($i=1,2,3,4$). При наличии температурной нагрузки ($\Delta T \neq 0$) и при выполнении какого-либо из условий (3.9) ранг расширенной матрицы системы уравнений (3.8) равен трем, поэтому решения этих уравнений в плоской постановке не существует. В данном случае углы, определяемые равенствами (3.9), следует рассматривать как критические в следующем смысле: когда параметры конструкции приближаются к значениям, удовлетворяющим какому-либо из равенств (3.9), НДС элементарного объема в вершине клина (являясь полностью известным) неограниченно возрастает. Ограничения на параметры состояния в вершине рассматриваемого клина в зависимости от его геометрических и материальных характеристик приводятся в табл. 3.3.

Таблица 3.3.

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α , ν , ΔT	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\sin \alpha \neq \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}$; $\Delta T = 0$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$	Пять
2	$\sin \alpha \neq \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}$; $\Delta T \neq 0$	$\sigma_{11} = -\frac{\omega E \Delta T \cos^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}$; $\sigma_{12} = \frac{\omega E \Delta T \sin \alpha \cos \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}$; $\sigma_{22} = -\frac{\omega E \Delta T \sin^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}$.	Пять
3	$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}$; $\Delta T = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} \text{ctg}^2 \alpha, \sigma_{12} = -\sigma_{22} \text{ctg} \alpha,$	Четыре
4	$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}$; $\Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	—

3.4. Кли́н, одна из сторон которого жестко заделана, а другая проскальзывает без трения вдоль жесткой стенки

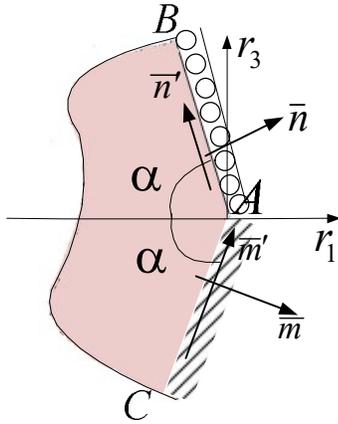


Рис.3.4. Элемент конструкции в виде клина с защемленной и проскальзывающей вдоль жесткой стенки образующими

Пусть жесткозаделанной является образующая клина AC (рис. 3.4), тогда на параметры состояния элементарного объема в вершине клина накладываются такие ограничения:

- а) на стороне клина АВ обращаются в нуль касательные напряжения;
- б) в направлении вектора $-\bar{m}'$ относительное удлинение линейного элемента обращается в нуль;
- в) сдвиг между направлениями \bar{n}' и $-\bar{m}'$ обращается в нуль.

Эти условия выражаются уравнениями относительно напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ (плосконапряженное состояние, линейно-упругое тело)

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\
 \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1 + \nu) \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) &= -\omega E \Delta T, \\
 \sigma_{11} (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{12} \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sigma_{22} (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha) &= -\omega E \Delta T \cos 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (3.10) $\Delta = \frac{\nu^2 - 1}{2} \sin^2 2\alpha \cos 2\alpha$ на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль в точках $\alpha = \pi/4, \alpha = \pi/2, \alpha = 3\pi/4, \alpha = \pi$.

Поэтому возможны следующие случаи решений уравнений (3.10):

$$1) \alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi.$$

Ранг матрицы системы уравнений (3.10) равен трем. В отсутствие температурного нагружения она имеет нулевое решение: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$.

При температурном нагружении уравнения (3.10) имеют единственное решение: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\omega E \Delta T}{\nu - 1}, \sigma_{12} = 0$.

В рассматриваемом случае в особой точке задаются сформулированные для элементарного объема ограничения для напряжений и отсутствие перемещений.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы (3.10) равен двум. В отсутствие температурного нагружения напряжения σ_{11} и σ_{12} можно выразить через σ_{22} :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \sigma_{22}.$$

При температурном нагружении ранг расширенной матрицы также равен двум, система уравнений (3.10) совместна, два напряжения выражаются через третье $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = -\frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}$.

В рассматриваемом случае в элементарном объеме при вершине клина накладываются два ограничения на компоненты тензора напряжений.

3) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (3.10) и ранг ее расширенной матрицы одинаковы и равны двум, система совместна. Между напряжениями имеются зависимости $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$. Эти ограничения на компоненты напряжений задаются в рассматриваемом случае в особой точке.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Случай аналогичен случаю, рассмотренному в п.2. Напряжения в особой точке связаны равенствами $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}$.

5) $\alpha = \pi$. Как и в п.4), в данном случае напряжения в элементарном объеме, содержащем вершину клина, связаны соотношениями $\sigma_{11} = \nu \sigma_{22} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$. Возможные случаи ограничений на параметры состояния в вершине рассматриваемого клина приводятся в таблице 3.4.

Таблица 3.4.

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\omega E \Delta T}{\nu - 1};$ $\sigma_{12} = 0$	Пять
2	$\alpha = \pi/4$	$\sigma_{11} = \sigma_{22};$ $\sigma_{12} = -\frac{\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)}{\nu + 1}$	Пять
3	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} - \omega E \Delta T;$ $\sigma_{12} = 0$	Четыре
4	$\alpha = 3\pi/4$	$\sigma_{11} = \sigma_{22};$ $\sigma_{12} = \frac{\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)}{\nu + 1}$	Четыре
5	$\alpha = \pi$	$\sigma_{11} = \nu \sigma_{22} - \omega E \Delta T;$ $\sigma_{12} = 0$	Четыре

3.5. Кли́н, одна из сторон которого свободна от напряжений, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности

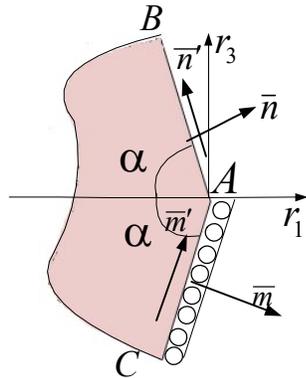


Рис.3.5. Элемент конструкции в виде клина со свободной и проскальзывающей вдоль жесткой стенки образующими

Примем, что на образующей AB обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на образующей AC в нуль обращаются касательные напряжения (рис. 3.5). Эти условия для элементарного объема в вершине клина выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Еще одно условие для элементарного объема вблизи точки A состоит в отсутствии перемещений его точек на линии AC в направлении вектора \bar{m} . Матрица системы уравнений (3.11) имеет определитель $\Delta = \sin 2\alpha \cos 2\alpha$, обращаящийся в нуль на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ в точках $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/4$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны следующие случаи решения уравнений (3.11):

1) $\alpha \neq \pi/4$, $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/4$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (3.11) равен трем, поэтому она имеет лишь тривиальное решение $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Напряженное состояние в элементарном объеме в вершине клина оказывается полностью известным. Оно принимается в качестве ограничений в вершине клина.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (3.11) равен двум, между напряжениями в элементарном объеме при вершине имеются зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{22}$; $\sigma_{12} = -\sigma_{22}$. Эти условия и отсутствие перемещений в направлении вектора \bar{m} принимаются за ограничения в вершине клина.

3) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (3.11) определяются два напряжения: $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Эти значения напряжений принимаются в качестве ограничений в вершине клина.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Из уравнений (3.11) следуют зависимости

$\sigma_{11} = \sigma_{22}$; $\sigma_{12} = \sigma_{22}$. Данный случай аналогичен случаю 2.

5) $\alpha = \pi$. Из уравнений (3.11) определяются компоненты напряжений $\sigma_{22} = 0$; $\sigma_{12} = 0$. Варианты возможных ограничений на компоненты напряжений в элементарном объеме при вершине рассматриваемого клина приводятся в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$	Четыре
2	$\alpha = \pi/4$	$\sigma_{11} = \sigma_{22}; \sigma_{12} = -\sigma_{22}$	Три
3	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{11} = 0; \sigma_{12} = 0$	Три
4	$\alpha = 3\pi/4$	$\sigma_{11} = \sigma_{22}; \sigma_{12} = \sigma_{22}$	Три
5	$\alpha = \pi$	$\sigma_{22} = 0; \sigma_{12} = 0$	Три

3.6. Клины, образующие которого нагружены поверхностными усилиями

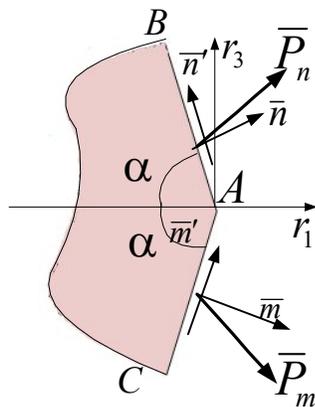


Рис.3.6. Элемент конструкции в виде клина с нагруженными образующими

В данной задаче напряжения на образующих AB и AC равны заданным нормальным и касательным усилиям

$$\sigma_n = p_n; \quad \tau_n = \tau_n; \quad \sigma_m = p_m; \quad \tau_m = \tau_m.$$

Для элементарного объема в вершине клина эти равенства запишутся системой четырех уравнений относительно трех напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_m, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_m. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Четыре различных определителя матрицы системы уравнений (3.12) имеют значения (3.3) и одновременно обращаются в нуль при условиях (3.4): $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны такие три случая поведения решений уравнений (3.12):

1) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (3.12) равен трем. Для того чтобы в этом случае существовало решение, ранг расширенной матрицы системы тоже должен равняться трем. Это условие приводит к ограничению на приложенные нагрузки

$$(p_n - p_m) \cos 2\alpha + (\tau_n + \tau_m) \sin 2\alpha = 0. \quad (3.13)$$

Ограничение (3.13) требует, чтобы заданные усилия на образующих клина для элементарного объема при вершине находились в соответствии с условием симметричности тензора напряжений. Ограничение (3.13) выражает равенство в точке A проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором \vec{n} , на направление \vec{m} проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором \vec{m} , на направление \vec{n} ($\vec{P}_n \cdot \vec{m} = \vec{P}_m \cdot \vec{n}$). При невыполнении ограничения (3.13) симметричная теория упругости не описывает напряженное состояние в окрестности вершины клина. Если приложенные нагрузки удовлетворяют условию (3.13), уравнение (3.12) имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_m - \tau_n) \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_n) + \frac{1}{2}(p_n - p_m) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что данное решение может быть найдено и другим способом – путем составления уравнения равновесия бесконечно малого элемента, примыкающего к вершине клина. Как следует из равенств (3.14), в данном случае напряженное состояние для элементарного объема при вершине клина полностью известно.

2) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (3.12) равен двум. Для того чтобы существовало решение этих уравнений, ранг расширенной матрицы также должен быть равен двум. Это условие приводит к ограничениям в особой точке на прикладываемую нагрузку

$$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m. \quad (3.15)$$

Ограничения (3.15) обусловлены требованием к нагрузке. Она должна соответствовать условию симметричности тензора напряжений. При выполнении условия (3.15) из уравнений (3.12) получаем $\sigma_{11} = p_m$, $\sigma_{12} = \tau_n$. Эти условия принимаются за ограничения в особой точке. Количество ограничений равно двум, что соответствует классической задаче.

3) $\alpha = \pi$. Данный случай аналогичен предыдущему. Система уравнений (3.12) совместна при выполнении ограничений (3.15), ее решение: $\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = -\tau_n$. Количество ограничений в вершине клина соответствует классическому случаю. Отметим, что условия (3.13) и (3.15), накладываемые на задаваемую нагрузку, являются критическими в том смысле, что при их невыполнении напряжения в элементарном объеме, являющемся особой точкой, не определены. Возможные формулировки ограничений в вершине клина для рассматриваемого случая приведены в табл.3.6.

Таблица 3.6

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α	Условия на нагрузку	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$	$(p_n - p_m) \cos 2\alpha +$ $(\tau_n + \tau_m) \sin 2\alpha = 0$.	$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_m - \tau_n) \operatorname{ctg} \alpha,$ $\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_n) + \frac{1}{2}(p_n - p_m) \operatorname{ctg} \alpha,$ $\sigma_{22} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m) \operatorname{tg} \alpha.$	Три
2	$\alpha = \pi/2$	$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m.$	$\sigma_{11} = p_m, \quad \sigma_{12} = \tau_n$	Два
3	$\alpha = \pi$	$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m.$	$\sigma_{22} = p_n, \quad \sigma_{12} = -\tau_n$	Два

3.7. Клин, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая нагружена поверхностными усилиями

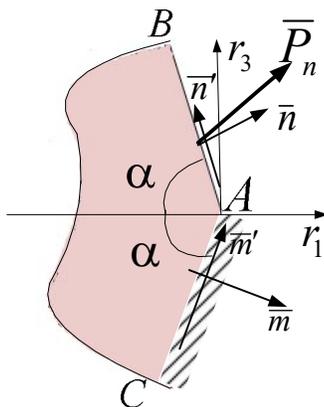


Рис.3.7. Элемент конструкции в виде клина с закрепленной и нагруженной образующими

Пусть образующая AB клина нагружена нормальным напряжением p_n и касательным τ_n , а образующая AC жестко закреплена, поэтому относительное удлинение в направлении орта $-m'$ в элементарном объеме при вершине клина обращается в нуль. Указанные ограничения на параметры состояния элементарного объема – особой точки записываются системой трех уравнений относительно компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1 + \nu)\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) = 0.$$

Определитель матрицы системы уравнений (3.16) $\Delta = 1 - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при значениях $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, определяемых равенствами (3.9). Если угол α не равен $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, ранг матрицы системы уравнений (3.16) равен трем и она имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{p_n [\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha [1 - (1 + \nu)\cos^2 \alpha]}{1 - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha}, \\ \sigma_{12} &= \frac{p_n (1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_n \cos 2\alpha}{1 - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha}, \\ \sigma_{22} &= \frac{p_n [\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha [2(1 + \nu)\sin^2 \alpha - 1]}{1 - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Напряженное состояние элементарного объема в вершине клина полностью известно.

Когда угол α совпадает с каким-либо из углов (3.9), ранг системы уравнений (3.16) оказывается равным двум. Для того чтобы вычислить ранг расширенной матрицы, построим три определителя, получающиеся путем последовательной замены столбцов матрицы системы (3.16) столбцом свободных членов. Получим

$$\Delta_i = p_n f_i(\nu) + \tau_n \varphi_i(\nu), \quad (i=1,2,3). \quad (3.18)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1(\nu) &= \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha, & \varphi_1(\nu) &= \sin 2\alpha [\cos^2 \alpha - (1 + 2\nu)\sin^2 \alpha], \\ f_2(\nu) &= (1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha, & \varphi_2(\nu) &= -\cos 2\alpha, \\ f_3(\nu) &= \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha - (1 + \nu)\sin^2 2\alpha, & \varphi_3(\nu) &= \sin 2\alpha [2(1 + \nu)\cos^2 \alpha - 1]. \end{aligned}$$

Приравнивая определители (3.18) нулю, получим систему уравнений относительно параметров нагрузки p_n, τ_n . Ранг матрицы этой системы уравнений в точках $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$ оказывается равным единице. Это означает, что уравнения $\Delta_i = 0, (i=1,2,3)$ будут совместны при выполнении условий

$$\begin{aligned} p_n(\nu - 1) - 2\tau_n \sqrt{\nu} &= 0, \quad \text{для } \alpha_1, \alpha_4; \\ p_n(\nu - 1) + 2\tau_n \sqrt{\nu} &= 0, \quad \text{для } \alpha_2, \alpha_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В этом случае ранг матрицы системы уравнений (3.16) и ранг расширенной матрицы совпадают, два компонента напряжений выражаются через третий и приложенную нагрузку

$$\sigma_{11} = p_n(1 - ctg^2 \alpha) + \sigma_{22} ctg^2 \alpha - 2\tau_n ctg \alpha,$$

$$\sigma_{12} = (p_n - \sigma_{22}) \operatorname{ctg} \alpha + \tau_n, \alpha = \alpha_i (i=1,2,3,4). \quad (3.20)$$

Если приложенная нагрузка не удовлетворяет ограничениям (3.19) в точках $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, решение уравнений (3.16) не существует. В этом случае значения $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, определяемые формулами (3.9), являются критическими. Это проявляется в том, что при приближении коэффициента Пуассона ν к значению, определяющему углы α_i в формулах (3.9), напряжения в элементарном объеме при вершине клина неограниченно возрастают. Возможные формулировки ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина, в рассматриваемом случае приводятся в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α, ν	Условия на нагрузку	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\sin \alpha \neq \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}$	Нет	Формулы (3.17)	Пять
2	$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}},$ $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}};$ или $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}},$ $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}.$	$p_n(\nu - 1) - 2\tau_n\sqrt{\nu} = 0.$	Формулы (3.20)	Четыре
3	$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}},$ $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}};$ или $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}},$ $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}.$	$p_n(\nu - 1) + 2\tau_n\sqrt{\nu} = 0$	Формулы (3.20)	Четыре

3.8. Клин, одна из сторон которого скользит без трения по жесткой поверхности, а другая нагружена

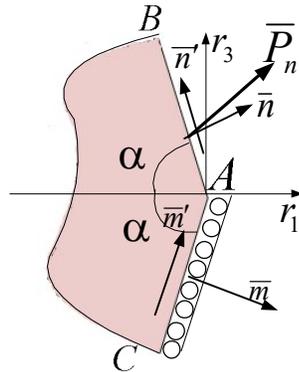


Рис.3.8. Элемент конструкции в виде клина с нагруженной и проскальзывающей вдоль жесткой стенки образующими

Примем, что образующая клина AB нагружена нормальными и касательными усилиями p_n , τ_n , а образующая клина AC скользит без трения по жесткой поверхности. В этом примере параметры состояния для элементарного объема при вершине клина подчинены ограничениям $\sigma_n = p_n$, $\tau'_n = \tau_n$, $\tau'_m = 0$, что описывается равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

представляющими собой систему уравнений для напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . Определитель матрицы этой системы $\Delta = \cos 2\alpha \sin 2\alpha$ обращается в нуль в точках $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = 3\pi/4$, $\alpha_4 = \pi$. Поэтому возможны такие варианты решения системы уравнений (3.21):

1) $\alpha \neq \pi/4$, $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/4$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений равен трем, она имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\tau_n}{2 \cos 2\alpha}, \quad \sigma_{22} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}. \quad (3.22)$$

Напряженное состояние элементарного объема в вершине клина полностью известно.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (3.21) равен двум, условием совместности этих уравнений служит равенство

$$\tau_n = 0. \quad (3.23)$$

В этом случае ранг расширенной матрицы оказывается равен рангу матрицы системы, зависимости между напряжениями записываются соотношениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = p_n - \sigma_{22}$. Если условие (3.23) не выполняется, решение системы (3.21) не существует. В этом случае значение $\pi/4$ является критическим. Когда угол α при вершине клина стремится к $\pi/4$, напряжения в элементарном объеме, содержащем вершину клина, неограниченно возрастают.

3) $\alpha = \pi/2$. Условием совместности уравнений (3.21) служит равенство (3.23). Решение имеет вид $\sigma_{11} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Условием совместности уравнений (3.21) также служит равенство (3.23). Решение записывается зависимостями между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} - p_n$.

5) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущим случаям условие совместности системы (3.21) записывается равенством (3.23), решение имеет вид $\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$. Возможные формулировки ограничений в вершине клина в рассматриваемом случае приводятся в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Варианты формулировок ограничений в элементарном объеме, содержащем вершину клина

№	Условия на α	Ограничения на нагрузку	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4$, $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/4$, $\alpha \neq \pi$	Нет	$\sigma_{11} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}$, $\sigma_{12} = -\frac{\tau_n}{2 \cos 2\alpha}$, $\sigma_{22} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}$.	Четыре
2	$\alpha = \pi/4$	$\tau_n = 0$.	$\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = p_n - \sigma_{22}$	Три
3	$\alpha = \pi/2$	$\tau_n = 0$.	$\sigma_{11} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$	Три
4	$\alpha = 3\pi/4$	$\tau_n = 0$.	$\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} - p_n$	Три
5	$\alpha = \pi$	$\tau_n = 0$.	$\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$	Три

3.9. Растяжение однородной пластинки с V-образной особенностью

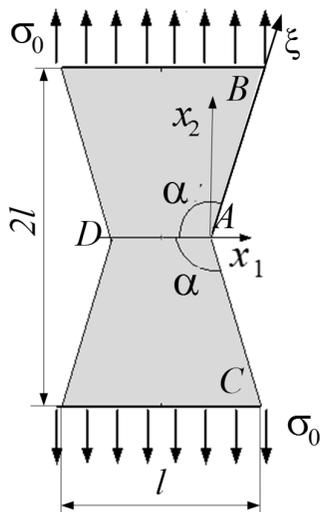


Рис.3.9

Рассматривается растяжение однородной пластинки (рис.3.9) с особенностью в виде клина с образующими, свободными от нагрузок (п.3.1.). Материальные и геометрические параметры в расчетах имеют значения: $l=1\text{см}$, $E=2 \cdot 10^{11}\text{Па}$, $\nu=0.3$, угол α принимается равным $93^\circ, 99^\circ, 105^\circ$. Нагружение осуществляется напряжениями $\sigma_0 = 1 \cdot 10^8\text{Па}$.

В рассматриваемом случае задача является неклассической. Условия для напряжений в точке А записываются равенствами (3.24): $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = 0$.

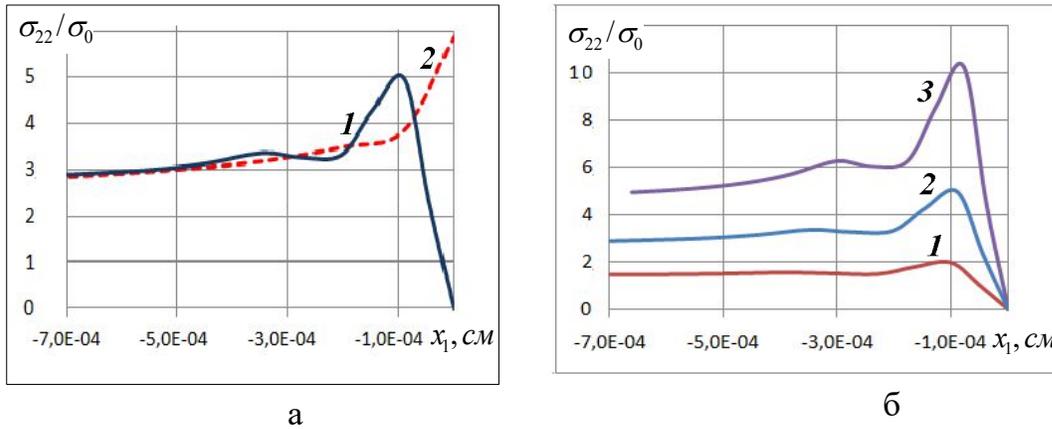


Рис.3.10. Концентрация напряжений σ_{22}/σ_0 в окрестности особой точки. а) $\alpha = 99^\circ$: 1 – решение на 957 итерации; 2 – нулевое приближение; б) решение на 957 итерации для различных углов α : 1 – $\alpha = 93^\circ$; 2 – $\alpha = 99^\circ$; 3 – $\alpha = 105^\circ$.

На рис. 3.10 приводится решение для отношения σ_{22}/σ_0 на оси x_1 в окрестности точки А. Результаты вычислений получены на неоднородной КЭ-сетке со сгущением к особой точке. Применялся четырехугольный 8-и узловой конечный элемент, минимальный линейный размер которого составлял 0,53 мкм. На рис. 3.10,а показаны решение в нулевом приближении (штриховая линия 2) и решение на 957 итерации (сплошная линия 1) для случая, когда $\alpha = 99^\circ$. Нулевое приближение совпадает с решением в программном комплексе ANSYS (классическое решение). Видно, что условие $\sigma_{22} = 0$, входящее в ограничение (3.34), в классическом решении не выполняется. В решении, построенном методом итераций, выполняются все условия (3.24). Важно также, что приведенные на этом рисунке решения отличаются лишь в малой окрестности особой точки, с удалением от нее решения совпадают. На рис. 3.10,б приводится зависимость концентрации напряжений σ_{22}/σ_0 вблизи точки А на оси x_1 для разных углов α . С ростом угла α , как и следовало ожидать, концентрация напряжений также растет.

Приведенные в данном разделе ограничения на параметры состояния в элементарном объеме – вершине клина имеют статус необходимых условий в особой точке. Они должны выполняться при использовании любого метода исследования. Поэтому, если указанные ограничения не учитываются при постановке задачи в качестве задаваемых условий, то они (ограничения) должны служить критериями достоверности получаемого решения.

4. ПЛОСКИЕ СОСТАВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

В главе рассматриваются особые точки в составных элементах конструкций. Наибольшая концентрация напряжений в таких элементах реализуется обычно вблизи точек края их соединения. Часто эти точки являются к тому же угловыми. Окрестности рассматриваемых точек содержат элементарные объемы скрепляемых тел. Эти объемы находятся в однородных, но различных напряженно-деформированных состояниях. Задаваемые ограничения на параметры состояния в таких объемах принимаются за граничные условия в особых точках [27, 61 – 63, 67]. Изучением особенностей напряженно деформированного состояния вблизи края линии соединения плоских кусочно-однородных элементов конструкций с использованием классического подхода занимались многие авторы. Применяемые методы и результаты исследований отражены, в частности, в публикациях [3, 11–13, 19, 23, 30, 40 – 42, 46, 73, 76 и др.]. В классическом подходе в особой точке составного клина, как и в случае однородного клина, какие-либо ограничения не рассматриваются.

4.1. Кусочно-однородный элемент конструкции с особенностью в виде клина, образующие которого свободны от нагрузки

4.1.1. Ограничения на компоненты напряжений в особых точках

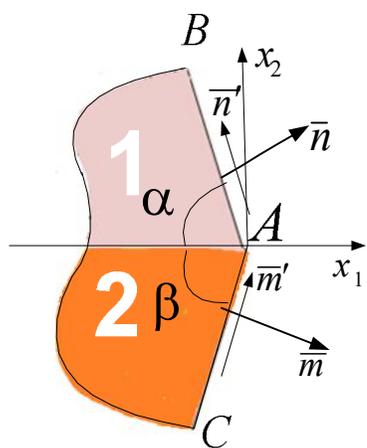


Рис. 4.1. Составной клин

Принято: образующие клина свободны от нагрузки, углы при вершине составляющих клиньев – α, β .

Область изменения α, β :

$$0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi, \quad \alpha + \beta \leq 2\pi. \quad (4.1)$$

К вершине клина (особой точке A) примыкают элементарные объемы скрепляемых тел 1, 2. Параметры состояния в рассматриваемых элементарных объемах отождествляются с параметрами состояния в вершине клина. На параметры состояния элементарных объемов, содержащих вершину клина накладываются ограничения:

а) граничные условия

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0, \quad \sigma_m = 0, \quad \tau_m = 0; \quad (4.2)$$

б) условия непрерывности напряжений

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}; \quad (4.3)$$

в) условие непрерывности деформаций

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}. \quad (4.4)$$

Верхний индекс – номер элемента клина (рис. 4.1). Кроме ограничений (4.2) – (4.4) на параметры состояния выполняются условия непрерывности перемещений на линии соединения элементарных объемов.

Условия (4.2), (4.3) приводятся к четырем линейным однородным уравнениям относительно величин $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{22} \cos^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{12} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ненулевое решение системы (4.5) существует лишь в случае, если ее определитель

$$\Delta = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

обращается в нуль. Уравнение $\Delta = 0$ в области (4.1) изменения параметров α, β имеет решения

$$\alpha = \pi, \quad \beta = \pi, \quad \alpha + \beta = \pi, \quad \alpha + \beta = 2\pi.$$

Рассмотрим возможные случаи ограничений на компоненты напряжений в особой точке для линейно-упругих материалов элементов 1 и 2 с модулями Юнга E_1, E_2 , коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 и коэффициентами температурной деформации ω_1, ω_2 соответственно.

1) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi$.

Определитель системы уравнений (4.5) не обращается в нуль, поэтому ее решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0. \quad (4.6)$$

При отсутствии температурной нагрузки ($\Delta T = 0$, ΔT – приращение температуры) условие непрерывности деформаций (4.4) выполняется. В этом

случае напряженное состояние в особых точках полностью определено равенствами (4.6). Когда $\Delta T \neq 0$, равенство (4.4) в плоской задаче приводится к виду $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$. Из чего следует, что плоская задача в этом случае возможна лишь при условии $\omega_1 = \omega_2$.

$$2) \alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi.$$

Из уравнений (4.5) следует

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0.$$

Условие (4.4) для обобщенного плоско напряженного и плоско деформированного состояний приводится соответственно к виду

$$\sigma_{11}^{(1)} = E_1(\omega_2 - \omega_1)\Delta T, \quad \sigma_{11}^{(1)} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1^2)}(\omega_2 - \omega_1)\Delta T.$$

Напряженное состояние в особой точке полностью известно.

$$3) \alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi.$$

Из уравнений (4.5) получаем

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0.$$

Для плосконапряженного и плоскодеформированного состояния с использованием равенства (4.4) соответственно получаем

$$\sigma_{11}^{(2)} = E_2(\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{E_2}{(1 - \nu_2^2)}(\omega_1 - \omega_2)\Delta T.$$

Напряжения в вершине клина оказываются полностью заданными.

$$4) \alpha = \pi, \beta = \pi.$$

Решение уравнений (4.5)

$$\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0.$$

Условие (4.4) связывает напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$ и $\sigma_{11}^{(2)}$. Например, в случае плосконапряженного состояния получаем

$$\frac{1}{E_2}\sigma_{11}^{(2)} - \frac{1}{E_1}\sigma_{11}^{(1)} = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T.$$

$$5) \alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi.$$

Уравнения (4.5) позволяют выразить напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{11}^{(2)}$ и σ_{12} через напряжение σ_{22}

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22}ctg^2\alpha, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22}ctg^2\alpha, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22}ctg\alpha. \quad (4.7)$$

В случае обобщенного плосконапряженного состояния условие непрерывности деформаций (4.4) приводится к виду

$$(\omega_1 - \omega_2)\Delta T + \left[\frac{1}{E_1}(ctg^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(ctg^2\alpha - \nu_2) \right] \sigma_{22} = 0, \quad (4.8)$$

а в случае плоскодеформированного состояния равенство (4.4) запишется так

$$(\omega_1 - \omega_2)\Delta T - \left\{ \frac{1 + \nu_1}{E_1} [(1 - \nu_1) \operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1] - \frac{1 + \nu_2}{E_2} [(1 - \nu_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2] \right\} \sigma_{22} = 0. \quad (4.9)$$

Когда выражения в скобках при σ_{22} в равенствах (4.8), (4.9) не обращаются в нуль, напряжения σ_{22} из этих равенств определяются. НДС в элементарных объемах, примыкающих к вершине, становится полностью известным. Сочетание геометрических и материальных параметров, обращающее в нуль выражение в квадратных скобках равенства (4.8) и в фигурных скобках равенства (4.9), является критическим. При приближении материальных и геометрических параметров к таким сочетаниям напряжения в элементарных объемах, примыкающих к точке А, неограниченно возрастают.

Если выполняется равенство $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, условие непрерывности деформаций (4.4) запишется произведением (случай плосконапряженного состояния)

$$\left[\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2) \right] \sigma_{22} = 0, \quad (4.10)$$

откуда видно, что если множитель в квадратных скобках не равен нулю, то напряжение σ_{22} , а вследствие (4.7) и все другие напряжения для элементарных объемов вблизи точки А обращаются в нуль. Аналогичные результаты справедливы для плоскодеформированного состояния. Если же множитель при σ_{22} в (4.10) обращается в нуль, на это напряжение в элементарных объемах вблизи точки А не накладываются какие-либо ограничения. В данном случае суммарное количество ограничений на параметры состояния в элементарных объемах вблизи вершины равно пяти. К ним необходимо присоединить условия непрерывности перемещений в точке края линии соединения составляющих элементов клина. При указанных условиях в особой точке задача механики деформируемого твердого тела оказывается классической (см. п. 4.1.2).

б) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta = 2\pi$. Из уравнений (4.5) определяются зависимости между напряжениями (4.7). Условие непрерывности деформаций (4.4) в случае плосконапряженного состояния приводится к виду (4.8). Когда выражение в скобках при σ_{22} в (4.8) не обращается в нуль, эти напряжения из равенства (4.8) определяются. НДС в вершине клина становится полностью известным. Если выполняются условия

$$(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0, \quad \frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2) = 0,$$

на компоненту σ_{22} каких-либо дополнительных ограничений не накладывается. Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений

в вершине клина приводятся в табл.4.1. В столбце «количество ограничений» учитываются и ограничения на перемещения в вершине клина.

Таблица 4.1

Ограничения на напряжения в особых точках для плоско напряженного состояния

№	Условия на $\alpha, \beta, \Delta T, E_k, \nu_k, \omega_k$	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi,$ $\alpha + \beta \neq \pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = 0$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0$	Восемь
2	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi,$ $\alpha + \beta \neq \pi, (\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2) \right] \neq 0$	Ограничения несовместны	—
3	$\alpha = \pi, \beta \neq \pi$	$\sigma_{11}^{(1)} = E_1(\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \sigma_{11}^{(2)} = 0$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0$	Восемь
4	$\alpha \neq \pi, \beta = \pi$	$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \sigma_{11}^{(2)} = E_1(\omega_1 - \omega_2)\Delta T$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0$	Восемь
5	$\alpha = \pi, \beta = \pi$	$\frac{1}{E_2}\sigma_{11}^{(2)} - \frac{1}{E_1}\sigma_{11}^{(1)} = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0$	Семь
6	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2) \right] \neq 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22}\text{ctg}^2\alpha, \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22}\text{ctg}^2\alpha,$ $\sigma_{12} = -\sigma_{22}\text{ctg}\alpha,$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} =$ $= \frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T}{\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2)}$	Восемь
7	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2) \right] = 0$	Ограничения несовместны	—
8	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2) \right] \neq 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = 0$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0$	Восемь
9	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(\text{ctg}^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(\text{ctg}^2\beta - \nu_2) \right] = 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22}\text{ctg}^2\alpha,$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = -\sigma_{22}\text{ctg}\alpha,$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Семь

№	Условия на $\alpha, \beta, \Delta T, E_k, \nu_k, \omega_k$	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
10	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(ctg^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(ctg^2\beta - \nu_2) \right] \neq 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22} ctg^2\alpha, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22} ctg^2\alpha,$ $\sigma_{12} = -\sigma_{22} ctg\alpha,$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} =$ $= -\frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T}{\frac{1}{E_1}(ctg^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(ctg^2\beta - \nu_2)}$	Восемь
11	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(ctg^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(ctg^2\beta - \nu_2) \right] = 0$	Ограничения несовместны	—
12	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $\left[\frac{1}{E_1}(ctg^2\alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2}(ctg^2\beta - \nu_2) \right] = 0$	$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22} ctg^2\alpha,$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = -\sigma_{22} ctg\alpha,$ $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Семь

4.1.2. Классический случай задачи о растяжении составной прямоугольной пластинки

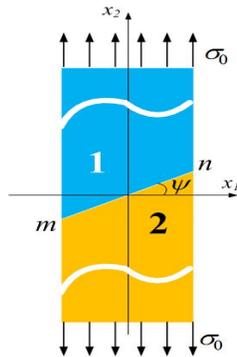


Рис.4.2. Схема нагружения пластинки, полученной соединением двух элементов по линии m-n

Рассматривается растяжение в направлении оси x_2 составной прямоугольной пластинки (рис. 4.2).

Ограничения на параметры состояния в особых точках элемента конструкции отвечают варианту 9 (табл. 4.1).

Вводится угол ψ , определяемый равенствами $\alpha = \pi/2 + \psi, \beta = \pi/2 - \psi$. Условия, накладываемые на материальные параметры (обращение в нуль выражений в равенствах (4.8), (4.9) при σ_{22}) с использованием угла ψ для плоскодеформированного и обобщенного плосконапряженного состояния соответственно принимают вид

$$tg^2\psi = \frac{E_1\nu_2(1+\nu_2) - E_2\nu_1(1+\nu_1)}{E_1(1-\nu_2^2) - E_2(1-\nu_1^2)}, \quad tg^2\psi = \frac{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}{E_2 - E_1}. \quad (4.11)$$

Если угол ψ (угол между осью x_1 и линией $m-n$ соединения элементов 1, 2) выбирается в соответствии с формулами (4.11), задача о растяжении составной пластинки оказывается классической. Ее решение состоит в том, что во всех точках конструкции реализуется однородное напряженное состояние $\sigma_{22} = \sigma_0$, $\sigma_{ij} = 0, (i, j \neq 2)$. Концентрация напряжений вблизи особой точки отсутствует. На рис. 4.3. приводятся примеры расчета составных конструкций, работающих на растяжение-сжатие в направлении вертикальной оси в условиях плосконапряженного состояния. При этом углы наклона линии скрепления к горизонтальной оси выбраны из условий (4.11). В таких конструкциях реализуется однородное напряженное состояние, а концентрация напряжений вблизи особых точек отсутствует.

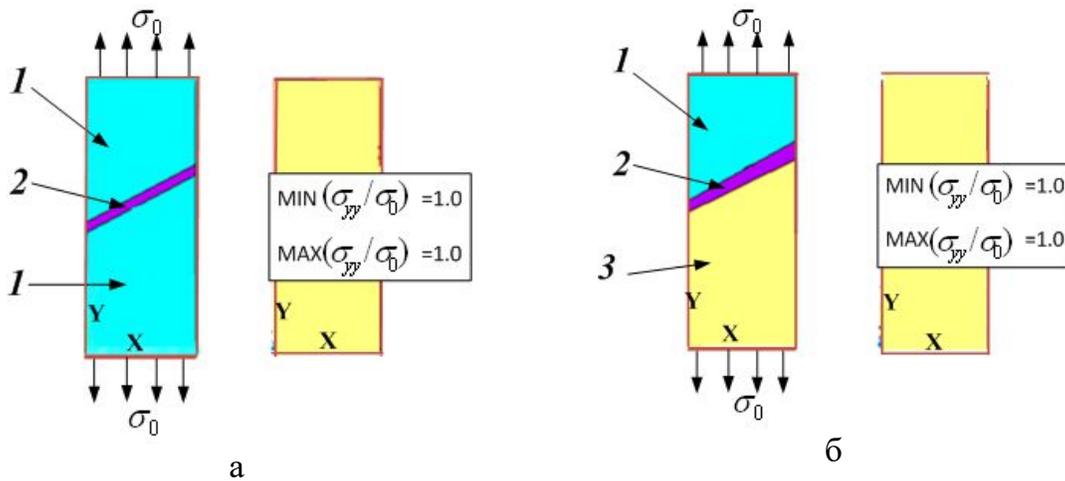


Рис.4.3. Примеры составных конструкций, находящихся в однородном напряженном состоянии при растяжении-сжатии (расчетная схема и изолинии σ_{22} / σ_0 в ANSYS-решении)

На рис. 4.3 приведены: а) две пластинки материала 1, скрепленные с помощью материала 2; б) пластинка из материала 1, скрепленная материалом 2 с пластинкой из материала 3.

Таблица 4.2.

Механические характеристики скрепляемых материалов

№ п/п	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
1	110	0,22
2	70	0,25
3	210	0,28

Таблица 4.3.

Тангенсы углов наклона для плоского напряженного состояния (ПНС) и плоской деформации (ПДС) для скрепляемых пар материалов по формулам (9)

ПНС	ПДС	Пара материалов
0.550000	0.653367	1-2
0.484768	0.553404	2-3
0.154000	0.172050	1-3

Механические свойства материалов и тангенсы углов скрепления приведены в табл. 4.2 и 4.3. Во втором случае (рис. 4.3,б) углы наклонов линий скрепления оказываются различными для каждой пары материалов.

4.1.3. Неклассическая задача о растяжении составной прямоугольной пластинки

Рассматривается растяжение составной пластинки, изображенной на рис. 4.2 в случае, когда угол ψ равен нулю. Ограничения на параметры состояния в особых точках отвечают случаю 8 табл. 4.1. Вследствие избыточности ограничений, накладываемых на компоненты напряжений в особых точках, данная задача является неклассической. Она решается с использованием итерационного численно-аналитического метода, приведенного в разделе 2. На рис. 4.4 – 4.6 приводятся результаты вычислений напряженного состояния вблизи особых точек. Во всех случаях использовался 8-узловой четырехугольный конечный элемент. На рис. 4.4. приводится нормальное напряжение σ_{22}/σ_0 на линии соединения элементов конструкции. Цифрами 1 и 2 отмечены напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ соответственно. Из рисунка видно, что в классическом решении (ANSYS-решении) условия для напряжений в окрестности особой точки и в самой точке не выполняются. В итерационном решении выполняется и условие непрерывности нормальных напряжений, и обращение нормальных напряжений в нуль непосредственно в особых точках.

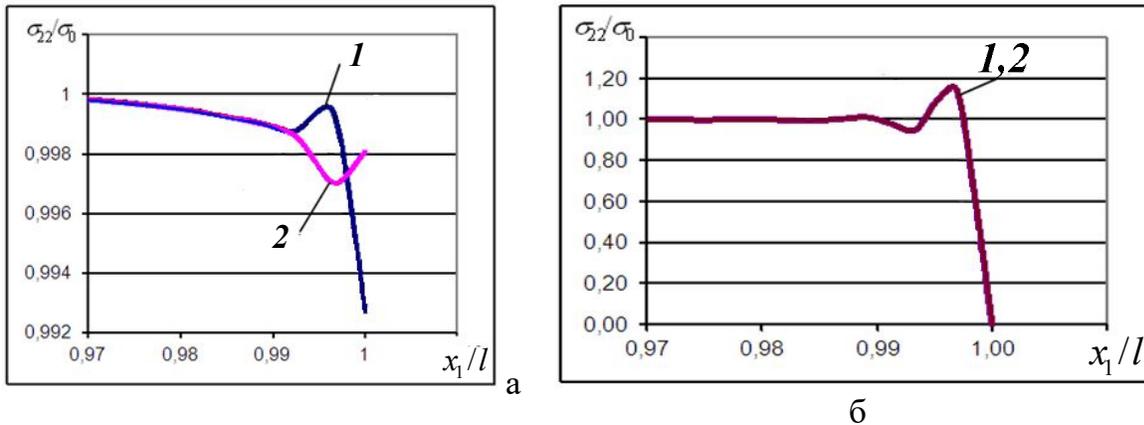


Рис. 4.4. Нормированное напряжение σ_{22}/σ_0 на линии соединения элементов конструкции: а) классическое решение (ANSYS); б) решение, полученное методом итераций

На рис. 4.5. приводится решение на той же конечно-элементной сетке для напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений.

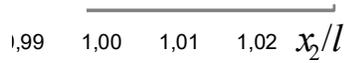


Рис.4.5. Напряжения σ_{22}/σ_0 на линии, свободной от напряжений

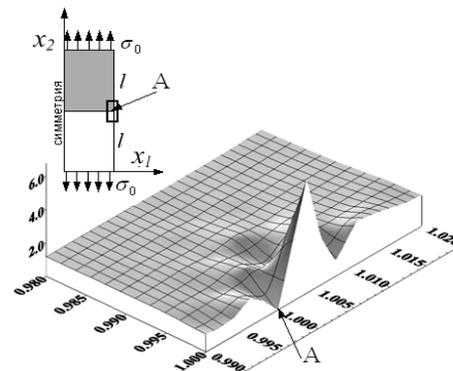


Рис.4.6. Поверхность напряжений σ_{22}/σ_0 в окрестности особой точки

Приведенные рисунки иллюстрируют, что своего максимального значения напряжение σ_{22} достигает вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений, в более жестком элементе конструкции. Видно, что область, в которой сказывается влияние особой точки, относительно мала, при этом изменения напряженного состояния в этой области весьма значительны.

4.1.4. Температурное нагружение составной пластинки

Пусть на контуре составной прямоугольной пластинки (рис. 4.2, $\psi = 0$) отсутствуют какие-либо нагрузки. Она подвергается лишь однородному нагреву на $\Delta T^0 C$. Ограничения на компоненты напряжений в особых точках в данном примере описываются случаем 6 табл. 4.1. На рис. 4.7 приведено решение итерационным методом (п. 2) для напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ вблизи особых точек. В расчетах материальные параметры для более жесткого элемента конструкции не менялись – $E_1 = 206 ГПа$, $\omega_1 = 0.11e-4 град^{-1}$, $\nu_1 = 0.3$, в менее жестком элементе коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения равны: $\nu_2 = 0.25$, $\omega_2 = 0.85e-5 град^{-1}$, а модуль Юнга варьировался. Приращение температуры – $\Delta T = 100^0 C$.

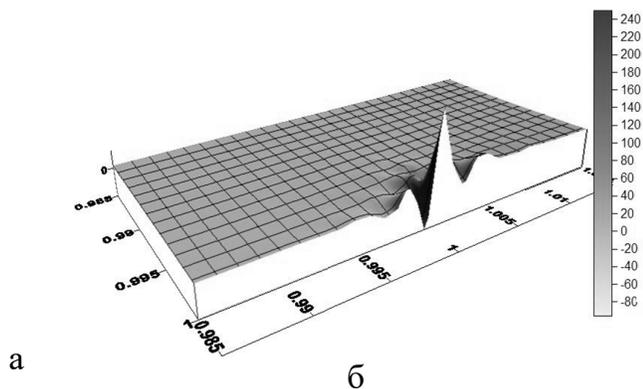


Рис.4.7. Напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ вблизи особой точки: а) на линии соединения ($1- E_2 = 15 ГПа$; 2 –

$E_2 = 30 \text{ ГПа}$; $3 - E_2 = 70 \text{ ГПа}$); б) поверхность напряжений ($E_2 = 30 \text{ ГПа}$)

Видно, что кривые $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ совпадают для всех трех значений модуля E_2 . В особых точках эти напряжения имеют значения, определяемые соответствующими равенствами в табл. 4.1. При этом, если выражение $(\nu_1 E_2 - \nu_2 E_1)$ стремится к нулю (случай 6 стремится к случаю 7 в табл. 4.1), напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ неограниченно возрастают (рис. 4.7.). Наибольшее напряжение возникает не в самой точке A , а в ее окрестности на свободном контуре в более жестком элементе (рис. 4.7,б). Область значительного изменения напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ оказывается весьма малой.

4.2. Составной элемент конструкции с особенностью в виде клина, образующие которого нагружены поверхностными усилиями

Пусть ограничения (4.2) на параметры состояния элементарных объемов составного клина (рис. 4.8) вблизи точки A имеют вид

$$\sigma_n = p_n, \tau_n = q_n, \sigma_m = p_m, \tau_m = q_m. \quad (4.12)$$

Ограничения (4.3) и (4.4) сохраняются. Равенства (4.12) и (4.3) записываются системой неоднородных уравнений для напряжений $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

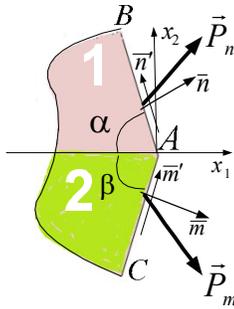


Рис. 4.8. Составной клин

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= q_n, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{22} \cos^2 \beta &= p_m, \\ (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{12} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= q_m. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Если определитель матрицы этой системы не обращается в нуль, решение уравнений (4.13) будет единственным:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= p_n \frac{\cos \beta (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} - \\ &- q_n \frac{\cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} + p_m \frac{\cos^2 \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} - q_m \frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= p_m \frac{\cos \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) + \sin \beta \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} + \\ &+ q_m \frac{\sin \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} + p_n \frac{\cos \alpha \cos^2 \beta}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} + q_n \frac{\sin \alpha \cos^2 \beta}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = (p_n - p_m) \frac{\cos\beta \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} + q_n \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} + q_m \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (4.14)$$

$$\sigma_{22} = p_n \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} + p_m \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} + (q_n - q_m) \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Решение (4.14) должно удовлетворять условию непрерывности деформаций (4.4). Это условие для обобщенного плосконапряженного состояния приводится к виду

$$E_2 \sigma_{11}^{(1)} - E_1 \sigma_{11}^{(2)} - (E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2) \sigma_{22} = 0, \quad (4.15)$$

а для плоскодеформированного – к виду

$$E_2(1 - \nu_1^2) \sigma_{11}^{(1)} - E_1(1 - \nu_2^2) \sigma_{11}^{(2)} - [E_2 \nu_1(1 + \nu_1) - E_1 \nu_2(1 + \nu_2)] \sigma_{22} = 0. \quad (4.16)$$

Подставляя решение (4.14) в равенства (4.15), (4.16), получим ограничение на компоненты вектора нагрузки, обеспечивающее согласованность накладываемых ограничений на параметры состояния в особых точках. При этом напряженное состояние в этих точках полностью известно.

Если заданная нагрузка не согласуется с равенствами (4.15), (4.16), заданные ограничения в особых точках несовместны, в рамках плоской задачи удовлетворить им невозможно.

Рассмотрим возможные случаи задания ограничений на параметры состояния элементарных объемов вблизи точки A при обращении в нуль определителя матрицы (4.13).

1) $\alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$.

Ранг матрицы системы уравнений (4.13) равен трем. Ранг расширенной матрицы будет равен рангу матрицы системы при выполнении ограничения на нагрузки

$$(p_n - p_m) \cos\beta + (q_n + q_m) \sin\beta = 0. \quad (4.17)$$

В этом случае уравнения (4.13) совместны. С использованием условия непрерывности деформаций (4.4) для обобщенного плосконапряженного состояния получаем решение

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= p_n, \quad \sigma_{12} = -q_n, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= E_2^{-1} [p_m E_1 \sin^{-2} \beta + p_n (E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2 - E_1 \operatorname{ctg} \beta) - 2q_n E_1 \operatorname{ctg} \beta], \\ \sigma_{11}^{(2)} &= p_m \sin^{-2} \beta - p_n \operatorname{ctg}^2 \beta - 2q_n \operatorname{ctg} \beta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

При этом напряженное состояние в элементарных объемах вблизи точки A оказывается полностью известным. Если условие (4.17) не выполняется, ограничения на параметры состояния в особой точке несовместны.

2) $\alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi$.

Условия совместности уравнений (4.13) в этом случае обеспечиваются ограничениями на нагрузку

$$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n + q_m) \sin \alpha = 0. \quad (4.19)$$

При выполнении ограничения (4.19) из уравнений (4.13) и (4.15) (для плосконапряженного состояния) находится решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= p_m, \quad \sigma_{12} = -q_m, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= p_n \sin^{-2} \alpha - p_m \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2q_m \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= E_1^{-1} [p_n E_2 \sin^{-2} \alpha - p_m (E_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + E_2 v_1 - E_1 v_2) - 2q_m E_2 \operatorname{ctg} \alpha] \end{aligned} \quad (4.20)$$

При этом напряженное состояние в элементарных объемах вблизи точки A полностью известно. Если нагрузка не удовлетворяет условиям (4.19), ограничения на компоненты напряжений в особой точке несовместны.

$$3) \alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi.$$

В этом случае ранг матрицы системы уравнений (4.13) и расширенной матрицы совпадают и равны трем при ограничении на заданную нагрузку

$$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n - q_m) \sin \alpha = 0. \quad (4.21)$$

Если нагрузка согласуется с ограничениями (4.21), из уравнений (4.13) напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{11}^{(2)}$ и σ_{12} выражаются через напряжение σ_{22} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha + p_n (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2p_n \operatorname{ctg}^2 \alpha + p_m \sin^{-2} \alpha - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{12} &= -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha + p_n \operatorname{ctg} \alpha + q_n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Напряжение σ_{22} находится из уравнения (4.15) (для плосконапряженного состояния):

$$\sigma_{22} = \frac{\sin^2 \alpha (E_1 - E_2) [p_n (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha] - E_1 (p_n - p_m)}{\sin^2 \alpha [E_1 v_2 - E_2 v_1 - (E_1 - E_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha]}. \quad (4.23)$$

Напряженное состояние в элементарных объемах вблизи точки A полностью известно. Если нагрузка не удовлетворяет условию (4.21), ограничения на параметры состояния особой точке несовместны. Из равенства (4.23) следует, что сочетание материальных параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_1 v_2 - E_2 v_1 - (E_1 - E_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha = 0, \quad (4.24)$$

является критическим. При приближении материальных параметров к выполнению этого равенства напряжения в элементарных объемах вблизи т. A неограниченно возрастают.

$$4) \alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$$

Ранг матрицы системы (4.13) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем при условии

$$(q_n + q_m) \sin \alpha - (p_n - p_m) \cos \alpha = 0. \quad (4.25)$$

Если выполняется условие (4.25), из уравнений (4.13) следуют зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha + p_n (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2p_n \operatorname{ctg}^2 \alpha + p_m \sin^{-2} \alpha + 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{12} &= -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha + p_n \operatorname{ctg} \alpha - q_n.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Напряжения σ_{22} находятся с использованием условия (4.4):

$$\sigma_{22} = -\frac{p_n [E_2 (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2E_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha] - p_m E_1 \sin^{-2} \alpha + 2q_n (E_1 - E_2) \operatorname{ctg} \alpha}{[E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1 - (E_1 - E_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha]}.\tag{4.27}$$

Напряженное состояние в элементарных объемах вблизи точки A полностью известно. Если условие (4.25) не выполняется, ограничения на компоненты напряжений в особой точке несовместны. Из равенства (4.27) видно, что, когда сочетания материальных параметров стремятся к выполнению условия (4.24), напряжения в особой точке стремятся к бесконечности. В этом смысле условие (4.24) является критическим для рассматриваемого элемента конструкции.

В табл. 4.4 приводятся возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в особой точке рассматриваемого составного клина.

Таблица 4.4

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в особых точках (плосконапряженное состояние)

№	Условия на α, β, E, ν	Ограничения на нагрузку	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi,$ $\alpha + \beta \neq \pi,$ $\alpha + \beta \neq 2\pi$	$E_2 \sigma_{11}^{(1)} - E_1 \sigma_{11}^{(2)} -$ $-(E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2) \sigma_{22} = 0,$ Напряжения определены формулами (4.14)	(4.14)	Восемь
2	$\alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi.$	$(p_n - p_m) \cos \beta +$ $+(q_n + q_m) \sin \beta = 0.$	(4.18)	Восемь
		$(p_n - p_m) \cos \beta +$ $+(q_n + q_m) \sin \beta \neq 0.$	Ограничения несовместны	
3	$\alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi.$	$(p_n - p_m) \cos \alpha +$ $+(q_n + q_m) \sin \alpha = 0.$	(4.20)	Восемь
		$(p_n - p_m) \cos \alpha +$ $+(q_n + q_m) \sin \alpha \neq 0.$	Ограничения несовместны	

№	Условия на α, β, E, ν	Ограничения на нагрузку	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
4	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi.$ $E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1 - (E_1 - E_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha \neq 0$	$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n - q_m) \sin \alpha = 0.$	(4.22), (4.23)	Восемь
		$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n - q_m) \sin \alpha \neq 0.$	Ограничения несовместны	
5	$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$ $E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1 - (E_1 - E_2) \operatorname{ctg}^2 \alpha \neq 0$	$(q_n + q_m) \sin \alpha - (p_n - p_m) \cos \alpha = 0.$	(4.26), (4.27)	Восемь
		$(q_n + q_m) \sin \alpha - (p_n - p_m) \cos \alpha \neq 0.$	Ограничения несовместны	

4.3. Составной элемент конструкции с особенностью в виде клина, одна из образующих которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности

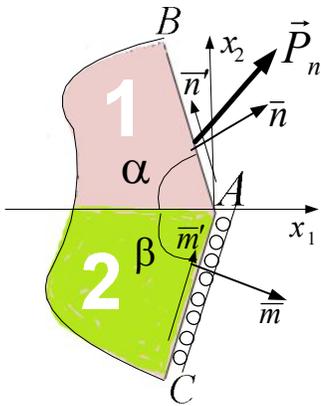


Рис.4.9. Составной клин

Рассматривается часть элемента конструкции, представляющая собой клин, составленный из двух изотропных линейно упругих объектов 1,2. Образующая АВ объекта 1 клина ориентирована ортом \bar{n} . Единичный вектор \bar{n}' ортогонален орту \bar{n} и направлен вдоль образующей АВ, которая нагружена поверхностными силами плотностью $\bar{p}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}'$.

Образующая АС объекта 2 клина ориентирована ортом \bar{m} . Единичный вектор \bar{m}' ортогонален орту \bar{m} и направлен вдоль образующей АС, которая скользит без трения вдоль жесткой поверхности (рис. 4.9). Углы α, β составляющих клин объектов подчинены условиям (4.1). Принимается, что рассматриваемый элемент конструкции находится в обобщенном плосконапряженном состоянии. В точке А (вершине клина) вводится ортонормированная декартова система координат x_1, x_2 , при этом ось x_1 направляется по касательной к линии соединения составляющих клин элементов. На параметры состояния (напряжения, деформации) элементарных объемов при вершине клина накладываются следующие ограничения:

а) на площадке с нормалью \bar{n} заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_n = \tau_n; \quad (4.28)$$

б) на площадке с нормалью \bar{m} обращается в нуль касательное напряжение

$$\tau_{m'} = 0 \quad (4.29)$$

и величина проекции вектора перемещений \bar{u} на направление \bar{m}

$$\bar{u} \cdot \bar{m} = 0; \quad (4.30)$$

в) на линии соединения объектов 1,2 выполняются

1) условие непрерывности напряжений

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}; \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}; \quad (4.31)$$

2) условие непрерывности деформаций (равенство относительных удлинений линейных элементов)

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}. \quad (4.32)$$

Условия (4.28) – (4.32) (исключая (4.30)) записываются системой линейных неоднородных уравнений относительно параметров $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11}^{(1)} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin \beta \cos \beta - \sigma_{12} \cos 2\beta - \sigma_{22} \sin \beta \cos \beta &= 0, \\ \frac{1}{E_1} \sigma_{11}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{11}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} &= (\omega_2 - \omega_1) \Delta T. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Определитель матрицы системы уравнений (4.33) выражается равенством

$$\Delta = - \left[\frac{1}{E_1} \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{E_2} \cos 2\beta \sin \alpha \cos \alpha + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \right]. \quad (4.34)$$

Задача состоит в том, чтобы в зависимости от нагрузки, а также от геометрических и материальных параметров соединяемых элементов найти возможные варианты решений системы уравнений (4.33). Такие решения являются задаваемыми ограничениями на параметры состояния в элементарных объемах, примыкающих к вершине клина. Сжимая эти элементарные объемы к вершине клина, отождествим задаваемые в них ограничения с ограничениями на параметры состояния в особой точке.

4.3.1. Температурная нагрузка элемента конструкции

В этом пункте принимается, что в столбце свободных членов системы уравнений (4.33) параметры p_n, τ_n обращаются в нуль.

4.3.1.1. Исследование решений уравнений (4.33) в зависимости от ранга расширенной матрицы

Определители Δ_i ($i=1-4$), получающиеся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (4.33) столбцом свободных членов, имеют значения

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -(\omega_2 - \omega_1)\Delta T \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta, \\ \Delta_2 &= (\omega_2 - \omega_1)\Delta T \sin \alpha (\cos 2\beta \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta \sin \alpha), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{4}(\omega_2 - \omega_1)\Delta T \sin 2\alpha \sin 2\beta, \\ \Delta_4 &= -(\omega_2 - \omega_1)\Delta T \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Анализ равенств (4.35) показывает, что существует пять вариантов соединений элементов клина, при которых все определители (4.35) обращаются в нуль:

$$\begin{aligned}1) \alpha = \pi/2, \beta = \pi/2; \quad 2) \alpha = \pi/2, \beta = \pi; \quad 3) \alpha = \pi/2, \beta = 3\pi/2; \\ 4) \alpha = \pi, \beta = \pi; \quad 5) \alpha = 3\pi/2, \beta = \pi/2.\end{aligned}\tag{4.36}$$

При этих значениях α, β обращается в нуль и определитель Δ (4.34). Заметим, что определители Δ_i ($i=1-4$) (4.35) одновременно обращаются в нуль только в точках (4.36). В то же время определитель (4.34) может обращаться в нуль не только в этих точках. В связи с этим возможны такие варианты поведения решений уравнений (4.33):

1. Параметры α, β не попадают в группу (4.36), а определитель (4.34) обращается в нуль. Ранг матрицы системы уравнений (4.33) не совпадает с рангом расширенной матрицы, уравнения несовместны. В рассматриваемом случае обращение в нуль определителя (4.34) является критическим условием в следующем смысле. Когда сочетание материальных и геометрических параметров, входящих в формулу (4.34), стремится к обращению определителя в нуль, напряжения в элементарных объемах при вершине клина неограниченно возрастают.

2. Параметры α, β не попадают в группу (4.36), определитель (4.34) не обращается в нуль, система уравнений (4.33) имеет единственное решение:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \Delta_1 / \Delta, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \Delta_2 / \Delta, \quad \sigma_{12} = \Delta_3 / \Delta, \quad \sigma_{22} = \Delta_4 / \Delta.\tag{4.37}$$

В данном случае в элементарных объемах – особых точках для каждого составляющего клин элемента оказываются заданными все три компонента тензора напряжений. Количество задаваемых условий избыточно, задача является неклассической.

3. Параметры α, β попадают в группу (4.36), определители (4.34) и Δ_i ($i=1-4$) обращаются в нуль. Каждому из вариантов (4.36) соответствуют свои ограничения на параметры состояния в особой точке.

1) $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$. Ранги матрицы и расширенной матрицы равны трем. Из уравнений (4.34) следуют зависимости

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad -\frac{1}{E_2} \sigma_{11}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} = (\omega_2 - \omega_1) \Delta T. \quad (4.38)$$

Вследствие того что справедливо равенство (4.31), условия (4.38) представляют собой пять ограничений в особых точках. К ним присоединяются ограничение (4.30) и условия непрерывности перемещений. В частном случае, когда между материальными параметрами имеется зависимость

$$E_2 \nu_1 = E_1 \nu_2, \quad (4.39)$$

равенство (4.38) не содержит компоненту напряжений σ_{22} , однако количество задаваемых ограничений в особой точке не уменьшается;

2) $\alpha = \pi/2, \beta = \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (4.33) совпадает с рангом расширенной матрицы и равен трем. Зависимости между напряжениями совпадают с (4.38). Поэтому справедливы результаты предыдущего пункта;

3) $\alpha = \pi/2, \beta = 3\pi/2$. Ранги матрицы системы уравнений (4.33) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. Ограничения на компоненты напряжений в особых точках представляются равенствами (4.38), поэтому результаты, приведенные в п.1, справедливы и для данного случая;

4) $\alpha = \pi, \beta = \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (4.33) равен трем и равен рангу расширенной матрицы. Ограничения на компоненты напряжений, вытекающие из уравнений (4.33), записываются равенствами

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \frac{1}{E_1} \sigma_{11}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{11}^{(2)} = (\omega_2 - \omega_1) \Delta T; \quad (4.40)$$

5) $\alpha = 3\pi/2, \beta = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (4.33) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. Ограничения на параметры состояния в особой точке задаются равенствами (4.38), поэтому результаты анализа решения уравнений (4.33) такие же, как и в п. 1).

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в особых точках

№	Условия на α, β, Δ	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	Ни одно из условий (4.36) не выполняется, $\Delta = 0$	Ограничения несовместны	—
2	Ни одно из условий (4.36) не выполняется, $\Delta \neq 0$	Формулы (4.37)	Девять
3	$\alpha = \pi / 2, \beta = \pi / 2,$ $\Delta = 0$	Формулы (4.38)	Восемь
4	$\alpha = \pi / 2, \beta = \pi; \Delta = 0$	Формулы (4.38)	Восемь
5	$\alpha = \pi / 2, \beta = 3\pi / 2,$ $\Delta = 0$	Формулы (4.38)	Восемь
6	$\alpha = \pi, \beta = \pi, \Delta = 0$	Формулы (4.40)	Восемь
7	$\alpha = 3\pi / 2, \beta = \pi / 2,$ $\Delta = 0$	Формулы (4.38)	Восемь

4.3.1.2. Частные случаи скрепления элементов клина

Анализ условий обращения в нуль определителя (4.34) из-за значительного числа определяющих его значение параметров предпочтительно проводить численно. В то же время в часто встречающихся на практике случаях скрепления элементов 1, 2 клина (рис. 4.9) эффективен аналитический метод. Реализуемый ниже подход может использоваться для обнаружения сочетаний критических параметров элементов клина при их соединении и в других случаях.

1. Пусть $\alpha = \beta$. Определитель (4.34) принимает вид

$$\Delta = - \left[\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \right] \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.41)$$

Из равенства $\Delta = 0$ следуют два уравнения:

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha = 0. \quad (4.43)$$

В области допустимых значений α ($0 < \alpha \leq \pi$) уравнение (4.42) имеет корни

$$\alpha = \pi / 2, \quad \alpha = \pi. \quad (4.44)$$

Решение уравнений (4.33) при углах α , определяемых равенствами (4.44), рассмотрено в п. 4.3.1.1.

Уравнение (4.43) в области допустимых значений α имеет два корня, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 &= \left\{ \frac{E_1 + E_2}{3E_1 + E_2 + (v_1 E_2 - v_2 E_1)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 &= \left\{ \frac{2E_1 + (v_1 E_2 - v_2 E_1)}{3E_1 + E_2 + (v_1 E_2 - v_2 E_1)} \right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Если $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$, углы (4.45) скрепления клина следует считать критическими. При выполнении равенств (4.45) ранг матрицы системы уравнений (4.33) оказывается меньше ранга расширенной матрицы. Поэтому когда сочетания материальных параметров скрепляемых элементов приближаются к выполнению равенств (4.45), решение уравнений (4.33) неограниченно возрастает. Если же $(\omega_1 = \omega_2)$ или $\Delta T = 0$, система уравнений (4.33) оказывается однородной, ее ранг при углах (4.45) равен трем и, следовательно, три компоненты напряжений могут быть выражены через четвертую, например, так:

$$\sigma_{11}^{(1)} = ctg^2 \alpha_i \sigma_{22}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = -(ctg^2 \alpha_i - 2)\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -ctg \alpha_i \sigma_{22}. \quad (i=1,2). \quad (4.46)$$

Условия (4.46), (4.30) и (4.31) в вершине клина представляют собой шесть независимых ограничений на параметры состояния. К ним присоединяются условия непрерывности перемещений в особой точке на линии соединения составляющих элементов клина.

Если в рассматриваемом случае ($\alpha = \beta$), угол α не определяется равенствами (4.44), (4.45), ранг матрицы системы уравнений (4.33) равен четырем. Следовательно, эта система (в случае $(\omega_1 = \omega_2)$ или $\Delta T = 0$) имеет лишь нулевое решение.

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0. \quad (4.47)$$

Равенства (4.47) совместно с (4.31) и (4.30) накладывают семь ограничений на параметры состояния в особой точке. Число ограничений избыточно, задача неклассическая.

2. $\alpha + \beta = \pi/2$. Определитель (4.34) принимает вид

$$\Delta = \left[\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cos 2\alpha - \left(\frac{1-v_1}{E_1} - \frac{1-v_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \right] \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.48)$$

Уравнение $\Delta = 0$ распадается на два:

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cos 2\alpha - \left(\frac{1-v_1}{E_1} - \frac{1-v_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha = 0. \quad (4.50)$$

Уравнение (4.49) в области изменения α ($0 < \alpha < \pi/2$) не имеет корней. Из уравнения (4.50) следует

$$\sin^2 \alpha = \frac{\kappa - 1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)}, \quad \kappa = \frac{E_1}{E_2}. \quad (4.51)$$

Решение уравнения (4.51) существует при условии (с учетом области изменения α):

$$0 < \frac{\kappa - 1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)} < 1. \quad (4.52)$$

Неравенство (4.52) выполняется, если справедливы все условия из какой-либо одной из следующих групп:

$$\kappa > 1, \quad \kappa > \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \kappa > \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2}; \quad (4.53)$$

$$\kappa < 1, \quad \kappa < \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \kappa < \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2}. \quad (4.54)$$

При выполнении условий (4.53) или (4.54) уравнение (4.51) имеет один корень в области допустимых значений α . Этот корень определяет критическое значение угла скрепления элементов 1,2 клина в случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$. Потому что если сочетание материальных параметров стремится к выполнению равенства (4.51) решение уравнений (4.33) стремится к бесконечности. Если $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, из уравнений (4.33) следует зависимость между компонентами напряжений

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = ctg^2 \alpha \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -ctg \alpha \sigma_{22}. \quad (4.55)$$

Равенства (4.55) совместно с (4.31) и условиями непрерывности перемещений являются задаваемыми ограничениями на компоненты напряжений и перемещений в особой точке.

3. $\alpha + \beta = \pi$. Определитель (4.34) в данном случае с точностью до знака совпадает с определителем (4.48). Уравнение $\Delta = 0$

$$\left\{ \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cos 2\alpha - \left(\frac{1 - \nu_1}{E_1} - \frac{1 - \nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \right\} \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (4.56)$$

эквивалентно соотношениям (4.49), (4.50). Уравнение (4.49) в области допустимых α ($0 < \alpha < \pi$) имеет единственный корень $\alpha = \pi/2$, следовательно, и $\beta = \pi/2$. Такой случай соединения элементов клина 1,2 рассмотрен в п. 4.3.1.1. Уравнение (4.50) приводится к уравнению (4.51), которое имеет действительное решение при ограничениях на параметры (4.53) или (4.54). В рассматриваемом случае критических значений параметра α , определяющих сингулярное поведение решения при $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ вблизи вершины клина, оказывается два:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 &= \left\{ \frac{\kappa - 1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)} \right\}^{1/2}, \\ \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 &= \left\{ \frac{\kappa \nu_2 - \nu_1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)} \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.57)$$

В случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, из уравнений (4.34) следуют зависимости между напряжениями в точках $\alpha = \alpha_i$ ($i=1,2$) :

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = ctg^2 \alpha_i \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -ctg \alpha_i \sigma_{22}. \quad (4.58)$$

Зависимости (4.58) совместно с (4.31) , (4.30) и условиями непрерывности перемещений определяют задаваемые ограничения в особой точке.

4. $\alpha + \beta = 2\pi$. Определитель (4.34) с точностью до знака совпадает с выражением (4.56). Условие равенства нулю этого определителя приводится к уравнениям (4.49), (4.51). Уравнение (4.49) в области изменения α ($0 < \alpha < 2\pi$) имеет корни

$$\alpha = \pi/2, \alpha = \pi, \alpha = 3\pi/2. \quad (4.59)$$

Все эти случаи рассмотрены в п. 3.3.1.1. Уравнение (4.51) при выполнении условий (4.53) или (4.54) в области допустимых значений α имеет четыре корня, которым отвечают четыре пары значений углов α, β :

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = -\sin \alpha_3 = -\sin \alpha_4 &= \left\{ \frac{\kappa - 1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)} \right\}^{1/2}, \\ \cos \beta_1 = -\cos \beta_2 = -\cos \beta_3 = \cos \beta_4 &= \left\{ \frac{\kappa \nu_2 - \nu_1}{\kappa(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)} \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.60)$$

В точках (α_i, β_i) ($i=1,2,3,4$), определяемых равенствами (4.60), определители (4.35) при $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ отличны от нуля. Поэтому ранг расширенной матрицы системы уравнений (4.33) оказывается большим, чем ранг системы. Решения уравнений не существует. Каждая из точек (4.60) оказывается критической, т. к. при приближении сочетаний материальных параметров к выполнению равенств (4.60) решение уравнений (4.33) неограниченно возрастает. Если выполняется условие $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, уравнения (4.33) оказываются совместными. Между напряжениями в точках (4.60) справедливы зависимости (4.58), где ($i=1,2,3,4$). Суммарное количество ограничений на параметры $\sigma_{ij}^{(k)}, u_k$ в особой точке соответствует неклассической задаче. Рассмотренные в этом пункте случаи ограничений на параметры состояния представительных объемов, примыкающих к вершине клина, сведены в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Ограничения на компоненты напряжений в частных случаях скрепления элементов клина

№	Условия на $\alpha, \beta, (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha = \beta$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ α определяется равенствами (4.45)	Ограничения несовместны	
2	$\alpha = \beta$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$ α определяется равенствами (4.45)	Формулы (4.46)	Восемь
3	$\alpha = \beta$ α не определяется равенствами (4.45)	Формулы (4.47)	Девять
4	$\alpha + \beta = \pi/2$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ α определяется равенствами (4.51)	Ограничения несовместны	
5	$\alpha + \beta = \pi/2$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$ α определяется равенствами (4.51)	Формулы (4.55)	Восемь
6	$\alpha + \beta = \pi/2$ α не определяется равенствами (4.51)	Формулы (4.37)	Девять
7	$\alpha + \beta = \pi$. $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ α определяется равенствами (4.57)	Ограничения несовместны	
8	$\alpha + \beta = \pi$. $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$ α определяется равенствами (4.57)	Формулы (4.58)	Восемь
9	$\alpha + \beta = \pi$. α не определяется равенствами (4.57)	Формулы (4.37)	Девять
10	$\alpha + \beta = 2\pi$. $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ α определяется равенствами (4.60)	Ограничения несовместны	—————
11	$\alpha + \beta = 2\pi$. $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$ α определяется равенствами (4.60)	Формулы (4.58)	Восемь
12	$\alpha + \beta = 2\pi$. α не определяется равенствами (4.60)	Формулы (4.37)	Девять

4.3.2. Нагружение элемента конструкции поверхностными усилиями

В рассматриваемом случае отсутствует температурная нагрузка, поэтому в столбце свободных членов системы уравнений (4.33) обращаются в нуль выражения, содержащие множитель ΔT . Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$), получающиеся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (4.33) столбцом свободных членов, определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -P_n \left[\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{E_2} \cos 2\beta \sin \alpha \cos \alpha \right] - \\ &\quad - \tau_n \left[2 \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \frac{1}{E_2} \cos 2\beta \cos^2 \alpha \right], \\ \Delta_2 &= -P_n \left[\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \cos 2\beta \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{E_1} (\cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta + \cos 2\beta \sin \alpha \cos \alpha) \right] + \\ &\quad + \tau_n \left[2 \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \cos 2\beta - \frac{1}{E_1} (\sin 2\alpha \sin \beta \cos \beta - \cos 2\beta \cos^2 \alpha) \right], \\ \Delta_3 &= -P_n \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \\ &\quad - \tau_n \left[\left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - \frac{1}{E_1} \cos \beta \cos \beta \right], \\ \Delta_4 &= -P_n \left(\frac{1}{E_1} \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{E_2} \cos 2\beta \sin \alpha \cos \alpha \right) - \\ &\quad - \tau_n \left(\frac{1}{E_1} \sin 2\alpha \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{E_2} \cos 2\beta \sin^2 \alpha \right). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Ниже приводится исследование возможных ограничений на параметры состояния в вершине клина для рассмотренных в предыдущем пункте случаев соединения его элементов.

4.3.2.1. Исследование решений уравнений (4.33) в случаях, когда α, β определяются равенствами (4.36)

В точках α_i, β_i ($i=1-5$), определяемых равенствами (4.36), определитель (4.34) матрицы системы уравнений (4.33) обращается в нуль. Уравнения (4.33) будут совместны в каждой из точек (4.36), если нагрузка \bar{P}_n ограничена условием

$$\tau_n = 0. \tag{4.62}$$

Ограничение (4.62) обусловлено требованием симметричности используемой теории напряжений. При невыполнении условия (4.62) ранги матрицы системы уравнений (4.33) и ее расширенной матрицы в точках (4.36) различны, поэтому

ограничения на компоненты напряжений в особых точках будут несовместными. Далее строятся ограничения на параметры состояния в элементарных объемах вблизи вершины клина при условии выполнения ограничения (4.62).

1. $(\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2)$. Ранг матрицы системы (4.33) и ее расширенной матрицы равны трем. Для напряжений в особых точках справедливы зависимости

$$\sigma_{11}^{(1)} = p_n, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{E_2}{E_1} p_n - E_2 \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (4.63)$$

Равенства (4.63), (4.30) и (4.31) представляют собой шесть ограничений. К ним присоединяются условия для перемещений. Суммарное количество ограничений избыточно.

2. $(\alpha = \pi/2, \beta = \pi)$, $(\alpha = \pi/2, \beta = 3\pi/2)$, $(\alpha = 3\pi/2, \beta = \pi/2)$. Во всех этих случаях результаты совпадают с результатами, приведенными в п.1.

3. $(\alpha = \pi, \beta = \pi)$. Ранг матрицы системы уравнений (4.33) и ее расширенной матрицы равны трем. Ограничения в особой точке на компоненты тензоров напряжений принимают вид

$$\sigma_{11}^{(1)} \frac{1}{E_1} - \sigma_{11}^{(2)} \frac{1}{E_2} = p_n \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right), \quad \sigma_{22} = p_n, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (4.64)$$

Общее количество ограничений избыточно. Сформулированные в этом пункте ограничения на компоненты напряжений в особых точках приводятся в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Ограничений на компоненты напряжений в особых точках для α, β ,
определенных равенствами (4.36)

№	Условия на α, β	Ограничения на компоненты нагрузки	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	Любое из условий (4.36)	$\tau_n \neq 0$	Ограничения несовместны	
2	$(\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2)$ $(\alpha = \pi/2, \beta = \pi)$, $(\alpha = \pi/2, \beta = 3\pi/2)$, $(\alpha = 3\pi/2, \beta = \pi/2)$	$\tau_n = 0$	Формулы (4,63)	Восемь
3	$(\alpha = \pi, \beta = \pi)$	$\tau_n = 0$	Формулы (4,64)	Восемь

4.3.2.2. Частные случаи скрепления элементов клина

В этом пункте устанавливаются ограничения на параметры состояния в вершине клина для рассмотренных в п. 4.3.1.2 случаев соединения его элементов.

1. ($\alpha = \beta$). Определитель Δ системы уравнений (4.33) приводится к виду (4.41) и обращается в нуль в точках (4.44), (4.45). Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$), отвечающие расширенной матрице системы уравнений (4.33) записываются в виде

$$\Delta_i = p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i, \quad (i=1,2,3,4), \quad (4.64)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \left[\frac{2}{E_2} + \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) \right], \\ \varphi_2 &= -\sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \left[\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) - \frac{2}{E_1} \right], \\ \varphi_3 &= -\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[\frac{v_1 - 1}{E_1} - \frac{v_2 - 1}{E_2} \right], \\ \varphi_4 &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right], \\ \psi_1 &= -\cos^2 \alpha \left[\frac{2}{E_2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{E_2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + 2 \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \right], \\ \psi_2 &= -\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) - \frac{2}{E_1} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{1}{E_1} \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha), \\ \psi_3 &= \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha + \frac{1}{E_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{E_2} \sin^2 \alpha \right], \\ \psi_4 &= \sin^2 \alpha \left[\frac{1}{E_2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \frac{2}{E_1} \cos^2 \alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Возможны следующие случаи поведения решения уравнений (4.33).

а) Если определитель $\Delta \neq 0$, система уравнений (4.33) имеет единственное решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Delta_4}{\Delta}. \quad (4.66)$$

Количество независимых ограничений (4.66), (4.30) и (4.31) на компоненты напряжений и перемещений в вершине клина избыточно.

б) Случай, когда угол α определяется равенствами (4.44), рассмотрен в п. 4.3.2.1.

в) Угол α определяется равенствами (4.45). Ранг расширенной матрицы системы уравнений (4.33) будет равен рангу матрицы системы (равен трем), когда обращаются в нуль все определители (4.64), т. е.

$$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i = 0. \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.67)$$

Равенства (4.67) образуют систему четырех линейных однородных уравнений относительно компонент вектора напряжений p_n, τ_n . Ранг матрицы этой системы уравнений при значениях α_1, α_2 , определяемых соотношениями (4.45), равен единице. Следовательно, равенства (4.67) в этом случае оказываются попарно линейно зависимыми. Поэтому любое из них можно рассматривать как ограничение на нагрузку, обуславливающее совместность уравнений (4.33). Если это условие выполняется, из уравнений (4.33) следуют зависимости между компонентами напряжений в вершине клина

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= (p_n - \sigma_{22} \cos^2 \alpha)(1 - ctg^2 \alpha) - 2(\tau_n - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha)ctg \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= -(p_n - \sigma_{22} \cos^2 \alpha)(1 - ctg^2 \alpha) - 2(\tau_n - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha)(tg \alpha - ctg \alpha), \\ \sigma_{12} &= (p_n - \sigma_{22} \cos^2 \alpha)ctg \alpha + \tau_n - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Зависимости (4.68), (4.30), (4.31) и условия непрерывности перемещений на линии соединения составляющих элементов образуют ограничения в особой точке. Если компоненты вектора напряжений не удовлетворяют равенствам (4.67), система уравнений (4.33) при значениях α_1, α_2 несовместна. Эти углы следует рассматривать как критические углы скрепления элементов, так как когда материальные параметры стремятся к выполнению равенств (4.67), напряжения в элементарных объемах вблизи вершины клина неограниченно возрастают.

2. ($\alpha + \beta = \pi/2$). Определитель (4.34) в данном случае выражается формулой (4.48) и при выполнении условий (4.53) или (4.54) обращается в нуль при единственном значении угла α , равном α^* , определяемом уравнением (4.51). Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$), получающиеся последовательной заменой столбцов определителя матрицы системы уравнений (4.33) столбцами ее свободных членов, представляются равенствами вида (4.63), в которых параметры φ_i, ψ_i находятся по формулам

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2}\right) \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha, & \psi_1 &= -\cos^2 \alpha \left[\frac{1}{E_2} + 2\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2}\right) \sin^2 \alpha \right], \\ \varphi_2 &= \varphi_1, & \psi_3 &= -\sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{1-v_1}{E_1} - \frac{1-v_2}{E_2}\right) \sin^2 \alpha - \frac{1}{E_1} \right], \\ \varphi_3 &= -\left(\frac{1-v_1}{E_1} - \frac{1-v_2}{E_2}\right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, & \psi_2 &= -\left[\frac{1}{E_1} \cos^2 \alpha + \left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2}\right) \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \right], \\ \varphi_4 &= -\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right) \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha, & \psi_4 &= -\sin^2 \alpha \left[\frac{2 \cos^2 \alpha}{E_1} - \frac{\cos 2\alpha}{E_2} \right].\end{aligned}\tag{4.69}$$

Ранг системы уравнений (4.33) в точке α^* равен трем. Поэтому уравнения будут совместными при этом α , если все определители Δ_i обратятся в нуль. То есть будут выполняться равенства (4.67), где φ_i, ψ_i задаются соотношениями (4.69). Равенства (4.67) можно рассматривать как систему уравнений относительно параметров нагружения p_n, τ_n . Ранг матрицы этой системы при $\alpha = \alpha^*$ равен единице. Следовательно, равенство (4.67) фактически является одним условием, накладываемым на параметры p_n, τ_n , обеспечивающим совместность уравнений (4.33) в точке α^* . При выполнении условий (4.67) между напряжениями в особой точке выполняются зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= p_n(1 - ctg^2\alpha) - 2\tau_n ctg\alpha + \sigma_{22} ctg^2\alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= p_n(1 - ctg^2\alpha) - \tau_n(ctg\alpha - tg\alpha) + \sigma_{22} ctg^2\alpha, \\ \sigma_{12} &= p_n ctg\alpha + \tau_n - \sigma_{22} ctg.\end{aligned}\tag{4.70}$$

Количество задаваемых в особой точке ограничений соответствует неклассической задаче. Если условия (4.67) не выполняются, уравнения (4.33) несовместны. Если материальные параметры соединяемых тел стремятся к выполнению условий (4.51), напряжения в элементарных объемах, примыкающих к вершине клина, неограниченно возрастают.

3. ($\alpha + \beta = \pi$). Определитель (4.34) совпадает с выражением (4.56). Условие $\Delta = 0$ распадается на уравнения (4.49) и (4.50). Уравнение (4.49) в области допустимых α ($0 < \alpha < \pi$) имеет единственный корень $\alpha = \pi/2$. Следовательно, элемент конструкции задается углами $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$. Такой случай соединения элементов клина рассмотрен в п. 4.3.2.1. Уравнение (4.50) при ограничениях на материальные параметры (4.53) или (4.54) имеет два корня, вычисляемые по формулам (4.57). Определители (4.61) представляются в виде (4.64), где функции φ_i, ψ_i в рассматриваемом случае задаются выражениями

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right) \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha, & \psi_1 &= \cos^2 \alpha \left[\frac{1}{E_2} + 2 \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \right], \\ \varphi_2 &= \varphi_1, & \psi_2 &= \frac{1}{E_1} \cos^2 \alpha + \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \cos 2\alpha, \\ \varphi_3 &= \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, & \psi_3 &= \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha - \frac{1}{E_1} \right], \\ \varphi_4 &= \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha, & \psi_4 &= \sin^2 \alpha \left[\frac{2 \cos^2 \alpha}{E_1} - \frac{\cos 2\alpha}{E_2} \right].\end{aligned}\tag{4.71}$$

В точках α_1, α_2 (4.57) равенства

$$p_n \varphi_i(\alpha_k) + \tau_n \psi_i(\alpha_k) = 0. \quad (i=1,2,3,4; k=1,2)\tag{4.72}$$

представляют собой линейно зависимую систему уравнений относительно параметров p_n, τ_n . Это означает, что при каждом α_k ($k=1,2$) все равенства (4.72) одинаковы и представляют собой ограничения на нагрузку p_n, τ_n , при которой уравнения (4.33) совместны. При выполнении такого ограничения между напряжениями в особой точке выполняются зависимости (4.68). Если параметры нагрузки p_n, τ_n не удовлетворяют ограничению (4.72), точки α_k ($k=1,2$) являются критическими. Решение системы уравнений (4.33) в них не существует. Компоненты напряжений в особой точке при значениях α , стремящихся к точкам α_k , неограниченно возрастают.

4. ($\alpha + \beta = 2\pi$). Определитель Δ системы уравнений (4.33) обращается в нуль в точках (4.59) и (4.60). Точки α , входящие в список (4.59), рассмотрены в п. 3.3.2.1. Функции φ_i, ψ_i в представлении определителей (4.61) в виде (4.64) совпадают с выражениями (4.71). В точках α_k ($k=1,2,3,4$), определяемых равенством (4.60), система уравнений (4.72) имеет ранг, равный единице. Поэтому в каждой из точек α_k ($k=1,2,3,4$) равенства (4.72) оказываются одним ограничением на параметры p_n, τ_n , обеспечивающим совместность системы уравнений (4.33). При выполнении этого ограничения в точках α_k ($k=1,2,3,4$) из уравнений (4.33) следуют зависимости между напряжениями (4.68). Если ограничение (4.72) не выполняется, в точках α_k ($k=1,2,3,4$), уравнения (4.33) несовместны, при α , стремящемся к α_k ($k=1,2,3,4$), напряжения в особой точке стремятся к бесконечности.

Таблица 4.8

Ограничений на компоненты напряжений в частных случаях скрепления элементов клина

№	Условия на α, β, Δ	Ограничения на компоненты нагрузки	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	$\alpha = \beta, \Delta \neq 0$	Нет	Формулы (4.66)	Девять
2	$\alpha = \beta, \Delta = 0$, α определяется формулами (4.45)	$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ φ, ψ определяются по формулам (4.65)	Формулы (4.68)	Восемь
3	$\alpha = \beta, \Delta = 0$, α определяется формулами (4.45)	$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i \neq 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ φ, ψ определяются по формулам (4.65)	Ограничения несовместны	
4	$(\alpha + \beta = \pi / 2), \Delta \neq 0$	нет	Формулы (4.66)	Девять
5	$(\alpha + \beta = \pi / 2), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.51)	$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ φ, ψ определяются по формулам (4.69)	Формулы (4.70)	Восемь
6	$(\alpha + \beta = \pi / 2), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.51)	$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i \neq 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ φ, ψ определяются по формулам (4.69)	Ограничения несовместны	
7	$(\alpha + \beta = \pi), \Delta \neq 0$	нет	Формулы (4.66)	Девять
8	$(\alpha + \beta = \pi), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.57)	$p_n \varphi_i(\alpha_k) + \tau_n \psi_i(\alpha_k) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2$ φ, ψ определяются по формулам (4.71)	Формулы (4.68)	Восемь
9	$(\alpha + \beta = \pi), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.57)	$p_n \varphi_i(\alpha_k) + \tau_n \psi_i(\alpha_k) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2$ φ, ψ определяются по формулам (4.71)	Ограничения несовместны	
10	$(\alpha + \beta = 2\pi), \Delta \neq 0$	Нет	Формулы (4.66)	Девять
11	$(\alpha + \beta = 2\pi), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.60)	$p_n \varphi_i(\alpha_k) + \tau_n \psi_i(\alpha_k) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4$ φ, ψ определяются по формулам (4.71)	Формулы (4.68)	Восемь
12	$(\alpha + \beta = 2\pi), \Delta = 0$, α определяется формулами (4.60)	$p_n \varphi_i(\alpha_k) + \tau_n \psi_i(\alpha_k) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4$ φ, ψ определяются по формулам (4.71)	Ограничения несовместны	

4.3.3. Пример. Нагружение прямоугольной составной пластинки

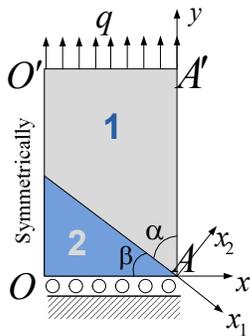


Рис.4.4. Составная пластинка

Рассматривается пластинка, составленная из двух изотропных элементов 1, 2 так, что углы при вершине A в сумме составляют прямой угол ($\alpha + \beta = \pi/2$). Сторона OA пластинки скользит без трения вдоль жесткой поверхности. Геометрические и материальные параметры элемента конструкции имеют значения: $E_1 = 1.05e5 \text{ МПа}$, $E_2 = 0.7e5 \text{ МПа}$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $\omega_1 = 0.11e-4 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 0.85e-5 \text{ с}^{-1}$, $OA = 60 \text{ мм}$, $AA' = 80 \text{ мм}$.

Пластинка может быть нагружена распределенными усилиями интенсивности $q = 100 \text{ МПа}$ на верхнем основании $O'A'$ ($\Delta T = 0$) или подвергнута изменению температуры $\Delta T = 100^\circ$ (п.4.3.1.2, случай 2). Критическое значение угла α , вычисляемое по формуле (4.51), составляет $\alpha^* = 52.239^\circ$. Когда $\Delta T = 0$ и $\alpha \neq \alpha^*$, из уравнений (4.33) и условий (4.31) следует равенство нулю всех напряжений в особой точке. В классическом подходе такой определенности не возникает, так как не принимается во внимание ограничение (4.32). Решение задачи строится итерационным численно-аналитическим методом, описанным в разделе 2. На рис. 4.5 – 4.7 представлены результаты вычислений. Наибольшие нормальные напряжения при растяжении пластинки реализуются в окрестности вершины A на стороне AA' . Эти напряжения для различных углов α показаны на рис. 4.5.

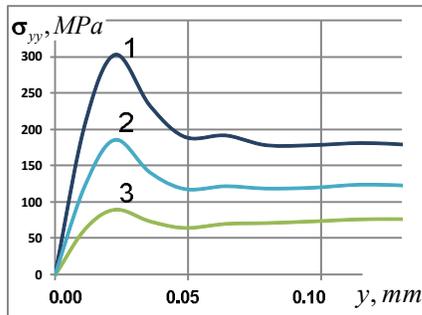


Рис.4.5. Нормальные напряжения σ_{yy} на стороне AA' вблизи особой точки при различных α : 1 – 40° ; 2 – 49° ; 3 – 64° . $q = 100 \text{ МПа}$, $\Delta T = 0$

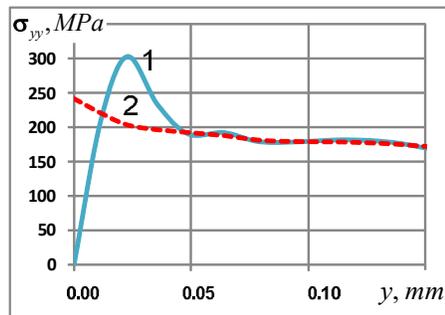


Рис.4.6. Нормальные напряжения σ_{yy} на стороне AA' вблизи особой точки для $\alpha = 40^\circ$: 1 – решение итерационным методом; 2 – решение в классической постановке.

При решении данной задачи обычными методами не удастся подчинить решение всем задаваемым ограничениям. На рис. 4.6 штриховой линией показано решение, полученное с использованием пакета ANSYS. Оно не согласуется с накладываемыми на параметры состояния ограничениями в

вершине клина. Существенное различие решений наблюдается в малой окрестности особой точки. Вне этой окрестности решение, получаемое итерационным методом, совпадает с классическим. Степень невыполнения ограничений, заданных в особой точке, оценивается по среднеквадратическому отклонению η их значений от фактически заданных. Для классического подхода (МКЭ-ANSYS) эта величина составила $\eta=152.3\%$ ($q \neq 0, \Delta T=0$), для решения методом последовательных приближений – $\eta=1.2\%$.

На рис. 4.7 представлены при различных значениях α напряжения σ_{yy} вблизи особой точки на стороне AA' при температурной нагрузке составной пластинки.

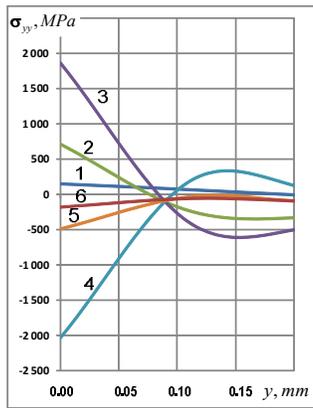


Рис.4.7. Нормальные напряжения σ_{yy} на стороне AA' вблизи особой точки для различных α : 1– 40° , 2 – 49° , 3 – 51° , 4– 53° , 5 – 55° , 6 – 64° . $q=0, \Delta T=100^\circ C$

Видно, что с приближением угла α к критическому значению α^* напряжения σ_{yy} неограниченно возрастают. В случае, если $\alpha = \alpha^*$, $q \neq 0, \Delta T=0$, задача становится классической. Ее решение может быть построено, например, с использованием инженерного комплекса ANSYS. На рис. 4.8,а представлена поверхность уровня напряжения σ_{yy} вблизи вершины клина для этого случая.

Видно, что в окрестности особой точки отсутствует концентрация напряжений. Для сравнения на рис. 4.8,б приведено решение для случая $\alpha \neq \alpha^*$, когда в окрестности особой точки реализуется концентрация напряжений с коэффициентом 3.

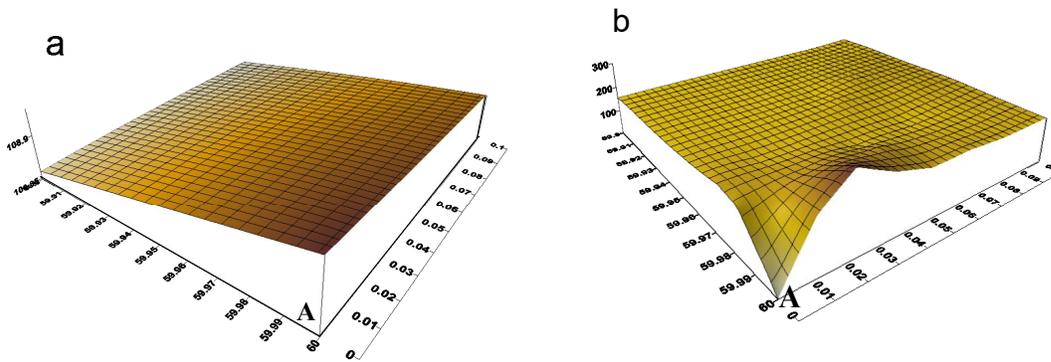


Рис.4.8. Поверхности нормальных напряжений σ_{yy} (МПа) в окрестности точки A (вершины клина) ($q=100\text{МПа}, \Delta T=0$): а) $\alpha = \alpha^*$; б) $\alpha \neq \alpha^*$ ($\alpha = 40^\circ$)

Компоненты напряжений в элементарных объемах, примыкающих к особой точке, подчиняются условиям

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha$$

В координатах x_1, x_2 методом конечных элементов с использованием пакета ANSYS получаем (МПа) $\sigma_{22} = 68.00$, $\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = 40.84$, $\sigma_{12} = -52.69$. Эти значения напряжений хорошо согласуются с приведенными формулами.

4.3.4. Пример. Растяжение составной пластинки с V-образным вырезом

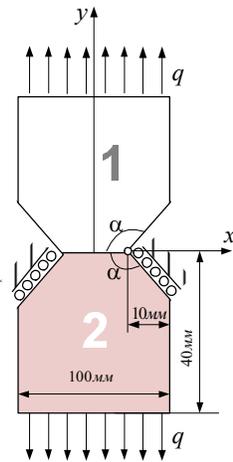
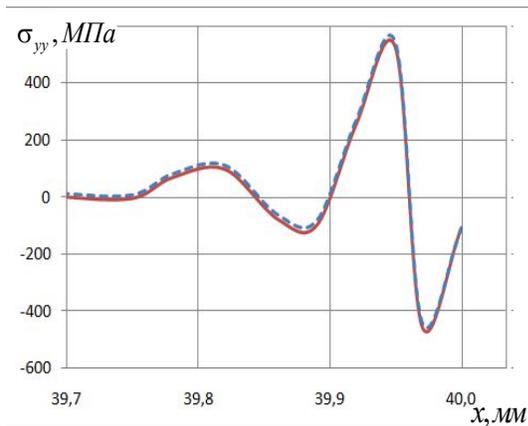


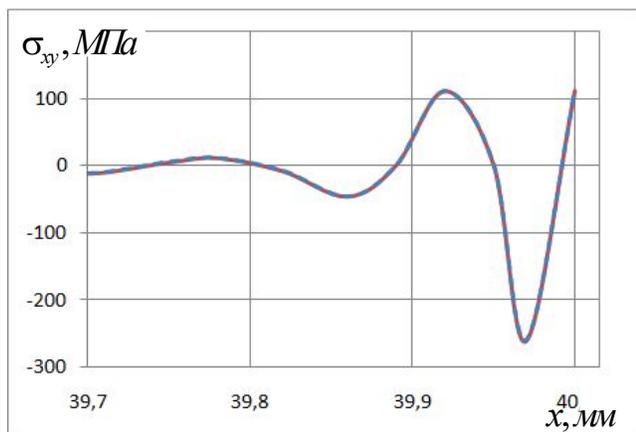
Рис.4.9. Составная пластинка с V-образным вырезом

Рассматривается составная пластинка с V-образным вырезом. Одна из граничных линий клина, образующих вырез, свободна от нагрузки, другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности. Полагается, что $\alpha = \beta$, причем α удовлетворяет условию 4.45 (п. 4.3.1.2 случай 1). Геометрические параметры указаны на рисунке, материальные имеют значения: $E_1 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\nu_1 = 0,3$, $E_2 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\nu_2 = 0,4$. Угол $\alpha = 136,102^\circ$ является корнем уравнения (4.45).

Пластинка нагружена распределенными усилиями $q = 1 \text{ МПа}$. Решение задачи строится итерационным численно-аналитическим методом, описанным в разделе 2. На рис. 4.9 представлены напряжения на линии соединения элементов пластинки.



а



б

Рис.4.10. Напряжения на линии соединения элементов: а– σ_{yy} ; б– σ_{xy}

Видно, что условия непрерывности напряжений на линии соединения элементов выполняется с высокой точностью, на рис. 4.10,а и 4.10,б соответствующие кривые практически совпадают.

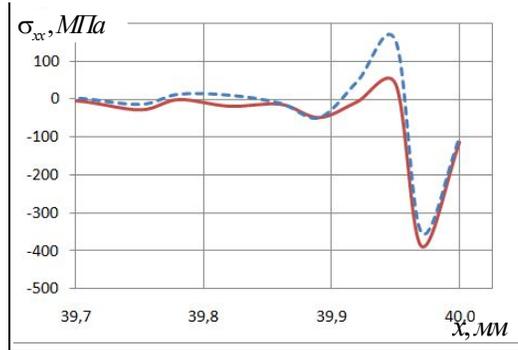


Рис.4.11. Напряжения $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\sigma_{xx}^{(2)}$ на линии соединения элементов

В табл. 4.9 сравниваются значения напряжений в элементарном объеме, содержащем вершину клина, вычисленные по формулам (4.46) и полученные численным методом.

Таблица 4.9

Контроль выполнения формул (4.46)

Компоненты напряжений	$\sigma_{xx}^{(1)}$	$\sigma_{xx}^{(2)}$	σ_{xy}
По формулам (4.46)	-116,639	-99,361	112,236
Численное решение	-114,246	-101,582	112,049
Различие,%	2,1	2,2	0,2

4.4. Ограничения на параметры состояния в особых точках составного клина с жесткозащемленными образующими

4.4.1. Постановка задачи о формировании ограничений в представительных объемах при вершине клина

Рассматривается часть конструкции, представляющая собой плоский клин, составленный из двух изотропных линейно упругих элементов 1, 2, скрепленных между собой (рис.4.9). Образующие клина защемлены. Орты \bar{n} и \bar{m} перпендикулярны образующим, а орты \bar{n}' , \bar{m}' перпендикулярны соответственно направлениям \bar{n} , \bar{m} .

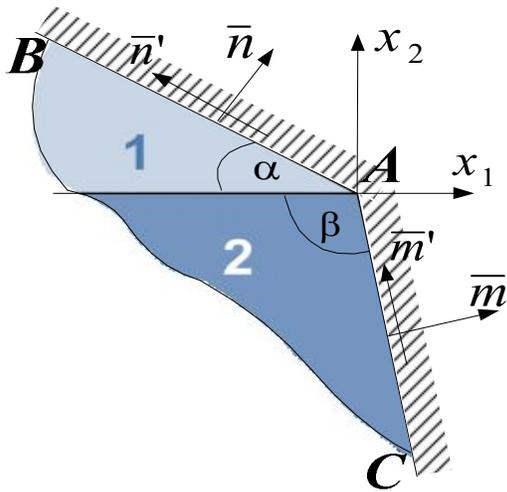


Рис.4.9. Составной клин

Углы α , β при вершинах составляющих клин элементов подчинены условиям

$$0 < \alpha < 2\pi, 0 < \beta < 2\pi,$$

$$0 < \alpha + \beta \leq 2\pi.$$

(4.73)

Вводится ортонормированная декартова система координат x_1, x_2 с началом в точке A (вершине клина). Ось x_1 направляется по касательной к линии соединения составляющих клин элементов во внешнюю, относительно клина, область.

Используются принятые ранее обозначения. Считается, что составной клин находится в условиях плоской деформации. Согласно принятой концепции, в окрестности точки A рассматриваются элементарный объем тела 1, примыкающий к точке A , и элементарный объем тела 2, примыкающий к этой же точке. Указанные элементарные объемы находятся в однородном НДС и взаимодействуют по линии соединения. Это взаимодействие характеризуется условиями:

непрерывности напряжений и деформаций на линии соединения

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}; \quad (4.74)$$

- отсутствия относительных удлинений в направлении образующих составного клина

$$\varepsilon_{n'}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{m'}^{(2)} = 0; \quad (4.75)$$

- отсутствия сдвига между направлениями AB и AC

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad (4.76)$$

φ_1 и φ_2 – изменения в процессе деформирования соответственно углов α , β .

С введением обозначений

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = g\varepsilon_{12}; \quad g = \frac{G_2}{G_1}, \quad Q = \left[\frac{(1+\nu_1)\omega_1}{(1-2\nu_1)} - \frac{g(1+\nu_2)\omega_2}{(1-2\nu_2)} \right] \Delta T \quad (4.77)$$

равенства (4.74) – (4.76) для случая, когда $\sin \alpha \neq 0$ и $\sin \beta \neq 0$ (случай $\sin \alpha = 0$ и $\sin \beta = 0$ рассматривается в п. 4.4.2) приводятся к системе уравнений

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(1)} \sin^2 \alpha - g \varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\
\varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta &= 0, \\
\varepsilon_{11} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) + \varepsilon_{12} (1 - g) &= 0, \\
\varepsilon_{11} \left(\frac{v_1}{1-2v_1} - \frac{g v_2}{1-2v_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1-v_1}{1-2v_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{g(1-v_2)}{1-2v_2} &= Q.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

При построении равенств (4.77), (4.78) использовались физические уравнения линейной термоупругости и формула (2.15). Задача состоит в исследовании в зависимости от материальных и геометрических параметров существования решений системы уравнений (4.78) и ее аналогов в случаях $\sin \alpha = 0$, $\sin \beta = 0$; определении в каждом решении независимых ограничений на параметры состояния в особой точке.

4.4.2. Общее исследование системы уравнений (4.78)

4.4.2.1. $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$.

Данное условие обеспечивает существование третьего из равенств системы уравнений (4.78). Эта система автономна относительно деформаций ε_{11} , $\varepsilon_{22}^{(1)}$, $\varepsilon_{22}^{(2)}$, ε_{12} . Ее определитель вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\Delta = 2g \sin(\alpha + \beta) \left[\frac{1-v_1}{1-2v_1} \cos \alpha \sin \beta + \frac{1-v_2}{1-2v_2} \cos \beta \sin \alpha \right] - \\
2(1-g) \left[\left(\frac{1}{1-2v_1} - \frac{g}{1-2v_2} \right) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \frac{1-v_1}{1-2v_1} \sin^2 \beta + \frac{g(1-v_2)}{1-2v_2} \sin^2 \alpha \right].
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Определитель (4.79) зависит от пяти безразмерных параметров $\alpha, \beta, g, v_1, v_2$. Если сочетание этих параметров не обращает в нуль определитель (4.79), уравнения (4.78) имеют единственное решение

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \tag{4.80}$$

где Δ_i ($i=1,2,3,4$) – определители матриц, получающихся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (4.78) столбцом свободных членов:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = -2(1-g)Q \sin^2 \alpha \sin^2 \beta, \quad \Delta_2 = 2Q \cos \alpha \sin \beta (\cos \alpha \sin \beta + g \cos \beta \sin \alpha), \\
\Delta_3 = -2Q \sin \alpha \cos \beta (\cos \alpha \sin \beta + g \cos \beta \sin \alpha), \quad \Delta_4 = Q \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta).
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Определители (4.81) одновременно обращаются в нуль в случаях:

- 1) $Q=0$. Это возможно в случае отсутствия температурной нагрузки

($\Delta T = 0$) или при условии зависимости между материальными характеристиками скрепляемых тел, обращающих в нуль коэффициент при ΔT (см. (4.77)):

$$\frac{\omega_1(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} - \frac{g\omega_2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = 0. \quad (4.82)$$

Если определитель (4.79) в данном случае не равен нулю, все деформации (4.80) в особых точках обращаются в нуль. С учетом зависимости (4.77) в особых точках формулируются шесть ограничений на деформации. НДС элементарных объемов, примыкающих к вершине клина, полностью известно. Если определитель (4.79) обращается в нуль, уравнения (4.78) становятся линейно зависимыми. Количество независимых ограничений на компоненты деформации определяется рангом матрицы системы;

2) $g=1$, $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha + \beta = 2\pi$.

Система (4.78) приводится к трем линейным неоднородным уравнениям относительно четырех компонентов деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(1)} \sin^2 \alpha - g\varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \alpha - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \left(\frac{\nu_1}{1-2\nu_1} - \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{1-\nu_2}{1-2\nu_2} &= Q. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Если коэффициенты Пуассона скрепляемых тел различны ($\nu_1 \neq \nu_2$), ранг системы (4.83) равен трем и компоненты деформации связаны независимыми соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{Q(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)\sin^2 \alpha}{\nu_1 - \nu_2} - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} &= -\frac{Q(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)\cos^2 \alpha}{\nu_1 - \nu_2} + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Когда коэффициенты Пуассона скрепляемых тел одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$), но $Q \neq 0$ вследствие различия коэффициентов линейного расширения ($\omega_1 \neq \omega_2$), ранг системы уравнений (4.83) равен двум, а ранг ее расширенной матрицы – трем. Уравнения несовместны. Это означает, что при стремлении ν_1 к ν_2 деформации в вершине клина неограниченно возрастают.

4.4.2.2. $\sin \alpha = 0$, $\sin \beta \neq 0$, ($\alpha = \pi$).

Стороны угла $\alpha = \pi$ представляют собой прямую. При деформировании окрестности точки A прямые переходят в прямые, поэтому сдвиг между образующими развернутого угла равен нулю. Следовательно, условие (4.76)

$(\varphi_1 + \varphi_2 = 0)$ при $\alpha = \pi$ переходит в условие $\varphi_2 = 0$. Уравнения (4.78) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta &= 0, \\ \varepsilon_{11} \operatorname{ctg} \beta + 2\varepsilon_{12} &= 0, \\ \varepsilon_{11} \left(\frac{v_1}{1-2v_1} - \frac{gv_2}{1-2v_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1-v_1}{1-2v_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{g(1-v_2)}{1-2v_2} &= Q. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Определитель матрицы системы уравнений (4.85)

$$\Delta = 2 \left(\frac{1-v_1}{1-2v_1} \right) \sin^2 \beta$$

не обращается в нуль, поэтому ранг системы равен четырем, она имеет единственное решение

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{1-v_1}{1-2v_1} Q, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0. \quad (4.86)$$

Компоненты деформаций в особых точках подчиняются шести условиям, НДС здесь полностью определено.

4.4.2.3. $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta = 0, (\beta = \pi)$

Случай аналогичен предыдущему. Компоненты деформации находятся по формулам

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = -\frac{1-2v_2}{g(1-v_2)} Q, \quad \varepsilon_{12} = 0. \quad (4.87)$$

4.4.2.4. $\sin \alpha = 0, \sin \beta = 0, (\alpha = \beta = \pi)$

Из уравнений (4.78) следуют два ограничения на компоненты деформации в вершине клина

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \frac{1-v_1}{(1-2v_1)} \varepsilon_{22}^{(1)} - \frac{g(1-v_2)}{(1-2v_2)} \varepsilon_{22}^{(2)} = Q.$$

Еще два ограничения вытекают из равенств (4.77). Суммарное количество ограничений равно четырем. Рассмотренные в этом пункте ограничения на компоненты деформаций в особых точках сведены в табл. 4.9.

Таблица 4.9

Ограничения на компоненты деформаций в особых точках по п. 4.4.2

№	Условия на $\alpha, \beta, g, Q, \Delta, v_1, v_2$	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	$\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0, \Delta \neq 0.$	Формулы (4.80)	Восемь
2	$\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0, \alpha + \beta = \pi, g = 1, v_1 \neq v_2.$	Формулы (4.84)	Семь

№	Условия на $\alpha, \beta, g, Q, \Delta, v_1, v_2$	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
3	$\sin\alpha \neq 0, \sin\beta \neq 0,$ $\alpha + \beta = \pi, g = 1, v_1 = v_2,$ $Q \neq 0.$	Ограничения несовместны	
4	$\sin\alpha \neq 0, \sin\beta \neq 0,$ $\alpha + \beta = \pi, g = 1, v_1 = v_2,$ $Q = 0.$	$\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)},$ $\varepsilon_{11}^{(1)} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(1)} \sin^2 \alpha - \varepsilon_{12}^{(1)} \sin 2\alpha = 0$	Шесть
5	$\sin\alpha = 0, \sin\beta \neq 0$	Формулы (4.86)	Восемь
6	$\sin\alpha \neq 0, \sin\beta = 0$	Формулы (4.87)	Восемь
7	$\sin\alpha = 0, \sin\beta = 0$	$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = 0, \varepsilon_{12}^{(1)} = g\varepsilon_{12}^{(2)},$ $\frac{1-v_1}{1-2v_1} \varepsilon_{22}^{(1)} - g \frac{1-v_2}{1-2v_2} \varepsilon_{22}^{(2)} = Q$	Шесть

4.4.3. Частные случаи соединения элементов

Рассматриваются наиболее интересные, по мнению авторов, варианты геометрических параметров вблизи вершины клина:

$$\alpha = \beta, \alpha + \beta = \pi/2, \alpha + \beta = \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$$

4.4.3.1. $\alpha = \beta, \sin\alpha \neq 0$

(Случай $\sin\alpha = 0$ рассмотрен в п.п. 4.4.2.2, 4.4.2.4). Определитель (4.79) преобразуется к виду

$$\Delta = 2\sin^2 \alpha (V - W \sin^2 \alpha), \quad (4.88)$$

где

$$V = \frac{(g+1)(1-v_1)}{1-2v_1} + \frac{g(g+1)(1-v_2)}{1-2v_2}, \quad W = \frac{g(1-2v_1)+1}{1-2v_1} + \frac{g[(1-2v_2)+g]}{1-2v_2}.$$

Если определитель (4.88) не обращается в нуль, уравнения (4.78) имеют единственное решение вида (4.80), в котором Δ определяется равенством (4.87), а определители Δ_i вычисляются по формулам

$$\Delta_1 = -2(1-g)Q \sin^4 \alpha, \quad \Delta_2 = 2(1+g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad (4.89)$$

$$\Delta_3 = -2(1+g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \Delta_4 = Q \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

Параметры состояния в вершине клина подчинены шести ограничениям, НДС здесь полностью определено.

При выполнении накладываемого на материальные и геометрические параметры условия

$$\sin^2 \alpha = V/W \quad (4.90)$$

определитель (4.88) обращается в нуль. Равенство (4.90) определяет угол скрепления элементов 1, 2, при котором ранг матрицы системы уравнений (4.78) оказывается меньше четырех. Область существования такого угла в

пространстве параметров (g, v_1, v_2) , с учетом положительности величин V и W , определяется неравенством

$$(g-1)[v_1(1-2v_2) - gv_2(1-2v_1)] \leq 0. \quad (4.91)$$

Если $g=1$, неравенство (4.91) выполняется независимо от значений v_1, v_2 . При этом $\alpha = \beta = \pi/2$, так как в данном случае $V = W$. Возможные случаи поведения решений уравнений (4.78) в зависимости от v_1, v_2 приведены в п. 4.4.2.1.

Когда $g \neq 1$, неравенство (4.91), определяющее область существования угла α , удовлетворяющего условию (4.90), распадается на две группы неравенств

$$g < 1, \quad v_2 \leq \frac{v_1}{2v_1 + g(1-2v_1)}. \quad (4.92)$$

$$g > 1, \quad v_2 \geq \frac{v_1}{2v_1 + g(1-2v_1)}. \quad (4.93)$$

Для некоторых значений g области, ограниченные неравенствами (4.92), (4.93) в плоскости v_1, v_2 , представлены на рис. 4.10,а и 4.10,б.

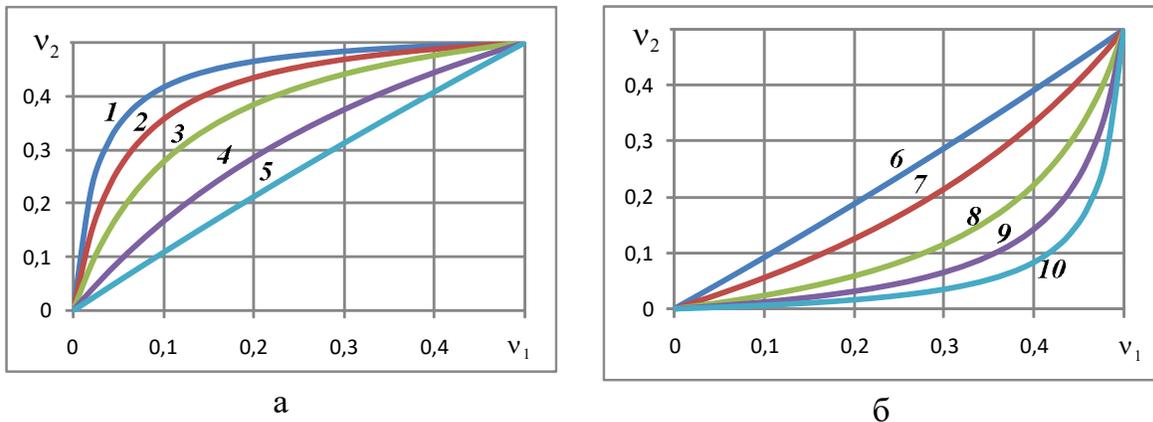


Рис. 4.10. Области существования решения уравнения (4.90) оказываются ниже кривой (а) в соответствии с (4.92) или выше кривой (б) в соответствии с (4.93) для значений параметра g : 1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,5; 5 – 0,9; 6 – 1,111; 7 – 2; 8 – 5; 9 – 10; 10 – 20

Для каждого сочетания материальных параметров, удовлетворяющего неравенствам (4.92) или (4.93), существует два угла α_1 и $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, определяемые равенством (4.90). При α_1 и α_2 ранг системы уравнений (4.78) равен трем. Ее решение существует лишь при условии обращения в нуль всех определителей (4.89). Это возможно лишь при $Q=0$ (см. п.4.4.2.1). В этом случае из уравнений (4.78) следуют зависимости между деформациями

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = -\varepsilon_{22}^{(2)} = -\frac{\varepsilon_{11}(1+g)\text{ctg}^2\alpha_k}{1-g}, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_{11}\text{ctg}\alpha_k}{1-g}, \quad (k=1,2). \quad (4.94)$$

Равенства (4.94) и (4.77) в сумме составляют пять независимых ограничений на компоненты деформаций в вершине клина. Когда выполняется условие $Q \neq 0$, ранг расширенной матрицы оказывается больше ранга матрицы системы.

Уравнения (4.78) несовместны. В этом случае углы α_1 и α_2 следует считать критическими, так как при приближении сочетания материальных параметров к значению, удовлетворяющему (4.90), компоненты деформации в вершине клина неограниченно возрастают.

4.4.3.2. $\alpha + \beta = \pi / 2$

Определитель (4.79) преобразуется к виду

$$\Delta = a \sin^4 \alpha + b \sin^2 \alpha + c, \quad (4.95)$$

где

$$a = 2(g-1) \left(\frac{1}{1-2\nu_1} - \frac{g}{1-2\nu_2} \right), \quad b = \frac{-2(2-\nu_1-g)}{1-2\nu_1} - \frac{2g(1-g\nu_2)}{1-2\nu_2}, \quad c = \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1}.$$

Когда определитель (4.95) не обращается в нуль, решение уравнений (4.78) запишется равенствами (4.80), в которых Δ определяется равенством (4.95), а Δ_i – формулами

$$\Delta_1 = -2(1-g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \Delta_2 = 2Q \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), \quad (4.96)$$

$$\Delta_3 = -2Q \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), \quad \Delta_4 = Q \sin \alpha \cos \alpha.$$

НДС в особых точках полностью определено. Коэффициент a в равенстве (4.95) обращается в нуль в двух случаях: когда $g = 1$ или когда безразмерные параметры задачи связаны соотношением

$$g = \frac{1-2\nu_2}{1-2\nu_1}. \quad (4.97)$$

При $a=0$ определитель (4.95) обращается в нуль при условии

$$b \sin^2 \alpha + c = 0. \quad (4.98)$$

Если $g=1$, а параметры ν_1, ν_2 удовлетворяют условию

$$\nu_2 > \frac{1}{3-2\nu_1},$$

существует решение α^* уравнения (4.98). При $\alpha = \alpha^*$ ранг матрицы системы уравнений (4.78) равен трем. Определители (4.96) одновременно обращаются в нуль только при $Q=0$, поэтому возможны случаи

- 1) $Q \neq 0$. Ранг расширенной матрицы оказывается больше, чем ранг системы (4.78), эти уравнения несовместны. Угол α^* является критическим углом скрепления элементов 1, 2.
- 2) $Q=0$. Компоненты деформаций при $\alpha = \alpha^*$ в особых точках подчиняются ограничениям

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = 2\varepsilon_{12} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = -2\varepsilon_{12} \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.99)$$

Когда $g \neq 1$ и коэффициент a обращается в нуль вследствие зависимости (4.97), уравнение (4.98) решения относительно α не имеет.

Когда коэффициент a не обращается в нуль, исследование существования решений уравнения $\Delta = 0$ (4.95), подчиненных условию

$$0 < \sin^2 \alpha < 1, \quad (4.100)$$

проводится в два этапа. Во-первых, в ортогональной системе координат v_1, v_2, g определяются непересекающиеся поверхности, удовлетворяющие условию $b^2 - 4ac = 0$

$$g = g_i(v_1, v_2), \quad (i=1,2,3,4), \quad (4.101)$$

определенные на множестве

$$0 < v_1 < 0.5, \quad 0 < v_2 < 0.5. \quad (4.102)$$

Поверхности (4.101) упорядочиваются в соответствии с неравенством

$$0 < g_1 < g_2 < g_3 < g_4.$$

Далее изучается существование решения уравнения $\Delta = 0$ (согласованного с условием (4.100) в точках поверхностей (4.101) и в точках (v_1, v_2, g) , находящихся в пространственных областях между плоскостью $g=0$ и поверхностью $g = g_1(v_1, v_2)$, между смежными поверхностями (4.101) и выше поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$. В результате установлено, что в каждой точке множества (4.102) существует четыре корня. Два корня в области между плоскостью $g=0$ и поверхностью $g = g_1(v_1, v_2)$ и два корня выше поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$. В точках поверхностей $g = g_1(v_1, v_2)$ и $g = g_4(v_1, v_2)$ корни совпадают между собой. Для примера все эти корни в случае $v_1 = 0.4, v_2 = 0.3$ приведены на рис.4.11.

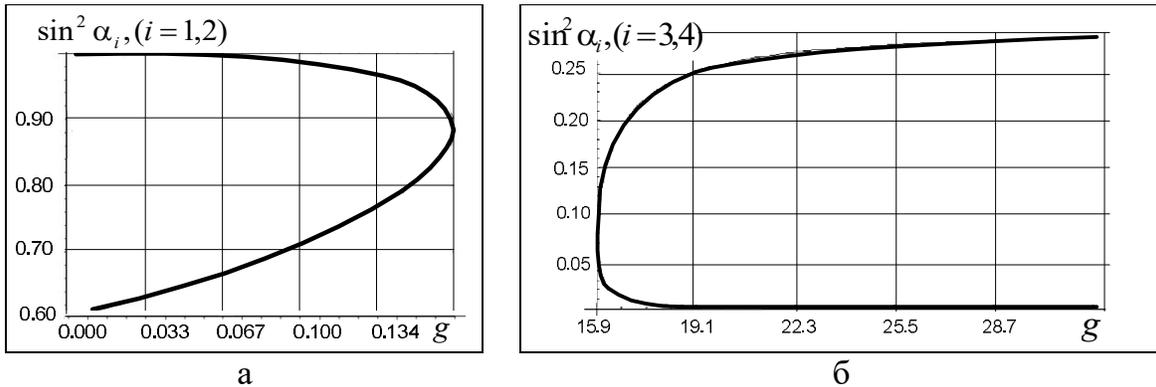


Рис.4.11. Корни уравнения (4.95) в точке $(v_1 = 0.4, v_2 = 0.3)$ в зависимости от параметра g :
 а) в области $0 < g < g_1(v_1, v_2)$; б) в области $g > g_4(v_1, v_2)$

На поверхности $g = g_1(v_1, v_2)$ $g(0.4, 0.3) = 0.167264$ корни совпадают: $\sin^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2 = 0.886721$, на поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$ $g(0.4, 0.3) = 15.9428$ корни совпадают: $\sin^2 \alpha_3 = \sin^2 \alpha_4 = 0.0758924$. Данный пример показывает, что при фиксированных v_1, v_2 корни уравнения (4.95) существуют не при всех значениях параметра g . Если же сочетание материальных параметров v_1, v_2, g попадает в

какую-либо из областей существования корней уравнения $\Delta = 0$, то при $Q \neq 0$ имеется два угла скрепления элементов α_1, α_2 или α_3, α_4 , которые следует считать критическими при температурной нагрузке, так как при таких углах система уравнений (4.78) оказывается несовместной. Если $Q = 0$, ранг системы уравнений (4.78) равен трем, и между компонентами деформаций в особых точках оказываются справедливыми зависимости

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -\varepsilon_{12}(1-g)\sin 2\alpha, & \varepsilon_{22}^{(1)} &= 2\varepsilon_{12}tg\alpha(\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), \\ \varepsilon_{22}^{(2)} &= -2\varepsilon_{12}tg\alpha(\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha).\end{aligned}\tag{4.103}$$

4.4.3.3. $\alpha + \beta = \pi$, ($0 < \alpha < \pi$)

Определитель (4.79) записывается равенством

$$\Delta = -2(1-g)\sin^2 \alpha(W_2 \sin^2 \alpha - V_2),\tag{4.104}$$

где

$$V_2 = \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} - \frac{g(1-\nu_2)}{1-2\nu_2}, \quad W_2 = \frac{1}{1-2\nu_1} - \frac{g}{1-2\nu_2}.$$

Определитель (4.104) обращается в нуль при выполнении равенства $g=1$ (случай рассмотрен в п. 4.4.2.1.2) или равенства

$$\sin^2 \alpha = \frac{V_2}{W_2}, \quad (g \neq 1).\tag{4.105}$$

Если ни одно из этих равенств не выполняется, ранг матрицы системы уравнений (4.78) равен четырем. Она имеет единственное решение вида (4.80), в котором Δ определяется равенством (4.104), а определители Δ_i вычисляются по формулам

$$\Delta_1 = -2(1-g)Q\sin^4 \alpha, \quad \Delta_2 = 2(1-g)Q\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \Delta_3 = \Delta_2, \quad \Delta_4 = 0.\tag{4.106}$$

НДС в особой точке полностью определено.

Изучим существование решения системы уравнений (4.78) при выполнении равенства (4.105), которое накладывает ограничения на материальные характеристики

$$0 < V_2/W_2 < 1.\tag{4.107}$$

Эти ограничения выполняются, если оказывается справедливой какая-либо из двух групп (4.108), (4.109) неравенств

$$v_2 < gv_1 + 0.5(1-g), \quad v_2 < \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)},$$

$$v_2 < \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, \quad \text{если } g < \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}, \quad (4.108)$$

$$v_2 > \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, \quad \text{если } g > \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}.$$

$$v_2 > gv_1 + 0.5(1-g), \quad v_2 > \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)},$$

$$v_2 > \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, \quad \text{если } g < \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}, \quad (4.109)$$

$$v_2 < \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, \quad \text{если } g > \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}.$$

Для примера области существования значений углов α , удовлетворяющих уравнению (4.105), приведены на рис. 4.12 (розовый цвет) в плоскости v_1, v_2 при некоторых фиксированных значениях параметра g .

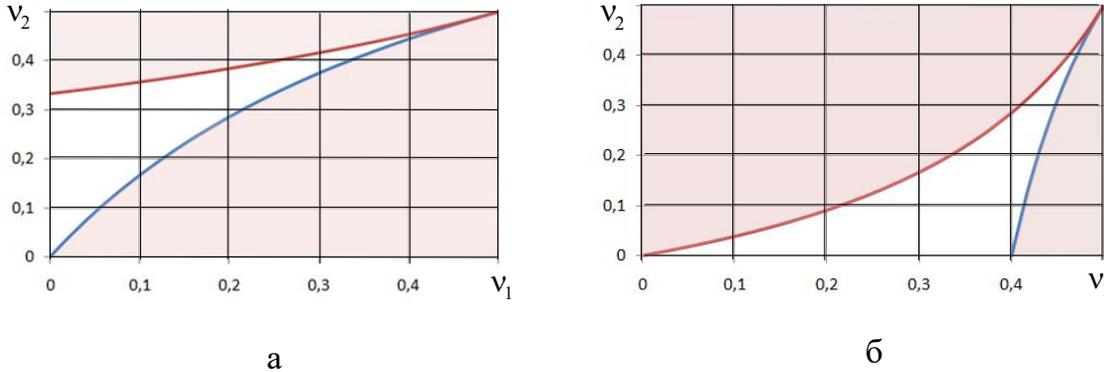


Рис.4.12. Области существования решения уравнения (4.10,6) для различных значений g : а) $g=0,5$; б) $g=3$

В каждой точке области, определяемой неравенствами (4.108), (4.109), существуют два угла скрепления α_1 и $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, при которых ранг матрицы уравнений (4.78) равен трем. Ранг расширенной матрицы зависит от значения Q . Если $Q = 0$, ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы. Между компонентами деформации оказываются справедливы зависимости

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = -2\varepsilon_{11}ctg^2\alpha, \quad \varepsilon_{12} = 0. \quad (4.110)$$

При $Q \neq 0$ ранг расширенной матрицы превосходит ранг матрицы системы, уравнения (4.78) несовместны. Углы α_1 и α_2 являются критическими, так как особые точки в этом случае являются точками сингулярного поведения параметров состояния.

4.4.3.4. $\alpha + \beta = 2\pi$, $(0 < \alpha < 2\pi)$

Определитель Δ в данном случае принимает вид (4.104), а $\Delta_i, (i=1,2,3,4)$ – вид (4.106). Определитель Δ (4.104) обращается в нуль при $g=1$ (случай изучен в п.4. 4.2.1), при $\sin \alpha = 0$ (случай изучен в п.4. 4.2.4) и при выполнении условия (4.105). В последнем случае, вследствие того, что $\alpha = \pi$ находится в области допустимых значений, вторые неравенства в группах (4.108), (4.109) не будут строгими. Вместо них получим соответственно

$$v_2 \leq \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}, \quad v_2 \geq \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}.$$

Кроме того, для каждого сочетания материальных параметров (v_1, v_2, g) из областей допустимых значений (исключая решение $\alpha = \pi$, изученное в п.4.4.2.4) существуют четыре угла α_i ($i=1,2,3,4$), связанные равенствами

$$\alpha_1 = \alpha^*, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha^*, \quad \alpha_3 = \pi + \alpha^*, \quad \alpha_4 = 2\pi - \alpha^*, \quad \alpha^* = \arcsin \sqrt{\frac{V_2}{W_2}},$$

при которых ранг матрицы системы уравнений (4.78) равен трем. Эти углы скрепления элементов 1,2 являются критическими, так как обуславливают сингулярность параметров состояния в особых точках при температурной нагрузке. Результаты п.4.4.3 сведены в табл.4.10.

Таблица 4.10

Ограничения на компоненты деформаций в особых точках в частных случаях скрепления элементов клина

№	Условия на $\alpha, \beta, g, Q, \Delta$	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	$\alpha = \beta, \sin \alpha \neq 0, \Delta \neq 0$	Формулы (4.80)	Восемь
2	$\alpha = \beta, \Delta = 0, Q = 0,$ $\alpha_k (k = 1,2)$ Определяется равенством (4.90)	Формулы (4.94)	Семь
3	$\alpha = \beta, \Delta = 0, Q \neq 0,$ $\alpha_k (k = 1,2)$ Определяется равенством (4.90)	Ограничения несовместны	
4	$\alpha + \beta = \pi/2, \Delta \neq 0$	Формулы (4.80)	Восемь
5	$\alpha + \beta = \pi/2, \Delta = 0, Q \neq 0,$ $g = 1$ α – решение уравнения (4.98)	Ограничения несовместны	

№	Условия на $\alpha, \beta, g, Q, \Delta$	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
6	$\alpha + \beta = \pi/2, \Delta = 0, Q = 0, g = 1$ α – решение уравнения (4.98)	Формулы (4.99)	Семь
7	$\alpha + \beta = \pi/2, \Delta = 0, Q \neq 0, g \neq 1$ α – корень уравнения $\Delta = 0$	Ограничения несовместны	
8	$\alpha + \beta = \pi/2, \Delta = 0, Q = 0, g \neq 1$ α – корень уравнения $\Delta = 0$	Формулы (4.103)	Семь
9	$\alpha + \beta = \pi, (\alpha + \beta = 2\pi), \Delta \neq 0,$ α – корень уравнения $\Delta = 0$	Формулы (4.80)	Восемь
10	$\alpha + \beta = \pi, (\alpha + \beta = 2\pi), \Delta = 0, Q \neq 0$ α – корень уравнения (4.105)	Ограничения несовместны	
11	$\alpha + \beta = \pi, (\alpha + \beta = 2\pi), \Delta = 0, Q = 0$ α – корень уравнения (4.105)	Формулы (4.110)	Семь

4.4.4. Пример. Температурное нагружение составного клина с развернутым углом при вершине ($\alpha = \beta = \pi/2$)

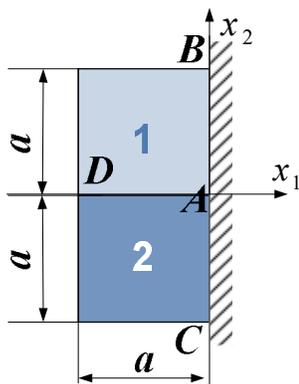


Рис.4.13. Составной клин с развернутым углом при вершине, $a=1\text{см}$

Случай описан в п. 4.4.3.3. В особой точке (точке A – вершине клина) (рис.4.13) все компоненты деформации известны, они вычисляются по формулам (4.80) и (4.77). Количество заданных ограничений в особых точках избыточно, поэтому задача не является классической. Материальные параметры имеют значения: $E_1 = 1.16e11\text{Па}$, $\nu_1 = 0.3$, $\omega_1 = 0.11e-4\text{град}^{-1}$, $\nu_2 = 0.35$, $\omega_2 = 0.85e-5\text{град}^{-1}$.

Модуль E_2 варьируется, убывает, приближаясь к критическому значению $E_2^{kp} = 0,7744e11\text{Па}$. При E_2^{kp} уравнение (4.105) имеет решения $\alpha^* = \pi/2$. Решение неклассической задачи при нагрузке $\Delta T = 100^\circ\text{C}$ строилось итерационным конечно-элементным методом, описанным в разделе 2, КЭ-сетка сгущалась к особой точке. Характерный размер 4-угольного 8-узлового КЭ-элемента вблизи нее равнялся 2 мкм. Решение в окрестности особых точек иллюстрируется на

рис. 4.14, где приведены напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) в окрестности особых точек при различных E_2 на линии соединения элементов (рис. 4.14,а) и на линии заделки ВС (рис. 4.14,б).

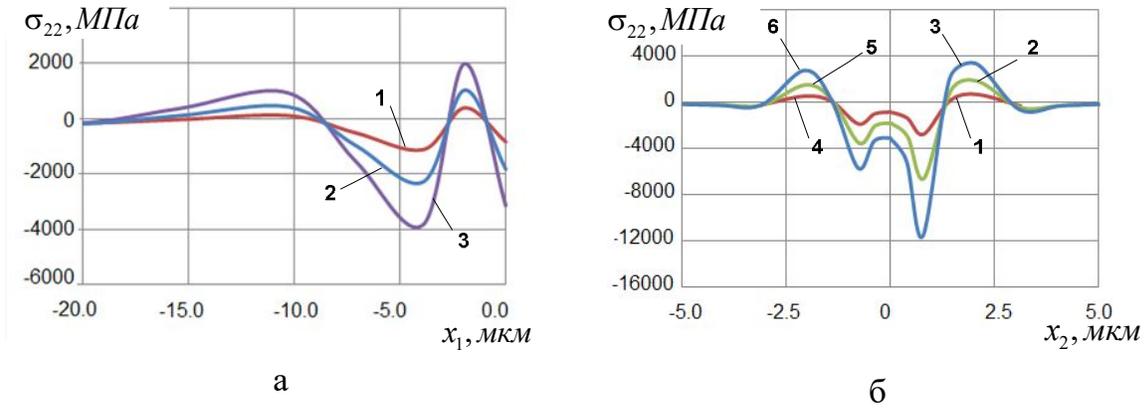


Рис.4.14. Напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) в окрестности особых точек а) на линии соединения AD $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$: 1- $E_2 = 80$ ГПа; 2- $E_2 = 82$ ГПа; 3- $E_2 = 88$ ГПа; б) по заземленному краю СВ: 1- $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 80$ ГПа; 2- $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 82$ ГПа; 3- $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 88$ ГПа; 4- $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 80$ ГПа; 5- $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 82$ ГПа; 6- $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 88$ ГПа

Выполняются все задаваемые для этих напряжений ограничения. Максимальными напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) оказываются не в особой точке, а в малой ее окрестности. С приближением сочетания материальных параметров к критическому значению напряжения неограниченно возрастают. Аналогичные результаты справедливы и для напряжений $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, (k=1,2)$. На рис. 4.15 представлено решение рассматриваемой задачи для перемещений.

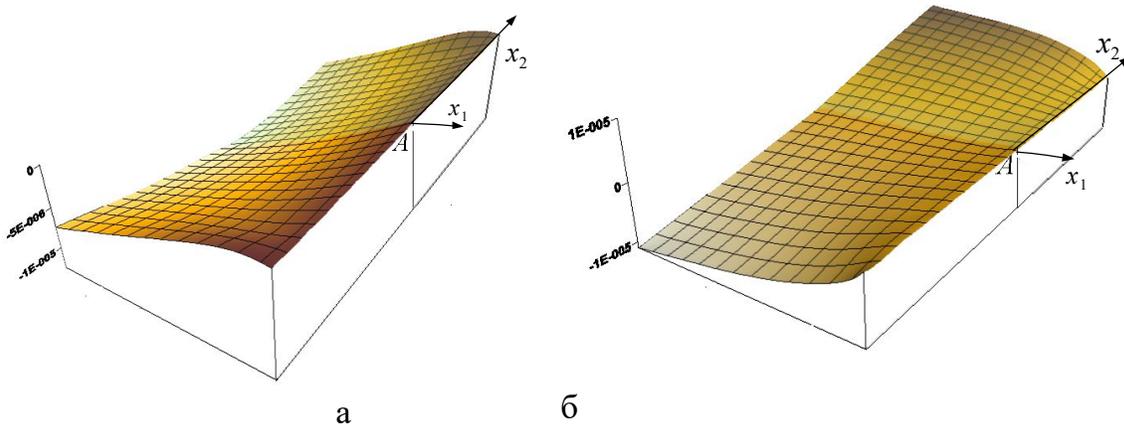


Рис.4.15. Поверхности перемещений: а - u_{x_1} ; б - u_{x_2}

Видно, что они удовлетворяют граничным условиям (обращаются в нуль в заделке) и непрерывны на линии соединения составляющих пластинку элементов.

В табл. 4.11 сравниваются с аналитическим решением напряжения в особой точке, вычисленные итерационным методом и методом конечных элементов (ANSYS).

Таблица 4.11

Сравнение точного и численных решений в особых точках
в элементах 1, 2 конструкции ($E_2 = 80 ГПа$)

Номер элемента		Точное решение		Итерационное		ANSYS-решение	
		1	2	1	2	1	2
Напряжени я, ГПа	$\sigma_{11}^{(k)}$	-5,58	-6,84	-5,62	-6,79	-0,0528	-0,0957
	$\sigma_{22}^{(k)}$	-3,11	-3,11	-3,13	-3,09	-0,138	-0,212
	$\sigma_{12}^{(k)}$	0,00	0,00	$7,17 \cdot 10^{-7}$	$-5,92 \cdot 10^{-7}$	0,0990	0,146

Напряжения $\sigma_{12}^{(k)}$ ($k = 1,2$), отвечающие итерационному методу, на семь порядков меньше максимальных напряжений в этих точках, поэтому естественно считать их равными нулю. Из таблицы видно, что итерационное решение задачи с достаточной точностью определяет напряженное состояние в особых точках. Значения всех напряжений непосредственно в особых точках, вычисленные в пакете ANSYS, в разы отличаются от точных значений (табл. 4.11). Значительное отклонение ANSYS-решения от точного обусловлено тем, что классический подход не в состоянии построить решение, удовлетворяющее избыточно заданным ограничениям в особых точках. Вне окрестности особых точек радиусом 5–10 характерных размеров макроскопического представительного объема материала ANSYS-решение совпадает с итерационным.

4.5. Ограничения на параметры состояния в вершине составного клина, одна из образующих которого жестко закреплена

4.5.1. Постановка задачи о формулировке ограничений на параметры состояния в вершине составного клина

Рассматривается плоский клин, составленный из двух изотропных линейно упругих элементов 1,2. Одна из образующих клина AC жестко закреплена, другая AB нагружена поверхностными усилиями $\bar{p}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}'$.

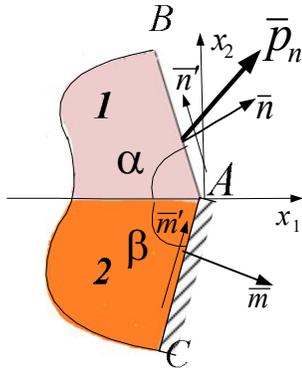


Рис. 4.16. Составной клин

Орты \bar{n} и \bar{m} перпендикулярны образующим, а орты \bar{n}' и \bar{m}' перпендикулярны соответственно направлениям \bar{n} и \bar{m} (рис. 4.16). Углы α, β при вершинах составляющих клин элементов подчиняются условиям $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$, $\alpha + \beta \leq 2\pi$.

(4.111)
В точке A (вершине клина) вводится ортонормированная декартова система координат x_1, x_2 .

Ось x_1 направляется по касательной к линии соединения составляющих клин элементов. Сохраняются принятые ранее обозначения. Принимается, что рассматриваемый клин находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Параметры состояния (напряжения, деформации) элементарных объемов составляющих элементов при вершине клина подчиняются следующим ограничениям:

1) условиям непрерывности напряжений и относительных удлинений на линии соединения

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}; \quad (4.112)$$

2) заданным граничным условиям на образующей AB

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_n = \tau_n; \quad (4.113)$$

3) равенству нулю относительного удлинения в точке A линейного элемента, направленного вдоль образующей AC

$$\varepsilon_{m'}^{(2)} = 0. \quad (4.114)$$

С введением обозначений

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}, \quad E_1 / E_2 = e \quad (4.115)$$

равенства (4.112) – (4.114) через напряжения запишутся системой уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11}^{(1)} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} \cos 2\alpha + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\sigma_{11}^{(1)} - e\sigma_{11}^{(2)} - (\nu_1 - e\nu_2)\sigma_{22} = (\omega_2 - \omega_1)\Delta T E_1,$$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) + \sigma_{12}(1 + \nu_2)\sin 2\beta + \sigma_{22}(\sin^2 \beta - \nu_2 \cos^2 \beta) = -\omega_2 \Delta T E_2.$$

Уравнения (4.116) представляют собой замкнутую систему относительно параметров $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{11}^{(2)}$, σ_{12} , σ_{22} .

Задача состоит в исследовании вариантов решений уравнений (4.116) в зависимости от материальных и геометрических параметров элементов 1, 2, а также в зависимости от параметров нагрузки. Такие решения считаются задаваемыми ограничениями на параметры состояния в особых точках. Они

определяют постановку соответствующей задачи механики деформируемого тела и ее тип (классическая или неклассическая).

4.5.2. Общее исследование системы уравнений (4.116)

Определитель Δ матрицы системы уравнений (4.116) зависит от пяти безразмерных параметров: $\alpha, \beta, \nu_1, \nu_2, e$:

$$\Delta = e \left[(\sin^2 \beta - \nu_2 \cos^2 \beta) \sin^2 \alpha - (1 + \nu_2) \sin 2\beta \sin \alpha \cos \alpha \right] + \left[\cos^2 \alpha - (\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha \right] (\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta). \quad (4.117)$$

Если сочетание указанных параметров не обращает в нуль определитель (4.117), уравнения (4.116) имеют единственное решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (4.118)$$

где Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) вычисляются по формулам

а) при температурной нагрузке:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left[(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) (\omega_2 - \omega_1) - \omega_2 \right] \Delta T E_1 \cos^2 \alpha, \\ \Delta_2 &= \left[0.5(1 + \nu_2) \sin 2\beta \sin 2\alpha - (\sin^2 \beta - \nu_2 \cos^2 \beta) \sin^2 \alpha \right] (\omega_2 - \omega_1) \Delta T E_1 - \\ &\quad - \left[\cos^2 \alpha - (\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha \right] \omega_2 \Delta T E_2, \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$\Delta_3 = \left[\omega_2 - (\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) (\omega_2 - \omega_1) \right] \Delta T E_1 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\Delta_4 = \left[(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) (\omega_2 - \omega_1) - \omega_2 \right] \Delta T E_1 \sin^2 \alpha;$$

б) при силовой нагрузке:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left[\nu_1 \cos^2 \beta - (e + \nu_1 \nu_2 - e\nu_2^2) \sin^2 \beta \right] (p_n \cos 2\alpha + \tau_n \sin 2\alpha) - \\ &\quad - e(1 + \nu_2) \sin 2\beta \cos \alpha (p_n \sin \alpha - \tau_n \cos \alpha), \\ \Delta_2 &= (1 + \nu_2) \sin 2\beta \{ p_n (\nu_1 - e\nu_2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_n [(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \} - \\ &\quad - (\sin^2 \beta - \nu_2 \cos^2 \beta) (p_n \cos 2\alpha + \tau_n \sin 2\alpha), \\ \Delta_3 &= -(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) \{ p_n (\nu_1 - e\nu_2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_n [(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \} + \\ &\quad + e(\sin^2 \beta - \nu_2 \cos^2 \beta) \sin \alpha (p_n \cos \alpha + \tau_n \sin \alpha), \\ \Delta_4 &= p_n [(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \nu_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta] + \\ &\quad + \tau_n [(\cos^2 \beta - \nu_2 \sin^2 \beta) \sin 2\alpha - e(1 + \nu_2) \sin^2 \alpha \sin 2\beta]. \end{aligned} \quad (4.120)$$

В рассматриваемом случае ($\Delta \neq 0$) в элементарных объемах, примыкающих к вершине клина, заданы все компоненты напряжений, НДС здесь полностью известно. Поэтому задача механики деформируемого твердого тела оказывается неклассической. В случае, когда определитель (4.117)

обращается в нуль, а ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы одинаковы, количество независимых ограничений на компоненты напряжений в особых точках при вершине клина равно общему рангу. Если ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы различны, уравнения (4.116) несовместны. В этом случае сочетания параметров $\alpha, \beta, \nu_1, \nu_2, e$, обращающие в нуль определитель Δ , являются критическими, так как с приближением параметров к таким сочетаниям напряжения в особой точке неограниченно возрастают.

4.5.3. Частные случаи соединения элементов

Рассматриваются наиболее интересные (по мнению авторов) варианты геометрических параметров вблизи вершины клина: $\alpha = \beta$, $\alpha + \beta = \pi/2$, $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha + \beta = 2\pi$.

4.5.3.1. $\alpha = \beta (0 < \alpha \leq \pi)$

Определитель (4.117) приводится к виду

$$\Delta = a \sin^4 \alpha + b \sin^2 \alpha + 1, \quad (4.121)$$

где

$$a = (1 + \nu_2)[e(3 - \nu_2) + 1 + \nu_1],$$

$$b = -[(1 + \nu_2)(2e + 1) + 1 + \nu_1].$$

Коэффициенты a и b знакопостоянные ($a > 0, b < 0$), поэтому уравнение

$$\Delta = 0 \quad (4.122)$$

всегда биквадратное. Изучим существование корней уравнения (4.122) в зависимости от материальных параметров. Его дискриминант $D = b^2 - 4a$ обращается в нуль, когда параметры ν_1, ν_2, e связаны равенствами

$$e_{1,2} = \frac{1 - \nu_1 - 2\nu_2 \mp \sqrt{(2\nu_1 + \nu_2 - 1)(3\nu_2 - 1)}}{2(1 + \nu_2)}. \quad (4.123)$$

Положительные значения параметры $e_{1,2}$, определяемые равенствами (4.123), при допустимых коэффициентах Пуассона ($0 < \nu_1 < 0.5, 0 < \nu_2 < 0.5$) принимают в области

$$\nu_2 < \frac{1}{3}, \quad \nu_2 < 1 - 2\nu_1. \quad (4.124)$$

Здесь (в области (4.124) равенства (4.123) в прямоугольных координатах ν_1, ν_2, e представляют собой поверхности $e_i = e_i(\nu_1, \nu_2), (i = 1, 2)$, расположенные друг над другом. В точках поверхностей (4.123) уравнение (4.122) имеет

кратные положительные, удовлетворяющие условию $\sin^2 \alpha \leq 1$, корни. При фиксированных v_1, v_2 из области (4.124) возможные значения, принимаемые параметром e вне поверхностей (4.123), представим тремя промежутками:

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 \leq e \leq e_1(v_1, v_2), \quad 2) \quad e_1(v_1, v_2) < e < e_2(v_1, v_2), \quad (4.125) \\ 3) \quad e \geq e_2(v_1, v_2). \end{aligned}$$

С использованием пакета Mathematica установлено, что уравнение (4.122) имеет действительные различные положительные корни, удовлетворяющие условию $\sin^2 \alpha \leq 1$, при изменении параметра e лишь в первом и третьем из интервалов (4.125). Вне области (4.124) при допустимых значениях v_1, v_2 дискриминант D положителен при любых положительных e . Корни уравнения (4.122)

$$(\sin^2 \alpha)_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a \quad (4.126)$$

положительны и удовлетворяют условию $(\sin^2 \alpha)_{1,2} \leq 1$. В итоге: уравнение (4.122) в каждой точке множества $0 < v_1 < 0.5, 0 < v_2 < 0.5$ при любом e , кроме области

$$e_1(v_1, v_2) < e < e_2(v_1, v_2), \quad v_2 < \frac{1}{3}, \quad v_2 < 1 - 2v_1, \quad (4.127)$$

имеет четыре корня

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \arcsin(\sin \alpha)_1, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1, \quad (4.128) \\ \alpha_3 = \arcsin(\sin \alpha)_2, \quad \alpha_4 = \pi - \alpha_3. \end{aligned}$$

В области изменения материальных параметров (4.127) уравнение (4.122) корней не имеет. В точках $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$ (4.128), являющихся корнями уравнения $\Delta = 0$, ранг матрицы системы (4.116) становится меньше четырех. Поэтому решение этих уравнений будет зависеть от ранга расширенной матрицы.

а) Температурная нагрузка. Определители Δ_i (4.119) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [(\cos^2 \alpha - v_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \cos^2 \alpha, \\ \Delta_2 &= [0.5(1 + v_2) \sin^2 2\alpha + (\sin^2 \alpha - v_2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha](\omega_2 - \omega_1) \Delta T E_1 - \\ &\quad - [\cos^2 \alpha + (v_1 - e v_2) \sin^2 \alpha] \omega_2 \Delta T E_2, \\ \Delta_3 &= [\omega_2 - (\cos^2 \alpha - v_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1)] \Delta T E_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \Delta_4 &= [(\cos^2 \alpha - v_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Определители (4.129) одновременно обращаются в нуль только при отсутствии температурной нагрузки ($\Delta T = 0$). Поэтому при $\alpha \neq \alpha_i, (i=1,2,3,4)$ уравнения (4.116) имеют единственное решение вида (4.118), где Δ вычисляется по формуле (4.121), а $\Delta_i, (i=1,2,3,4)$ – по формулам (4.129). Когда α равно какому-либо из значений α_i (4.128) и $\Delta T \neq 0$, уравнения (4.116) несовместны. В этом

случае углы α_i соединения элементов являются критическими, так как при таких углах параметры состояния в вершине клина оказываются бесконечно большими. Если $\alpha = \alpha_i$ и $\Delta T = 0$, между напряжениями в особой точке справедливы зависимости

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \sigma_{11}^{(2)} = \frac{1}{e} \sigma_{22} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1 + e\nu_2), \sigma_{12} = -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.130)$$

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в вершине клина приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке при температурной нагрузке

	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	Параметры e, ν_1, ν_2 принадлежат множеству (4.127)	1. Формулы вида (4.118) где Δ – из (4.21), Δ_i – из (4.129) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Восемь
2	1. Параметры e, ν_1, ν_2 не принадлежат множеству (4.127) 2. α не входит в список (4.128)	1. Формулы вида (4.118) где Δ – из (4.21), Δ_i – из (4.129) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Восемь
3	1. Параметры e, ν_1, ν_2 не принадлежат множеству (4.127). 2. α входит в список (4.128) 3. $\Delta T = 0$	1. Формулы вида (4.130) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Семь
4	1. Параметры e, ν_1, ν_2 не принадлежат множеству (4.127). 2. α входит в список (4.128) 3. $\Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	

б) Силовая нагрузка. Определители $\Delta_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ (4.120) запишем равенствами

$$\Delta_i = p_n \Phi_i + \tau_n \Psi_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.131)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= [\nu_1 \cos^2 \alpha - (e + \nu_1 \nu_2 - e\nu_2^2) \sin^2 \alpha] \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \nu_2) \sin^2 2\alpha, \\ \Phi_2 &= 0.5(1 + \nu_2)(\nu_1 - e\nu_2 - 1) \sin^2 2\alpha - (\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \cos 2\alpha, \\ \Phi_3 &= -(\nu_1 - e\nu_2 - 1)(\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha + e(\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \Phi_4 &= (\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \nu_2) \sin^2 2\alpha, \\ \Psi_1 &= [\nu_1 \cos^2 \alpha - (e + \nu_1 \nu_2 - e\nu_2^2) \sin^2 \alpha] \sin 2\alpha + e(1 + \nu_2) \sin 2\alpha \cos^2 \alpha, \\ \Psi_2 &= (1 + \nu_2)[(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \sin 2\alpha - (\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha, \\ \Psi_3 &= -[(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha](\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) + e(\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\psi_4 = (\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha - e(1 + \nu_2) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

Когда угол соединения элементов α не совпадает с каким-либо из углов α_i (4.128), система уравнений (4.116) имеет единственное решение вида (4.118), в котором определитель Δ вычисляется по формуле (4.121), а $\Delta_i, (i=1,2,3,4)$ – по формулам (4.131). Количество ограничений в особой точке на компоненты напряжений равно шести. Если угол α совпадает с каким-либо из значений α_i (4.128), выполняются равенства

$$\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j. \quad (4.133)$$

Это означает, что равенства

$$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.134)$$

оказываются линейно зависимыми, т. е. являются одним соотношением, связывающим параметры нагрузки p_n, τ_n . При выполнении ограничения (4.134) на параметры нагрузки в точках α , ранги матрицы уравнений системы (4.116) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем, уравнения совместны. Напряжения в вершине клина связаны равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2\tau_n ctg \alpha + \sigma_{22} ctg^2 \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \frac{1}{e} [p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2\tau_n ctg \alpha + \sigma_{22}(ctg^2 \alpha - \nu_1 + e\nu_2)], \\ \sigma_{12} &= p_n ctg \alpha + \tau_n - \sigma_{22} ctg \alpha. \end{aligned} \quad (4.135)$$

С учетом равенств (4.115) в вершине клина имеется пять ограничений на компоненты напряжений. Если ограничения (4.134) при $\alpha = \alpha_i, (i=1,2,3,4)$ не выполняются, уравнения (4.116) несовместны. Углы α_i в этом случае оказываются критическими, так как компоненты напряжений в особой точке оказываются равными бесконечности.

4.5.3.2. $\alpha + \beta = \pi/2$

Определитель Δ системы уравнений (4.116) принимает вид

$$\Delta = a \sin^4 \alpha + b \sin^2 \alpha - \nu_2, \quad (4.136)$$

$$\text{где } a = (1 + \nu_2)[e(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)],$$

$$b = (1 + \nu_2)[1 - e(1 + \nu_2)] + \nu_2(1 + \nu_1).$$

При изменении материальных параметров ν_1, ν_2, e на множестве

$$0 < \nu_1 < 0.5, \quad 0 < \nu_2 < 0.5, \quad 0 < e \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{1 + \nu_2} \right)^2 \quad (4.137)$$

уравнение $\Delta = 0$ имеет два действительных положительных корня

$$(\sin^2 \alpha)_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a, \quad D = b^2 - 4a, \text{ удовлетворяющих условию } (\sin^2 \alpha)_{1,2} \leq 1.$$

С учетом изменения угла α ($0 < \alpha < \pi/2$) в каждой точке множества (4.137) существуют два угла:

$$\alpha_1 = \arcsin(\sin \alpha)_1, \quad \alpha_2 = \arcsin(\sin \alpha)_2, \quad (4.138)$$

при которых определитель (4.136) обращается в нуль.

а) Температурная нагрузка.

Определители (4.131) в рассматриваемом случае запишутся равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [(\sin^2 \alpha - v_2 \cos^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \cos^2 \alpha, \\ \Delta_2 &= [0.5(1 + v_2) \sin^2 2\alpha + (\cos^2 \alpha - v_2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha] (\omega_2 - \omega_1) \Delta T E_1 - \\ &\quad - [\cos^2 \alpha + (v_1 - e v_2) \sin^2 \alpha] \omega_2 \Delta T E_2, \\ \Delta_3 &= [\omega_2 - (\sin^2 \alpha - v_2 \cos^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1)] \Delta T E_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \Delta_4 &= [(\sin^2 \alpha - v_2 \cos^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Определители (4.139) одновременно обращаются в нуль лишь при отсутствии температурной нагрузки ($\Delta T = 0$). Поэтому возможны следующие случаи ограничений на параметры состояния в вершине клина:

1) $\Delta T \neq 0$, $\alpha \neq \alpha_i$, ($i=1,2,3,4$), где α_i определяются равенством (4.138).

Система уравнений (4.116) имеет единственное решение вида (4.118), в котором Δ вычисляется по формуле (4.136), а Δ_i , ($i=1,2,3,4$) – по формулам (4.139);

2) $\Delta T \neq 0$, $\alpha = \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.138). Система уравнений (4.116) несовместна. Значение $\alpha = \alpha_i$ является критическим;

3) $\Delta T = 0$, $\alpha \neq \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.138). Все напряжения в вершине клина обращаются в нуль;

4) $\Delta T = 0$, $\alpha = \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.138). Между напряжениями в вершине клина справедливы зависимости

$$\sigma_{11}^{(2)} = -\frac{\sigma_{11}^{(1)}}{e} [(v_1 - e v_2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 1], \quad \sigma_{12} = -\sigma_{11}^{(1)} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{11}^{(1)} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Всего, с учетом равенств (4.115), имеется пять ограничений. Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в вершине клина приведены в таблице 4.13.

Таблица 4.13

Ограничения на компоненты напряжений в особых точках при температурной нагрузке

	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
1	Параметры e, ν_1, ν_2 принадлежат множеству (4.137)	1. Формулы вида (4.118) где Δ – из (4.136) Δ_i – из (4.139) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Восемь
	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения на напряжения	Количество ограничений
2	1. Параметры e, ν_1, ν_2 принадлежат множеству (4.137). 2. α не входит в список (4.138)	1. Формулы вида (4.118) где Δ – из (4.136) Δ_i – из (4.139) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Восемь
3	1. Параметры e, ν_1, ν_2 принадлежат множеству (4.137). 2. α входит в список (4.138). 3. $\Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	
4	1. Параметры e, ν_1, ν_2 принадлежат множеству (4.137). 2. α входит в список (4.138). 3. $\Delta T = 0$	$\sigma_{11}^{(2)} = -\frac{\sigma_{11}^{(1)}}{e}[(\nu_1 - e\nu_2)tg^2\alpha - 1],$ $\sigma_{12} = -\sigma_{11}^{(1)}ctg\alpha,$ $\sigma_{22} = \sigma_{11}^{(1)}ctg^2\alpha.$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$	Семь

б) Силовая нагрузка.

Определители (4.120) запишем равенствами вида (4.131), в которых φ_i, ψ_i ($i=1,2,3,4$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [\nu_1 \sin^2 \alpha - (e + \nu_1 \nu_2 - e\nu_2^2) \cos^2 \alpha] \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \nu_2) \sin^2 2\alpha, \\ \varphi_2 &= 0.5(1 + \nu_2)(\nu_1 - e\nu_2 - 1) \sin^2 2\alpha - (\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha, \\ \varphi_3 &= -(\nu_1 - e\nu_2 - 1)(\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha + e(\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \varphi_4 &= (\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \nu_2) \sin^2 2\alpha, \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [\nu_1 \sin^2 \alpha - (e + \nu_1 \nu_2 - e\nu_2^2) \cos^2 \alpha] \sin 2\alpha + e(1 + \nu_2) \sin 2\alpha \cos^2 \alpha, \\ \psi_2 &= (1 + \nu_2)[(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \sin 2\alpha - (\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha, \\ \psi_3 &= -[(\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha](\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) + e(\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha, \\ \psi_4 &= (\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha - e(1 + \nu_2) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

В зависимости от материальных параметров ν_1, ν_2, e и параметров нагрузки p_n, τ_n возможны следующие случаи задания ограничений в вершине клина:

1) $\alpha \neq \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.138). Система уравнений (4.116) имеет единственное решение вида (4.118), в котором определитель Δ вычисляется по формуле (4.134), а определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) – по формулам (4.131), где φ_i, ψ_i определены равенствами (4.140);

2) $\alpha = \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.138). Функции $\varphi_i(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e), \psi_i(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e)$ (4.140) связаны зависимостями (4.133). Поэтому четыре равенства

$$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_j = 0 \quad (4.141)$$

попарно линейно зависимы, т.е. представляют собой одно независимое условие для параметров нагрузки, при котором все определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) обращаются в нуль. Следовательно,

а) если нагрузка удовлетворяет условию (4.141), ранг матрицы системы (4.116) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем, система (4.116) совместна. Параметры напряжений в вершине клина ограничены соотношениями

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{1}{e} \{ \sigma_{11}^{(1)} [1 - (\mathbf{v}_1 - e\mathbf{v}_2) \operatorname{tg}^2 \alpha] - (\mathbf{v}_1 - e\mathbf{v}_2) [p_n (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2\tau_n \operatorname{tg} \alpha] \},$$

$$\sigma_{12} = p_n \operatorname{tg} \alpha - \tau_n - \sigma_{11}^{(1)} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sigma_{22} = p_n (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2\tau_n \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{11}^{(1)} \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

б) если нагрузка не удовлетворяет условию (4.141), система уравнений (4.116) несовместна. Это означает, что угол $\alpha = \alpha_i$ соединения элементов конструкции является критическим, т.к. соответствующие параметры состояния в особой точке оказываются бесконечными.

4.5.3.3. $\alpha + \beta = \pi$

Определитель Δ системы уравнений (4.116) записывается равенством

$$\Delta = a \sin^4 \alpha + b \sin^2 \alpha + 1, \quad (4.142)$$

где $a = (1 + \mathbf{v}_2)[1 + \mathbf{v}_1 - e(1 + \mathbf{v}_2)]$,

$b = (1 + \mathbf{v}_2)(2e - 1) - (1 + \mathbf{v}_1)$.

Исследование уравнения $\Delta = 0$ показывает, что оно имеет два корня

$$(\sin^2 \alpha)_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a, \quad D = b^2 - 4a, \quad (4.143)$$

удовлетворяющие уравнению $\sin^2 \alpha \leq 1$ в области значений материальных параметров

$$0 < \mathbf{v}_1 < 0.5, \quad 0 < \mathbf{v}_2 < 0.5, \quad 0 < e \leq \left(\frac{1 + \mathbf{v}_1 - \sqrt{(1 + \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}}{2(1 + \mathbf{v}_2)} \right)^2, \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2. \quad (4.144)$$

Равенство (4.143) определяет четыре угла соединения элементов 1, 2 составного клина $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, при которых определитель матрицы системы уравнений (4.116) обращается в нуль:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 &= [(-b + \sqrt{D})/2a]^{1/2}, & \cos \alpha_1 &= (1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}, \\ \sin \alpha_2 &= \sin \alpha_1, & \cos \alpha_2 &= -(1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}, \\ \sin \alpha_3 &= [(-b - \sqrt{D})/2a]^{1/2}, & \cos \alpha_3 &= (1 - \sin^2 \alpha_3)^{1/2}, \\ \sin \alpha_4 &= \sin \alpha_3, & \cos \alpha_4 &= -(1 - \sin^2 \alpha_3)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.145}$$

а) Температурная нагрузка

Определители Δ_i (4.119) приводятся к равенствам

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= [(\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \cos^2 \alpha, \\ \Delta_2 &= [0.5(1 + \nu_2) \sin^2 2\alpha + (\sin^2 \alpha - \nu_2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha](\omega_2 - \omega_1) \Delta T E_1 - \\ &\quad - [\cos^2 \alpha + (\nu_1 - e\nu_2) \sin^2 \alpha] \omega_2 \Delta T E_2, \\ \Delta_3 &= [\omega_2 - (\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1)] \Delta T E_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \Delta_4 &= [(\cos^2 \alpha - \nu_2 \sin^2 \alpha)(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2] \Delta T E_1 \sin^2 \alpha.\end{aligned}\tag{4.146}$$

Определители (4.146) одновременно обращаются в нуль только при $\Delta T = 0$. Поэтому возможны следующие варианты ограничений на параметры состояния в вершине клина.

- 1) $\Delta T \neq 0, \alpha \neq \alpha_i$. α_i не определяется формулами (4.145). Уравнения (4.116) совместны. Напряжения в особой точке вычисляются по формулам вида (4.118), в которых Δ определяется равенством (4.142), а $\Delta_i, (i=1,2,3,4)$ – равенствами (4.146);
- 2) $\Delta T \neq 0, \alpha = \alpha_i$. α_i определяется формулами (4.145). Уравнения 4.116) несовместны. Углы $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$ соединения элементов оказываются критическими. Сочетания материальных параметров, отвечающие таким углам, приводят к бесконечным напряжениям в особых точках;
- 3) $\Delta T = 0, \alpha \neq \alpha_i$. α_i определяется формулами (4.145). Система уравнений (4.116) однородна, ее определитель не обращается в нуль. Все напряжения в вершине клина обращаются в нуль;
- 4) $\Delta T = 0, \alpha = \alpha_i$. α_i определяется формулами (4.145). Ранг матрицы системы уравнений (4.116) равен трем. Между напряжениями справедливы зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \frac{1}{e} [\sigma_{22} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1 + e\nu_2)], \\ \sigma_{12} &= -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}\tag{4.147}$$

б) Силовая нагрузка.

Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) (4.120) в рассматриваемом случае вычисляются по формулам вида (4.131), причем

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= [\mathbf{v}_1 \cos^2 \alpha - (e + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - e \mathbf{v}_2^2) \sin^2 \alpha] \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \mathbf{v}_2) \sin^2 2\alpha, \\
\varphi_2 &= -0.5(1 + \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 - e \mathbf{v}_2 - 1) \sin^2 2\alpha - (\sin^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \cos^2 \alpha) \cos 2\alpha, \\
\varphi_3 &= -(\mathbf{v}_1 - e \mathbf{v}_2 - 1)(\cos^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha + e(\sin^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha, \\
\varphi_4 &= (\cos^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha - 0.5e(1 + \mathbf{v}_2) \sin^2 2\alpha, \\
\psi_1 &= [\mathbf{v}_1 \cos^2 \alpha - (e + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - e \mathbf{v}_2^2) \sin^2 \alpha] \sin 2\alpha - e(1 + \mathbf{v}_2) \sin 2\alpha \cos^2 \alpha, \\
\psi_2 &= -(1 + \mathbf{v}_2)[(\mathbf{v}_1 - e \mathbf{v}_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \sin 2\alpha - (\sin^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha, \\
\psi_3 &= -[(\mathbf{v}_1 - e \mathbf{v}_2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha](\cos^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \sin^2 \alpha) + e(\sin^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha, \\
\psi_4 &= (\cos^2 \alpha - \mathbf{v}_2 \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha + e(1 + \mathbf{v}_2) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha.
\end{aligned} \tag{4.148}$$

Непосредственно проверкой убеждаемся, что в точках $\alpha = \alpha_i$ ($i=1,2,3,4$) (4.145) для функций (4.148) выполняются равенства (4.133). Это говорит о том, что при таких значениях α равенства

$$p_n \varphi_i + \tau_n \psi_j = 0, \quad i=1,2,3,4 \tag{4.149}$$

представляют собой попарно линейно зависимую систему уравнений относительно параметров нагрузки p_n, τ_n . То есть четыре равенства (4.149) совпадают и являются ограничением на p_n, τ_n , обеспечивающем совместность уравнений (4.116) при значениях $\alpha = \alpha_i$ ($i=1,2,3,4$). Поэтому возможны такие варианты ограничений на компоненты напряжений в особой точке.

- 1) $\alpha \neq \alpha_i$, α_i определяется по формулам (4.145). Система уравнений (4.116) имеет единственное решение вида (4.118), в котором определитель Δ вычисляется по формуле (4.142), а определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) – равенствами вида (4.131), где φ_i, ψ_i определены равенствами (4.148);
- 2) $\alpha = \alpha_i$, α_i определяется равенством (4.145). Если нагрузка удовлетворяет условиям (4.149), уравнения (4.116) совместны. Между напряжениями справедливы зависимости

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(1)} &= p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2\tau_n ctg \alpha + \sigma_{22} ctg^2 \alpha, \\
\sigma_{11}^{(2)} &= \frac{1}{e} [p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2\tau_n ctg \alpha + \sigma_{22}(ctg^2 \alpha - \mathbf{v}_1 + e \mathbf{v}_2)], \\
\sigma_{12} &= p_n ctg \alpha + \tau_n - \sigma_{22} ctg \alpha.
\end{aligned} \tag{4.150}$$

При не выполнении условий (4.149) сочетания материальных параметров $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e$, отвечающие углам $\alpha = \alpha_i$ ($i=1,2,3,4$), являются критическими, т.к. соединение элементов 1,2 с такими углами при нагрузке p_n, τ_n приведет к возникновению в вершине клина бесконечных напряжений.

4.5.3.4. $\alpha + \beta = 2\pi$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (4.116) совпадает с определителем (4.142). Следовательно, решение уравнения $\Delta = 0$ имеет вид (4.143) и существует в области материальных параметров, ограниченной условиями (4.144). Равенство (4.143) в данном случае определяет восемь углов α_i , обращающих в нуль определитель. Это углы (4.145) и дополнительно

$$\begin{aligned}\sin \alpha_5 &= -[(-b + \sqrt{D})/2a]^{1/2}, & \cos \alpha_5 &= (1 - \sin^2 \alpha_5)^{1/2}, \\ \sin \alpha_6 &= \sin \alpha_5, & \cos \alpha_6 &= -(1 - \sin^2 \alpha_5)^{1/2}, \\ \sin \alpha_7 &= -[(-b - \sqrt{D})/2a]^{1/2}, & \cos \alpha_7 &= (1 - \sin^2 \alpha_7)^{1/2}, \\ \sin \alpha_8 &= \sin \alpha_7, & \cos \alpha_8 &= -(1 - \sin^2 \alpha_7)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.151}$$

Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) (4.119) при температурной нагрузке и (4.120) при силовой нагрузке совпадают с соответствующими определителями рассмотренного в п. 3.3 случая $\alpha + \beta = \pi$, Равенства (4.133) оказываются справедливыми и для углов $\alpha = \alpha_i$ ($i=5,6,7,8$) (4.151). Поэтому результаты предыдущего пункта относительно вариантов ограничений на параметры состояния в вершине клина оказываются справедливыми и в данном случае с единственной поправкой – количество углов α_i в рассматриваемом случае равно восьми.

5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА ОДНОРОДНОГО УПРУГО ТЕЛА

Классический (асимптотический) подход к изучению параметров состояния в окрестности точек ребра однородного упругого тела используется авторами работ [7, 13, 17, 39, 42, 43, 51, 53, 56, 59, 75 и др.]. Здесь сформулированная задача рассматривается на основе представления точки ребра в виде точки континуума и связанного с ней элементарного объема (неклассический подход). Изучены различные варианты внешних воздействий на ребро. В зависимости от сочетания геометрических параметров, материальных характеристик и параметров нагрузки строятся задаваемые ограничения на компоненты напряжений и деформаций в точках ребра. Устанавливаются соответствующие постановки задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

5.1. Постановка задачи об исследовании задаваемых в точках ребра однородного упругого тела ограничений на параметры состояния

Под пространственным ребром Γ понимается линия, образованная пересечением двух различных граничных поверхностей 1, 2 элементов конструкции.

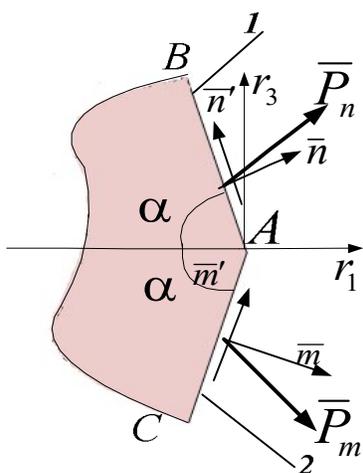


Рис.5.1. Нормальное сечение ребра

Орт \bar{r}_2 – по касательной к ребру Γ , а орт \bar{r}_3 так, чтобы векторы $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ образовывали правую тройку. С построенными ортами связываем декартову систему координат $A x_1, x_2, x_3$. Считается, что орты \bar{n}, \bar{m} , восстановленные к поверхностям 1, 2 в точке A , принадлежат нормальной плоскости ребра Γ . Через \bar{n}', \bar{m}' обозначены орты, перпендикулярные соответственно векторам \bar{n}, \bar{m} и

В произвольной точке A ребра Γ строится его нормальное сечение (рис. 5.1) и вводится ортонормированный базис $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$. Орт \bar{r}_1 направлен во внешнюю сторону от рассматриваемого тела по биссектрисе угла 2α ($0 < \alpha \leq \pi$), образованного в нормальной плоскости касательными в точке A к линиям, получающимся в пересечении этой плоскости с поверхностями, образующими ребро.

орту \bar{r}_2 . Сохраняются принятые ранее обозначения. Кроме того, полагается: τ_{n2} – составляющие вектора касательных напряжений на поверхности 1 по направлению \bar{r}_2 ; τ_{m2} – составляющие вектора касательных напряжений на поверхности 2 по направлению \bar{r}_2 ; $\bar{p}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}' + \xi_n \bar{r}_2$ – заданный вектор напряжений на поверхности 1; $\bar{p}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{m}' + \xi_m \bar{r}_2$ – заданный вектор напряжений на поверхности 2.

В соответствии с принятой концепцией параметры состояния в точках ребра Γ (особых точках) отождествляются с параметрами состояния элементарных объемов, содержащих такие точки. В связи с этим задача состоит в формулировке ограничений на параметры состояния элементарных объемов, примыкающих к ребру Γ , при различных взаимодействиях образующих его поверхностей с внешней средой и изучении влияния материальных и геометрических параметров элементов конструкции, а также параметров нагрузки на такие ограничения.

5.2. Ребро, образующие которого свободны от нагрузок

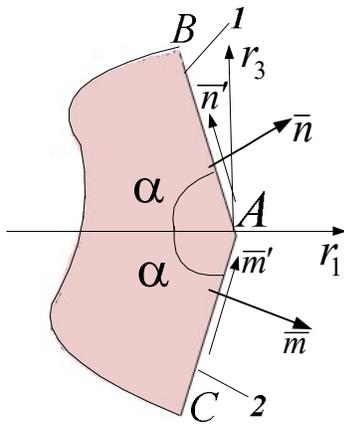


Рис.5.2. Нормальное сечение ребра со свободными от нагрузки образующими

Принимается, что поверхностные нагрузки на образующих ребра Γ (вблизи точки A) отсутствуют (рис. 5.2). Тогда в элементарном объеме, содержащем точку A на площадках, ориентированных ортами \bar{n}, \bar{m} , выполняются условия

$$\sigma_n = 0, \tau_n = 0, \tau_{n2} = 0, \quad (5.1)$$

$$\sigma_m = 0, \tau_m = 0, \tau_{m2} = 0$$

Через напряжения равенства (5.1) записываются двумя автономными системами уравнений (5.2) и (5.3):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha = 0,$$

$$\sigma_{12} \sin \alpha - \sigma_{32} \cos \alpha = 0. \quad (5.3)$$

Из матрицы системы четырех уравнений (5.2) относительно трех неизвестных $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$ строятся четыре различных определителя третьего порядка Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \sin^2 2\alpha, \quad \Delta_3 = -\Delta_4 = \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \quad (5.4)$$

которые одновременно обращаются в нуль в точках:

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi. \quad (5.5)$$

Определитель системы уравнений (5.3) $\Delta = -\sin 2\alpha$ также обращается в нуль в точках (5.5). Возможны следующие случаи решения систем уравнений (5.2), (5.3):

1) $\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$. Определители однородных систем (5.2), (5.3) не равны нулю, поэтому их решение $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0$. Эти значения напряжений считаются задаваемыми независимыми ограничениями в точках ребра. Количество ограничений избыточно, равно пяти. В классической задаче количество ограничений в обычной (не особой) точке поверхности равно трем;

2) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (5.2), (5.3) получается $\sigma_{11} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{12} = 0$. На напряжения в материальной точке A накладывается три независимых ограничения. Количество ограничений соответствует классическому случаю. Особая точка теряет свой статус, становится обычной точкой поверхности тела;

3) $\alpha = \pi$. Из уравнений (5.2), (5.3) следует $\sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{32} = 0$.

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в точках ребра приводятся в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Ограничения на напряжения в точках ребра

№	Условия на α	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0,$ $\sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0.$	Пять
2	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{11} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{12} = 0.$	Три
3	$\alpha \neq \pi$	$\sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{32} = 0.$	Три

5.3. Ребро, образующие поверхности которого нагружены поверхностными усилиями

Пусть образующие поверхности ребра Γ в окрестности точки A нагружены векторами напряжений \bar{p}_n и \bar{p}_m (рис. 5.1). Тогда в элементарном объеме, содержащем точку A , выполняются равенства

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_{n'} = \tau_n, \quad \tau_{n2} = \xi_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{m'} = \tau_m, \quad \tau_{m2} = \xi_m.$$

Записанные через напряжения, эти равенства образуют две автономные линейные неоднородные системы уравнений относительно напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$ и σ_{12}, σ_{32} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= p_m, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha = \tau_m.$$

$$\sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha = \xi_n,$$

$$\sigma_{12} \sin \alpha - \sigma_{32} \cos \alpha = \xi_m. \quad (5.7)$$

Матрицы систем уравнений (5.6), (5.7) совпадают соответственно с матрицами систем уравнений (5.2), (5.3), поэтому возможны следующие случаи решений уравнений (5.6), (5.7):

1) $\alpha \neq \pi/2, \quad \alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (5.6) равен трем. Для того чтобы в этом случае существовало решение, ранг расширенной матрицы системы также должен равняться трем. Это условие выражается равенством

$$(p_n - p_m) \cos 2\alpha + (\tau_n + \tau_m) \sin 2\alpha = 0. \quad (5.8)$$

Равенство (5.8) является ограничением на поверхностные нагрузки вблизи ребра Γ . Оно требует согласования приложенной нагрузки с условием симметричности тензора напряжений: проекция вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором \bar{n} , на направление \bar{m} должна быть равна проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором \bar{m} , на направление \bar{n} ($\bar{P}_n \cdot \bar{m} = \bar{P}_m \cdot \bar{n}$). При выполнении ограничения (5.8) уравнения (5.6) имеют единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_m - \tau_n) \operatorname{ctg} \alpha, & \sigma_{13} &= \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_n) + \frac{1}{2}(p_n - p_m) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Если ограничение (5.8) не выполняется, решение в рамках симметричной теории напряжений не существует. Ранг системы уравнений (5.7) равен двум, она имеет единственное решение:

$$\sigma_{12} = \frac{\xi_n + \xi_m}{2 \sin \alpha}, \quad \sigma_{32} = \frac{\xi_n - \xi_m}{2 \sin \alpha}. \quad (5.10)$$

Из равенств (5.9), (5.10) видно, что в точках ребра Γ при выполнении условий (5.8) задаваемое количество ограничений превышает количество ограничений в точке поверхности в классическом случае;

2) $\alpha = \pi/2$. Условием совместности уравнений (5.6), (5.7) служит ограничение на нагрузку

$$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m, \quad \xi_n = \xi_m. \quad (5.11)$$

При выполнении равенств (5.11) из уравнений (5.6), (5.7) следует $\sigma_{11} = p_n$, $\sigma_{13} = \tau_n$, $\sigma_{12} = \xi_n$. В элементарном объеме, содержащем точку A , задаются три независимых условия, что отвечает классическому случаю. Особая точка становится обыкновенной точкой поверхности;

3) $\alpha = \pi$. Уравнения (5.6), (5.7) совместны при ограничениях на нагрузку

$$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m, \quad \xi_n = -\xi_m. \quad (5.12)$$

В этом случае $\sigma_{33} = p_n$, $\sigma_{13} = -\tau_n$, $\sigma_{23} = -\xi_n$.

Возможные ограничения на компоненты напряжений в точках ребра приводятся в табл.5.2.

Таблица 5.2

Ограничения на напряжения в точках ребра

№	Условия на α и нагрузку	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$. Выполняется условие (5.8)	Формулы (5.9), (5.10)	Пять
2	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$. Не выполняется условие (5.8)	Ограничения несовместны	
3	$\alpha = \pi/2$. Выполняются условия (5.11)	$\sigma_{11} = p_n$, $\sigma_{13} = \tau_n, \sigma_{12} = \xi_n$.	Три
4	$\alpha = \pi$. Выполняются условия (5.12)	$\sigma_{33} = p_n, \sigma_{13} = -\tau_n$, $\sigma_{23} = -\xi_n$.	Три
5	$\alpha = \pi$. Не выполняются условия (5.12)	Ограничения несовместны	

5.4. Ребро, одна из образующих поверхностей которого жестко закреплена, а другая свободна от нагрузки

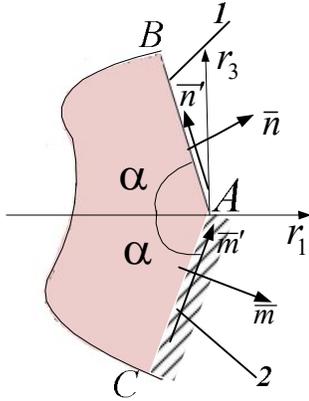


Рис.5.3. Нормальное сечение ребра со свободной от нагрузки и заземленной образующими

Принимается, что образующая поверхность 1 свободна от нагрузки, а образующая поверхность 2 жестко закреплена (рис.5.3). Из этого следует, что в элементарном объеме, содержащем точку ребра, на площадке, ориентируемой ортом \bar{n} , обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_n = 0 \quad \tau_{n'} = 0 \quad \tau_{n2} = 0. \quad (5.13)$$

На площадке, ориентируемой ортом \bar{m} , равны нулю относительные удлинения любых волокон и сдвиги между любыми направлениями. Это равносильно соотношениям:

$$\varepsilon_{ij} m'_i m'_j = 0 \quad \varepsilon_{ij} n_{2i} n_{2j} = 0 \quad \varepsilon_{ij} m'_i n_{2j} = 0. \quad (5.14)$$

Равенства (5.13), (5.14), выраженные через напряжения, для линейно-термоупругого тела запишутся двумя автономными системами уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{33} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) - \nu \sigma_{22} &= -\omega E \Delta T, \\ -\nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{33} + \sigma_{22} &= -\omega E \Delta T. \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{32} \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Определитель $\Delta = \cos^2 2\alpha - \nu$ системы уравнений (5.15) для значений ν из интервала $(0; 0,5)$ обращается в нуль в четырех точках α_i , $(i=1,2,3,4)$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\nu}}{2}} & \cos \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\nu}}{2}}, \quad (0 < \alpha_1 < \pi/4), \\ \sin \alpha_2 &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\nu}}{2}} & \cos \alpha_2 &= -\sqrt{\frac{1+\sqrt{\nu}}{2}}, \quad (3\pi/4 < \alpha_2 < \pi), \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\nu}}{2}} & \cos \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\nu}}{2}}, \quad (\pi/4 < \alpha_3 < \pi/2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\sin \alpha_4 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\nu}}{2}} \quad \cos \alpha_4 = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{\nu}}{2}}, (\pi/2 < \alpha_4 < 3\pi/4).$$

Определитель матрицы системы уравнений (5.16) обращается в нуль в точках

$$\alpha = \pi/4, \quad \alpha = 3\pi/4. \quad (5.18)$$

Возможные следующие случаи решений уравнений (5.15), (5.16):

1) угол α не определяется равенствами (5.17) или (5.18), ранг матрицы системы уравнений (5.15) равен четырем. Она имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{\omega E \Delta T \cos^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu}, & \sigma_{13} &= -\frac{\omega E \Delta T \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\omega E \Delta T \sin^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu}, & \sigma_{22} &= \frac{\omega E \Delta T \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Уравнения (5.16) имеют тривиальное решение

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{32} = 0. \quad (5.20)$$

Равенствами (5.19), (5.20) напряженное состояние в точках ребра полностью определено. Кроме этих условий в точке A задаются ограничения на перемещения;

2) пусть α принимает какое-либо из значений (5.17). Эти значения при $\nu \neq 0$ не совпадают с точками (5.18). При отсутствии температурной нагрузки ($\Delta T = 0$) система уравнений (5.15) совместна. Между напряжениями для любого из $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$ справедливы зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{33} \operatorname{ctg}^2 \alpha$, $\sigma_{13} = -\sigma_{33} \operatorname{ctg} \alpha$, $\sigma_{22} = \nu \sigma_{33} / \sin^2 \alpha$. Напряжения σ_{12} и σ_{32} определяются равенствами (5.20). При наличии температурной нагрузки ($\Delta T \neq 0$) ранг расширенной матрицы системы уравнений (5.15) оказывается равным четырем, что больше ранга матрицы системы. Поэтому система уравнений (5.15) несовместна. Это означает, что в случае, когда угол α стремится к какому-либо из значений $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}, \sigma_{22}$ в элементарном объеме, содержащем точку A , неограниченно возрастают. Следовательно, сочетание геометрических и материальных параметров деформируемого тела, определяемое равенствами (5.17), оказывается критическим для температурной нагрузки;

3) $\alpha = \pi/4$. На напряжения в элементарном объеме, примыкающем к точке A , накладываются следующие ограничения: решение (5.19) системы уравнений (5.15) и зависимость между напряжениями σ_{12}, σ_{32} : $\sigma_{12} = -\sigma_{32}$, вытекающая из уравнений (5.16);

4) $\alpha = 3\pi/4$. В особой точке A уравнения (5.15) имеют решение (5.19). Из уравнений (5.16) следует зависимость $\sigma_{12} = \sigma_{32}$.

Варианты возможных ограничений на напряжения в особой точке приводятся в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Ограничения на компоненты напряжений в материальной точке А

№	Условия на $\alpha, \Delta T$	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	α не входит в список (5.17), $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq 3\pi/4$	Формулы (5.19), (5.20)	Восемь
2	α входит в список (5.17), $\Delta T = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{33} \operatorname{ctg}^2 \alpha,$ $\sigma_{13} = -\sigma_{33} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{22} = \nu \sigma_{33} / \sin^2 \alpha,$ $\sigma_{12} = 0, \sigma_{32} = 0$	Семь
3	α входит в список (5.17), $\Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	
4	$\alpha = \pi/4$	Формулы (5.19), $\sigma_{12} = -\sigma_{32}$	Семь
5	$\alpha = 3\pi/4$	Формулы (5.19), $\sigma_{12} = \sigma_{32}$	Семь

5.5. Ребро, одна из образующих которого жестко закреплена, а другая нагружена

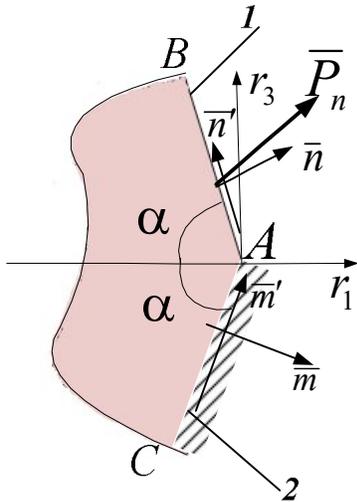


Рис.5.4. Нормальное сечение ребра с закрепленной и нагруженной образующими

Принимается, что образующая поверхность 1 вблизи вершины ребра нагружена поверхностными усилиями \bar{p}_n , а образующая поверхность 2 жестко закреплена (рис. 5.4). Эти ограничения с использованием установленных в предыдущем пункте равенств (5.14) для линейно-упругого тела в напряжениях запишутся двумя системами уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= p_n, \\
 -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\
 \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{33} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) - \nu \sigma_{22} &= 0, \\
 -\nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{33} + \sigma_{22} &= 0, \\
 \sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_n,
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{32} \sin \alpha = 0. \quad (5.22)$$

Определитель матрицы системы уравнений (5.21) $\Delta = \cos^2 2\alpha - \nu$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при значениях $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, определяемых равенствами (5.17). Определитель системы уравнений (5.22) обращается в нуль в точках (5.18). Возможны следующие случаи решений уравнений (5.21), (5.22):

1) угол α не совпадает с каким-либо из углов $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, определяемых формулами (5.17), (5.18). Определители систем уравнений (5.21), (5.22) не обращаются в нуль. Уравнения имеют единственное решение:

$$\sigma_{11} = \frac{p_n[(\nu - \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha - 0.5 \sin^2 2\alpha] + \tau_n[\cos 2\alpha - \nu] \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu},$$

$$\sigma_{13} = \frac{p_n(1 - 2\nu) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_n(\nu - 1) \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu}, \quad (5.23)$$

$$\sigma_{33} = \frac{p_n[(\cos^2 \alpha - \nu) \cos 2\alpha - 0.5 \sin^2 2\alpha] + \tau_n[\cos 2\alpha - \nu] \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu},$$

$$\sigma_{22} = \frac{p_n \nu \cos 4\alpha + \tau_n \nu \sin 4\alpha}{\cos^2 2\alpha - \nu},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\xi_n \sin \alpha}{\cos 2\alpha}, \quad \sigma_{23} = \frac{\xi_n \cos \alpha}{\cos 2\alpha}$$

На напряжения в особой точке накладываются шесть ограничений (5.23).

2) если угол α совпадает с каким-либо из углов (5.17), ранг системы уравнений (5.21) становится равным трем. Для того чтобы вычислить ранг расширенной матрицы, строятся четыре определителя, получающиеся путем последовательной замены столбцов матрицы системы (5.21) столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = p_n f_i(\nu) + \tau_n \phi_i(\nu), \quad (i=1,2,3,4). \quad (5.24)$$

Здесь введены обозначения:

$$f_1(\nu) = (\nu - \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha - 0.5 \sin^2 2\alpha, \quad \phi_1(\nu) = (\nu + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha,$$

$$f_2(\nu) = (1 - 2\nu) \sin \alpha \cos \alpha, \quad \phi_2(\nu) = (\nu - 1) \cos 2\alpha,$$

$$f_3(\nu) = (\cos^2 \alpha - \nu) \cos 2\alpha - 0.5 \sin^2 2\alpha, \quad \phi_3(\nu) = (\cos 2\alpha - \nu) \sin 2\alpha,$$

$$f_4(\nu) = \nu \cos 4\alpha, \quad \phi_4(\nu) = \nu \sin 4\alpha.$$

Представление (5.24) для определителей $\Delta_i (i=1,2,3,4)$ справедливо для каждого из углов $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$, определяемых равенствами (5.17). Ранг расширенной матрицы системы уравнений (5.21) будет равен трем, если все четыре определителя (5.24) для угла $\alpha_n, (n=1,2,3,4)$ обратятся в нуль. Это требование приводит к ограничениям на нагрузки:

$$p_n(2\nu-1)+2\tau_n\sqrt{\nu(1-\nu)}=0, \quad \text{для } \alpha_1, \alpha_4; \quad (5.25)$$

$$p_n(1-2\nu)+2\tau_n\sqrt{\nu(1-\nu)}=0, \quad \text{для } \alpha_2, \alpha_3.$$

При выполнении ограничений (5.25) ранг расширенной матрицы уравнений (5.21) равен трем. Между компонентами напряжений оказываются справедливыми зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_n(c \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) - 2\tau_n c \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{33} c \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ \sigma_{22} &= -\nu(p_n \cos 2\alpha + \tau_n \sin 2\alpha - \sigma_{33}) / \sin^2 \alpha, \\ \sigma_{13} &= (p_n - \sigma_{33}) \operatorname{ctg} \alpha + \tau_n, \end{aligned} \quad (5.26)$$

В этих равенствах угол α принимает значения (5.17) $\alpha_i, (i=1,2,3,4)$. Напряжения σ_{12} и σ_{23} в рассматриваемом случае заданы равенствами (5.23). Если ограничения (5.25) не выполняются, ранг расширенной матрицы системы уравнений (5.21) оказывается большим, чем ранг матрицы системы, ее решения не существует. Поэтому равенства (5.25) являются ограничениями на компоненты нагрузки, обеспечивающими корректность постановки рассматриваемой задачи;

3) $\alpha = \pi/4$. Из уравнений (5.21) находятся

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2\nu} p_n - \tau_n, & \sigma_{13} &= -\frac{1-2\nu}{2\nu} p_n, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2\nu} p_n + \tau_n, & \sigma_{22} &= p_n. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Условием совместности уравнений (5.22) служит ограничение на нагрузку

$$\xi_n = 0. \quad (5.28)$$

Напряжения σ_{12} и σ_{23} связаны зависимостью $\sigma_{12} = -\sigma_{23}$;

4) $\alpha = 3\pi/4$. Уравнения (5.21) имеют решение

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2\nu} p_n + \tau_n, & \sigma_{13} &= \frac{1-2\nu}{2\nu} p_n, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2\nu} p_n - \tau_n, & \sigma_{22} &= p_n. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Условием совместности уравнений (5.22) служит ограничение на нагрузку (5.28). Напряжения σ_{12} и σ_{23} связаны зависимостью $\sigma_{12} = \sigma_{23}$. Возможные ограничения на компоненты напряжений в элементарном объеме, содержащем точку А, приводятся в табл. 5.5.

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке А

№	Условия на α , \bar{p}_n	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	α не входит в список (5.17), $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq 3\pi/4$	Формулы (5.23)	Восемь
2	α входит в список (5.17), выполняются условия (5.25)	Формулы (5.26), $\sigma_{12} = -\frac{\xi_n \sin \alpha}{\cos 2\alpha}, \quad \sigma_{23} = \frac{\xi_n \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$	Семь
3	α входит в список (5.17), не выполняются условия (5.25)	Ограничения несовместны	
4	$\alpha = \pi/4, \xi_n = 0$	Формулы (5.27), $\sigma_{12} = -\sigma_{32}$	Семь
5	$\alpha = \pi/4, \xi_n \neq 0$	Ограничения несовместны	
6	$\alpha = 3\pi/4, \xi_n = 0$	Формулы (5.29), $\sigma_{12} = \sigma_{32}$	Семь
7	$\alpha = 3\pi/4, \xi_n \neq 0$	Ограничения несовместны	

5.6. Ребро, одна из образующих поверхностей которого свободна от нагрузки, а другая скользит без трения по жесткой поверхности

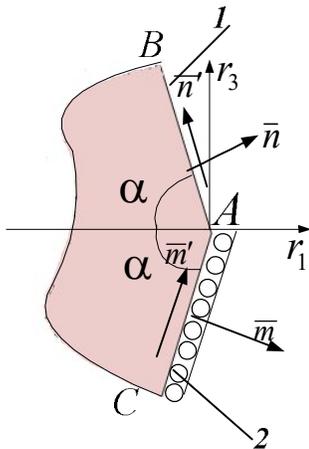


Рис.5.5. Нормальное сечение ребра с одной свободной от нагрузки образующей и скользящей без трения по жесткой поверхности другой

Пусть образующая поверхность 1 вблизи точки А свободна от нагрузки, а образующая поверхность 2 скользит без трения вдоль жесткой поверхности. В элементарном объеме, содержащем точку А, перемещения в направлении орта \bar{m} обращаются в нуль и заданы ограничения на поверхностные усилия $\sigma_n = 0$; $\tau_{n'} = 0$; $\tau_{n_2} = 0$; $\tau_{m'} = 0$; $\tau_{m_2} = 0$. Эти равенства с использованием компонент тензора напряжений образуют две автономные системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\
 -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\
 \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{13} \cos 2\alpha - \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{12} \sin \alpha - \sigma_{32} \cos \alpha &= 0.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Определитель $\Delta = \sin 2\alpha \cos 2\alpha$ системы уравнений (5.30) обращается в нуль на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ в точках

$$\alpha = \pi/4, \quad \alpha = \pi/2, \quad \alpha = 3\pi/4, \quad \alpha = \pi.\tag{5.32}$$

Определитель $\Delta' = \sin 2\alpha$ системы уравнений (5.31) обращается в нуль в точках

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi,\tag{5.33}$$

которые входят в список (5.32). Возможны следующие случаи решений уравнений (5.30), (5.31):

6) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$. Определители систем уравнений (5.30), (5.31) не обращаются в нуль, уравнения имеет лишь тривиальное решение $\sigma_{11} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$. Всего задается пять независимых ограничений на компоненты тензора напряжений в особой точке A ;

7) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (5.30) равен двум, поэтому два напряжения выражаются через третье $\sigma_{11} = \sigma_{33}; \quad \sigma_{13} = -\sigma_{33}$.

Определитель системы (5.31) отличен от нуля, решение этой системы тривиально $\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{23} = 0$;

3) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (5.30) определяются два напряжения

$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{13} = 0$. Уравнения (5.31) имеют определитель, равный нулю, откуда следует $\sigma_{12} = 0$. Всего оказываются заданными в особой точке A три независимых ограничения на компоненты тензора напряжений;

4) $\alpha = 3\pi/4$. Из уравнений (5.30) находим зависимости между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{33}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{33}$. Уравнения (5.31) имеют решение $\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{23} = 0$;

5) $\alpha = \pi$. В данном случае, как и в п.3), уравнения (5.30), (5.31) имеют решение $\sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{23} = 0$.

Возможные ограничения на компоненты напряжений в особой точке A приводятся в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Ограничения на параметры состояния в особой точке A

№	Условия на α	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	α не входит в список (5.32)	$\sigma_{11} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$	Шесть
2	$\alpha = \pi/4$	$\sigma_{11} = \sigma_{33}; \quad \sigma_{13} = -\sigma_{33};$ $\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{23} = 0$	Пять

№	Условия на α	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
3	$\alpha = \pi/2$.	$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{12} = 0;$ $u_1 = 0$	Четыре
4	$\alpha = 3\pi/4$.	$\sigma_{11} = \sigma_{33}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{33};$ $\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{23} = 0$	Пять
5	$\alpha = \pi$.	$\sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{23} = 0;$ $u_3 = 0$	Четыре

5.7. Ребро, одна из образующих поверхностей которого нагружена, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности

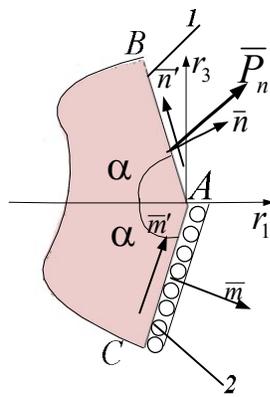


Рис. 5.6. Нормальное сечение ребра с нагруженной и скользящей без трения образующими

Принимается, что поверхность 1 ребра нагружена вблизи точки A поверхностными усилиями \bar{p}_n , а поверхность 2 скользит без трения по жесткой поверхности. Заданные условия на усилия в элементарном объеме, содержащем точку A , запишутся неоднородными уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{13} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{33} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) - \nu \sigma_{22} = 0.$$

$$\sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha = \xi_n,$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{32} \sin \alpha = 0. \quad (5.35)$$

Определитель $\Delta = \cos 2\alpha \sin 2\alpha$ матрицы системы (5.34) обращается в нуль в точках (5.32): $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = 3\pi/4$, $\alpha_4 = \pi$, а определитель $\Delta' = \sin 2\alpha$ матрицы системы (5.35) обращается в нуль в точках (5.33). Поэтому возможны такие варианты решений систем уравнений (5.34), (5.35):

2) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$. Уравнения (5.34), (5.35) имеют единственное решение

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= p_n + \frac{1}{2} \tau_n (tg 2\alpha - ctg \alpha), & \sigma_{13} &= -\frac{\tau_n}{2 \cos 2\alpha}, & \sigma_{33} &= p_n + \frac{1}{2} \tau_n (tg \alpha + tg 2\alpha), \\ \sigma_{12} &= -\frac{\xi_n}{2 \sin \alpha}, & \sigma_{23} &= \frac{\xi_n}{2 \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Количество ограничений на компоненты тензора напряжений в особой точке A равно пяти;

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (5.34) равен двум, условием совместности этих уравнений служит равенство

$$\tau_n = 0, \quad (5.37)$$

выражающее закон парности касательных напряжений в симметричной теории упругости. При выполнении ограничения (5.37) из уравнений (5.34) находим

$$\sigma_{11} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{13} = p_n - \sigma_{33}. \quad \text{Уравнения (5.35) имеют решение } \sigma_{12} = \sigma_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n.$$

Если равенство (5.37) не выполняется, решение системы (5.34) не существует. При стремлении α к значению $\pi/4$ напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ в элементарном объеме, примыкающем к этой точке, неограниченно возрастают;

3) $\alpha = \pi/2$. Условием совместности уравнений (5.34) служит ограничение (5.37). При его выполнении находим $\sigma_{11} = p_n, \sigma_{13} = 0$. Ранг системы уравнений (5.35) равен единице. Она совместна при выполнении ограничения на нагрузку

$$\xi_n = 0 \quad (5.38)$$

Если нагрузка удовлетворяет ограничению (5.38), из уравнений (5.35) получается $\sigma_{12} = 0$. В особой точке задаются три независимых условия на компоненты напряжения. Если ограничения (5.37), (5.38) на приложенную нагрузку не выполняются, решение уравнений (5.34), (5.35) не существует;

4) $\alpha = 3\pi/4$. Условием совместности уравнений (5.34) также служит равенство (5.37). Если оно выполняется, из уравнений (5.34) следуют зависимости между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{33}, \sigma_{13} = \sigma_{33} - p_n$. Уравнения (5.35) имеют решение

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n, \quad \sigma_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n;$$

5) $\alpha = \pi$. Условием совместности системы (5.34) и (5.35) будут соответственно ограничения (5.37) и (5.38). Если они выполняются, уравнения (5.34), (5.35) имеют решение $\sigma_{33} = p_n, \sigma_{13} = 0, \sigma_{32} = 0$.

В особой точке задаются три условия на компоненты тензора напряжений и условие на перемещение ($u_3 = 0$). Возможные ограничения на компоненты напряжений в особой точке A приводятся в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Ограничения на параметры состояния в особой точке A

№	Условия на α и нагрузку	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2,$ $\alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi.$	Формулы (5.36)	Шесть
2	$\alpha = \pi/4, \tau_n = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{33}, \sigma_{13} = p_n - \sigma_{33}$ $\sigma_{12} = \sigma_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n.$	Пять
3	$\alpha = \pi/4, \tau_n \neq 0$	Ограничения несовместны	
4	$\alpha = \pi/2, \tau_n = 0, \xi_n = 0$	$\sigma_{11} = p_n, \sigma_{13} = 0, \sigma_{12} = 0,$ $u_1 = 0$	Четыре
5	$\alpha = \pi/2, \tau_n \neq 0$ или $\xi_n \neq 0$	Ограничения несовместны	
6	$\alpha = 3\pi/4, \tau_n = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{33}, \sigma_{13} = \sigma_{33} - p_n,$ $\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n, \sigma_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi_n.$	Пять
7	$\alpha = 3\pi/4, \tau_n \neq 0$	Ограничения несовместны	
8	$\alpha = \pi, \tau_n = 0, \xi_n = 0$	$\sigma_{33} = p_n, \sigma_{13} = 0, \sigma_{32} = 0,$ $u_3 = 0$	Четыре
9	$\alpha = \pi, \tau_n \neq 0$ или $\xi_n \neq 0$	Ограничения несовместны	

5.8. Ребро, образующие поверхности которого жестко защемлены

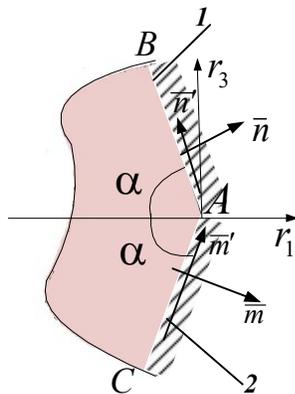


Рис.5.7. Нормальное сечение ребра с защемленными образующими

При жестком защемлении образующих поверхностей ребра Γ в элементарном объеме, содержащем точку ребра, на параметры состояния накладываются условия:

- а) равенство нулю относительных удлинений линейных элементов в направлении ортов $\bar{n}', -\bar{m}', \bar{r}_2$;

б) равенство нулю сдвигов между линейными элементами, направления которых определяются парами ортов (\bar{n}', \bar{r}_2) , $(-\bar{m}', \bar{r}_2)$, $(\bar{n}', -\bar{m}')$.

Эти условия относительно компонент тензора деформаций записываются уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha &= 0,\end{aligned}\tag{5.39}$$

$$\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha = 0,$$

$$-\varepsilon_{12} \cos \alpha + \varepsilon_{32} \sin \alpha = 0,$$

$$\varepsilon_{12} \cos \alpha + \varepsilon_{32} \sin \alpha = 0.\tag{5.40}$$

$$\varepsilon_{22} = 0.\tag{5.41}$$

При построении этих уравнений использована формула (2.15), определяющая сдвиг φ в произвольной точке сплошной среды между линейными материальными элементами.

Определители систем уравнений (5.39), (5.40) соответственно равны $\Delta_1 = -\sin^3 2\alpha$, $\Delta_2 = -\sin 2\alpha$, они одновременно обращаются в нуль в точках (5.33). Возможны следующие случаи решений системы (5.39) – (5.41):

4) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Уравнения (5.39) – (5.41) имеют нулевое решение:

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$. Из этих равенств в случае линейно упругого тела следует, что в отсутствие температурной нагрузки ($\Delta T = 0$) в особой точке также обращаются в нуль все компоненты тензора напряжений: $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. При температурной нагрузке решение для напряжений в элементарном объеме, содержащем точку A , будет таким:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

В данном случае условия закрепления поверхности тела в окрестности особой точки полностью определяют напряженное состояние в ней;

5) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (5.39) – (5.41) находятся деформации $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$. Используя эти равенства и физические уравнения, определяются зависимости между напряжениями в точках ребра: $\sigma_{33} - \nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} = -\omega \Delta T E$; $\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{33} = -\omega \Delta T E$; $\sigma_{32} = 0$.

6) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущему случаю из уравнений (5.39) – (5.41) определяются деформации $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0$. С использованием этих равенств и физических уравнений находятся зависимости между напряжениями $\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu \sigma_{33} = -\omega \Delta T E$; $\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{33} = -\omega \Delta T E$; $\sigma_{12} = 0$.

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке А

N	Условия на α	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1-2\nu}, \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	Девять
2	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = -\omega \Delta T E, \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33} = -\omega \Delta T E, \sigma_{32} = 0.$	Шесть
3	$\alpha = \pi$	$\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} = -\omega \Delta T E, \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33} = -\omega \Delta T E, \sigma_{12} = 0.$	Шесть

5.9. Ребро, одна из образующих поверхностей которого жестко закреплена, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности

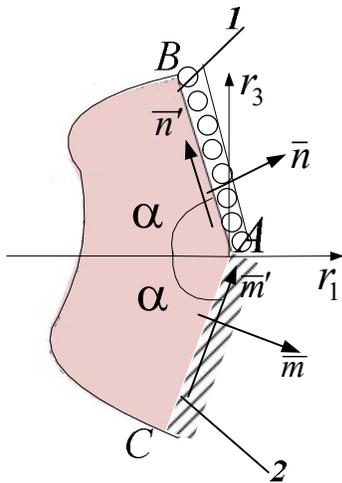


Рис. 5.8. Нормальное сечение ребра с закрепленной и скользящей без трения образующими

Принимается, что образующая поверхность 1 скользит без трения вдоль жесткой поверхности, а образующая поверхность 2 вблизи точки А жестко закреплена. Это означает, что в элементарном объеме, содержащем точку ребра, на площадке, ориентированной ортом \bar{n} , обращаются в нуль касательные напряжения

$$\tau_{n'} = 0, \quad \tau_{n_2} = 0.$$

$$(5.42)$$

а на площадке, ориентированной ортом \bar{m} , обращаются в нуль относительные удлинения линейных элементов по направлениям ортов $-\bar{m}'$, \bar{r}_2 ; и сдвиги между этими направлениями:

$$\varepsilon_{ij} m_i' m_j' = 0, \quad \varepsilon_{ij} n_{2i} n_{2j} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij} m_i' n_{2j} = 0. \quad (5.43)$$

В напряжениях условия (5.42), (5.43) запишутся уравнениями

$$\begin{aligned} -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{13} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{13} \sin 2\alpha + \sigma_{33} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) - \nu \sigma_{22} &= -\omega E \Delta T, \\ \sigma_{11} \nu - \sigma_{33} \nu + \sigma_{22} &= -\omega E \Delta T. \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{32} \sin \alpha &= 0.\end{aligned}\tag{5.45}$$

Три уравнения (5.44) образуют систему относительно четырех неизвестных. Четыре возможных определителя третьего порядка матрицы этой системы $\Delta_i (i=1,2,3,4)$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\nu(\nu+1)\cos^4 2\alpha, \\ \Delta_2 &= (\nu+1)[4\sin^4 \alpha + (2\nu-5)\sin^2 \alpha - (\nu-1)], \\ \Delta_3 &= -0.5(2\nu^2 + \nu - 1)\sin 2\alpha, \\ \Delta_4 &= (\nu+1)[4\sin^4 \alpha - (2\nu+3)\sin^2 \alpha + \nu]\end{aligned}$$

и при значениях ν из интервала $0 < \nu < 0.5$ не обращаются одновременно в нуль. Следовательно, уравнения (5.44) при всех α являются независимыми ограничениями на напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}, \sigma_{22}$ в особой точке. Определитель матрицы системы (5.45) $\Delta = -\cos 2\alpha$ в области определения α обращается в нуль в точках

$$\alpha = \pi/4, \quad \alpha = 3\pi/4.\tag{5.46}$$

Поэтому возможны следующие случаи поведения решений уравнений (5.44), (5.45):

- 1) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq 3\pi/4$. Уравнения (5.44) имеют решение $\sigma_{32} = 0, \sigma_{12} = 0$. Количество ограничений на компоненты тензора напряжений в особой точке равно пяти;
- 2) Если α принимает какое-либо из значений (5.46), напряжения σ_{12}, σ_{32} становятся зависимыми $\sigma_{12} = -\sigma_{32}$ (при $\alpha = \pi/4$), $\sigma_{12} = \sigma_{32}$ (при $\alpha = 3\pi/4$).

Таблица 5.9

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке А

№	Условия на α	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq 3\pi/4$	1) Равенства (5.44) 2) $\sigma_{32} = 0, \sigma_{12} = 0$	Восемь
2	$\alpha = \pi/4$	1) Равенства (5.44) 2) $\sigma_{12} = -\sigma_{32}$	Семь
3	$\alpha = 3\pi/4$	1) Равенства (5.44) 2) $\sigma_{12} = \sigma_{32}$	Семь

Далее рассматривается случай деформирования элемента конструкции, когда отсутствуют перемещения точек образующей поверхности 1 по направлению орта \bar{r}_2 . Такое деформирование осуществляется, например, в осесимметричном

теле при его осесимметричном нагружении. Дополнительно к условиям (5.42), (5.43) при такой деформации будет сохраняться угол 2α между направлениями \bar{n}' , $-\bar{m}'$ в элементарном объеме, содержащем точку ребра (рис.5.1). С использованием формулы (2.15) условие сохранения угла для случая линейно-термоупругого тела запишется равенством

$$\sigma_{11}[\cos^2 \alpha(2 - \cos 2\alpha) + \nu \sin^2 \alpha(2 + \cos 2\alpha)] + \sigma_{13}(1 + \nu) \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sigma_{33}[\nu \cos^2 \alpha(2 - \cos 2\alpha) + \sin^2 \alpha(2 + \cos 2\alpha)] - \sigma_{22} \nu \cos 2\alpha = -\omega E \Delta T \cos 2\alpha. \quad (5.47)$$

Присоединяя это равенство к равенствам (5.44), получаем систему четырех линейных неоднородных уравнений относительно четырех неизвестных – $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}, \sigma_{22}$. Определитель матрицы такой системы $\Delta = -4(1 - 2\nu)(1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)(\sin^2 \alpha - 0.5)$ в области значений α обращается в нуль в случаях:

$$\alpha_1 = \pi/4, \quad \alpha_2 = \pi/2, \quad \alpha_3 = 3\pi/4, \quad \alpha_4 = \pi. \quad (5.48)$$

Возможные варианты поведения решения уравнений (5.4), (5.45), (5.47):

1) угол α не входит в список (5.48). Система уравнений (5.44), (5.47) совместна, ранг ее матрицы равен четырем. Единственным образом определяются напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}, \sigma_{22}$: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega E \Delta T}{2\nu - 1}$, $\sigma_{13} = 0$.

Уравнения (5.45) имеют решение $\sigma_{32} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. На компоненты тензора напряжений в особой точке накладывается шесть ограничений;

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы (5.44), (5.47) и ранг ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. На компоненты напряжений накладываются независимые ограничения $\sigma_{33} = \sigma_{11}$, $\sigma_{22} = 2\nu\sigma_{11} - \omega \Delta T E$;

$$\sigma_{13} = (2\nu - 1)\sigma_{11} - \omega \Delta T E. \text{ Из уравнений (5.45) следует зависимость } \sigma_{12} = -\sigma_{32};$$

3) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы (5.44), (5.47) и ранг ее расширенной матрицы совпадают. Компоненты напряжений связаны соотношениями (с учетом решения уравнений (5.45)): $\sigma_{33} = \sigma_{22} = \frac{1}{1 - \nu}(\nu\sigma_{11} - \omega \Delta T E)$, $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{33} = 0$. Итого пять ограничений;

4) $\alpha = 3\pi/4$. Ранг матрицы системы (5.44), (5.47) и ранг ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. Компоненты напряжений подчиняются зависимостям: $\sigma_{33} = \sigma_{11}$, $\sigma_{22} = 2\nu\sigma_{11} - \omega \Delta T E$,

$$\sigma_{13} = -(2\nu - 1)\sigma_{11} + \omega \Delta T E. \text{ Из уравнений (5.45) получаем } \sigma_{12} = \sigma_{32}. \text{ Всего четыре ограничения;}$$

5) $\alpha = \pi$. Уравнения (5.44) и (5.47) совместны, так как ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы. Компоненты напряжений

подчиняются ограничениям $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{33} = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_{11} + \frac{1}{\nu}\omega\Delta T E$, $\sigma_{22} = \sigma_{11}$. Из уравнений (5.45) следует $\sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$. Возможные случаи ограничений на компоненты напряжений в материальной точке А, вытекающие из уравнений (5.44), (5.45) и (5.47), приводятся в табл. 5.10.

Таблица 5.10

Ограничения на параметры состояния в особой точке А

№	Условия на α и нагрузку	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	$\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2,$ $\alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$	$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega E \Delta T}{2\nu - 1},$ $\sigma_{13} = 0,$ $\sigma_{32} = 0, \sigma_{12} = 0.$	Девять
2	$\alpha = \pi/4$	$\sigma_{33} = \sigma_{11}, \sigma_{22} = 2\nu\sigma_{11} - \omega\Delta T E,$ $\sigma_{13} = (2\nu - 1)\sigma_{11} - \omega\Delta T E, \sigma_{12} = -\sigma_{32}.$	Семь
3	$\alpha = \pi/2$	$\sigma_{33} = \sigma_{22} = \frac{1}{1-\nu}(\nu\sigma_{11} - \omega\Delta T E),$ $\sigma_{13} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{32} = 0.$	Восемь
4	$\alpha = 3\pi/4$	$\sigma_{33} = \sigma_{11}, \sigma_{22} = 2\nu\sigma_{11} - \omega\Delta T E,$ $\sigma_{13} = -(2\nu - 1)\sigma_{11} + \omega\Delta T E$ $\sigma_{12} = \sigma_{32}.$	Семь
5	$\alpha = \pi$	$\sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_{11} + \frac{1}{\nu}\omega\Delta T E,$ $\sigma_{22} = \sigma_{11}, \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0.$	Восемь

5.10. Пример. Растяжение элемента, составленного из двух усеченных конусов

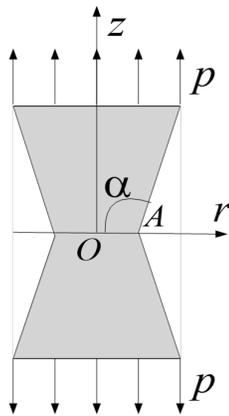


Рис.5.9. Осевое сечение элемента, составленного из двух усеченных конусов

Осевое сечение элемента представлено на рис. 5.9. Задача является осесимметричной и рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z . Физические компоненты тензора напряжений, отличные от нуля в данной задаче, — $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$. Решение строится для углов α : $93^\circ, 99^\circ, 105^\circ$. Материальные параметры имеют значения: $E = 200 \text{ ГПа}, \nu = 0.3$, нагрузка $p = 100 \text{ МПа}$.

Согласно п. 5.1 (случай $\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$) в особой точке A обращаются в нуль компоненты напряжений:

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.49)$$

Количество ограничений (5.49) превышает количество ограничений (равное двум) в обычной точке поверхности в классическом случае, поэтому задача является неклассической. Ее решение строится итерационным численно-аналитическим методом, описанным в п. 2.2. Характерный размер конечно-элементной сетки вблизи точки A в расчетах равен $0.5 \cdot 10^{-5}$ м. Решение в малой окрестности особой точки иллюстрируется на рис. 5.10, 5.11. На рис. 5.10 приводятся компоненты тензора напряжений (МПа) в окрестности точки A по направлению оси x (мм): (1– σ_{rr} ; 2– $\sigma_{\varphi\varphi}$; 3– σ_{zz} ; 4– σ_{rz}) при $\alpha = 99^\circ$. Не обращается в нуль в особой точке лишь окружное напряжение. Видно, что все условия (5.49) в ней выполняются. Вблизи вершины ребра наблюдается концентрация всех компонент напряжений, кроме сдвиговых σ_{rz} . На рис. 5.11 на том же промежутке сравниваются решения задачи, полученные итерационным методом (сплошные линии), с классическим решением, построенным с использованием инженерного пакета ANSYS (штриховые линии).

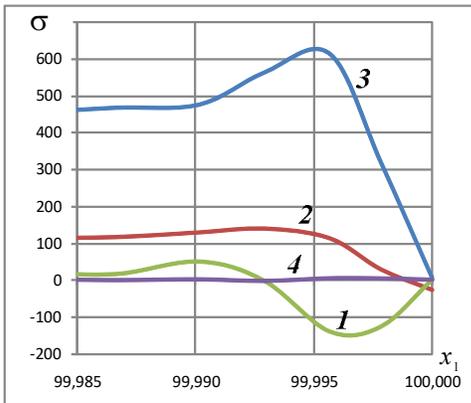


Рис.5.10. Компоненты тензора напряжений (МПа) в окрестности точки A по направлению оси x (мм): (1– σ_{rr} ; 2– $\sigma_{\varphi\varphi}$; 3– σ_{zz} ; 4– σ_{rz}) при $\alpha = 99^\circ$

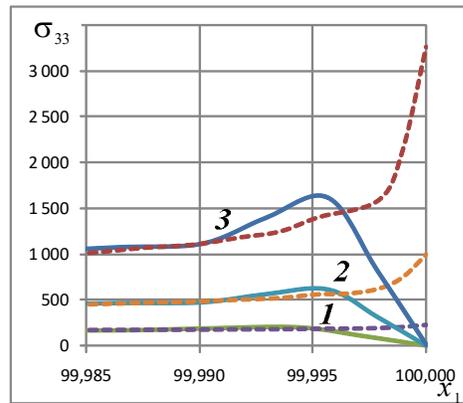


Рис.5.11. Напряжения σ_{zz} (МПа) в окрестности точки A при различных значениях угла α : 1 – 93° ; 2 – 99° ; 3 – 105°

Показаны напряжения σ_{zz} (МПа) в окрестности точки A при различных значениях угла α : 1 – 93° ; 2 – 99° ; 3 – 105° . Видно, что решения отличаются лишь в малой окрестности особой точки; решение в классической постановке не удовлетворяет условиям (5.49) и приводит к завышенным значениям напряжений вблизи особой точки.

6. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА СОСТАВНОГО ТЕЛА

Задача о концентрации напряжений в окрестности точек ребра составного тела возникает, в частности, при скреплении пространственных тел посредством сварки, пайки или склеивания. В классической постановке эта задача рассматривается, например, в публикациях [18, 21, 38, 39, 44, 51, 54, 56 и др.]. В настоящей главе на основе развиваемого в работе подхода формулируются независимые ограничения на параметры состояния в точках ребра составного элемента конструкции в зависимости от геометрических и материальных параметров составляющих элементов, а также в зависимости от характера нагружения. Показывается, что, как правило, возможные варианты задаваемых ограничений обуславливают неклассичность рассматриваемых задач МДТТ [28, 68]. Сохраняются принятые в предыдущих разделах обозначения.

6.1. Составное ребро, образующие которого свободны от нагрузок

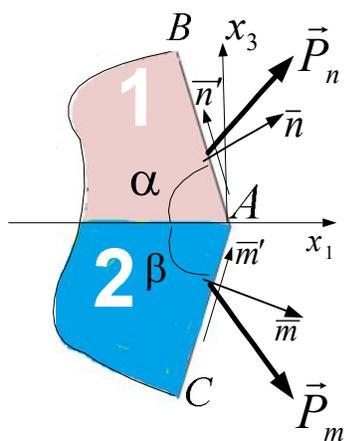


Рис.6.1. Нормальное сечение ребра Γ

Принимается, что в окрестности точки А векторы напряжений \bar{p}_n, \bar{p}_m обращаются в нуль, а температура изменяется на величину ΔT . Имеют место следующие ограничения на параметры состояния элементарных объемов составляющих элементов 1,2, содержащих особую точку:

а) нормальные и касательные напряжения на площадках, ориентируемых векторами \bar{n}, \bar{m} , обращаются в нуль:

$$\sigma_n = 0, \tau_{n'} = 0, \tau_{n2} = 0, \sigma_m = 0, \tau_{m'} = 0, \tau_{m2} = 0 \quad ; \quad (6.1)$$

б) на поверхности соединения непрерывны нормальные и касательные напряжения, вследствие чего справедливы равенства

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{33}, \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{31}, \sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)} = \sigma_{32} \quad ; \quad (6.2)$$

в) на поверхности соединения элементов ребра непрерывны относительные удлинения и сдвиги, поэтому справедливы равенства

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (6.3)$$

Ограничения (6.1), (6.2) запишутся равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -(\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{33}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{13} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{13} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{33} \cos^2 \beta &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{33}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{13} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0; \\ \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{12}^{(2)} \sin \beta - \sigma_{32} \cos \beta &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Первые четыре из этих равенств образуют автономную систему уравнений (6.4) относительно напряжений $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$. Определитель системы уравнений

$$\Delta = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) = 0 \quad (6.6)$$

обращается в нуль при значениях

$$\alpha = \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta = \pi, \alpha + \beta = 2\pi. \quad (6.7)$$

Возможны следующие варианты (в зависимости от геометрических и материальных параметров соединяемых тел) задаваемых независимых условий в особой точке.

1. $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi$. Вследствие однородности уравнений (6.4) они имеют лишь нулевое решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0. \quad (6.8)$$

Из уравнений (6.5) следуют зависимости

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{32} \operatorname{ctg} \beta. \quad (6.9)$$

Условия (6.3) с использованием равенств (6.8) и физических уравнений термоупругости записываются через напряжения

$$\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad -\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \right) \sigma_{32} = 0. \quad (6.11)$$

Равенства (6.10) образуют автономную систему уравнений относительно напряжений $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$, определитель $\Delta = (\nu_1 - \nu_2)/(E_1 E_2)$ этой системы обращается в нуль, если коэффициенты Пуассона соединяемых тел одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$). При выполнении условия ($\nu_1 \neq \nu_2$) напряжения $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ из системы (6.10) определяются единственным образом:

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{E_1(1 + \nu_2)(\omega_1 - \omega_2) \Delta T}{\nu_1 - \nu_2}, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \frac{E_2(1 + \nu_1)(\omega_1 - \omega_2) \Delta T}{\nu_1 - \nu_2}. \quad (6.12)$$

Если же ($\nu_1 = \nu_2$) и выполняются условия $\Delta T \neq 0, \omega_1 \neq \omega_2$, особые точки оказываются сингулярными. В элементарных объемах, содержащих точку А, напряжения $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ претерпевают разрывы второго рода. Уравнения (6.10)

совместны лишь в случае отсутствия температурного нагружки ($\Delta T = 0$) или при одинаковых коэффициентах температурной деформации ($\omega_1 = \omega_2$), при этом между напряжениями $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ имеет место зависимость

$$E_1 \sigma_{22}^{(2)} = E_2 \sigma_{22}^{(1)}. \quad (6.13)$$

Из равенства (6.11) следует, что при выполнении условия

$$G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta \neq 0 \quad (6.14)$$

напряжение σ_{32} , а также вследствие равенств (6.9) и напряжения $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}$ обращаются в нуль. Если условие (6.14) не выполняется, т.е. $G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta = 0$, напряжения σ_{32} из равенства (6.11) не определяется, оно находится из решения задачи о напряженном состоянии элемента конструкции. В классической постановке задачи механики деформируемого твердого тела для элементарных объемов, примыкающих к точке А, должно быть задано по три граничных условия. Еще задаются три условия сопряжения напряжений на поверхности соединения таких объемов. Всего девять условий. Во всех рассмотренных выше вариантах задаваемых независимых ограничений их количество превышает число девять. Например, если ($\nu_1 \neq \nu_2$) и выполняется неравенство (6.14), количество независимых ограничений равно двенадцати. Оказываются известными все компоненты тензоров напряжений элементарных объемов, содержащих точку ребра. Возможные ограничения на компоненты напряжений в особых точках представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке в случае
 $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi$

№	Условия на $\nu_1, \nu_2, G_1, G_2,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T$	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\nu_1 \neq \nu_2,$ $G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta \neq 0$	1. Список а: $\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} = \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0.$ $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} \operatorname{ctg} \beta,$ $\sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)}$ 2. Формулы (6.12) 3. $\sigma_{32}^{(1)} = 0$	Двенадцать
2	$\nu_1 \neq \nu_2,$ $G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta = 0$	1. Список а. 2. Формулы (6.12)	Одиннадцать
3	$\nu_1 = \nu_2,$ $G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$	1. Список а. 2. Равенство (6.13) 3. $\sigma_{32}^{(1)} = 0$	Одиннадцать

№	Условия на $v_1, v_2, G_1, G_2,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T$	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
4	$v_1 = v_2,$ $G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$	1. Список а. 2. Равенство (6.13)	Десять
5	$v_1 = v_2,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	

2. $\alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$. Из уравнений (6.4), (6.5) следует

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{11}^{(2)} = 0, \sigma_{32} = 0, \sigma_{12}^{(2)} = 0. \quad (6.15)$$

Равенства (6.3) записываются через напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(1)} &= 0, \\ \frac{1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{22}^{(1)}) - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \\ \frac{1}{E_1} (\sigma_{22}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{11}^{(1)}) - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Два последних соотношения из (6.16) образуют систему уравнений относительно напряжений $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$. Ранг матрицы системы равен двум, поэтому эти уравнения независимы. Следовательно, в особой точке в данном случае на параметры состояния накладываются ограничения (6.2), (6.15), (6.16). Всего 11 ограничений.

3. $\alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi$.

Аналогично предыдущему случаю строятся ограничения на параметры состояния в элементарных объемах, содержащих точку ребра:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{11}^{(1)} = 0, \sigma_{32} = 0, \sigma_{12}^{(1)} = 0, \sigma_{12}^{(2)} = 0, \\ \frac{1}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{22}^{(2)}) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(2)} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \\ \frac{1}{E_2} (\sigma_{22}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{11}^{(2)}) - \frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Количество ограничений равно одиннадцати.

4. $\alpha = \pi, \beta = \pi$.

Из уравнений (6.4), (6.5) следует

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{32} = 0. \quad (6.18)$$

Равенства (6.3) записываются через напряжения

$$\frac{1}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{22}^{(2)}) - \frac{1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{22}^{(1)}) = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2}(\sigma_{22}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{11}^{(2)}) - \frac{1}{E_1}(\sigma_{22}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{11}^{(1)}) &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \\ \frac{1}{G_1}\sigma_{12}^{(1)} &= \frac{1}{G_2}\sigma_{12}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Система первых двух уравнений (6.19) имеет ранг, равный двум, поэтому эти уравнения линейно независимы. Количество задаваемых ограничений (6.2), (6.18), (6.19) на параметры состояния в особой точке равно девяти.

5. $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$.

Из уравнений (6.4), (6.5) следуют зависимости между напряжениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^{(2)}, \quad \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{33} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{13} = -\sigma_{33} \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{12}^{(1)} &= -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{12}^{(2)} = -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Равенства (6.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_{22}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_{22}^{(2)} + F\sigma_{33} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \\ -\frac{1}{E_1}\sigma_{22}^{(1)} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22}^{(2)} + H\sigma_{33} &= (\omega_1 - \omega_2)\Delta T, \\ \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{32} &= 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где обозначено

$$F = \frac{1}{E_2}(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2) - \frac{1}{E_1}(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1), \quad H = \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1).$$

Первые два из уравнений (6.21) линейно независимы при выполнении условий

$$\nu_1 \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \nu_2 \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (6.22)$$

В этом случае уравнения совместны. В частности, при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ из них находится напряжение

$$\sigma_{33} = \frac{E_1 E_2 (\omega_1 - \omega_2) \Delta T}{(E_1 - E_2) [\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)]} \quad (6.23)$$

и зависимость между напряжениями $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$

$$E_2 \sigma_{22}^{(1)} = E_1 \sigma_{22}^{(2)} + \frac{E_1 E_2 (\omega_1 - \omega_2) \Delta T \operatorname{ctg}^2 \alpha}{[\nu(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \operatorname{ctg}^2 \alpha]}. \quad (6.24)$$

Из равенств (6.23), (6.24) видно, что при стремлении коэффициентов Пуассона к значению, задаваемому формулой (6.22), напряжения в особой точке стремятся к бесконечности. Следовательно, такое значение коэффициента Пуассона является критическим, определяющим сингулярное поведение

параметров состояния в элементарных объемах, содержащих точку ребра, при температурном нагружении элемента конструкции.

Если условия (6.22) не выполняются, первые два из уравнений (6.21) совместны лишь в двух случаях: 1) в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) и 2) при равенстве коэффициентов температурной деформации ($\omega_1 = \omega_2$). При этом между компонентами напряжений справедлива зависимость

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + ctg^2 \alpha \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{33} = 0.$$

Из третьего уравнения системы (6.21) следует, что при выполнении условий

$$ctg \alpha \neq 0, \quad G_1 \neq G_2 \quad (6.25)$$

напряжения σ_{32} , а согласно (6.20) и напряжения $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}$ в особой точке обращаются в нуль. Если хотя бы одно из условий (6.25) не выполняется, ограничения на значение напряжения σ_{32} в особой точке не накладываются.

В часто встречающемся случае $\alpha = \beta = \pi/2$ из равенств (6.20) следует

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{11}^{(2)} = 0, \sigma_{12}^{(1)} = 0, \sigma_{12}^{(2)} = 0. \quad (6.26)$$

Первые два из уравнений (6.21) устанавливают зависимости между напряжениями $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{33}$. В частности, при выполнении между материальными параметрами условия $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$ константы F и H обращаются в нуль и из соотношений (6.21) определяются напряжения $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$:

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{E_1(1+\nu_2)(\omega_1 - \omega_2)\Delta T}{\nu_1 - \nu_2}, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \frac{E_2(1+\nu_1)(\omega_1 - \omega_2)\Delta T}{\nu_1 - \nu_2}. \quad (6.27)$$

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в элементарных объемах, стягиваемых к точке A , в рассматриваемом случае приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке в случае $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$

№	Условия на $v_1, v_2, G_1, G_2,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T$	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$v_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $v_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $ctg \alpha \neq 0, G_2 \neq G_1$	1. список б: $\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{33}^{(1)} ctg^2 \alpha,$ $\sigma_{13}^{(1)} = -\sigma_{33}^{(1)} ctg \alpha, \sigma_{13}^{(2)} = -\sigma_{33}^{(2)} ctg \alpha$ $\sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32}^{(1)} ctg \alpha, \sigma_{12}^{(2)} = -\sigma_{32}^{(2)} ctg \alpha,$ $\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)}$ 2. $\frac{v_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{v_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + F \sigma_{33} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$ $-\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + H \sigma_{33} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$ 3. $\sigma_{32}^{(1)} = 0$	Двенадцать
2	$v_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $v_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $ctg \alpha = 0$ или $G_2 = G_1$	1. список б. 2. $\frac{v_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{v_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + F \sigma_{33} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$ $-\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + H \sigma_{33} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$	Одиннадцать
3	$v_1 = v_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$	Ограничения несовместны	
4	$v_1 = v_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $ctg \alpha \neq 0, G_1 \neq G_2$	1. список б. 2. $\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + ctg^2 \alpha \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{33} = 0.$ 3. $\sigma_{32}^{(1)} = 0$	Одиннадцать
5	$v_1 = v_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$ $ctg \alpha = 0$ или $G_1 = G_2$	1. список б: 2. $\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + ctg^2 \alpha \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{33} = 0.$	Десять

б. $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$

Из уравнений (6.4) и (6.5) следует

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{33} ctg^2 \alpha, \sigma_{13} = -\sigma_{33} ctg \alpha, \sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} ctg \alpha, \sigma_{12}^{(2)} = -\sigma_{32} ctg \alpha.$$

Анализ накладываемых ограничений на компоненты напряжений в элементарных объемах, содержащих точки, ребра совпадает с анализом, приведенным в п.5.

6.2. Составное ребро под действием поверхностных нагрузок

Принимается, что на образующих ребро поверхностях элементов 1, 2 заданы соответственно векторы напряжений \bar{p}_n и \bar{p}_m . Нормальные и касательные напряжения в элементарных объемах, примыкающих к ребру на площадках, ориентируемых векторами \bar{n} , \bar{m} , принимают значения

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_n = q_n, \quad \tau_{n2} = \xi_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_m = q_m, \quad \tau_{m2} = \xi_m.$$

С использованием равенств (6.2) эти соотношения запишутся двумя независимыми системами уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{13} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -(\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{33}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{13} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= q_n, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{13} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{33} \cos^2 \beta &= p_m, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{33}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{13} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= q_m; \\ \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_n, \\ \sigma_{12}^{(2)} \sin \beta - \sigma_{32} \cos \beta &= \xi_m. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Определитель системы (6.27) имеет вид (6.6) и обращается в нуль при значениях α, β , определяемых равенствами (6.7). Далее рассматриваются возможные случаи задаваемых ограничений на параметры состояния в особой точке.

$$1. \quad \alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi.$$

Уравнения (6.27) и (6.28) имеют единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{1}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} \left\{ p_n [\cos \beta (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha] - \right. \\ &\quad \left. q_n [\cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta)] + p_m \cos^2 \alpha \cos \beta - q_m \cos^2 \alpha \sin \beta \right\}, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \frac{1}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} \left\{ p_n \cos \alpha \cos^2 \beta + q_n \sin \alpha \cos^2 \beta + \right. \\ &\quad \left. p_m [\cos \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) + \sin \alpha \sin \beta \cos \beta] + q_m [\cos \beta (\sin \alpha \cos \beta + 2 \sin \beta \cos \alpha)] \right\}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \left\{ (p_n - p_m) \cos \alpha \cos \beta + q_n \sin \alpha \cos \beta + q_m \sin \beta \cos \alpha \right\}, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \left\{ p_n \cos \alpha \sin \beta + p_m \sin \alpha \cos \beta + (q_n - q_m) \sin \alpha \sin \beta \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Первые два из равенств (6.3) записываются через напряжения

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} = g, \quad -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} = f, \quad (6.30)$$

где

$$f = -\frac{1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{33}) + \frac{1}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{33}),$$

$$g = \frac{v_1}{E_1}(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{33}) - \frac{v_2}{E_2}(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{33}).$$

Компоненты напряжений в выражениях для f , g определяются равенствами (6.29). Определитель системы уравнений (6.30) обращается в нуль при условии $v_1 = v_2$. Если это условие не выполняется, напряжения $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ из уравнений (6.30) определяются единственным образом:

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{E_1(f + v_2 g)}{v_2 - v_1}, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \frac{E_2(f + v_1 g)}{v_2 - v_1}. \quad (6.31)$$

При выполнении равенства $v_1 = v_2 = v$ уравнения (6.30) будут совместны при условии

$$f + vg = 0, \quad (6.32)$$

которое зависит и от материальных параметров скрепляемых тел, и от геометрических характеристик элемента конструкции, и от приложенной нагрузки. Если сочетание всех этих параметров таково, что равенство (6.32) оказывается выполненным, между напряжениями $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ будет справедлива зависимость

$$E_2 \sigma_{22}^{(1)} - E_1 \sigma_{22}^{(2)} = E_1 E_2 g. \quad (6.33)$$

Если условие (6.32) нарушается, напряжения в элементарных объемах, содержащих точки ребра, неограниченно возрастают. Третье из равенств (6.3), записанное через напряжения

$$G_2 \sigma_{12}^{(1)} - G_1 \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad (6.34)$$

образует с зависимостями (6.28) замкнутую систему уравнений относительно напряжений $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{32}$. Если определитель этой системы уравнений

$$\Delta = -(G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta) \quad (6.35)$$

не обращается в нуль, существует единственное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(1)} &= -\frac{G_1}{\Delta} [\xi_n \cos \beta + \xi_m \cos \alpha], & \sigma_{12}^{(2)} &= -\frac{G_2}{\Delta} [\xi_n \cos \beta + \xi_m \cos \alpha], \\ \sigma_{32} &= \frac{1}{\Delta} [G_1 \xi_m \sin \alpha - G_2 \xi_n \sin \beta]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Если определитель (6.35) обращается в нуль, уравнения (6.28), (6.34) оказываются совместными лишь при выполнении равенства

$$(G_2 \xi_n \sin \beta - G_1 \xi_m \sin \alpha) = 0. \quad (6.37)$$

В этом случае напряжения $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{32}$ связаны соотношениями

$$\sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\xi_n}{\sin \alpha}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{32} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\xi_m}{\sin \beta}.$$

Невыполнение равенства (6.37) приводит к сингулярному поведению параметров состояния в особых точках.

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в рассматриваемом случае приводятся в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Ограничения на компоненты напряжений в особых точках в случае

$$\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi$$

№	Условия на материальные параметры и параметры нагрузки	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	$\nu_1 \neq \nu_2,$ $G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta \neq 0$	1. Формулы (6.29). 2. Формулы (6.31). 3. Формулы (6.36).	Двенадцать
2	$\nu_1 = \nu_2, f + \nu g = 0,$ $G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta \neq 0$	1. Формулы (6.29). 2. Формулы (6.33). 3. Формулы (6.36).	Одиннадцать
3	$\nu_1 = \nu_2, f + \nu g \neq 0,$	Ограничения несовместны	
4	$\nu_1 = \nu_2, f + \nu g = 0,$ $G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta = 0,$ $G_2 \xi_n \sin \beta - G_1 \xi_m \sin \alpha = 0$	1. Формулы (6.29). 2. Формула (6.33). 3. $\sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\xi_n}{\sin \alpha},$ $\sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{32} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\xi_m}{\sin \beta}$	Девять
5	$G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta = 0,$ $G_2 \xi_n \sin \beta - G_1 \xi_m \sin \alpha \neq 0$	Ограничения несовместны	
6	$\nu_1 \neq \nu_2,$ $G_2 \cos \alpha \sin \beta + G_1 \sin \alpha \cos \beta = 0,$ $G_2 \xi_n \sin \beta - G_1 \xi_m \sin \alpha = 0$	1. Формулы (6.29). 2. Формула (6.31). 3. $\sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\xi_n}{\sin \alpha},$ $\sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{32} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\xi_m}{\sin \beta}.$	Десять

2. $\alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi.$

Ранг матрицы системы уравнений (6.27) равен трем. Для ее совместности необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы также был равен трем. Это требование приводит к ограничению на приложенные нагрузки

$$(p_n - p_m) \cos \beta + (q_n + q_m) \sin \beta = 0. \quad (6.38)$$

При выполнении условия (6.38) из уравнений (6.27) определяются напряжения

$$\sigma_{11}^{(2)} = -p_n \operatorname{ctg}^2 \beta + \frac{P_m}{\sin^2 \beta} - 2q_n \operatorname{ctg} \beta, \quad \sigma_{13} = -q_n, \quad \sigma_{33} = p_n. \quad (6.39)$$

Если условие (6.38) не выполняется, ранг расширенной матрицы системы уравнений (6.27) оказывается равным четырем. В этом случае компоненты напряжений, связанные уравнениями (6.27), в элементарных объемах, содержащих точки ребра, будут иметь сингулярный характер. Из этого следует, что ограничение (6.38) является критическим условием, определяющим несингулярное поведение решения в особой точке. Из уравнения (6.28) находятся напряжения

$$\sigma_{32} = -q_n, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \frac{\xi_m}{\sin \beta} - \xi_n \operatorname{ctg} \beta. \quad (6.40)$$

Кинематические соотношения (6.3) записываются через напряжения (используются физические соотношения и равенство (6.40))

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \sigma_{11}^{(1)} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= \varphi_1, & -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{11}^{(1)} + \frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= \psi_1, \\ \sigma_{12}^{(1)} &= \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{\xi_m}{\sin \beta} - \xi_n \operatorname{ctg} \beta \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_1 = \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33} + \frac{1}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{33}), \quad \psi_1 = \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{33}).$$

Первые два равенства (6.41) рассматриваются как система уравнений относительно трех компонент напряжений $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$. Ранг этой системы равен двум, поэтому они линейно независимы, т.е. равенства (6.41) представляют собой два независимых ограничения на параметры состояния в особой точке. В результате анализа заданных условий в особой точке приходим к заключению, что их количество в рассматриваемом случае избыточно, задача МДТТ оказывается неклассической.

$$3. \quad \alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi.$$

Этот случай аналогичен предыдущему. Условием совместности уравнений (6.27) служит равенство

$$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n + q_m) \sin \alpha = 0. \quad (6.42)$$

В случае, когда это условие нарушается, напряжения в элементарных объемах, примыкающих к точкам ребра, неограниченно возрастают. Поэтому данное равенство может рассматриваться как критическое условие для прикладываемой нагрузки.

Если ограничение (6.42) на приложенную нагрузку выполняется, из уравнений (6.27) находятся напряжения

$$\sigma_{11}^{(1)} = -p_m \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{p_n}{\sin^2 \alpha} + 2q_m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{13} = -q_m, \quad \sigma_{33} = p_m.$$

Из уравнений (6.28) определяются напряжения

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{\xi_n}{\sin \alpha} - \xi_m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{32} = q_m. \quad (6.43)$$

Зависимости (6.3) между деформациями с использованием (6.43) запишутся независимыми соотношениями через напряжения

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2} \sigma_{11}^{(2)} + \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= \varphi_2, \\ -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{11}^{(2)} - \frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} &= \psi_2, \\ \sigma_{12}^{(2)} &= \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{\xi_n}{\sin \alpha} - \xi_m \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_2 = \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{33} + \frac{1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{33}), \quad \psi_2 = \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{33} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{33}).$$

Количество ограничений на напряжения составляющих элементов в особой точке избыточно, задача МДТТ неклассическая.

$$4. \quad \alpha = \pi, \beta = \pi.$$

Уравнения (6.27) и (6.28) совместны лишь при ограничениях на внешнюю нагрузку:

$$p_n = p_m, \quad q_n = q_m, \quad \xi_n = \xi_m. \quad (6.44)$$

Эти ограничения определяют условия несингулярного поведения решения в элементарных объемах, примыкающих к ребру. При выполнении ограничений (6.44) из уравнений (6.27), (6.28) находятся компоненты

$$\sigma_{33} = p_n, \quad \sigma_{13} = -p_n, \quad \sigma_{23} = -\xi_n.$$

Равенства (6.3) запишутся через напряжения тремя независимыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} (\sigma_{11}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{22}^{(1)}) - \frac{1}{E_2} (\sigma_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{22}^{(2)}) &= \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) p_n, \\ \frac{1}{E_1} (\sigma_{22}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{11}^{(1)}) - \frac{1}{E_2} (\sigma_{22}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{11}^{(2)}) &= \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) p_n, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\frac{1}{G_1} \sigma_{12}^{(1)} - \frac{1}{G_2} \sigma_{12}^{(2)} = 0.$$

Общее количество независимых ограничений на компоненты тензоров напряжений в особой точке избыточно. Задача МДТТ неклассическая.

5. $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$.

Ранг матрицы системы уравнений (6.27) равен трем. Чтобы уравнения были совместными, ранг расширенной матрицы также должен быть равен трем. Это требование приводит к ограничению на приложенную нагрузку:

$$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n + q_m) \sin \alpha = 0. \quad (6.46)$$

Если условие (6.46) не выполняется, уравнения (6.27) несовместны. В элементарных объемах, стягиваемых к точкам ребра, напряжения неограниченно возрастают. Далее считается, что приложенная вблизи особой точки нагрузка удовлетворяет условию (6.46). Три первых уравнения системы (6.27) линейно независимы, они могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{33} \operatorname{ctg}^2 \alpha + p_n (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{33} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2p_n (\operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2 \frac{P_m}{\sin^2 \alpha} - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{13} &= -\sigma_{33} \operatorname{ctg} \alpha + p_n \operatorname{ctg} \alpha + q_n. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Третье из равенств (6.3) и соотношения (6.28) образуют систему уравнений

$$\begin{aligned} G_1 \sigma_{12}^{(2)} - G_2 \sigma_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_n, \\ \sigma_{12}^{(2)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_m. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Определитель матрицы этой системы уравнений

$$\Delta = -(G_1 - G_2) \cos \alpha \sin \alpha$$

обращается в нуль, если $G_1 = G_2$ или $\alpha = \pi/2$. Возможны следующие случаи поведения решения уравнений (6.48):

$$1) G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi/2.$$

Ранг матрицы системы уравнений (6.48) и ранг ее расширенной матрицы совпадают и равны трем, решение единственно

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1 (\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2 (\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}, \quad \sigma_{32} = \frac{G_1 \xi_m - G_2 \xi_n}{(G_1 - G_2) \cos \alpha};$$

$$2) G_1 \neq G_2, \alpha = \pi/2.$$

Условием совместности уравнений (6.48) служит равенство

$$G_1 \xi_m - G_2 \xi_n = 0. \quad (6.49)$$

При выполнении ограничения (6.49) на приложенную вблизи особых точек нагрузку напряжения $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}$ определяются равенствами

$$\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \xi_m. \quad (6.50)$$

Если ограничение (6.49) не выполняется, в элементарных объемах, содержащих точки ребра, напряжения неограниченно возрастают;

$$3) G_1 = G_2, \alpha \neq \pi/2.$$

Уравнения (6.48) совместны при ограничении на внешнюю нагрузку

$$\xi_n = \xi_m. \quad (6.51)$$

При этом условии между напряжениями $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{32}$ справедливы зависимости

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\xi_n}{\sin \alpha}.$$

При нарушении ограничения (6.51) компоненты напряжений в элементарных объемах, примыкающих к ребру, имеют сингулярный характер;

$$4) G_1 = G_2, \alpha = \pi/2.$$

Уравнения (6.48) совместны при ограничении (6.51) (при невыполнении ограничения (6.51) напряжения в особых точках оказываются сингулярными). В случае совместности уравнений (6.48) из них определяются напряжения

$$\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \xi_n.$$

Оставшиеся первые два из равенств (6.3) с использованием соотношений (6.47) приводятся к двум уравнениям относительно трех компонент напряжений $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{33}$:

$$-\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} - F \sigma_{33} = f, \quad (6.52)$$

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} - H \sigma_{33} = h,$$

где

$$F = \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2) - \frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1), \quad H = \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1),$$

$$f = -\frac{1}{E_1} g_1 + \frac{1}{E_2} g_2, \quad h = \frac{\nu_1}{E_1} g_1 - \frac{\nu_2}{E_2} g_2,$$

$$g_1 = p_n (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2q_n \operatorname{ctg} \alpha, \quad g_2 = g_1 - \frac{(p_n - p_m)}{\sin^2 \alpha}.$$

Ранг матрицы системы уравнений (6.52) равен двум, если выполнено условие

$$\nu_1 \neq \nu^*, \quad \nu_2 \neq \nu^*, \quad \nu^* = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (6.53)$$

В этом случае уравнения (6.52) независимы и совместны при любой правой части. В частности, если $\nu_1 = \nu_2 \neq \nu^*$ из них определяется напряжение σ_{33} :

$$\sigma_{33} = \frac{f + hv}{F + Hv},$$

а следовательно, и напряжения $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{13}$ (см. формулы (6.47)).

Если условия (6.53) не выполняются, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu^*$, ранг системы уравнений (6.52) равен единице, их совместность возможна лишь при ограничении

$$E_1 g_2 - E_2 g_1 = 0. \quad (6.54)$$

Уравнения (6.52) при этом оказываются зависимыми. При нарушении условия (6.54) в элементарных объемах, содержащих точки ребра, напряжения неограниченно возрастают.

Приведем результаты проведенного анализа для часто встречающегося случая $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$. Условие совместности (6.46) уравнений (6.27) принимает вид

$$q_n = q_m.$$

Из равенств (6.47) следует

$$\sigma_{11}^{(1)} = p_n, \quad \sigma_{11}^{(2)} = p_m, \quad \sigma_{13} = q_n.$$

Напряжения $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}$ определяются равенством (6.50) при условии, что выполняется ограничение (6.49).

Уравнения (6.52) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= -\frac{p_n}{E_1} + \frac{p_m}{E_2}, \\ \frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= \frac{\nu_1 p_n}{E_1} - \frac{\nu_2 p_m}{E_2}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Для различных материалов, составляющих ребро, эти уравнения линейно независимы. В случае, когда между материальными параметрами существует зависимость

$$E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1,$$

напряжения σ_{33} исключаются из уравнений (6.55), а напряжения $\sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{22}^{(2)}$ однозначно определяются из них

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{p_n(1 - \nu_1 \nu_2)}{\nu_1 - \nu_2} + \frac{E_1 p_m (\nu_2^2 - 1)}{E_2 (\nu_1 - \nu_2)}, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \frac{p_m (\nu_1 \nu_2 - 1)}{\nu_1 - \nu_2} + \frac{E_2 p_n (\nu_1^2 - 1)}{E_1 (\nu_1 - \nu_2)}.$$

Возможные варианты ограничений на компоненты напряжений в особой точке рассматриваемого составного ребра приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке в случае $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$

№	Условия на материальные параметры и параметры нагрузки	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
1	Не выполняется условие (6.46)	Ограничения несовместны	
2	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi / 2$. 3. $v_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$, $v_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1(\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha},$ $\sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2(\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha},$ $\sigma_{32} = \frac{G_1 \xi_m - G_2 \xi_n}{(G_1 - G_2) \cos \alpha}.$ 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2).	Одиннадцать
3	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha = \pi / 2$. 3. $G_1 \xi_m - G_2 \xi_n = 0$. 4. $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \sigma_{12}^{(2)} = \xi_m$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2).	Десять
4	1. $G_1 \neq G_2, \alpha = \pi / 2$. 2. $G_1 \xi_m - G_2 \xi_n \neq 0$,	Ограничения несовместны	
5	1. $G_1 = G_2, \alpha \neq \pi / 2$. 2. $\xi_m \neq \xi_n$	Ограничения несовместны	
6	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 = G_2, \alpha \neq \pi / 2$. 3. $\xi_n = \xi_m$. 4. $v_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$, $v_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{32} ctg \alpha + \xi_n / \sin \alpha$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2).	Десять
7	1. $G_1 = G_2, \alpha = \pi / 2$. 2. $\xi_n \neq \xi_m$	Ограничения несовместны	

№	Условия на материальные параметры и параметры нагрузки	Ограничения на компоненты напряжений	Количество ограничений
8	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 = G_2, \alpha = \pi / 2$. 3. $\xi_n = \xi_m$. 4. $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \sigma_{12}^{(2)} = \xi_n$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2)	Десять
9	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi / 2$. 3. $\nu_1 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$, $\nu_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1(\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}$, $\sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2(\xi_n - \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}$, $\sigma_{32} = \frac{G_1 \xi_m - G_2 \xi_n}{(G_1 - G_2) \cos \alpha}$. 3. $\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + ctg^2 \alpha \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{33} = 0$. 4. Равенства (6.2)	Десять
10	1. $G_1 = G_2$. 2. $\nu_1 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$, $\nu_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	Случай изотропного однородного ребра. Рассмотрен в п.5.3	

$$6. \quad \alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$$

Уравнения (6.27) совместны при ограничении (6.46) на параметры нагрузки, в этом случае справедливы формулы (6.47) для напряжений $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{13}$. Третье из равенств (6.3) и соотношения (6.28) образуют систему уравнений

$$\begin{aligned} G_1 \sigma_{12}^{(2)} - G_2 \sigma_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_n, \\ -\sigma_{12}^{(2)} \sin \alpha - \sigma_{32} \cos \alpha &= \xi_m. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Определитель матрицы этой системы уравнений $\Delta = \cos \alpha \sin \alpha (G_1 - G_2)$ обращается в нуль, когда $G_1 = G_2$ или $\alpha = \pi/2, \alpha = 3\pi/2$. Поэтому возможны следующие случаи поведения решения уравнений (6.56):

$$1) \quad G_1 \neq G_2, \quad \alpha \neq \pi/2, \quad \alpha \neq 3\pi/2.$$

Определитель матрицы уравнений (6.56) не обращается в нуль, решение единственно

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2)\sin \alpha}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2)\sin \alpha}, \quad \sigma_{32} = -\frac{G_1\xi_m + G_2\xi_n}{(G_1 - G_2)\cos \alpha};$$

$$2) G_1 \neq G_2, \quad \alpha = \pi/2.$$

Уравнения (6.56) имеют решение

$$\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \quad \sigma_{12}^{(2)} = -\xi_m$$

при ограничении на нагрузку

$$G_1\xi_m + G_2\xi_n = 0. \quad (6.57)$$

В случае, когда условие (6.57) нарушается, в особой точке компоненты напряжений неограниченно возрастают. На напряжения σ_{32} какие-либо ограничения не накладываются;

$$3) G_1 \neq G_2, \quad \alpha = 3\pi/2.$$

Из уравнений (6.56) находим напряжения

$$\sigma_{12}^{(1)} = -\xi_n, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \xi_m$$

и ограничение на компоненты вектора прикладываемых напряжений, совпадающее с ограничением (6.57);

$$4) G_1 = G_2, \quad \alpha \neq \pi/2, \quad \alpha \neq 3\pi/2.$$

Уравнения (6.56) совместны при ограничении

$$\xi_m = -\xi_n. \quad (6.58)$$

При выполнении условия (6.58) между напряжениями $\sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{32}$ имеются зависимости

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha = \xi_n.$$

Если ограничение (6.58) нарушается, компоненты напряжений в особой точке неограниченно возрастают;

$$5) G_1 = G_2, \quad \alpha = \pi/2.$$

Условием совместности уравнений (6.56) служит равенство (6.58). Если оно выполняется, из уравнений (6.56) определяются напряжения

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \xi_n,$$

$$6) G_1 = G_2, \quad \alpha = 3\pi/2.$$

Ограничение (6.58) является условием совместности уравнений (6.56). В случае совместности этих уравнений выполняется

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = -\xi_n.$$

Первые два из равенств (6.3) с использованием соотношений (6.47) приводятся к уравнениям (6.52), анализ линейной зависимости между которыми проведен в п.5. Возможные варианты ограничений на компоненты

напряжений в особой точке рассматриваемого составного ребра приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Ограничения на компоненты напряжений в особой точке в случае $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = 2\pi$

№	Условия на материальные параметры и параметры нагрузки	Ограничения на компоненты напряжений	Тип задачи
1	Не выполняется условие (6.46)	Ограничения несовместны	
2	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/2$. 3. $\nu_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$, $\nu_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. Равенства (6.47) 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}$, $\sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha}$, $\sigma_{32} = -\frac{G_1 \xi_m + G_2 \xi_n}{(G_1 - G_2) \cos \alpha}$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2)	Одиннадцать
3	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha = \pi/2$. 3. $G_1 \xi_m + G_2 \xi_n = 0$. 4. $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \sigma_{12}^{(2)} = -\xi_m$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2).	Десять
4	1. $G_1 \neq G_2, \alpha = \pi/2$. 2. $G_1 \xi_m + G_2 \xi_n \neq 0$,	Ограничения несовместны	
5	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha = 3\pi/2$. 3. $G_1 \xi_m + G_2 \xi_n = 0$. 4. $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = -\xi_n, \sigma_{12}^{(2)} = \xi_m$. 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2)	Десять
6	1. $G_1 \neq G_2, \alpha = 3\pi/2$. 2. $G_1 \xi_m + G_2 \xi_n \neq 0$	Ограничения несовместны	

№	Условия на материальные параметры и параметры нагрузки	Ограничения на компоненты напряжений	Тип задачи
7	1. $G_1 = G_2, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/2.$ 2. $\xi_m = -\xi_n.$ 3. $\nu_1 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$ $\nu_2 \neq \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{12}^{(1)} \sin \alpha + \sigma_{32} \cos \alpha = \xi_n.$ 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2)	Десять
8	1. $G_1 = G_2, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/2.$ 2. $\xi_n \neq -\xi_m$	Ограничения несовместны	
9	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 = G_2, \alpha = \pi/2.$ 3. $\xi_n = -\xi_m.$ 4. $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \xi_n, \sigma_{12}^{(2)} = \xi_n.$ 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2).	Десять
10	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 = G_2, \alpha = 3\pi/2.$ 3. $\xi_n = -\xi_m.$ 4. $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = -\xi_n.$ 3. Равенства (6.52). 4. Равенства (6.2)	Десять
11	1. Равенство (6.46). 2. $G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/2.$ 2. $\nu_1 = \nu_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1. Равенства (6.47). 2. $\sigma_{12}^{(1)} = \frac{G_1(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha},$ $\sigma_{12}^{(2)} = \frac{G_2(\xi_n + \xi_m)}{(G_1 - G_2) \sin \alpha},$ $\sigma_{32} = -\frac{G_1 \xi_m + G_2 \xi_n}{(G_1 - G_2) \cos \alpha}.$ 3. $\frac{1}{E_1} \sigma_{22}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{22}^{(2)} + ctg^2 \alpha \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{33} = 0.$ 4. Равенства (6.2)	Десять
12	1. $G_1 = G_2, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/2.$ 2. $\nu_1 = \nu_2 = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$	Случай изотропного однородного ребра, рассмотрен в п.5.3	

6.3. Примеры решения неклассических задач для составных конструкций

6.3.1. Температурное нагружение составного цилиндра

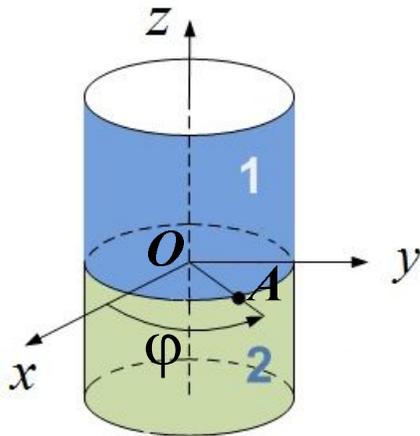


Рис. 6.2. Составной цилиндр

Рассматривается составной цилиндр радиуса $l=20$ мм, $R=5$ мм (рис.6.2). Элементы 1, 2, составляющие цилиндр, имеют материальные свойства: $E_1 = 0.206e6$ МПа, $E_2 = 0.7e5$ МПа, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,25$, $\Delta T = 100^\circ$. Ограничения на параметры состояния на линии особых точек (граница поверхности соединения) сформулированы в п.6.1 (случай $\alpha = \beta = \pi/2$). Это соотношения (6.26) и (6.21), что соответствует первой строке табл. 6.1.

Поэтому общее количество независимых ограничений на компоненты напряжений оказывается равным девяти. Это количество ограничений превышает задаваемое в классической задаче. Поэтому данная задача является неклассической. Ее решение итерационным численно-аналитическим методом приводится на рис.6.3–6.5.

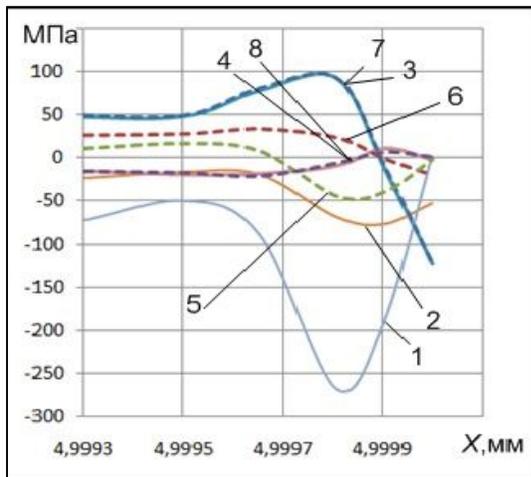


Рис. 6.3. Напряжения вблизи линии особых точек ($r=5$ мм; $z=10$ мм) вдоль оси r цилиндрической системы координат: 1 – $\sigma_{rr}^{(1)}$; 2 – $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$; 3 – $\sigma_{zz}^{(1)}$; 4 – $\sigma_{rz}^{(1)}$; 5 – $\sigma_{rr}^{(2)}$; 6 – $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$; 7 – $\sigma_{zz}^{(2)}$; 8 – $\sigma_{rz}^{(2)}$.

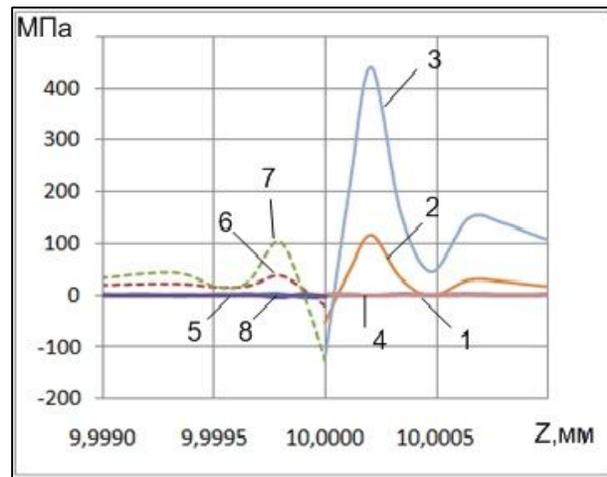


Рис. 6.4. Напряжения вблизи линии особых точек ($r=5$ мм; $z=10$ мм) вдоль оси z цилиндрической системы координат: 1 – $\sigma_{rr}^{(1)}$; 2 – $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$; 3 – $\sigma_{zz}^{(1)}$; 4 – $\sigma_{rz}^{(1)}$; 5 – $\sigma_{rr}^{(2)}$; 6 – $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$; 7 – $\sigma_{zz}^{(2)}$; 8 – $\sigma_{rz}^{(2)}$.

Показанные на этих рисунках напряжения, отнесенные к максимальным значениям σ_{zz} , с погрешностью, не превышающей 0,5%, удовлетворяют всем заданным ограничениям.

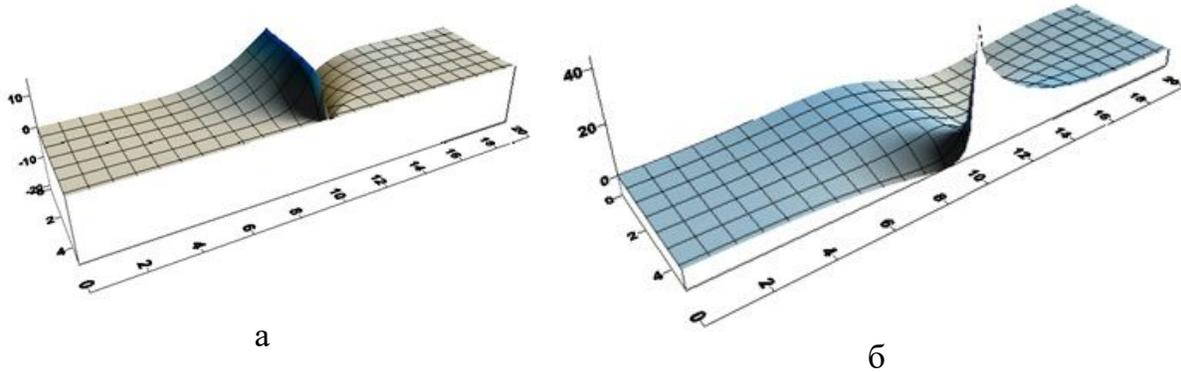
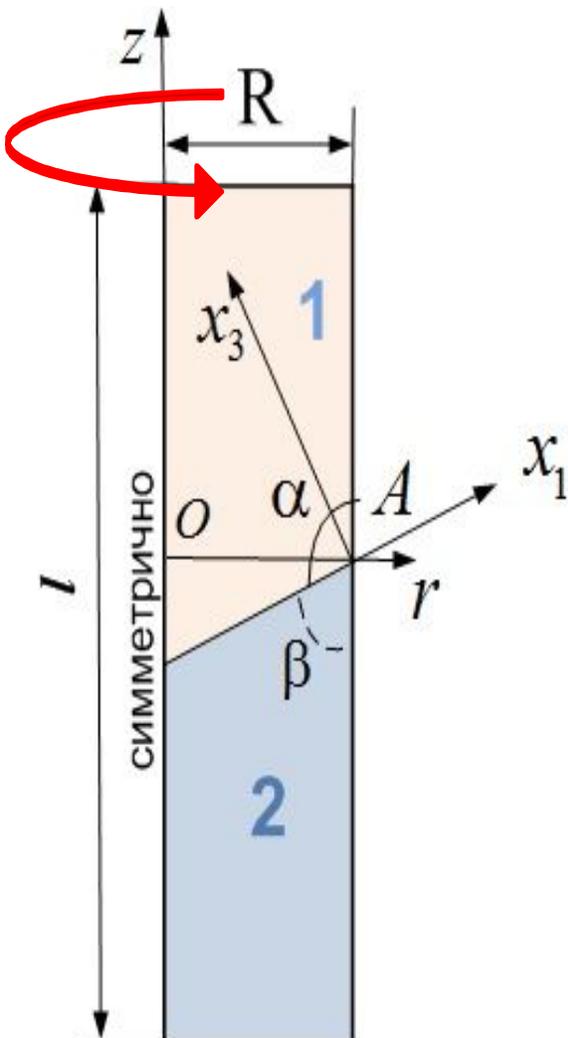


Рис.6.5. Поверхности напряжений осевого сечения цилиндра: а) σ_{rr} ; б) σ_{rz} .

6.3.2. Кручение составного цилиндра



Рассматривается составной цилиндр, элементы 1,2 которого соединяются по конической поверхности (рис.6.6). Материальные свойства элементов те же, что и в предыдущем примере. Геометрические параметры $l=80\text{см}$, $R=20\text{см}$, $\alpha = 95^\circ$, $\beta = 85^\circ$ ($\alpha + \beta = \pi$). Верхнее торцевое сечение цилиндра закручивается относительно нижнего на угол $\varphi = 0.57^\circ$. Независимые ограничения на напряжения в крайних точках поверхности соединения (точка A на рис. 6.6) в координатах x_1, x_2, x_3 сформулированы в п. 6.1 (случай 5 при $\Delta T = 0$).

Рис. 6.6. Осевое сечение составного цилиндра

Это соотношения (6.20), (6.20), а также равенства (6.2). Количество ограничений превышает количество ограничений в классическом случае, поэтому рассматриваемая задача является неклассической. Ее решение строится итерационным численно-аналитическим методом.

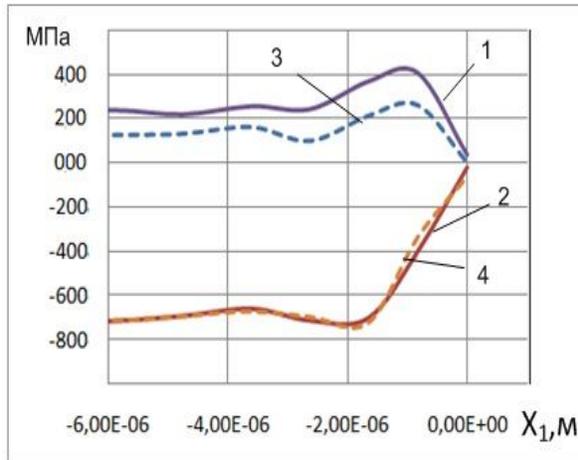


Рис.6.7. Физические компоненты тензоров напряжений в локальных координатах x_1, x_2, x_3 :

$$1 - \sigma_{12}^{(1)} ; 2 - \sigma_{32}^{(1)} ; 3 - \sigma_{12}^{(2)} ; 4 - \sigma_{32}^{(2)}$$

Отличные от нуля вблизи линии особых точек физические компоненты тензоров напряжений в локальной ортонормированной системе координат x_1, x_2, x_3 представлены на рис.6.7. Видно, что в крайних точках поверхности соединения все напряжения обращаются в нуль. В окрестности этих точек возникает концентрация напряжений, параметры которой определяются материальными и геометрическими характеристиками соединяемых элементов.

7. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКАХ РЕБРА ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

Важными примерами составного ребра, встречающегося на практике, являются слоистые среды. Край поверхности соединения конструктивных элементов в слоистых средах образует линию особых точек, которые являются потенциальными концентраторами напряжений. В главе в качестве примера слоистой среды рассматривается двухслойный круговой цилиндр со свободной торцевой поверхностью и нагруженный поверхностными силами.

7.1. Компоненты напряжений на линии особых точек свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра

7.1.1. Постановка задачи

Рассматривается двухслойный цилиндр. Его торцевое и осевое сечения представлены на рис.7.1, 7.2. Принимается, что торцевые поверхности составляющих цилиндров 1, 2 образуют ребро Γ .

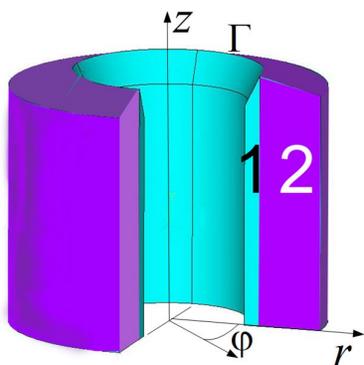


Рис.7.1. Торцевое сечение двухслойного цилиндра

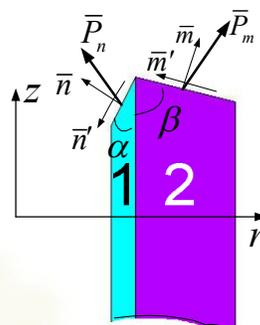


Рис. 7.2. Осевое сечение двухслойного цилиндра

Считается, что плоскости $\varphi = const$ являются нормальными плоскостями ребра Γ . Углы между касательными к линиям пересечения нормальной плоскости ребра Γ и общей образующей цилиндров 1, 2 обозначаются соответственно α, β (рис. 7.2). Область изменения параметров α, β задается неравенствами:

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad 0 < \alpha + \beta < 2\pi. \quad (7.1)$$

Через \bar{n}, \bar{m} обозначаются нормали в точках ребра Γ к касательным плоскостям поверхностей, образующих ребро. Через \bar{n}', \bar{m}' обозначаются

орты, перпендикулярные соответственно направлениям \bar{n} , \bar{m} . Приняты обозначения: E_k, G_k, V_k, ω_k ($k = 1, 2$) – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона и температурной деформации составляющих цилиндров; $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$, ($k = 1, 2$) – физические компоненты напряжений и деформаций; $\sigma_n, \tau_{n1}, \tau_{n2}$ – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно \bar{n}' и \bar{r}_2 (\bar{r}_2 – орт, определяющий угловое направление цилиндрической системы координат) на площадке, ориентируемой ортом \bar{n} ; $\sigma_m, \tau_{m1}, \tau_{m2}$ – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно \bar{m}' и \bar{r}_2 на площадке, ориентируемой ортом \bar{m} ; ΔT – приращение температуры. Считается, что на торцевом сечении отсутствует поверхностная нагрузка. К ребру (т. А) примыкают элементарные объемы скрепленных цилиндров 1, 2. В соответствии с принятой концепцией параметры состояния в этих элементарных объемах являются параметрами состояния в рассматриваемых особых точках. Для параметров состояния в элементарных объемах выполняются следующие условия:

1) равенство нулю поверхностных нагрузок

$$\sigma_n = 0, \tau_{n1} = 0, \tau_{n2} = 0; \sigma_m = 0, \tau_{m1} = 0, \tau_{m2} = 0; \quad (7.2)$$

2) непрерывность напряжений на поверхности соединения составляющих цилиндров

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}, \sigma_{r\phi}^{(1)} = \sigma_{r\phi}^{(2)} = \sigma_{r\phi}, \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} = \sigma_{rz}; \quad (7.3)$$

3) непрерывность деформаций на поверхности соединения составляющих элементов (следует из совпадения поверхностей скрепляемых тел с поверхностью соединения)

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \varepsilon_{zz}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\phi\phi}^{(1)} = \varepsilon_{\phi\phi}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\phi z}^{(1)} = \varepsilon_{\phi z}^{(2)}. \quad (7.4)$$

Через физические компоненты тензоров напряжений равенства (7.2) с использованием равенств (7.3) в цилиндрической системе координат запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{rr} \cos^2 \beta + 2\sigma_{rz} \cos \beta \sin \beta + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \beta \sin \beta + \sigma_{rz} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}
-\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha &= 0, \\
\sigma_{r\varphi} \cos \beta + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \beta &= 0
\end{aligned}
\tag{7.6}$$

Уравнения (7.5) являются автономной системой линейных однородных уравнений относительно компонент $\sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(2)}, \sigma_{rr}, \sigma_{rz}$. Определитель этой системы уравнений

$$\Delta = -\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \tag{7.7}$$

в области (7.1) изменения параметров α, β обращается в нуль в точках

$$\alpha + \beta = \pi. \tag{7.8}$$

Равенства (7.4) с использованием физических уравнений термоупругости и равенств (7.3) преобразуются к виду

$$\frac{1}{E_1} (\sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2} (\sigma_{zz}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}) + \omega_2 \Delta T, \tag{7.9}$$

$$\frac{1}{E_1} (\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{zz}^{(1)}) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)}) + \omega_2 \Delta T. \tag{7.10}$$

$$\frac{1}{G_1} \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{1}{G_2} \sigma_{z\varphi}^{(2)}. \tag{7.11}$$

Задача состоит в исследовании возможных решений построенных уравнений (7.5), (7.6), (7.9), (7.10), (7.11) и выявлении в зависимости от геометрических и материальных параметров независимых ограничений на параметры состояния в особых точках.

7.1.2. Построение ограничений на параметры состояния в особых точках

Ограничениями на параметры состояния в особых точках являются решения систем уравнений (7.5) и (7.6), (7.11). В этом пункте рассматриваются возможные случаи таких решений. Каждому случаю отвечает независимая постановка задачи, потому что ограничения в каждом случае различаются и количеством, и содержанием.

7.1.2.1. Случай $\alpha + \beta \neq \pi$.

Определитель (7.7) системы уравнений (7.5) не обращается в нуль. Ее решение

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = 0. \tag{7.12}$$

Равенства (7.9), (7.10) приводятся к системе уравнений относительно напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{v_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \\ -\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= (\omega_1 - \omega_2) \Delta T. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Определитель этой системы

$$\Delta_1 = \frac{1}{E_1 E_2} (v_1 - v_2) \quad (7.14)$$

обращается в нуль при выполнении равенства $v_1 = v_2$, поэтому возможны случаи

1) $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$. Система уравнений (7.13) однородна.

а) если $v_1 \neq v_2$, ее решение тривиально $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$.

б) если $v_1 = v_2$, уравнения (7.13) линейно зависимы. Напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ связаны равенством

$$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0; \quad (7.15)$$

2) $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$.

а) если $v_1 \neq v_2$, система уравнения (7.13) имеет решение

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

б) если $v_1 = v_2$, ранг расширенной матрицы уравнений (7.13) оказывается большим, чем ранг системы, поэтому она несовместна. Напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ при стремлении v_1 к v_2 в особых точках стремятся к неограниченно большим значениям.

Равенства (7.6), (7.11) образуют систему линейных однородных уравнений относительно напряжений $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{z\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{z\varphi}^{(2)}$. Определитель матрицы этой системы $\Delta_2 = \frac{1}{G_1} \sin \beta \cos \alpha + \frac{1}{G_2} \sin \alpha \cos \beta$ обращается в нуль при условии

$$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0. \quad (7.17)$$

Если условия (7.17) не выполняются, уравнения (7.6), (7.11) имеют тривиальное решение

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0. \quad (7.18)$$

Если условие (7.17) выполняется, ранг системы уравнений (7.6), (7.11) равен двум, напряжения $\sigma_{z\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{z\varphi}^{(2)}$ могут быть выражены через $\sigma_{r\varphi}$:

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta. \quad (7.19)$$

Рассмотренные выше случаи сведены в табл.7.1.

Таблица 7.1.

Ограничения на компоненты напряжений в особых точках для случая $\alpha + \beta \neq \pi$

№	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения (дополнительно к равенствам (7.3))	Количество ограничений
1	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $\nu_1 \neq \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$	Двенадцать
2	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $\nu_1 = \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$	Одиннадцать
3	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$ $\nu_1 \neq \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + \nu_2) E_1}{(\nu_1 - \nu_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + \nu_1) E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}$	Двенадцать
4	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$ $\nu_1 = \nu_2$	Ограничения, несовместны.	—

№	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения (дополнительно к равенствам (7.3))	Количество ограничений
5	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $\nu_1 \neq \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$	Одиннадцать
6	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $\nu_1 = \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$	Десять
7	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$ $\nu_1 \neq \nu_2$	$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + \nu_2) E_1}{(\nu_1 - \nu_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + \nu_1) E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}$	Одиннадцать
8	$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$ $\nu_1 = \nu_2$	Ограничения несовместны	—

Таким образом, для случая $\alpha + \beta \neq \pi$ возможны шесть различных вариантов формулировки ограничений в особых точках и, следовательно, шесть различных постановок задач МДГТ. Во всех этих вариантах, различающихся условиями для материальных и геометрических параметров, количество ограничений в особых точках превосходит количество обычно принимаемых авторами в подобных задачах ограничений, равное девяти (равенства (7.2), (7.3)). Это увеличение связано с включением в список ограничений соотношений (7.4), которые в случае различных материальных параметров составляющих цилиндров не выполняются тождественно.

7.1.2.2. Случай $\alpha + \beta = \pi$

Уравнения (5), (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ -(\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0. \\ -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha &= 0, \\ -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Ранг матрицы системы уравнений (7.20) равен трем. Следовательно, три компонента напряжений выражаются через четвертый:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}. \quad (7.22)$$

Из уравнений (7.21) следуют зависимости

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (7.23)$$

Соотношения (7.9), (7.10), (7.11) запишутся равенствами

$$\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + F \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (7.24)$$

$$-\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha = 0. \quad (7.26)$$

В этих равенствах обозначено

$$F = -\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) + \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2), \quad H = \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1).$$

Возможны следующие случаи решений системы уравнений (7.24), (7.25):

1) $\nu_1 \neq \nu_2$. Ранг системы уравнений (7.24), (7.25) равен двум.

Напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ можно выразить через напряжение σ_{rr} и приращение температуры:

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)} = -\frac{(F + H\nu_2)E_1\sigma_{rr}}{(\nu_1 - \nu_2)} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T(1 + \nu_2)E_1}{(\nu_1 - \nu_2)}, \quad (7.27)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(2)} = -\frac{(F + H\nu_1)E_2\sigma_{rr}}{(\nu_1 - \nu_2)} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T(1 + \nu_1)E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}; \quad (7.28)$$

2) $\nu_1 = \nu_2 \neq \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$. Ранг системы уравнений (7.24), (7.25) равен

двум. Определяется напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2)[ctg^2\alpha - \nu(1 + ctg^2\alpha)]} \quad (7.29)$$

и линейная комбинация

$$\frac{1}{E_1}\sigma_{\phi\phi}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{\phi\phi}^{(2)} = \frac{-ctg^2\alpha(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{ctg^2\alpha - \nu(1 + ctg^2\alpha)}; \quad (7.30)$$

3) $\nu_1 = \nu_2 = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$. Ранг системы уравнений (7.24), (7.25) равен

единице. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$. Ограничения на параметры состояния в особых точках несовместны. Когда геометрические и материальные параметры элемента конструкции стремятся к данному сочетанию, напряжения в особых точках неограниченно возрастают. При выполнении условия $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$ ранги матрицы системы уравнений (7.24), (7.25) и ее расширенной матрицы совпадают, уравнения становятся зависимыми. Любое из них определяет связь между напряжениями $\sigma_{\phi\phi}^{(1)}$, $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ и σ_{rr} ;

4) Из равенства (7.26) следует, что при выполнении какого-либо из условий

$$G_1 = G_2, \quad ctg \alpha = 0 \quad (7.31)$$

на напряжения $\sigma_{r\phi}$ ограничения не накладываются. Если ни одно из условий (7.31) не выполняется, напряжения $\sigma_{r\phi}$ подчиняются ограничению

$$\sigma_{r\phi} = 0. \quad (7.32)$$

Результаты данного пункта сведены в табл.7.2.

Ограничения в особых точках для случая $\alpha + \beta = \pi$

№	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения (дополнительно к равенствам (7.3))	Количество ограничений
1	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + Hv_2)E_1\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + v_2)E_1}{(v_1 - v_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + Hv_1)E_2\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + v_1)E_2}{(v_1 - v_2)}$	Одиннадцать
2	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 = v_2 = v \neq \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\frac{1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-ctg^2\alpha(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{ctg^2\alpha - v(1 + ctg^2\alpha)},$ $\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta TE_1E_2}{(E_1 - E_2)(ctg^2\alpha - v(1 + ctg^2\alpha))}$	Одиннадцать
3	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 = v_2 = v = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$	Ограничения несовместны	—
4	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + Hv_2)E_1\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + Hv_1)E_2\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$	Одиннадцать
5	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $v_1 = v_2 = v \neq \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $\frac{1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{rr} = 0$	Одиннадцать

№	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения (дополнительно к равенствам (7.3))	Количество ограничений
6	$(G_2 - G_1)ctg\alpha \neq 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $v_1 = v_2 = v = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$ $-\frac{1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H\sigma_{rr} = 0$	Десять
7	$(G_2 - G_1)ctg\alpha = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + Hv_2)E_1\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + v_2)E_1}{(v_1 - v_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + Hv_1)E_2\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + v_1)E_2}{(v_1 - v_2)}$	Десять
8	$(G_2 - G_1)ctg\alpha = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 = v_2 = v \neq \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha,$ $\frac{1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-ctg^2\alpha(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{ctg^2\alpha - v(1 + ctg^2\alpha)},$ $\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta TE_1E_2}{(E_1 - E_2)(ctg^2\alpha - v(1 + ctg^2\alpha))}$	Десять
9	$(G_2 - G_1)ctg\alpha = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0,$ $v_1 = v_2 = v = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha},$ $\alpha \neq \pi/2$	Ограничения, несовместны	—
10	$(G_2 - G_1)ctg\alpha = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\sigma_{rz} = ctg\alpha\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = ctg^2\alpha\sigma_{rr},$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}ctg\alpha,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + Hv_2)E_1\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + Hv_1)E_2\sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$	Десять

№	Условия на материальные параметры и ΔT	Ограничения (дополнительно к равенствам (7.3))	Количество ограничений
11	$(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$	$\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$ $\sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$ $\sigma_{z\phi}^{(1)} = \sigma_{r\phi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\phi}^{(2)} = \sigma_{r\phi} \operatorname{ctg} \alpha$	Десять
	$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\frac{1}{E_1} \sigma_{\phi\phi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\phi\phi}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{rr} = 0$	
12	$(G_2 - G_1) = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha},$ $\alpha \neq \pi/2$	Соединяемые элементы имеют одинаковые материальные параметры. Постановка упругой задачи совпадает с постановкой в классическом случае	
13	$G_2 \neq G_1,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$ $v_1 = v_2 = v,$ $\alpha = \pi/2$	$\sigma_{rz} = 0, \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{z\phi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\phi}^{(2)} = 0,$ $-\frac{1}{E_1} \sigma_{\phi\phi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\phi\phi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = 0$	Девять

Из табл. 7.2 видно, что для случая $\alpha + \beta = \pi$ возможны одиннадцать совместных вариантов формулировки ограничений в особых точках. В варианте 12 материальные параметры G и v соединяемых элементов совпадают, поэтому он отвечает нагружению однослойного цилиндра (при $\Delta T = 0$ различие коэффициентов ω_1 и ω_2 не сказывается на решении задачи). Равенства (7.24), (7.25), (7.26) выполняются тождественно. Задача становится классической. Во всех остальных вариантах количество ограничений в особых точках превосходит количество ограничений, вытекающих из равенств (7.2), (7.3), принимаемых во внимание в классическом подходе.

7.1.3. Пример. Температурное нагружение двухслойного полого цилиндра

Рассматривается температурное нагружение двухслойного полого цилиндра (рис. 7.1, 7.2) при следующих геометрических и материальных параметрах: $R = 0,1\text{м}$, $h_1 = 0,005\text{м}$, $h_2 = 0,001\text{м}$, $H = 0,3\text{м}$, $E_1 = 100\text{ГПа}$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,28$, $\omega_1 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $\omega_2 = 0,8 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $\Delta T = 100^\circ\text{C}$,

$\alpha = \beta = \pi / 2$. Жесткость внешнего цилиндра E_2 варьируется ($60 \div 146$ ГПа). В табл. 7.2. (случай 1) выписаны ограничения, накладываемые на физические компоненты напряжений. Решение задачи строится численно-аналитическим итерационным методом, описанным в работе [20]. Характерный размер конечно-элементной сетки вблизи точек ребра был равен $0.5 \cdot 10^{-5}$ м. Результаты вычислений приводятся на рис. 7.3 – 7.4.

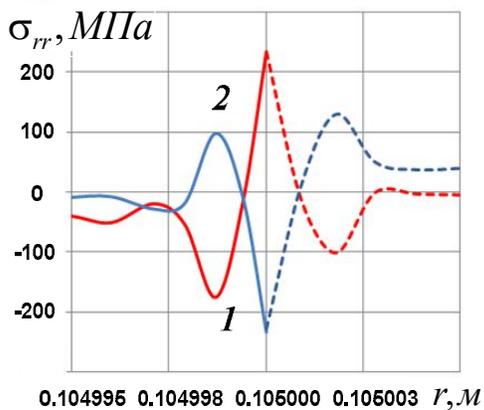
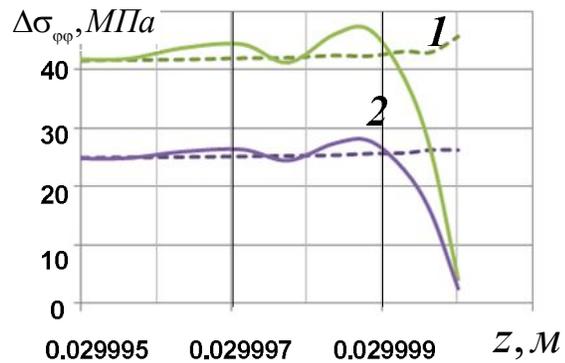
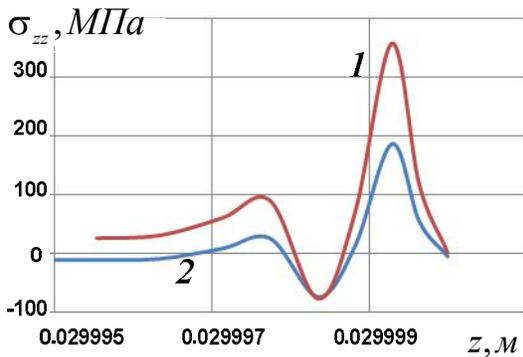


Рис.7.3. Напряжения σ_{rr} в точках торцевого сечения: сплошная линия – во внутреннем цилиндре, штриховая – во внешнем. 1 – $E_2 = 60$ ГПа; 2 – $E_2 = 146$ ГПа

На рис.7.3 показаны радиальные напряжения вблизи линии особых точек в торцевом сечении. Интересно, что знак этих напряжений зависит от жесткости цилиндров. При повышении температуры в точках края поверхности соединения напряжения растягивающие, если внутренний цилиндр более жесткий, и сжимающие – если менее жесткий. Это обстоятельство можно использовать, к примеру, в задачах защиты цилиндрических конструкций от коррозии.



а

б

Рис.7.4. Напряжения в окрестности особой точки вдоль образующей поверхности соединения цилиндров: 1 – внутренний цилиндр; 2 – внешний цилиндр, $E_2 = 60$ ГПа :

а) σ_{zz} ; б) невязка выполнения равенств (7.27), (7.28). Сплошная линия – итерационное решение; штриховая линия – ANSYS-решение.

На рис. 7.4,а показаны напряжения σ_{zz} в составляющих цилиндрах вблизи линии особых точек в направлении общей образующей. Видно, что эти

напряжения в окрестности особой точки имеют значительную величину, но равны нулю в самой точке, что согласуется с соотношениями, представленными в табл. 7.2.

На рис.7.4,б показана умноженная на разность $(v_1 - v_2)$ невязка выполнения равенств (7.27), (7.28). На линии особых точек торцевого сечения эти равенства должны выполняться, поэтому невязка в этих точках должна обращаться в нуль. Видно, что при приближении к линии особых точек невязка по равенствам (7.27), (7.28) в решении задачи стремится к нулю. В ANSYS-решении (классический подход), построенном на той же конечно-элементной сетке, ограничения (7.27), (7.28) на компоненты напряжений в особой точке не выполняются. Вне малой окрестности особой точки классическое и неклассическое решения совпадают.

7.2. Компоненты напряжений на линии особых точек нагруженной поверхностными усилиями торцевой поверхности слоистого цилиндра

7.2.1. Постановка задачи

Для нагрузки на торцевой поверхности цилиндра вводятся обозначения: $\bar{p}_n = p_n \bar{n} + q_n \bar{n}' + \xi_n \bar{r}_2$ – заданный вектор напряжений на образующей поверхности ребра Γ элемента 1; $\bar{p}_m = p_m \bar{m} + q_m \bar{m}' + \xi_m \bar{r}_2$ – заданный вектор напряжений на образующей поверхности ребра Γ элемента 2 (рис. 7.5, 7.6).

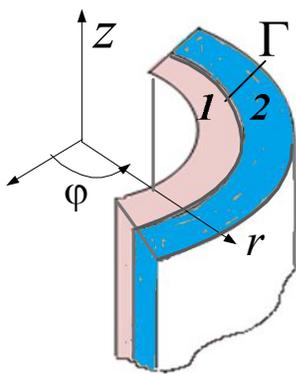


Рис.7.5. Торцевое сечение двухслойного цилиндра

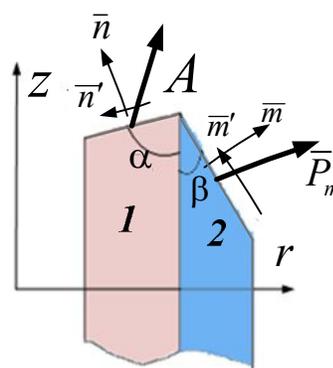


Рис. 7.6. Осевое сечение двухслойного цилиндра

Для параметров состояния в элементарных объемах, примыкающих к ребру Γ , выполняются следующие условия:

1) граничные условия для поверхностных нагрузок

$$\sigma_n = p_n, \tau_{n1} = q_n, \tau_{n2} = \xi_n; \quad (7.33)$$

$$\sigma_m = p_m, \tau_{m1} = q_m, \tau_{m2} = \xi_m;$$

2) непрерывность напряжений на поверхности соединения составляющих цилиндров (7.3);

3) непрерывность деформаций на поверхности соединения составляющих элементов (7.4).

Через компоненты тензоров напряжений равенства (7.33) с использованием равенств (7.3) в цилиндрической системе координат запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= p_n, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= q_n, \\ \sigma_{rr} \cos^2 \beta + 2\sigma_{rz} \cos \beta \sin \beta + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \beta &= p_m, \\ (\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \beta \sin \beta + \sigma_{rz} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= q_m. \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$-\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha = \xi_n, \quad (7.35)$$

$$\sigma_{r\varphi} \cos \beta + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \beta = \xi_m.$$

Уравнения (7.34) являются автономной системой линейных неоднородных уравнений относительно компонент $\sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(2)}, \sigma_{rr}, \sigma_{rz}$. Определитель этой системы уравнений

$$\Delta = -\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

в области (7.1) изменения параметров α, β обращается в нуль в точках (7.8).

Равенства (7.4) с использованием физических уравнений упругости и равенств (7.3) преобразуются к виду

$$\frac{1}{E_1} (\sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}) = \frac{1}{E_2} (\sigma_{zz}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}), \quad (7.36)$$

$$\frac{1}{E_1} (\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{zz}^{(1)}) = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)}). \quad (7.37)$$

$$\frac{1}{G_1} \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{1}{G_2} \sigma_{z\varphi}^{(2)}. \quad (7.38)$$

Задача состоит в изучении решений уравнений (7.34), (7.35), (7.36), (7.37), (7.58); выявлении в зависимости от геометрических и материальных параметров возможных вариантов постановок задач для рассматриваемого элемента конструкции; построении условий для параметров нагрузки, обеспечивающих совместность ограничений на параметры состояния в особых точках.

7.2.2. Исследование ограничений на параметры состояния в точках края поверхности соединения цилиндров

Возможны следующие случаи ограничений на компоненты напряжений в особых точках торцевого сечения двухслойного цилиндра.

1. Случай $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta \neq \pi$, $\alpha + \beta \neq 2\pi$.

В данном случае определитель системы уравнений (7.34) не обращается в нуль, ранг матрицы системы уравнений (7.34) равен четырем. Определители Δ_i ($i=1,2,3,4$) расширенной матрицы, получающиеся последовательной заменой столбцов матрицы системы столбцом свободных членов, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= p_n \sin \beta (\cos \beta \cos 2\alpha - \cos \alpha \sin \beta \sin \beta) + q_n \cos \alpha \sin \beta (2 \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) - \\ &\quad p_m \sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha + q_m \sin^2 \beta \cos^2 \alpha, \\ \Delta_2 &= -p_n \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta - q_n \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - p_m \sin \alpha (\sin \beta \cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \cos 2\beta) - \\ &\quad q_m \sin \alpha \cos \beta (2 \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha), \\ \Delta_3 &= p_n \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + q_n \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - p_m \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \alpha + \\ &\quad q_m \sin^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha, \\ \Delta_4 &= -p_n \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \beta - q_n \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - p_m \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + q_m \sin^2 \beta \sin^2 \alpha.\end{aligned}\tag{7.39}$$

Решение уравнений (7.34) запишется формулами

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \sigma_{rz} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \sigma_{rr} = \frac{\Delta_4}{\Delta}.\tag{7.40}$$

Равенства (7.35), (7.38) образуют замкнутую систему уравнений относительно напряжений $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{z\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{z\varphi}^{(2)}$. Определитель матрицы этой системы обращается в нуль при условии

$$G_2 \operatorname{ctg} \alpha + G_1 \operatorname{ctg} \beta = 0.\tag{7.41}$$

Если условие (7.41) не выполняется, уравнения (7.35), (7.38) имеют единственное решение:

$$\begin{aligned}\sigma_{z\varphi}^{(1)} &= \frac{G_1 (\xi_m \cos \alpha + \xi_n \cos \beta)}{G_1 \sin \alpha \cos \beta + G_2 \cos \alpha \sin \beta}, \\ \sigma_{z\varphi}^{(2)} &= \frac{G_2 (\xi_m \cos \alpha + \xi_n \cos \beta)}{G_1 \sin \alpha \cos \beta + G_2 \cos \alpha \sin \beta}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{G_1 \xi_m \sin \alpha - G_2 \xi_n \sin \beta}{G_1 \sin \alpha \cos \beta + G_2 \cos \alpha \sin \beta}.\end{aligned}\tag{7.42}$$

Если условие (7.41) выполняется, уравнения (7.35), (7.38) будут совместны лишь в случае, когда ранг расширенной матрицы будет равен рангу матрицы системы (7.35), (7.38), т.е. двум. Это требование приводит к

необходимости выполнения двух равенств (обращение в нуль трех возможных определителей расширенной матрицы)

$$\xi_m \cos \alpha + \xi_n \cos \beta = 0, \quad G_1 \xi_m \sin \alpha - G_2 \xi_n \sin \beta = 0. \quad (7.43)$$

Рассматривая равенства (7.43) как систему уравнений относительно параметров нагрузки ξ_n, ξ_m , легко убедиться, что при выполнении зависимости (7.41) ранг системы уравнений (7.43) равен единице. Следовательно, фактически уравнения (7.43) представляют собой одно соотношение, которое является условием, накладываемым на параметры ξ_n, ξ_m , обеспечивающим совместность ограничений (7.35), (7.38). Напряжения $\sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}, \sigma_{r\varphi}$ оказываются связанными соотношениями

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha = \xi_n + \sigma_{r\varphi} \cos \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \beta = \xi_m - \sigma_{r\varphi} \cos \beta. \quad (7.44)$$

Если условие (7.43) не выполняется одновременно с условием (7.41), то представительные объемы цилиндров, примыкающие к ребру Γ , являются материальными точками сингулярного поведения напряжений $\sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}, \sigma_{r\varphi}$.

Обратимся к равенствам (7.36), (7.37). Они содержат оставшиеся неопределенными напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$:

Примем обозначения

$$f = -\frac{1}{E_1}(\sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr}) + \frac{1}{E_2}(\sigma_{zz}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr}), \quad (7.45)$$

$$g = -\frac{\nu_1}{E_1}(\sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{rr}) - \frac{\nu_2}{E_2}(\sigma_{zz}^{(2)} + \sigma_{rr}).$$

Равенства (7.36), (7.37) запишутся системой уравнений

$$-\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = f, \quad (7.46)$$

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = g.$$

Определитель матрицы этой системы уравнений

$$\Delta = \frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 E_2}$$

обращается в нуль при $\nu_1 = \nu_2$. Поэтому, если $\nu_1 \neq \nu_2$, из уравнений (7.45) следует

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{E_1(f + \nu_2 g)}{\nu_2 - \nu_1}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{E_2(f + \nu_1 g)}{\nu_2 - \nu_1}. \quad (7.47)$$

Когда коэффициенты Пуассона составляющих цилиндров одинаковы ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$), уравнения (7.45) будут совместны при выполнении условия

$$f + \nu g = 0, \quad (7.48)$$

которое вследствие равенств (7.40), (7.44) зависит от материальных, геометрических параметров скрепляемых тел и от приложенной нагрузки. Если сочетание этих параметров таково, что равенство (7.48) оказывается выполненным, между напряжениями $\sigma_{\text{фф}}^{(1)}$ и $\sigma_{\text{фф}}^{(2)}$ будет справедлива любая из зависимостей (7.46). Если равенство (7.48) нарушается, эти компоненты напряжений в особых точках становятся сингулярными. В табл. 2.1 приводятся результаты данного пункта – условия на материальные и геометрические характеристики, условия на нагрузку, ограничения на параметры состояния в особых точках, отвечающие каждому случаю постановки краевой задачи.

Таблица 2.1

Ограничения на параметры состояния в особых точках для случая $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq 2\pi$

№	Условия на материальные и геометрические параметры	Условия на нагрузку	Ограничения на параметры состояния	Количество ограничений
1	$G_2 \text{ctg} \alpha + G_1 \text{ctg} \beta \neq 0,$ $v_1 \neq v_2$	Нет	Формулы (7.3), (7.40), (7.42) и (7.47)	Двенадцать
2	$G_2 \text{ctg} \alpha + G_1 \text{ctg} \beta = 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\xi_m \cos \alpha + \xi_n \cos \beta \neq 0$	Ограничения несовместны	—
3	$G_2 \text{ctg} \alpha + G_1 \text{ctg} \beta = 0,$ $v_1 \neq v_2$	$\xi_m \cos \alpha + \xi_n \cos \beta = 0$	Формулы (7.3), (7.40), (7.44), (7.47)	Одиннадцать
4	$G_2 \text{ctg} \alpha + G_1 \text{ctg} \beta = 0,$ $v_1 = v_2 = v$	$f + vg \neq 0$	Ограничения несовместны	—
5	$G_2 \text{ctg} \alpha + G_1 \text{ctg} \beta = 0,$ $v_1 = v_2 = v$	$f + vg = 0$	Формулы (7.3), (7.40), (?42), $\frac{1}{E_1} \sigma_{\text{фф}}^{(1)} = g + \frac{1}{E_2} \sigma_{\text{фф}}^{(2)}$	Одиннадцать

В каждом из приведенных вариантов количество задаваемых ограничений в особых точках превышает количество ограничений, задаваемых в граничных точках при постановке классической задачи упругости.

2. $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$.

Ранг матрицы системы уравнений (7.34) равен трем. Она будет совместной, если определители (7.39) одновременно обратятся в нуль. Это условие накладывает ограничение на нагрузку

$$(p_n - p_m) \cos \alpha + (q_n - q_m) \sin \alpha = 0. \quad (7.49)$$

При выполнении равенства (7.49) из уравнений (7.34) находятся зависимости между компонентами напряжений в особых точках

$$\sigma_{zz}^{(1)} = p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2q_n ctg \alpha + \sigma_{rr} ctg^2 \alpha, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = -2p_n ctg^2 \alpha - 2q_n ctg \alpha + \frac{P_m}{\sin^2 \alpha} + \sigma_{rr} ctg^2 \alpha, \quad (7.50)$$

$$\sigma_{rz} = -p_n ctg \alpha - q_n + \sigma_{rr} ctg \alpha.$$

Если равенства (7.49) не выполняются, уравнения (7.34) несовместны. Равенства (7.35), (7.38) образуют систему уравнений, определитель которой обращается в нуль, если $G_1 = G_2$ или $\alpha = \pi/2$. Поэтому возможны такие случаи решения этих уравнений:

$$1) \quad G_1 \neq G_2, \alpha \neq \pi/2.$$

Ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы и равен трем. Уравнения (7.35) и (7.38) имеют единственное решение

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{(\xi_m - \xi_n)G_1}{(G_2 - G_1)\sin \alpha}, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \frac{(\xi_m - \xi_n)G_2}{(G_2 - G_1)\sin \alpha}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{(G_1\xi_m - G_2\xi_n)}{(G_2 - G_1)\cos \alpha}. \quad (7.51)$$

$$2) \quad G_1 = G_2, \alpha \neq \pi/2.$$

Уравнения (7.35) и (7.38) будут совместны при ограничении на компоненты нагрузки

$$\xi_n = \xi_m. \quad (7.52)$$

Если равенство (7.52) выполняется, между напряжениями $\sigma_{z\varphi}^{(1)}$ и $\sigma_{z\varphi}^{(2)}$ справедливы зависимости

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{z\varphi}^{(2)}, \quad \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} ctg \alpha + \frac{\xi_n}{\sin \alpha} \quad (7.53)$$

При нарушении условия (7.52) уравнения (7.35), (7.38) несовместны.

$$3) \quad G_1 \neq G_2, \alpha = \pi/2.$$

Уравнения (7.35) и (7.38) совместны при ограничении на нагрузку

$$G_1\xi_n - G_2\xi_m = 0. \quad (7.54)$$

При выполнении равенства (7.54) из уравнений (7.35), (7.38) определяются напряжения

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \xi_n, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \xi_m. \quad (7.55)$$

Если равенство (7.54) нарушается, уравнения (7.35), (7.38) становятся несовместными.

$$4) \quad G_1 = G_2, \alpha = \pi/2.$$

Условием совместности уравнений (7.35), (7.38) служит равенство (7.52). Если оно выполняется, из уравнений (7.35), (7.38) следуют равенства (7.55). Когда равенство (7.52) нарушается, уравнения (7.35), (7.38) становятся несовместными.

Равенства (7.36), (7.37) с использованием соотношений (7.50) приводятся к двум уравнениям относительно трех компонент напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$, σ_{rr} :

$$-\frac{\nu_1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - F\sigma_{rr} = f_3, \quad (7.56)$$

$$\frac{1}{E_1}\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - P\sigma_{rr} = g_3,$$

где обозначено

$$F = \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) - \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) ctg^2 \alpha, \quad H = \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) - (1 - ctg^2 \alpha),$$

$$f_3 = -\frac{1}{E_1}h_1 + \frac{1}{E_2}h_2, \quad f_3 = \frac{\nu_1}{E_1}h_1 - \frac{\nu_2}{E_2}h_2,$$

$$h_1 = p_n(1 - ctg^2 \alpha) - 2q_n ctg \alpha, \quad h_2 = h_1 - \frac{p_n - p_m}{\sin^2 \alpha}.$$

Ранг матрицы системы уравнений (7.56) определяется значением трех определителей, которые можно построить из двух строк и трех столбцов

$$\Delta_1 = \frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 E_2}, \quad \Delta_2 = \frac{F + \nu_1 H}{E_1}, \quad \Delta_3 = \frac{F + \nu_2 H}{E_2}.$$

Если $\nu_1 \neq \nu_2$, определитель $\Delta_1 \neq 0$, ранг матрицы системы уравнений (7.56) равен двум, уравнения независимы. Если $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, определители Δ_2 и Δ_3 одновременно обращаются в нуль при условии

$$F + \nu H = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) (1 + \nu) [\nu + (\nu - 1) ctg^2 \alpha] = 0,$$

т.е. при

$$\nu^* = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}. \quad (7.57)$$

Когда выполняется условие $\nu_1 = \nu_2 = \nu \neq \nu^*$, уравнения (7.56) линейно независимы, они образуют два ограничения на компоненты напряжений в особых точках. В частности, из них определяется напряжение σ_{rr} :

$$\sigma_{rr} = -\frac{f_3 + \nu g_3}{F + \nu H}.$$

Когда коэффициенты Пуассона равны величине (7.57), ранг системы уравнений (7.56) становится равным единице. Она будет совместной лишь при условии, что на компоненты вектора нагрузки наложено ограничение

$$E_2 h_1 - E_1 h_2 = 0. \quad (7.58)$$

В заключение этого пункта приводятся формулы для ограничений на напряжения в особых точках в часто встречающемся случае, когда $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$. Условие совместности (7.49) принимает вид

$$q_n = q_m. \quad (7.59)$$

Из равенств (7.50) следует

$$\sigma_{zz}^{(1)} = p_n, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = p_m, \quad \sigma_{rz} = -q_n. \quad (7.60)$$

Напряжения $\sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}$ при выполнении ограничения (7.54) вычисляются по формулам (7.55). Равенства (7.56) приводятся к виду

$$-\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{rr} = -\frac{p_n}{E_1} + \frac{p_m}{E_2}, \quad (7.61)$$

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{rr} = \frac{\nu_1 p_n}{E_1} - \frac{\nu_2 p_m}{E_2}.$$

Ранг матрицы системы уравнений (7.61) для различных материалов равен двум. Если между материальными параметрами имеется зависимость $E_2 \nu_1 = E_1 \nu_2$, напряжения σ_{rr} исключаются из уравнений (7.61), а напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ однозначно определяются из них

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{p_n(1-\nu_1\nu_2)}{(\nu_1-\nu_2)} + \frac{p_m(\nu_2^2-1)E_1}{(\nu_1-\nu_2)E_2}, \quad (7.62)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{p_m(\nu_1\nu_2-1)}{(\nu_1-\nu_2)} + \frac{p_n(1-\nu_1^2)E_2}{(\nu_1-\nu_2)E_1}.$$

В случае, когда $\nu_1 = \nu_2$, но $E_1 \neq E_2$ ранг матрицы системы уравнений (7.61) также равен двум. Из нее определяется напряжение σ_{rr} :

$$\sigma_{rr} = \frac{(1-\nu)(p_n E_2 - p_m E_1)}{\nu(E_2 - E_1)}$$

и зависимость между напряжениями $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$:

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{E_1} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}}{E_2} = \frac{p_n}{E_1} - \frac{p_m}{E_2}.$$

Во всех приведенных в этом пункте возможных вариантах ограничений на параметры состояния в особых точках участвуют ограничения, обусловленные равенствами (7.36), (7.37), (7.38), не используемые в классической постановке задачи МДТГ. Эти ограничения делают задачи для рассматриваемых тел с особыми точками неклассическими.

7.2.2. Пример. Растяжение полого двухслойного цилиндра

Рассматривается полый двухслойный круговой цилиндр, подвергаемый растяжению вдоль оси z распределенной нагрузкой p_0 , приложенной на торцевой поверхности. Углы α и β равны 90° . Геометрические размеры цилиндра: внутренний радиус 5мм, внешний радиус 9мм, толщина внутреннего цилиндра 2мм, высота 20мм. Материальные параметры для внутреннего

цилиндра $E=210\text{ГПа}$, $\nu=0.28$, для внешнего $E=110\text{ГПа}$, $\nu=0.35$. Задача осесимметрична и имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси цилиндра и проходящую через его центр. Поэтому решение в окрестности точки края поверхности соединения цилиндров строится в осевом сечении элемента конструкции для его верхней половины (рис. 7.7).

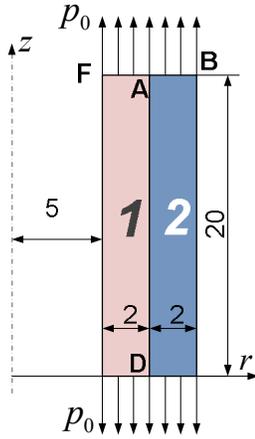


Рис. 7.7. Расчетная схема. FB – торцевая поверхность цилиндра, AD – поверхность соединения составляющих, A – край поверхностей соединения (особая точка)

Используется численно-аналитический итерационный метод (разд. 2). Результаты вычислений приводятся на рис. 7.8 – 7.9.

Из рис. 7.8 – 7.9 видно, что вблизи точки A компоненты напряжений, σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} претерпевают значительные изменения. Отношения их максимальных значений к приложенной нагрузке p_0 (коэффициент концентрации) превышает значение три. Приведенное решение удовлетворяет всем условиям, сформулированным в п.7.2.2 для рассматриваемой задачи.

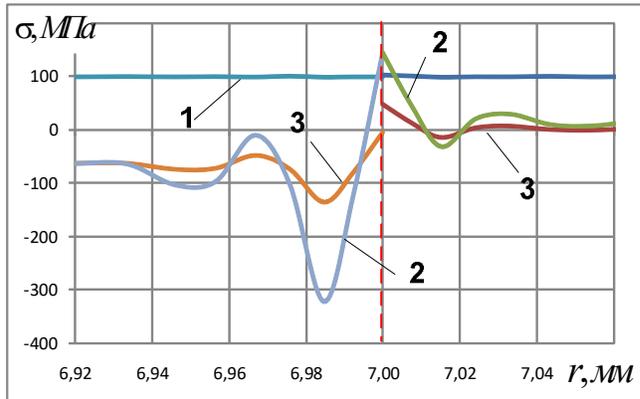


Рис. 7.8. Напряжения на торцевой поверхности в окрестности точки A : 1 – σ_{zz} , 2 – σ_{rr} , 3 – $\sigma_{\varphi\varphi}$

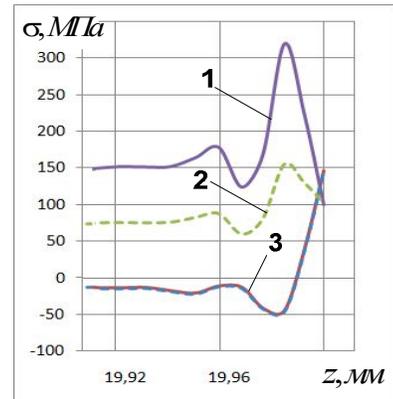


Рис. 7.9. Напряжения в точках поверхности соединения AD : 1 – $\sigma_{zz}^{(1)}$, 2 – $\sigma_{zz}^{(2)}$, 3 – σ_{rr}

8. Ограничения на компоненты напряжений во внутренней особой точке упругой составной конструкции

В настоящей главе развиваемый авторами подход применяется для изучения ограничений на параметры состояния во внутренней особой точке плоской и пространственной составной конструкции [26]. Внутренние особые точки характерны, в частности, для композитных материалов, наполненных элементами, содержащими угловые точки и ребра. Исследования НДС в таких точках актуальны, так как при определенных условиях внутренняя особая точка

может оказаться значительным концентратором напряжений, что, в частности, показано в статье [78] при исследовании методом фотоупругости растяжения составной полосы. Поведение поля напряжений в плоской задаче вблизи внутренней угловой точки классическими методами рассматривалось, например, в работах [6, 9, 22, 24, 34, 77, 78 и др.].

8.1. Постановка плоской задачи

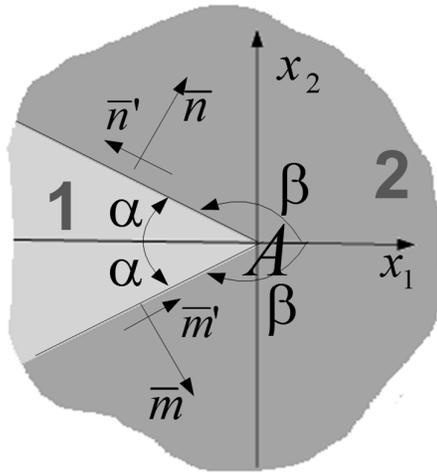


Рис.8.1. Внутренняя особая точка в плоской задаче

Рассматриваются непрерывно соединенные по образующим два плоских изотропных клина 1, 2 с общей вершиной в точке A (рис. 8.1). Принимается, что механическая и температурная нагрузка на тело с данной особенностью обуславливает плосконапряженное состояние в окрестности точки A . Углы при вершинах составляющих клиньев обозначаются 2α и 2β (при этом

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad \alpha + \beta = \pi).$$

Внешние нормали к образующим клина 1 обозначены \bar{n} , \bar{m} , перпендикулярные к ним орты: \bar{n}' , \bar{m}' . По общей биссектрисе клиньев направлена ось x_1 декартовой ортонормированной системы координат. Ось x_2 направлена так, чтобы система координат Ax_1x_2 была правосторонней. Для напряжений и деформаций приняты обозначения: $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$; E_k – модули Юнга, ν_k – коэффициенты Пуассона, G_k – модули сдвига, ω_k – коэффициенты температурного расширения, ($i, j = 1, 2, k = 1, 2$), ΔT – однородное приращение температуры. Индекс k здесь и далее указывает составляющий клин. Согласно принятой концепции в окрестности точки A рассматриваются две особые точки. Это элементарный объем тела 1, стягиваемый к точке A , и элементарный объем тела 2, стягиваемый к этой же точке. Указанные элементарные объемы находятся в однородном НДС и взаимодействуют по линиям контура разграничивающего тела 1, 2. Это взаимодействие характеризуется условиями:

- равенство нормальных напряжений

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_{-n}^{(2)}, \quad \sigma_m^{(1)} = \sigma_{-m}^{(2)}, \quad (8.1)$$

- равенство касательных напряжений

$$\tau_{n'}^{(1)} = \tau_{-n'}^{(2)}, \quad \tau_{m'}^{(1)} = \tau_{-m'}^{(2)}, \quad (8.2)$$

- равенство относительных удлинений в направлении общих образующих

$$\eta_{n'}^{(1)} = \eta_{-n'}^{(2)}, \quad \eta_{m'}^{(1)} = \eta_{-m'}^{(2)}, \quad (8.3)$$

- равенство нулю суммы изменений углов при вершине составляющих клиньев

$$\varphi + \psi = 0, \quad (8.4)$$

где φ – изменение угла 2α , ψ – изменение угла 2β .

С введением обозначений

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \xi_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (8.5)$$

равенства (8.1), (8.2) запишутся системой четырех линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin^2 \alpha + 2\zeta_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \zeta_{11} \sin^2 \alpha - 2\zeta_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{12} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \zeta_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{12} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \zeta_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Кинематические соотношения (8.3), (8.4) при условии, что $\alpha \neq \pi/2$, – системой трех однородных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_{11} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \xi_{11} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \xi_{11} \cos^2 \alpha - \xi_{22} \sin^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

При построении третьего из уравнений (8.7) использовалась формула (2.15).

Когда $\alpha = \pi/2$, углы 2α и 2β становятся развернутыми углами. Поскольку при деформировании сплошной среды в малой окрестности точки прямые переходят в прямые, сдвиг между линейными элементами, образующими развернутый угол, равен нулю. Поэтому условие (8.4) выполняется автоматически, необходимость в третьем уравнении системы (8.7) отпадает.

Задача состоит в исследовании свойств решений системы уравнений (8.6), (8.7) в зависимости от материальных параметров элементов составного клина.

8.1.1. Исследование свойств решений системы уравнений (8.6), (8.7)

Ранг системы уравнений (8.6) при выполнении условия $\alpha \neq \pi/2$ равен трем. Ее решение в этом случае лишь нулевое, следовательно, тензор напряжений в вершине клина непрерывен:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}. \quad (8.8)$$

При том же условии ($\alpha \neq \pi/2$) ранг системы уравнений (8.7) также равен трем, из чего следует

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}, \quad (8.9)$$

т. е. деформации в особой точке также непрерывны. Заметим, что условие $\alpha = \pi/2$ отвечает условию отсутствия внутренней угловой точки.

Равенства (8.9) с использованием физических уравнений записываются через напряжения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22} &= Q, \\ \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$.

Первые два уравнения (8.10) образуют автономную систему. Ее определитель

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2} [(E_2(1 - \nu_1) - E_1(1 - \nu_2))(E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2))] \quad (8.11)$$

обращается в нуль при условиях

$$1) (E_2(1 - \nu_1) = E_1(1 - \nu_2)); \quad 2) (E_2(1 + \nu_1) = E_1(1 + \nu_2)), \text{ т.е. } G_1 = G_2. \quad (8.12)$$

Поэтому возможны следующие случаи решения уравнений (8.10):

1. Условия (8.12) не выполняются. Уравнения (8.10) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)\Delta T E_1 E_2}{(E_2(1 - \nu_1) - E_1(1 - \nu_2))}, \quad \sigma_{12} = 0, \quad (8.13)$$

напряженное состояние в вершине клина полностью определено.

2. Выполняется первое из уравнений (8.12), но не выполняется второе. В данном случае решение зависит от значения Q :

а) $Q \neq 0$. Первые два уравнения системы (8.10) несовместны. Вершина клина – точка сингулярного поведения решения.

б) $Q = 0$. (Либо $\Delta T = 0$, либо $\omega_1 = \omega_2$). Из уравнений (8.10) следуют зависимости для напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = 0.$$

3. Выполняется второе из условий (8.12), но не выполняется первое. Первые два из уравнений (8.10) совместны. Из них следует зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{Q E_1 E_2}{(E_2 - E_1)},$$

из третьего уравнения σ_{12} не определяется, т.к. в данном случае $G_1 = G_2$.

4. Выполняется и первое, и второе из условий (8.12). Ранг матрицы системы первых двух уравнений системы (8.10) равен нулю, так как в данном случае оказывается, что $E_1 = E_2$ и $\nu_1 = \nu_2$. Уравнения (8.10) совместны лишь при условии $Q = 0$. Если $Q \neq 0$, особая точка является точкой сингулярности для напряжений.

Как видим, в зависимости от сочетания материальных параметров в особой точке накладываются различные ограничения на компоненты напряжений. Эти ограничения не следуют только из условий, принимаемых в классической постановке задачи (условия непрерывности перемещений, нормальных и касательных напряжений на линиях соединения тел 1,2). Зависимость ограничений в особой точке от физических уравнений говорит о том, что они в классическом решении задачи не обязаны выполняться. Поэтому в случаях, когда такие ограничения имеются, задача МДТТ для тела с внутренней особой точкой не является классической. Задаваемые в ней ограничения, обусловленные физическими уравнениями, должны рассматриваться как независимые.

8.2. Постановка пространственной задачи

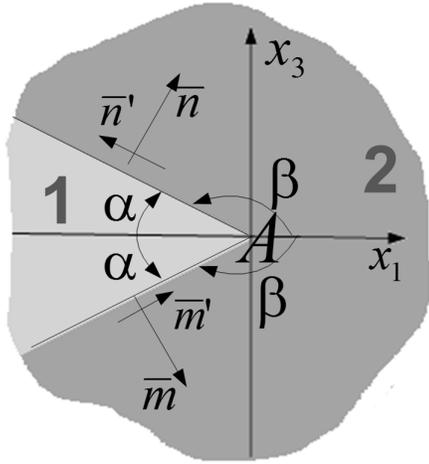


Рис.8.2. Внутренняя особая точка в пространственной задаче

Рассматриваются два изотропных деформируемых тела, скрепленных по поверхностям таким образом, что образуется внутреннее ребро Γ (рис. 8.2). В произвольной точке A ребра Γ построим его нормальное сечение и введем ортонормированный базис $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, орт \bar{r}_1 направим по биссектрисе угла 2α , в вершине угла тела 1 в сторону тела 2.

Орт \bar{r}_3 в нормальном сечении ребра Γ перпендикулярно орту \bar{r}_1 , а \bar{r}_2 – по касательной к ребру Γ так, чтобы тройка векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ оказалась правой. С построенными ортами связываем ортонормированную систему координат Ax_1, x_2, x_3 . Примем, что векторы нормалей \bar{n}, \bar{m} к поверхности тел 1, 2 в точке A лежат в нормальном сечении ребра Γ в этой точке. Обозначения, принятые в п.8.1, сохраняются, но $(i, j = 1, 2, 3)$. В точке A ребра Γ для содержащих ее элементарных объемов – особых точек тел 1, 2 выполняются следующие условия:

- равенство нормальных напряжений

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_{-n}^{(2)}, \quad \sigma_m^{(1)} = \sigma_{-m}^{(2)}; \quad (8.14)$$

- равенство касательных напряжений

$$\tau_{n,n'}^{(1)} = \tau_{-n,-n'}^{(2)}, \quad \tau_{m,m'}^{(1)} = \tau_{-m,-m'}^{(2)}, \quad \tau_{n,r_2}^{(1)} = \tau_{-n,-r_2}^{(2)}, \quad \tau_{m,r_2}^{(1)} = \tau_{-m,-r_2}^{(2)} \quad (8.15)$$

(первый нижний индекс указывает площадку, второй – направление действия);

- равенство относительных удлинений и сдвигов в касательных плоскостях к поверхности скрепления тел в точке A

$$\eta_{n'}^{(1)} = \eta_{n'}^{(2)}, \quad \eta_{m'}^{(1)} = \eta_{m'}^{(2)}, \quad \eta_{r_2}^{(1)} = \eta_{r_2}^{(2)}, \quad (8.16)$$

$$\eta_{n',r_2}^{(1)} = \eta_{n',r_2}^{(2)}, \quad \eta_{m'}^{(1)} = \eta_{m',r_2}^{(2)},$$

(параметры, помеченные одним индексом внизу – относительные удлинения, двумя – сдвиги);

- равенство нулю суммы изменений углов 2α и 2β

$$\varphi + \psi = 0. \quad (8.17)$$

В малой окрестности точки сплошной среды вследствие ее деформирования плоскости переходят в плоскости. Этот факт остается справедливым и в случае точки A , являющейся вершиной составного клина в плоскости $x_1 x_3$, поэтому и сохраняется полный угол с центром в точке A . С использованием обозначений (8.5) условия (8.14), (8.15) запишутся равенствами

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin^2 \alpha + \zeta_{13} \sin 2\alpha + \zeta_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \zeta_{11} \sin^2 \alpha - \zeta_{13} \sin 2\alpha + \zeta_{33} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \zeta_{13} \cos 2\alpha + \zeta_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \zeta_{13} \cos 2\alpha - \zeta_{33} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{12} \sin \alpha + \zeta_{23} \cos \alpha &= 0, \\ \zeta_{12} \sin \alpha - \zeta_{23} \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Кинематические соотношения (8.16), (8.17) – равенствами

$$\begin{aligned} \xi_{11} \cos^2 \alpha - \xi_{13} \sin 2\alpha + \xi_{33} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \xi_{11} \cos^2 \alpha + \xi_{13} \sin 2\alpha + \xi_{33} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \xi_{22} &= 0, \\ -\xi_{11} \cos \alpha + \xi_{32} \sin \alpha &= 0, \\ \xi_{11} \cos \alpha + \xi_{32} \sin \alpha &= 0, \\ \xi_{11} \cos^2 \alpha - \xi_{33} \sin^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Последнее равенство справедливо при $\sin 2\alpha \neq 0$ ($\alpha \neq \pi/2$). Оно получено с использованием формулы (2.15).

Задача состоит в исследовании свойств решений системы уравнений (8.18) — (8.20) в зависимости от материальных параметров элементов составного клина.

8.2.1. Исследование свойств систем уравнений (8.18) - (8.20)

Если $\alpha \neq \pi/2$ (т. е. при наличии угловой точки), ранги систем уравнений (8.18), (8.19) соответственно равны трем и двум. Следовательно, они имеют

лишь нулевое решение, поэтому компоненты тензоров напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в особой точке непрерывны:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (8.21)$$

Система уравнений (8.20) при условии $\alpha \neq \pi/2$ также имеет лишь нулевое решение, следовательно,

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (8.22)$$

что означает непрерывность всех компонент деформаций составляющих ребер во внутренней особой точке.

С использованием физических уравнений равенства (8.22) запишем в напряжениях

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Первые три из уравнений (8.23) образуют автономную систему для компонент $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. Определитель этой системы

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2} [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]$$

обращается в нуль при выполнении условий

$$E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0 \quad (G_1 = G_2), \quad (8.24)$$

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0. \quad (8.25)$$

Поэтому возможны следующие варианты решений уравнений (8.23):

1. Условия (8.24) и (8.25) не выполняются. Система уравнений (8.23) имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{Q E_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

НДС в точках ребра полностью определено.

2. Выполняется условие (8.14), но не выполняется условие (8.23). Ранг системы первых трех уравнений (8.23) и ее расширенной матрицы равны единице. Уравнения совместны, из них следует зависимость между напряжениями

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2 - E_1}.$$

На напряжения $\sigma_{ij} (i \neq j)$ уравнения (8.23) каких-либо ограничений не накладывают.

3. Выполняется условие (8.25), но не выполняется (8.24). Решение уравнений (8.23) зависит от значения величины Q :

а) $Q = 0$. Первые три уравнения системы (8.23) совместны. Между напряжениями $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ справедливы зависимости

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}.$$

Из трех последних уравнений (8.23) находятся компоненты напряжений $\sigma_{ij} (i \neq j)$

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0;$$

б) $Q \neq 0$. Система уравнений (8.23) несовместна. Сочетание материальных параметров (8.25) является критичным, так как в этом случае напряжения в особой точке оказываются бесконечными.

4. Выполняются и условие (8.24), и условие (8.25). В этом случае справедливы равенства $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$. Ранг системы уравнений (8.23) равен нулю. Если $Q = 0$, уравнения совместны, но никаких ограничений на компоненты напряжений из нее не следует. Если $Q \neq 0$, уравнения (8.23) несовместны. Особая точка является точкой сингулярности поведения напряжений.

Приведенные данные показывают, что ограничения во внутренней особой точке, связанные с физическими уравнениями (зависящие от материальных параметров), отсутствуют лишь в случае, когда скрепляемые тела идентичны по материальным характеристикам. Иначе в особой точке формулируются ограничения, которые делают задачу исследования НДС в ее окрестности неклассической, т.к. количество ограничений в таком случае превышает количество ограничений в точках границы классической задачи.

9. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ В ВЕРШИНЕ КРУГОВОГО КОНУСА

Коническая особая точка в классической постановке изучалась, в частности, в работах [5, 16, 17, 20, 25, 29, 47, 49, 51, 52, 54, 69 и др.]. В настоящей главе такая точка рассматривается в свете развиваемого авторами подхода. Изучаются ограничения на параметры состояния в вершине кругового конуса. Рассмотрены случаи, когда вблизи вершины задана поверхностная нагрузка, когда боковая поверхность скользит без трения вдоль жесткой поверхности, когда боковая поверхность жестко закреплена и когда вершина конуса является внутренней точкой [66].

9.1. Круговой конус, поверхность которого нагружена

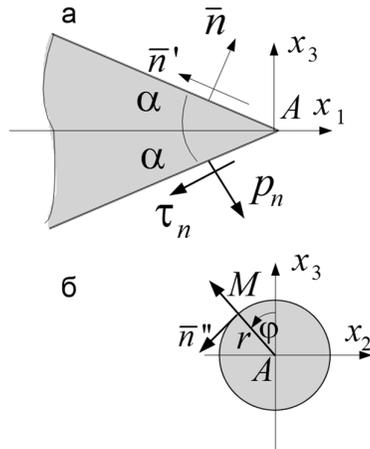


Рис.9.1

Рассматривается круговой конус. Угол при вершине A в его осевом сечении принимается равным 2α (рис. 9.1,а). Вводится правосторонняя ортонормированная система координат x_1, x_2, x_3 с базисом $\bar{e}_i (i=1,2,3)$. Ось x_1 направляется по оси конуса.

Через φ обозначен угол, отсчитываемый в плоскости x_2, x_3 от оси x_3 против часовой стрелки (рис. 9.1,б). Для любой точки $M(x_1, x_2, x_3)$ на поверхности конуса справедливы равенства

$$\cos \varphi = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{-x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}. \quad (9.1)$$

Существуют конечные пределы выражений (9.1) при стремлении точки $M(x_1, x_2, x_3)$ к вершине конуса вдоль его образующей. В точках поверхности конуса вводится тройка единичных взаимно ортогональных векторов $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}$. Вектор \bar{n} является нормальным к поверхности, а векторы \bar{m} и \bar{l} лежат в ее касательной плоскости (рис. 9.1). Эти векторы в базисе $\bar{e}_i (i=1,2,3)$ имеют представление

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \sin \alpha \bar{e}_1 - \cos \alpha \sin \varphi \bar{e}_2 + \cos \alpha \cos \varphi \bar{e}_3, \\
\bar{m} &= -\cos \alpha \bar{e}_1 - \sin \alpha \sin \varphi \bar{e}_2 + \sin \alpha \cos \varphi \bar{e}_3, \\
\bar{l} &= -\cos \varphi \bar{e}_2 - \sin \varphi \bar{e}_3.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Принимается, что на поверхности конуса вблизи вершины задана осесимметричная нагрузка. На поверхности элементарного объема, содержащего вершину конуса, такая нагрузка запишется равенством

$$\bar{p}_n = p_n \bar{n} + \tau_m \bar{m} + \tau_l \bar{l}. \tag{9.3}$$

Вершина конуса (особая точка) считается бесконечно малой частицей, получаемой в результате стягивания указанного объема. Параметрами состояния особой точки являются параметры состояния содержащего ее элементарного объема, поэтому напряжения в особой точке удовлетворяют заданным условиям (9.3). Это обстоятельство записывается тремя соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \\
&\quad + \sigma_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = p_n, \\
&-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi + \sigma_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \\
&\quad - \sigma_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = \tau_m, \\
&\sigma_{22} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{33} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{12} \cos \varphi \sin \alpha - \\
&\quad - \sigma_{13} \sin \alpha \sin \varphi - \sigma_{23} \sin \alpha \sin^2 \varphi - \sigma_{32} \cos \alpha \cos^2 \varphi = \tau_e.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Равенства (9.4) должны выполняться при любых значениях φ . Из этого условия следует, что они совместны лишь в случае, когда компонента нагрузки τ_e обращается в нуль, а компоненты напряжений σ_{ij} подчиняются условиям

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33}, \tag{9.5}$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha = p_n, \tag{9.6}$$

$$-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \tau_m.$$

Система уравнений (9.6) имеет решение

$$\sigma_{11} = p_n - \tau_m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = p_n + \tau_m \operatorname{tg} \alpha. \tag{9.7}$$

Равенства (9.5), (9.7) полностью определяют напряженное состояние в вершине конуса. Формулы для вычисления напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ (9.7) могут быть получены также и методом сечений, примененным к элементу конуса с центром в его вершине. Это обстоятельство подтверждает согласованность применяемого авторами подхода с классическими приемами исследования напряжений в деформируемых телах.

9.2. Круговой конус, боковая поверхность которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности

Принимается, что боковая поверхность конуса вблизи вершины А скользит без трения вдоль жесткой поверхности. Для элементарного объема в вершине конуса (особой точки) выполняются условия:

- 1) сдвиг между линейными элементами, исходящими из вершины в направлении образующих конуса в любом его осевом сечении, обращается в нуль;
- 2) задаваемые касательные усилия τ_m и τ_n равны нулю.

Сдвиг γ между указанными в п. 1) направлениями выражается равенством

$$\gamma = \sin 2\alpha(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi). \quad (9.8)$$

При построении равенства (9.8) использовалась формула

$$\gamma \sin \beta = [2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_p)\delta_{rp}]k_r t_p, \quad (9.9)$$

Определяющая сдвиг γ в произвольной точке сплошной среды между направлениями \bar{k} , \bar{t} и углом β между ними. В формуле (9.9) обозначено η_k , η_t – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов \bar{k} , \bar{t} соответственно, δ_{rp} – координаты метрического тензора. В рассматриваемой задаче $\sin 2\alpha \neq 0$, поэтому из равенства (9.8) следует зависимость между компонентами деформаций

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi = 0, \quad (9.10)$$

которая должна выполняться независимо от φ , вследствие чего справедливы соотношения

$$\varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}. \quad (9.11)$$

Обратимся к условиям 2. Так как $\varepsilon_{23} = 0$, то из физических уравнений следует, что и $\sigma_{23} = 0$. Второе из равенств (9.4) примет вид

$$0.5 \sin 2\alpha (-\sigma_{11} + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{33} \cos^2 \varphi) + \cos 2\alpha (\sigma_{12} \sin \varphi - \sigma_{13} \cos \varphi) = 0. \quad (9.12)$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях φ , вследствие чего получаем

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}. \quad (9.13)$$

Третье равенство (9.4) при выполнении равенств ((9.13) удовлетворяется тождественно. Равенства (9.13) и (9.11) задают пять независимых ограничений в вершине конуса. Первое из условий (9.4) определяет компоненту вектора напряжений

$$P_n = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}.$$

Пример. Рассматривается круговой конус, закрепленный так, что его боковая поверхность и основание скользят без трения вдоль жесткой поверхности. Конус подвергается однородной температурной нагрузке ΔT . Приняты обозначения: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ω – коэффициент температурной деформации. Перемещения $u_i, i=1,2,3$ (u_i – компоненты вектора перемещений) и напряжения

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu} \quad (9.14)$$

удовлетворяют всем уравнениям линейной термоупругости и граничным условиям, т.е. являются решением данной задачи, что согласуется с приведенными выше результатами.

9.3. Круговой конус с заземленной боковой поверхностью

Пусть боковая поверхность кругового конуса вблизи вершины жестко заземлена. Тогда в элементарном объеме, содержащем вершину, выполняются условия:

- 1) относительное удлинение линейного элемента вдоль любой образующей конуса обращается в нуль;
- 2) сдвиг между линейными элементами в направлении образующих в любом осевом сечении конуса равен нулю.

Условие 1 запишется равенством

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \\ - \varepsilon_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \varepsilon_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Равенство (9.15) должно выполняться независимо от значения φ , что возможно лишь при условиях

$$\varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0. \quad (9.16)$$

Условие 2 совпадает с равенством (9.10), из которого следует выполнение зависимости (9.11). Из равенств (9.11) и (9.16) получаем, что в особой точке выполняются соотношения

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (9.17)$$

Таким образом, деформированное состояние в вершине конуса полностью определено. В частности, при температурной нагрузке из физических уравнений получаем напряжения в особой точке

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu}, \quad \sigma_{ij} = 0 (i \neq j). \quad (9.18)$$

9.4. Составной конус (внутренняя коническая точка)

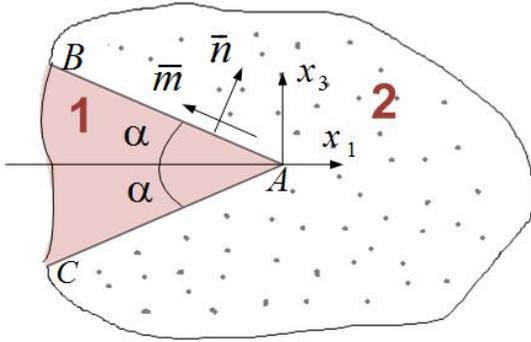


Рис.9.2. Внутренняя коническая точка (осевое сечение)

Рассматриваются два конуса 1, 2 с общей вершиной А. Конусы скреплены по боковым поверхностям. Приняты обозначения: $\sigma_{ij}^{(k)}, \dots, E_{k, \dots}$ ($k=1,2$). Индекс "k" указывает конус, которому отвечает данный параметр. Параметры состояния элементарных объемов (особых точек) в вершинах конусов подчиняются ограничениям:

1) относительные удлинения линейных элементов, исходящих из точки А в направлении общей образующей конусов совпадают при любом φ

$$\eta_m^{(1)} = \eta_m^{(2)}; \quad (9.19)$$

2) суммарное изменение углов ВАС (острого γ_1 и тупого γ_2) в любом осевом сечении конуса равно нулю;

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0; \quad (9.20)$$

3) касательные и нормальные напряжения на площадках, ориентируемых ортом \bar{n} , совпадают при любом φ :

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_m^{(1)} = \tau_m^{(2)}, \quad \tau_e^{(1)} = \tau_e^{(2)}. \quad (9.21)$$

Далее вводятся обозначения

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad (9.22)$$

с использованием которых условие (9.19) запишется в виде

$$\xi_{11} \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \xi_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \xi_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \xi_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \xi_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \quad (9.23)$$

Равенство (9.23) должно выполняться при любых значениях угла φ , вследствие чего из него следуют условия для деформаций

$$\xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0, \quad \xi_{22} = \xi_{33}, \quad \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0. \quad (9.24)$$

Условие (9.20) с использованием формулы (9.9) и обозначений (9.22) запишется равенством

$$\xi_{11} - \xi_{22} \sin^2 \varphi - \xi_{33} \cos^2 \varphi + \xi_{23} \sin 2\varphi = 0. \quad (9.25)$$

Это равенство должно выполняться независимо от φ , Поэтому из него дополнительно к (9.24) следует

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33}. \quad (9.26)$$

Из равенств (9.24) и (9.26) получаем, что в вершине конуса все параметры ξ_{ij} обращаются в нуль. Это означает, что все компоненты деформаций в вершине конуса непрерывны.

Первые два условия (9.21) с использованием обозначений (9.22) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \zeta_{11} \sin^2 \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \zeta_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \zeta_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \\ & + \zeta_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = 0, \\ & -\zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi - \zeta_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \\ & - \zeta_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Вследствие того, что эти равенства должны выполняться при любых значениях φ , из них следует

$$\zeta_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (9.27)$$

т.е. напряжения в вершине конуса непрерывны так же, как и деформации.

С применением физических уравнений условия непрерывности деформаций в особых точках запишем через напряжения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \\ & - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \\ & - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{33} = Q, \end{aligned} \quad (9.28)$$

$$\left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{23} = 0. \quad (9.29)$$

В этих равенствах G_k ($k=1,2$) – модули сдвига скрепляемых конусов, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ ($k=1,2$) вследствие непрерывности напряжений в вершине конусов, $Q = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$.

Изучим решения систем уравнений (9.28), (9.29). Определитель матрицы системы уравнений (9.28) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2} \right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (9.30)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (9.28), (9.29) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (9.31)$$

При этом напряженное состояние в вершине конусов полностью определено. Из решения (9.31) видно, что сочетание параметров

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) \quad (9.32)$$

является критическим, т.к. в этом случае напряжения σ_{ij} ($i=1,2,3$) обращаются в бесконечность.

2. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) \neq 0. \quad (9.33)$$

Ранг системы уравнений (9.28) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q=0$, и трем, если $Q \neq 0$. Поэтому реализуются варианты:

а) $Q=0$. Напряжения σ_{ij} ($i=1,2,3$) подчинены ограничениям (т.к. в данном случае $G_1 \neq G_2$)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (9.34)$$

На компоненты напряжений накладываются пять условий;

б) $Q \neq 0$. Уравнения (9.28) несовместны. При температурной нагрузке выполнение равенств (9.33) обуславливает сингулярное поведения решения в вершине конусов.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (9.35)$$

Ранг матрицы системы уравнений (9.28) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких-либо ограничений на компоненты σ_{ij} ($i \neq j$) не накладывается.

4. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (9.36)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (9.28) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если материалы конусов идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице, уравнения (9.28) несовместны. Особая точка является точкой сингулярного поведения решения.

10. КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАГРУЗКУ В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД

В настоящей главе неклассический подход используется для изучения компонент напряжений в вершинах многогранников – правильных треугольной и четырехугольной пирамид. Построенные решения являются задаваемыми ограничениями в особых точках и должны использоваться в постановках задач механики деформируемых твердых тел, содержащих рассматриваемые элементы [60]. Исследование параметров состояния в вершинах многогранников в классической постановке приводится, например, в работах [7, 8, 11 – 13, 38, 39, 54 и др.].

10.1. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной треугольной пирамиды

10.1.1. Постановка задачи

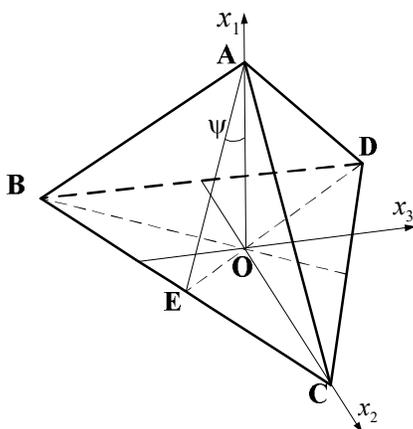


Рис.10.1

Рассматривается упругое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной треугольной пирамиды. Вблизи вершины А строится ее виртуальное основание – правильный треугольник BCD (рис. 10.1). Угол между высотой пирамиды и высотой треугольника BAC обозначается через ψ .

С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3 . Начало координат (т.О) совпадает с центром основания пирамиды, а координатная плоскость x_1, x_2 содержит ребро AC (рис.10.1). Базисные векторы введенной системы координат обозначаются $\bar{e}_i (i=1,2,3)$. На гранях ACD, ABC и ADB вводятся ортонормированные трехгранники. Эти трехгранники в координатах x_1, x_2, x_3 записываются равенствами

$$\text{на грани ACD: } \bar{n} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{n}' = \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad (10.1)$$

$$\bar{n}'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_2 - \frac{1}{2}\bar{e}_3;$$

$$\text{на грани ABC: } \bar{m} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{m}' = \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad (10.2)$$

$$\bar{m}'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_2 - \frac{1}{2}\bar{e}_3;$$

$$\text{на грани ADB: } \bar{l} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2,$$

$$\bar{l}' = \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2, \quad (10.3)$$

$$\bar{l}'' = \bar{e}_3.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины А образующего грань треугольника. Вблизи вершины А поверхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (10.1), (10.2), (10.3)

$$\bar{P}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}' + \vartheta_n \bar{n}'',$$

$$\bar{P}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{m}' + \vartheta_m \bar{m}'', \quad (10.4)$$

$$\bar{P}_l = p_l \bar{l} + \tau_l \bar{l}' + \vartheta_l \bar{l}''.$$

Здесь $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l$ – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях ACD, ABC и ADB. Параметры состояния в вершине пирамиды (особая точка) отождествляется с параметрами состояния соответствующего ей элементарного объема тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для такого элементарного объема. Поэтому в особой точке оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_n' = \tau_n, \quad \tau_n'' = \vartheta_n,$$

$$\sigma_m = p_m, \quad \tau_m' = \tau_m, \quad \tau_m'' = \vartheta_m, \quad (10.5)$$

$$\sigma_l = p_l, \quad \tau_l' = \tau_l, \quad \tau_l'' = \vartheta_l.$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, τ_n', τ_n'' , τ_m', τ_m'' , τ_l', τ_l'' – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (10.1), (10.2), (10.3). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах x_1, x_2, x_3 упорядочим списком $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$. Для вычисления векторов напряжений на площадках, ориентированных ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}$, в точке А используется формула Коши

(например $\bar{P}_n = \bar{n} P$, где P – тензор напряжений). Проектируя векторы напряжений на направления ортов (10.1), (10.2), (10.3), приходим к системе девяти уравнений относительно шести компонент напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi + \\ + \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_n, \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_n, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \\ + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_n, \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ - \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_m; \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_m, \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \\ + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_m, \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin 2\psi = p_l, \quad (10.12)$$

$$\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{12} \cos 2\psi = \tau_l, \quad (10.13)$$

$$\sigma_{13} \sin \psi - \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_l. \quad (10.14)$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (10.6) – (10.14) и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (10.6) – (10.14) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется больше трех, рассматриваемая задача механики деформируемого тела становится неклассической.

10.1.2. Исследование системы уравнений (10.6) – (10.14)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (10.6) – (10.14) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре уравнения относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23} :

$$2\sqrt{3}\sigma_{13}\sin\psi\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{23}\cos^2\psi = p_n - p_m, \quad (10.15)$$

$$\sqrt{3}\sigma_{13}\cos 2\psi - \sqrt{3}\sigma_{23}\sin\psi\cos\psi = \tau_n - \tau_m, \quad (10.16)$$

$$-\sigma_{13}\sin\psi + \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_n - \vartheta_m, \quad (10.17)$$

$$\sigma_{13}\sin\psi - \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_l. \quad (10.14)$$

Вторая система состоит из пяти уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$2\sigma_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \frac{3}{2}\sigma_{33}\cos^2\psi + \sigma_{12}\sin 2\psi = p_n + p_m, \quad (10.18)$$

$$\sigma_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{4}\sigma_{22}\sin 2\psi - \frac{3}{4}\sigma_{33}\sin 2\psi + \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_n + \tau_m, \quad (10.19)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{33}\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{12}\sin\psi = \vartheta_n - \vartheta_m, \quad (10.20)$$

$$\sigma_{11}\sin^2\psi + \sigma_{22}\cos^2\psi - \sigma_{12}\sin 2\psi = p_l, \quad (10.12)$$

$$\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_l. \quad (10.13)$$

Изучим систему уравнений (10.15) – (10.17), (10.14). Ранг этой системы равен двум. Чтобы она была совместна, ранг расширенной матрицы также должен равняться двум. Это условие приводит к двум ограничениям на компоненты вектора нагрузки

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0, \quad (10.21)$$

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2\psi) - 3(\tau_n - \tau_m)\cos\psi\sin\psi - \sqrt{3}(\vartheta_n + \vartheta_m)\cos\psi = 0. \quad (10.22)$$

При выполнении ограничений (10.21), (10.22) компоненты σ_{13}, σ_{23} тензора напряжений имеют значения

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(p_n - p_m)\operatorname{tg}\psi + (\tau_n - \tau_m)], \quad (10.23)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(p_n - p_m)(1 - tg^2 \psi) - 2(\tau_n - \tau_m)tg \psi]. \quad (10.24)$$

Обратимся к системе уравнений (10.18)–(10.20), (10.12), (10.13). Ранг матрицы этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к еще одному ограничению на нагрузку:

$$(p_n + p_m - 2p_l)(3\sin^2 \psi - 1) + 3(\tau_n + \tau_m - 2\tau_l)\cos \psi \sin \psi - \sqrt{3}(\vartheta_n - \vartheta_m)\cos \psi = 0. \quad (10.25)$$

При выполнении условия (10.25) рассматриваемая система имеет решение

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{18}(p_n + p_m)(ctg^2 \psi - 8) + \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)ctg \psi - \frac{1}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} + \frac{1}{9}p_l\frac{1}{\sin^2 \psi}, \quad (10.26)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{36}(p_n + p_m)\left(\frac{1 + 9\cos 2\psi}{\cos^2 \psi}\right) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)tg \psi + \frac{5}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi} + \frac{4}{9}p_l\frac{1}{\cos^2 \psi}, \quad (10.27)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)tg \psi - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi}, \quad (10.28)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{9}(p_n + p_m - 2p_l)\frac{1}{\sin \psi \cos \psi} + \frac{1}{3\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\sin \psi}. \quad (10.29)$$

Если условия (10.21), (10.22), (10.25) не выполняются, рассматриваемая задача становится некорректной в том смысле, что она не может быть решена в рамках рассматриваемой теории напряжений.

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения, следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической.

10.1.3. Частные случаи

10.1.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях тетраэдра

Ограничения (10.21), (10.22), (10.25) выполняются. В соответствии с формулами (10.23), (10.24), (10.26)–(10.29) все компоненты напряжений в вершине пирамиды обращаются в нуль.

10.1.3.2. Грани тетраэдра нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае $p_n \neq 0, p_m \neq 0, p_l \neq 0, \vartheta_n = 0, \vartheta_m = 0, \vartheta_l = 0$. Ограничение (10.21) выполняется, а ограничения (10.22), (10.25) приводятся к виду

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0, \quad (10.30)$$

$$(p_n + p_m - 2p_l)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0. \quad (10.31)$$

Возможны варианты:

$$1) (1 - 3\sin^2 \psi) = 0.$$

В этом случае углы CAD, DAB, BAC при вершине пирамиды равны $\pi/2$ (например, вершина пирамиды является вершиной прямоугольного параллелепипеда). Напряжения в вершине вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(p_n - p_m), & \sigma_{23} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(p_n - p_m), \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{3}(p_n + p_m + p_l), & \sigma_{22} &= \frac{1}{6}(p_n + p_m + 4p_l), \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m), & \sigma_{12} &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(p_n + p_m - 2p_l); \end{aligned} \quad (10.32)$$

$$2) (1 - 3\sin^2 \psi) \neq 0.$$

Из равенств (10.30), (10.31) следует, что в данном случае нагрузка должна удовлетворять условию

$$p_n = p_m = p_l = p. \quad (10.33)$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды описывается равенствами

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.34)$$

Это решение согласуется с хорошо известным решением о напряженном состоянии тела, нагруженного по всей поверхности равномерным давлением.

10.1.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$

Ограничения (10.21), (10.22), (10.25) принимают вид

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_n + \vartheta_m = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_m = 0. \quad (10.35)$$

Равенства (10.35) совместны лишь при условии, когда все компоненты нагрузки обращаются в нуль. Следовательно, в случае отличных от нуля параметров нагрузки g_n, g_m, g_l в рамках механики деформируемого твердого тела данная задача корректно не может быть поставлена.

10.1.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями τ_n, τ_m, τ_l

Ограничения на компоненты нагрузки приводятся к двум равенствам

$$\tau_n - \tau_m = 0, \quad \tau_n + \tau_m - 2\tau_l = 0, \quad (10.36)$$

из которых следует, что нагрузка должна удовлетворять условиям

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau. \quad (10.37)$$

При выполнении ограничений (10.37) напряжения в вершине пирамиды имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{22} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.38)$$

10.2. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной четырехугольной пирамиды

10.2.1. Постановка задачи

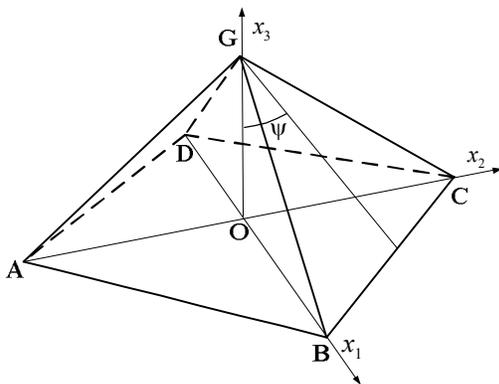


Рис. 10.2

Рассматривается деформируемое твердое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной четырехугольной пирамиды. Вблизи вершины G строится ее виртуальное основание – квадрат $ABCD$ (рис. 10.2).

Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через ψ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3 . Начало координат (т.О) совпадает с центром основания пирамиды, а оси x_1, x_2 направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной

системы координат обозначаются $\bar{e}_i (i=1,2,3)$. На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:

$$\begin{aligned} \text{на грани BCG: } \bar{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\zeta}_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \end{aligned} \quad (10.39)$$

$$\begin{aligned} \text{на грани CDG: } \bar{m} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_m &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\zeta}_m &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \end{aligned} \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} \text{на грани DAG: } \bar{l} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\zeta}_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} \text{на грани ABG: } \bar{k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_k &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\zeta}_k &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины G треугольника, образующего грань. Вблизи вершины A поверхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (10.39) – (10.42)

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \\ \bar{P}_m &= p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \end{aligned} \quad (10.43)$$

$$\bar{P}_l = p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l,$$

$$\bar{P}_k = p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.$$

Здесь $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l, \bar{P}_k$ – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях BCG, CDG, DAG, ABG. Параметры состояния в вершине пирамиды (особая точка) отождествляется с параметрами состояния соответствующего ей элементарного объема тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для такого элементарного объема. Поэтому в ней оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n,$$

$$\sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m, \tag{10.44}$$

$$\sigma_l = p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l,$$

$$\sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, $\tau_{\xi_n}, \tau_{\zeta_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\xi_k}, \tau_{\zeta_k}$ – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (10.39) – (10.41). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах x_1, x_2, x_3 упорядочим списком $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$. С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на гранях пирамиды условия (10.44) представляются двенадцатью уравнениями относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi + \\ & + \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = p_n, \\ & \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_n, \\ & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{13} \sin \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_n, \end{aligned} \tag{10.45}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ & - \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi - \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = p_m, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi - \frac{1}{2}\sigma_{12}\sin\psi\cos\psi +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_m,$$

$$-\frac{1}{4}\sigma_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_m,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi + \sigma_{12}\cos\psi -$$

$$-\sqrt{2}\sigma_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\sigma_{23}\cos\psi\sin\psi = p_l,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi + \sigma_{12}\sin\psi\cos\psi +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_l,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_l,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{12}\cos\psi +$$

$$+\sqrt{2}\sigma_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\sigma_{23}\cos\psi\sin\psi = p_k,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{12}\sin\psi\cos\psi -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_k,$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_k.$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (10.45) и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (10.45) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется большим трех, задача механики деформируемого тела для рассматриваемого тела становится неклассической.

10.2.2. Исследование системы уравнений (10.45)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (10.45) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_n + p_l, \\
 \sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_m + p_k, \\
 \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_n + \tau_l, \\
 \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_m + \tau_k, \\
 \sigma_{11} \cos \psi - \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\
 -\sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_m + \vartheta_k.
 \end{aligned} \tag{10.46}$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23} :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin 2\psi &= p_n - p_l, \\
 -\sqrt{2} \sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin 2\psi &= p_m - p_k, \\
 -\sqrt{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2} \sigma_{23} \cos 2\psi &= \tau_n - \tau_l, \\
 \sqrt{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2} \sigma_{23} \cos 2\psi &= \tau_m - \tau_k, \\
 \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi - \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi &= \vartheta_n - \vartheta_l, \\
 \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi &= \vartheta_m - \vartheta_k.
 \end{aligned} \tag{10.47}$$

Изучим систему уравнений (10.46). При изменении угла ψ в интервале $0 < \psi < \pi/2$ ранг этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к двум ограничениям на нагрузку:

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l + \vartheta_k = 0, \tag{10.48}$$

$$(p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi = 0, \tag{10.49}$$

При выполнении ограничений (10.48), (10.49) уравнения (10.46) имеют решение

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{4\cos^2\psi} [(p_n + p_l)\cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l)\sin 2\psi + 2(\vartheta_n + \vartheta_l)\cos\psi], \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{4\cos^2\psi} [(p_n + p_l)\cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l)\sin 2\psi - 2(\vartheta_n + \vartheta_l)\cos\psi], \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} [p_n + p_l - (\tau_n + \tau_l)\operatorname{ctg}\psi], \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4\cos^2\psi} [p_n + p_l - p_m - p_k].\end{aligned}\tag{10.50}$$

Обратимся к системе уравнений (10.47). Ранг матрицы этой системы равен двум. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен двум. Это требование накладывает еще четыре ограничения на компоненты нагрузки:

$$\begin{aligned}(p_n - p_l)\cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l)\sin 2\psi &= 0, \\ (p_m - p_k)\cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k)\sin 2\psi &= 0, \\ (p_m - p_k) + 2(\vartheta_n - \vartheta_l)\cos\psi &= 0, \\ -(p_n - p_l) + 2(\vartheta_m - \vartheta_k)\cos\psi &= 0.\end{aligned}\tag{10.51}$$

При выполнении условий (10.51) уравнения (10.47) имеют решение

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \frac{\sqrt{2}}{4\sin 2\psi} [p_n - p_l - p_m + p_k], \\ \sigma_{23} &= \frac{\sqrt{2}}{4\sin 2\psi} [p_n - p_l + p_m - p_k].\end{aligned}\tag{10.52}$$

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, согласованные с ограничениями (10.48), (10.49), (10.51), напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения. Следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической. В случае, когда нагрузка, приложенная к граням пирамиды в ее вершине, не согласуется с условиями (10.48), (10.49), (10.51), компоненты напряжений в особой точке оказываются несовместными с такой нагрузкой. Поэтому задача МДТТ оказывается некорректной.

10.2.3. Частные случаи

10.2.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях пирамиды

В данном случае все компоненты векторов напряжений (10.43) в вершине пирамиды обращаются в нуль. Ограничения (10.48), (10.49), (10.51) выполняются. В соответствии с формулами (10.50), (10.52) все шесть компонентов тензора напряжений в вершине равны нулю. Постановка задачи механики деформируемого твердого тела с рассматриваемой особенностью должна быть неклассической.

10.2.3.2. Грани пирамиды нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты $p_n \neq 0, p_m \neq 0, p_l \neq 0, p_k \neq 0$ векторов нагрузки (10.43). Ограничения (10.48), (10.49), (10.51) приводятся к виду

$$p_n = p_m = p_l = p_k = p. \quad (10.53)$$

Напряжения в вершине находим по формулам (10.50), (10.52):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.54)$$

Замечание 1. Решение (10.54) согласуется с известным аналитическим решением о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всем поверхностям давлением p .

Замечание 2. Решение (10.54) при нагрузке (10.53) в вершине пирамиды может быть получено методом сечений.

10.2.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l, \vartheta_k$

В этом случае ограничения (10.48) принимают вид

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta, \quad \vartheta_m = \vartheta_k = -\vartheta. \quad (10.55)$$

При выполнении условий (10.55) напряжения в вершине находятся по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.56)$$

Рассматриваемый случай отвечает кручению пирамиды усилиями, приложенными в вершине. Напряжения σ_{11} и σ_{22} неограниченно возрастают,

если угол ψ стремится к значению $\pi/2$. Это связано с тем, что площади сечений, на которых действуют эти напряжения, стремятся к нулю. Решение (10.56) получается и с использованием метода сечений.

10.2.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\tau_n, \tau_m, \tau_l, \tau_k$

Ограничения на компоненты нагрузки (10.46), (10.49), (10.51) приводятся к двум равенствам

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau_k = 0. \quad (10.57)$$

Если равенства (10.57) выполняются, напряжения в вершине имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.58)$$

При стремлении ψ к нулю напряжение σ_{33} неограниченно возрастает. Так же ведут себя напряжения σ_{11}, σ_{22} при стремлении ψ к $\pi/2$. Данное обстоятельство объясняется тем, что площади, на которых действуют эти напряжения, при указанных условиях стремятся к нулю, в то время как площади, на которых приложена нагрузка, остаются конечными. Решение (10.58) согласуется с решением, получаемым методом сечений.

10.3. Ограничения на компоненты напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, погруженных в упругое тело

Особые точки внутри сплошной среды в виде вершин многогранников, конусов, пространственных ребер присущи, в частности, армированным кристаллическими частицами и короткими волокнами материалам и составным элементам конструкций. Они возникают при внутренних разрушениях компонентов структуры композитов и однородных тел, характерны для исследуемых образцов при внедрении в них инденторов или призматических игл кантилеверов.

10.3.1. Правильная треугольная пирамида, погруженная в упругое тело

10.3.1.1. Постановка задачи

Рассматривается упругое деформируемое твердое тело 1 с особенностью в виде вершины правильной треугольной пирамиды, непрерывным образом контактирующее с другим упругим телом 2 (рис.10.3).

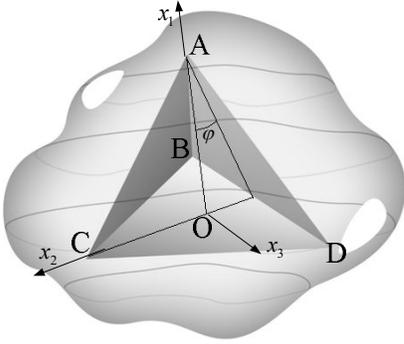


Рис.10.3

С пирамидой связывается декартова ортонормированная система координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Ось x_1 проходит из точки O центра тяжести треугольника BCD через вершину A , ось x_2 – из точки O через вершину C , а ось x_3 – из точки O параллельно стороне основания BD .

Угол между высотой тетраэдра, опущенной из вершины A на основание, и высотой боковой грани, исходящей из точки A , обозначается ψ . Область изменения этого угла задана интервалом $0 < \psi < \pi/2$. На гранях тетраэдра вводятся ортонормированные тройки векторов:

на грани ACD :

$$\bar{n} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\xi}_n = \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3; \quad (10.59)$$

на грани ABC :

$$\bar{m} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\xi}_m = \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3;$$

на грани ADB :

$$\bar{l} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2, \quad \bar{\xi}_l = \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2, \quad \bar{\zeta}_l = \bar{e}_3.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины A образующего грань треугольника. Введем обозначения для параметров состояния элементарных объемов тел 1, 2, содержащих вершину тетраэдра. Примем $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора деформаций; индекс k определяет номер скрепляемого тела. В точках поверхностей соприкосновения напряжения и деформации в указанных элементарных объемах подчиняются следующим условиям непрерывности.

На грани ACD

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}. \quad (10.60)$$

Обозначено: σ_n – нормальное напряжение на грани; τ_{ξ_n} – касательное напряжение в направлении орта $\bar{\xi}_n$; τ_{ζ_n} – касательное напряжение в направлении орта $\bar{\zeta}_n$; η_{ξ_n} – относительное удлинение в направлении орта $\bar{\xi}_n$; η_{ζ_n} –

относительное удлинение в направлении орта $\bar{\zeta}_n$; $\eta_{\xi_n \zeta_n}$ – сдвиг между направлениями $\bar{\xi}_n$ и $\bar{\zeta}_n$.

На грани ABC (обозначения аналогичны):

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}. \quad (10.61)$$

На грани ADB:

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}. \quad (10.62)$$

Условия (10.60) – (10.62) являются условиями, задаваемыми в вершине A.

Вводятся обозначения для разностей компонент напряжений и деформаций:

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \xi_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (10.63)$$

С использованием обозначений (10.63) равенства (10.60)–(10.62) запишутся двумя автономными однородными системами линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi + \sqrt{3} \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi + \sqrt{3} \zeta_{12} \sin \psi - \zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \cos^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (10.64)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi - \sqrt{3} \zeta_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi - \sqrt{3} \zeta_{12} \sin \psi - \zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \end{aligned}$$

$$\zeta_{11} \sin^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi - \zeta_{12} \sin 2\psi = 0,$$

$$\frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi - \zeta_{12} \cos 2\psi = 0,$$

$$\zeta_{13} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi = 0;$$

$$\xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \xi_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \xi_{33} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \xi_{12} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{13} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{23} \sin^2 \psi = 0,$$

$$3\xi_{22} + \xi_{33} - \sqrt{3}\xi_{23} = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{22} \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{33} \sin \psi + \sqrt{3} \xi_{12} \cos \psi - \xi_{13} \cos \psi - \xi_{23} \sin \psi = 0,$$

$$\xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \xi_{22} \sin^2 \psi + \frac{3}{4} \xi_{33} \sin^2 \psi - \frac{1}{2} \xi_{12} \sin 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{13} \sin 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{23} \sin^2 \psi = 0, \quad (10.65)$$

$$3\xi_{22} + \xi_{33} + \sqrt{3}\xi_{23} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{22} \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{33} \sin \psi - \sqrt{3} \xi_{12} \cos \psi - \xi_{13} \cos \psi - \xi_{23} \sin \psi = 0,$$

$$\xi_{11} \cos^2 \psi + \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{12} \sin 2\psi = 0,$$

$$\xi_{33} = 0,$$

$$\xi_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi = 0.$$

Системы уравнений (10.64), (10.65) содержат по девять уравнений относительно шести параметров. Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрического параметра ψ) свойств систем уравнений (10.64), (10.65), условий существования их решения и его построения. Решение систем уравнений (10.64), (10.65) формирует ограничения на параметры состояния элементарных объемов тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

10.3.1.2. Исследование системы уравнений (10.64)

Посредством тождественных преобразований уравнения (10.64) приводятся к двум автономным системам уравнений. Первая из них состоит из пяти уравнений относительно четырех параметров $\zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{12}$:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \zeta_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \zeta_{33} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{4} \zeta_{22} \sin 2\psi - \frac{3}{4} \zeta_{33} \sin 2\psi + \zeta_{12} \cos 2\psi &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{33} \cos \psi + \sqrt{3} \zeta_{12} \sin \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi - \zeta_{12} \sin 2\psi &= 0, \\ \frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi - \zeta_{12} \cos 2\psi &= 0. \end{aligned} \tag{10.66}$$

Определитель матрицы первых четырех уравнений системы (10.66)

$$\Delta = -\frac{9\sqrt{3}}{2} \cos^3 \psi \sin^2 \psi$$

не обращается в нуль в области изменения угла ψ , следовательно, ранг матрицы системы уравнений (10.66) равен четырем, поэтому она имеет единственное нулевое решение:

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = \zeta_{12} = 0. \tag{10.67}$$

Вторая система состоит из четырех уравнений относительно двух параметров ζ_{13} и ζ_{23} :

$$\begin{aligned} \zeta_{13} \sin 2\psi + \zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, & -\zeta_{13} \sin \psi + \zeta_{23} \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{13} \cos 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, & \zeta_{13} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi &= 0. \end{aligned} \tag{10.68}$$

Ранг матрицы системы уравнений (10.68) равен двум, поэтому она, как и система уравнений (10.67), имеет лишь нулевое решение:

$$\zeta_{13} = \zeta_{23} = 0. \quad (10.69)$$

Из равенств (10.67) и (10.69) следует, что компоненты тензоров напряжений элементарных объемов 1, 2, содержащих вершину тетраэдра, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (10.70)$$

10.3.1.3. Исследование системы уравнений (10.65)

Уравнения (10.65) тождественными преобразованиями, так же, как и уравнения (10.64), приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре различных уравнения относительно параметров $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$:

$$\begin{aligned} 2\xi_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2}\xi_{22} \sin^2 \psi + \frac{3}{2}\xi_{33} \sin^2 \psi - \xi_{12} \sin 2\psi &= 0, \\ 3\xi_{22} + \xi_{33} &= 0, \\ -\xi_{22} \sin \psi + \xi_{33} \sin \psi + \xi_{12} \cos \psi &= 0, \end{aligned} \quad (10.71)$$

$$\xi_{11} \cos^2 \psi + \xi_{22} \sin^2 \psi + \xi_{12} \sin 2\psi = 0.$$

Определитель матрицы системы уравнений (10.71)

$$\Delta = 30 \cos^3 \psi \sin^2 \psi$$

в области изменения угла ψ не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (10.71) равен четырем, а ее единственное решение запишется равенствами

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0. \quad (10.72)$$

Еще три различных уравнения образуют систему относительно параметров ξ_{13}, ξ_{23} :

$$\begin{aligned} -\xi_{13} \sin 2\psi + \xi_{23} \sin^2 \psi &= 0, \\ \xi_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi &= 0, \\ \xi_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (10.73)$$

Ранг системы первых двух уравнений (10.73) равен двум, ее единственное решение лишь нулевое:

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0. \quad (10.74)$$

Из равенств (10.72), (10.74) следует, что деформации в элементарных объемах тел 1,2, примыкающих к вершине тетраэдра, одинаковы:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10.75)$$

10.3.1.4. Ограничения на компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды

С использованием физических уравнений термоупругости равенства (10.75) запишем через напряжения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (10.76)$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (10.77)$$

В этих равенствах E_k , G_k , ν_k , ω_k ($i, j = 1, 2, k = 1, 2$) – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ (т.к. $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$); $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$, ΔT – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (10.76), (10.77). Определитель матрицы системы уравнений (10.76) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 [E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2)]^2 [E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2)]. \quad (10.78)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (10.76), (10.77) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.79)$$

Напряженное состояние в вершине тетраэдра полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (10.79) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad (10.80)$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (10.80) напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ в элементарных объемах, содержащих вершину А, стремятся к бесконечности.

2. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) \neq 0. \quad (10.81)$$

Ранг системы уравнений (10.76) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q=0$, и трем, если $Q \neq 0$, поэтому реализуются варианты:

а) $Q=0$. Напряжения σ_{ij} ($i=1,2,3$) подчинены ограничениям (т.к. в данном случае $G_1 \neq G_2$):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (10.82)$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1,2 в вершине пирамиды равно одиннадцати;

б) $Q \neq 0$. Уравнения (10.76) несовместны. Задача МДТТ не может быть поставлена корректно.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (10.83)$$

Ранг матрицы системы уравнений (10.76) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких-либо дополнительных ограничений на компоненты σ_{ij} ($i \neq j$) не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине тетраэдра, равно семи.

4. $\Delta = 0$. Причем,

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (10.84)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (10.76) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице $Q \neq 0$, уравнения (10.76) несовместны. Корректная постановка задачи МДТТ становится невозможной.

10.3.2. Правильная четырехугольная пирамида, погруженная в упругое тело

10.3.2.1. Постановка задачи

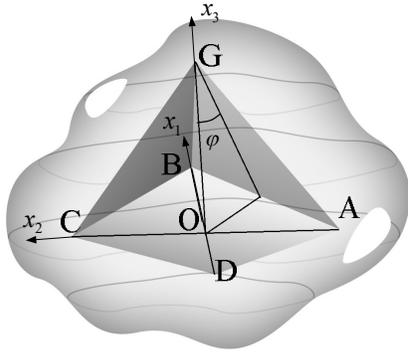


Рис.10.4

Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 10.4), одно из которых имеет особенность в виде вершины правильной четырехугольной пирамиды. Применяется изложенный в п. 10.2.1 подход.

Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через φ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат O, x_1, x_2, x_3 . Начало координат (т. О) совпадает с центром основания пирамиды, а оси x_1, x_2 направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной системы координат обозначаются $\bar{e}_i (i=1,2,3)$. На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:

на грани BCG:
$$\bar{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad (10.85)$$

$$\bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2;$$

на грани CDG:
$$\bar{m} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{\xi}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad (10.86)$$

$$\bar{\zeta}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2;$$

на грани DAG:
$$\bar{l} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3,$$

$$\bar{\xi}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad (10.87)$$

$$\bar{\zeta}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_2;$$

на грани АВG: $\bar{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\psi\bar{e}_2 + \sin\psi\bar{e}_3,$

$$\bar{\xi}_k = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\psi\bar{e}_2 - \cos\psi\bar{e}_3, \quad (10.88)$$

$$\bar{\zeta}_k = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_2.$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других лежат в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины G треугольника, образующего грань. Для элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине пирамиды, в точках поверхностей соприкосновения выполняются условия (сохраняются принятые ранее обозначения):

на грани BCG :

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n\zeta_n}^{(2)}; \quad (10.89)$$

на грани CDG :

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m\zeta_m}^{(2)}; \quad (10.90)$$

на грани DAG :

$$\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l\zeta_l}^{(2)}; \quad (10.91)$$

на грани ABG :

$$\sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k\zeta_k}^{(2)}. \quad (10.92)$$

Условия (10.89) – (10.92) с использованием обозначений (10.63) запишутся двумя автономными линейными однородными системами уравнений. Первая ^{из} них содержит двенадцать уравнений относительно шести параметров ζ_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\sin^2\psi + \zeta_{12}\cos^2\psi + \sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi\cos\psi + \sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi\cos\psi &= 0, \\ \frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{12}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi &= 0, \\ \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi &= 0, \\ \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\cos^2\psi - \zeta_{12}\sin\psi\cos\psi - \sqrt{2}\zeta_{13}\sin\psi\cos\psi - \sqrt{2}\zeta_{23}\sin\psi\cos\psi &= 0, \end{aligned} \quad (10.93)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi - \frac{1}{2}\zeta_{12}\sin\psi\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi = 0, \\
& -\frac{1}{4}\zeta_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\sin^2\psi + \sigma_{12}\cos\psi - \sqrt{2}\zeta_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\zeta_{23}\cos\psi\sin\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi + \zeta_{12}\sin\psi\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos^2\psi + \zeta_{33}\sin^2\psi - \zeta_{12}\cos\psi + \sqrt{2}\zeta_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\zeta_{23}\cos\psi\sin\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\zeta_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{33}\sin\psi\cos\psi - \zeta_{12}\sin\psi\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\cos 2\psi = 0, \\
& -\frac{1}{2}\zeta_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\zeta_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_{23}\sin\psi = 0.
\end{aligned}$$

Вторая система состоит из двенадцати уравнений относительно шести параметров ξ_{ij} :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi + \xi_{33}\cos^2\psi + \xi_{12}\sin^2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} - \xi_{12} = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi - \frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi + \xi_{33}\cos^2\psi - \xi_{12}\sin^2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} + \xi_{12} = 0, \\
& -\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi + \xi_{33}\cos^2\psi + \xi_{12}\sin^2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} - \xi_{12} = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi - \frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin^2\psi + \xi_{33}\cos^2\psi - \xi_{12}\sin^2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\sin 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\sin 2\psi = 0, \\
& \frac{1}{2}\xi_{11} + \frac{1}{2}\xi_{22} + \xi_{12} = 0, \\
& -\frac{1}{2}\xi_{11}\sin\psi + \frac{1}{2}\xi_{22}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{13}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_{23}\cos\psi = 0.
\end{aligned} \tag{10.94}$$

Задача состоит в исследовании решений систем уравнений (10.93), (10.94). Такие решения являются задаваемыми ограничениями на параметры состояния тел 1, 2, в вершине пирамиды.

10.3.2.2. Исследование системы уравнений (10.93)

Посредством тождественных преобразований уравнения (10.93) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент ζ_{11} , ζ_{22} , ζ_{33} , ζ_{12} :

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi + 2\zeta_{33} \sin^2 \psi + 2\zeta_{12} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \cos^2 \psi + \zeta_{22} \cos^2 \psi + 2\zeta_{33} \sin^2 \psi - 2\zeta_{12} \cos^2 \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{33} \sin \psi \cos \psi + 2\zeta_{12} \sin \psi \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \sin \psi \cos \psi + \zeta_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{33} \sin \psi \cos \psi - 2\zeta_{12} \sin \psi \cos \psi &= 0, \\ \zeta_{11} \cos \psi - \zeta_{22} \cos \psi &= 0, \\ -\zeta_{11} \cos \psi + \zeta_{22} \cos \psi &= 0. \end{aligned} \tag{10.95}$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент ζ_{13} , ζ_{23} :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\zeta_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, & -\sqrt{2}\zeta_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\zeta_{23} \sin 2\psi &= 0, \\ -\sqrt{2}\zeta_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, & \sqrt{2}\zeta_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\zeta_{23} \cos 2\psi &= 0, \\ \sqrt{2}\zeta_{13} \sin \psi - \sqrt{2}\zeta_{23} \sin \psi &= 0, & \sqrt{2}\zeta_{13} \sin \psi + \sqrt{2}\zeta_{23} \sin \psi &= 0. \end{aligned} \tag{10.96}$$

При изменении угла ψ в интервале $(0, \pi/2)$ ранг матрицы системы уравнений (10.95) равен четырем, а ранг матрицы системы уравнений (10.96) равен двум. Из этого следует, что единственное решение уравнений (10.95), (10.96) имеет вид

$$\zeta_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{10.97}$$

Решение (10.97) означает, что компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1, 2, примыкающих к вершине пирамиды, одинаковы

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{10.98}$$

10.3.2.3. Исследование системы уравнений (10.94)

Тождественными преобразованиями уравнения (10.94) приводятся к трем автономным системам

$$\xi_{11} + \xi_{22} + 2\xi_{12} = 0, \quad \xi_{11} + \xi_{22} - 2\xi_{12} = 0, \quad \xi_{11} - \xi_{22} = 0; \quad (10.99)$$

$$\xi_{13} + \xi_{23} = 0, \quad \xi_{13} - \xi_{23} = 0; \quad (10.100)$$

$$\xi_{33} = 0. \quad (10.101)$$

Легко заметить, что уравнения (10.99) – (10.101) имеют лишь нулевое решение

$$\xi_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10.102)$$

Равенства (10.102) говорят о том, что компоненты деформаций тел 1, 2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды, совпадают:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10.103)$$

10.3.2.4. Компоненты напряжений тел 1,2 в элементарных объемах, содержащих вершину пирамиды

Равенства (10.103) совпадают с равенствами (10.75), полученными в п.10.3.1.3 для правильной треугольной пирамиды. Поэтому записанные через напряжения равенства (10.103) совпадут с уравнениями (10.76), (10.77). Анализ решений этих уравнений, приведенный в п. 1.3.1.4. для компонент тензора напряжений в вершине правильной треугольной пирамиды, остается справедливым и для компонент тензора напряжений правильной четырехугольной пирамиды. Отметим, что результаты исследований компонент тензора напряжений в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид, взаимодействующих с упругим телом, совпадают с исследованиями рассматриваемых параметров состояния в точках пространственного ребра и вершине конуса, непрерывно скрепленных с упругим телом [1, 2].

11. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И НАГРУЗКИ В ВЕРШИНЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ С РОМБИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

В настоящей главе методика исследования напряженного состояния в вершинах правильных пирамид используется для изучения напряженного состояния в вершине четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием. Рассматривается случай поверхностной нагрузки вблизи вершины и случай включения такой пирамиды в упругую среду. Приведенные в работе результаты могут использоваться, в частности, при анализе НДС в окрестности вершин инденторов Кнуппа, применяемых для исследования образцов.

11.1. Четырехугольная пирамида с ромбическим основанием, нагруженная поверхностными силами вблизи вершины

11.1.1. Постановка задачи

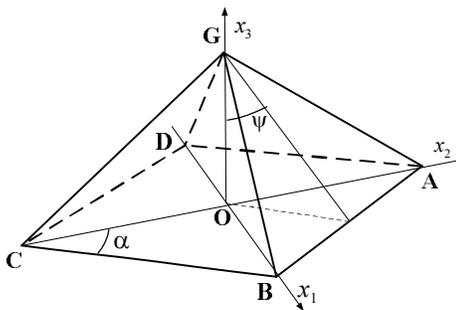


Рис. 11.1

Рассматривается элемент конструкции, содержащий особенность в виде вершины четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием (рис. 11.1). Пирамида определяется двумя независимыми параметрами – углом 2α при вершине ромба и углом ψ между высотой пирамиды и высотой треугольника, являющегося ее боковой гранью.

С пирамидой связывается ортонормированная декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Оси x_1, x_2 направлены по диагоналям ромба, ось x_3 – по высоте пирамиды. На боковых гранях пирамиды строятся тройки ортонормированных векторов.

На грани GAB:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_n &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_n &= \bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (11.1)$$

На грани GBC:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_m &= \bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\bar{\zeta}_m = -\bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_2 \cos \alpha.$$

На грани GCD:

$$\begin{aligned}\bar{l} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_l &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_l &= -\bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\tag{11.3}$$

На грани GDA:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= -\bar{e}_1 \cos \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \psi \sin \alpha + \bar{e}_3 \sin \psi, \\ \bar{\xi}_k &= -\bar{e}_1 \sin \psi \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \psi \sin \alpha - \bar{e}_3 \cos \psi, \\ \bar{\zeta}_k &= \bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha.\end{aligned}\tag{11.4}$$

Первые векторы в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, два других принадлежат им. Векторы нагрузки вблизи вершины G на боковых гранях пирамиды, ориентированных ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$ представляются разложениями по базисам (11.1) – (11.4):

$$\begin{aligned}\bar{p}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \\ \bar{p}_m &= p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \\ \bar{p}_l &= p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \\ \bar{p}_k &= p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.\end{aligned}\tag{11.5}$$

В соответствии с принятой концепцией параметрами состояния в вершине пирамиды (в особой точке) являются параметры состояния, содержащего эту точку элементарного объема. Этот элементарный объем состоит из множества точек континуума, образующих окрестность вершины G . Линейный масштаб такой окрестности имеет порядок линейного масштаба представительного объема тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями к указанному объему. Поэтому в особой точке оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n = p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n, & \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m \\ \sigma_l = p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l, & \quad \sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.\end{aligned}\tag{11.6}$$

В этих равенствах $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$ – нормальные напряжения на гранях пирамиды, ориентированных соответственно ортами $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}, \bar{k}$; $\tau_{\xi_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\xi_k}$; $\tau_{\zeta_n}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\zeta_k}$ – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (11.1) – (11.4). Компоненты тензора напряжений в элементарном объеме, примыкающем к вершине пирамиды (в особой точке), в координатах x_1, x_2, x_3 обозначаются через σ_{ij} . С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на поверхности тела условия (11.6) представляются системой двенадцати линейных неоднородных уравнений относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_n, \\
\sigma_{11} \cos \psi \sin \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin \psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_n, \\
& \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_n, \\
& \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_m, \\
\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_m, \\
& -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_m, \\
& \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_l, \\
\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_l, \\
& \frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_l, \\
& \sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \\
& - \sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = p_k, \\
\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = \tau_k, \\
& -\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \\
& + \sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha + \sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha = \vartheta_k.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Задача заключается в исследовании (в зависимости от геометрических параметров ψ, α и параметров нагрузки) условий существования решений системы уравнений (11.7) и их нахождения. Условия существования решений уравнений (11.7) обеспечивают корректность постановки задачи механики для рассматриваемого деформируемого твердого тела. Решение этих уравнений формирует задаваемые условия в вершине пирамиды. Если количество таких условий оказывается большим трех (большим количества условий, задаваемых в обычной (не особой) точке поверхности тела), задача механики для рассматриваемого тела становится неклассической.

11.1.2. Исследование системы уравнений (11.7)

С использованием эквивалентных преобразований уравнения (11.7) преобразуются к двум автономным системам. Первая из них содержит шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_n + p_l, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi + \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_n + \tau_l, \\ \sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\ 2\sigma_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\sigma_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha &= p_m + p_k, \\ \sigma_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \sigma_{33} \sin 2\psi - \sigma_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha &= \tau_m + \tau_k, \\ -\sigma_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \sigma_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - 2\sigma_{12} \cos \psi \cos 2\alpha &= \vartheta_m + \vartheta_k. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Вторая система включает шесть уравнений относительно двух компонент напряжений σ_{13}, σ_{23} :

$$\begin{aligned} 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_m - p_k, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_n - \tau_l, \\ 2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_n - \vartheta_l, \\ 2\sigma_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - 2\sigma_{23} \sin 2\psi \sin \alpha &= p_m - p_k, \\ -2\sigma_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + 2\sigma_{23} \cos 2\psi \sin \alpha &= \tau_m - \tau_k, \\ -2\sigma_{13} \sin \psi \sin \alpha - 2\sigma_{23} \sin \psi \cos \alpha &= \vartheta_m - \vartheta_k. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Определитель матрицы системы уравнений (11.8), соответствующий ее первым четырем строкам, записывается равенством

$$\Delta = 16 \cos^4 \psi \sin \psi \sin^2 2\alpha. \quad (11.10)$$

В пределах изменения параметров ψ, α

$$0 < \psi < \pi/2, \quad 0 < \alpha < \pi/2 \quad (11.11)$$

определитель (11.10) не обращается в нуль. Следовательно, ранг системы уравнений (11.8) равен четырем. Система уравнений (11.8) имеет единственное решение при условии, что ранг ее расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к двум ограничениям на параметры ψ, α пирамиды и компоненты векторов нагрузки в ее вершине:

$$\begin{aligned} (p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi &= 0, \\ (p_n + p_l - p_k - p_m) \cos 2\alpha + (\vartheta_n + \vartheta_l - \vartheta_m - \vartheta_k) \sin 2\alpha \cos \psi &= 0. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Если условия (11.12) выполняются, уравнения (11.8) имеют решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [p_m + p_k + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha + \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (1 + \cos 2\alpha) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{8 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} [-(p_m + p_k) + (p_n + p_l)(\cos 2\alpha - \cos 2\psi + \cos 2\alpha \cos 2\psi) + \\ &\quad + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi (\cos 2\alpha - 1) + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi \sin 2\alpha], \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2\sin\psi}[(\tau_n + \tau_l)\cos\psi - (p_n + p_l)\sin\psi],$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4\cos^2\psi\sin 2\alpha}(p_n + p_l - p_m - p_k).$$

Определитель, соответствующий первой и четвертой строке матрицы системы уравнений (11.9)

$$\Delta = -4\sin 2\alpha \sin^2 2\psi,$$

не обращается в нуль при изменении параметров ψ, α в области допустимых значений (11.11). Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (11.9) равен двум. Решение этих уравнений будет существовать, если ранг расширенной матрицы также будет равен двум. Это требование приводит к четырем независимым условиям, накладываемым на параметры α, ψ и компоненты векторов нагрузки в особой точке:

$$\begin{aligned} (p_n - p_l)\cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l)\sin 2\psi &= 0, \\ (p_m - p_k)\cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k)\sin 2\psi &= 0, \\ (p_n - p_l)\cos 2\alpha + 2(\vartheta_n - \vartheta_l)\sin 2\alpha \cos\psi - (p_m - p_k) &= 0, \\ (p_m - p_k)\cos 2\alpha + 2(\vartheta_m - \vartheta_k)\sin 2\alpha \cos\psi + (p_n - p_l) &= 0. \end{aligned} \quad (11.14)$$

В случае, когда условия (11.14) выполняются, уравнения (11.9) имеют решение:

$$\sigma_{13} = \frac{1}{4\cos\alpha\sin\psi}(p_n - p_l + p_m - p_k), \quad \sigma_{23} = \frac{1}{4\cos\alpha\sin\psi}(p_n - p_l - p_m + p_k). \quad (11.15)$$

Итак, при выполнении ограничений (11.12), (11.14) на геометрические параметры и компоненты нагрузки напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известно значение всех шести напряжений. Они являются заданными параметрами в особой точке.

Если хотя бы одно из условий (11.12), (11.14) не выполняется, система уравнений (11.7) становится несовместной. В этом случае корректная постановка задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) невозможна.

11.1.3. Частные случаи

11.1.3.1. Случай нормальной поверхностной нагрузки

Пусть на гранях пирамиды вблизи ее вершины прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = p_n \bar{n}, \quad \bar{p}_m = p_m \bar{m}, \quad \bar{p}_l = p_l \bar{l}, \quad \bar{p}_k = p_k \bar{k}.$$

Условия (11.12), (11.14) принимают вид

$$\begin{aligned} -p_n - p_l + p_m + p_k &= 0, & p_n + p_l - p_m - p_k &= 0, & (p_n - p_l)\cos 2\psi &= 0, & (p_m - p_k)\cos 2\psi &= 0, \\ (p_n - p_l)\cos 2\alpha - (p_m - p_k) &= 0, & (p_n - p_l) - (p_m - p_k)\cos 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Эти равенства совместны лишь в случае, когда

$$p_n = p_l = p_m = p_k = p. \quad (11.16)$$

Если условие (11.16) выполняется, напряжения в вершине пирамиды принимают значения:

$$\sigma_{11} = p, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0.$$

Такое решение согласуется с известным аналитическим решением задачи о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всей поверхности однородными нормальными распределенными усилиями.

11.1.3.2. Случай касательной поверхностной нагрузки

1. Примем, что поверхностная нагрузка вблизи вершины имеет вид

$$\bar{p}_n = \tau_n \bar{\xi}_n, \quad \bar{p}_m = \tau_m \bar{\xi}_m, \quad \bar{p}_l = \tau_l \bar{\xi}_l, \quad \bar{p}_k = \tau_k \bar{\xi}_k.$$

Условия (11.12), (11.14) образуют систему равенств:

$$\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k = 0, \quad \tau_n - \tau_l = 0, \quad \tau_n - \tau_m = 0.$$

Из этих равенств следует, что корректная постановка задачи МДТТ возможна, когда выполняются соотношения

$$\tau_n = \tau_l = \tau_m = \tau_k = \tau. \quad (11.17)$$

Если равенства (11.17) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам:

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

2. Пусть вблизи вершины на гранях пирамиды прикладывается нагрузка

$$\bar{p}_n = \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{p}_m = \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \quad \bar{p}_l = \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{p}_k = \vartheta_k \bar{\zeta}_k.$$

Условия (11.12), (11.14) запишутся равенствами:

$$\vartheta_n + \vartheta_l + \vartheta_m + \vartheta_k = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_m - \vartheta_k = 0.$$

Из этих равенств следует зависимость

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta_m = \vartheta_k = \vartheta. \quad (11.18)$$

Если равенства (11.18) выполняются, напряжения в вершине пирамиды вычисляются по формулам

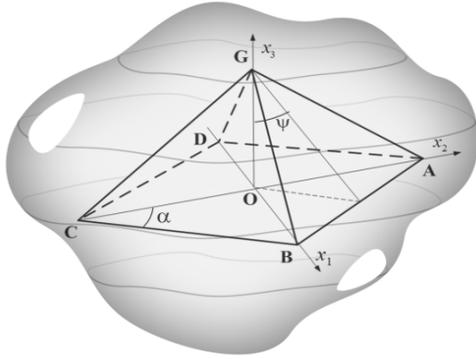
$$\sigma_{11} = \frac{\vartheta \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\vartheta \operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Построенные в этом пункте решения о напряженном состоянии в вершине пирамиды согласуются с решением, получаемым методом сечений.

11.2. Четырех угольная пирамида с ромбическим основанием, погруженная в упругое тело

Особые точки в виде вершин многогранников внутри деформируемых тел возникают при их армировании кристаллическими частицами, короткими волокнами, а также в случае исследования образцов посредством внедрения в них инденторов или кристаллических игл кантилеверов.

11.2.1. Постановка задачи



Рассматриваются непрерывным образом скрепленные изотропные упругие тела 1, 2 (рис. 11.2), одно из которых (тело 1) имеет особенность в виде вершины четырехугольной пирамиды с ромбическим основанием. Сохраняются принятые в п. 1 обозначения, связанные с пирамидой.

Рис. 11.2

Материальные параметры и параметры состояния, относящиеся к телам 1, 2, снабжаются соответствующими верхними индексами в скобках. Для элементарных объемов тел 1, 2 в точках поверхностей соприкосновения выполняются:

$$\begin{aligned}
 &1) \quad \text{условия равенства нормальных и касательных напряжений} \\
 &\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_{\xi_n}^{(1)} = \tau_{\xi_n}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_n}^{(1)} = \tau_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)}, \quad \tau_{\xi_m}^{(1)} = \tau_{\xi_m}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_m}^{(1)} = \tau_{\zeta_m}^{(2)}, \\
 &\sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(2)}, \quad \tau_{\xi_l}^{(1)} = \tau_{\xi_l}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_l}^{(1)} = \tau_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(2)}, \quad \tau_{\xi_k}^{(1)} = \tau_{\xi_k}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta_k}^{(1)} = \tau_{\zeta_k}^{(2)}; \quad (11.19)
 \end{aligned}$$

2) условия равенства относительных удлинений в направлении введенных на этих поверхностях единичных векторов $(\xi_n, \zeta_n, \dots, \xi_k, \zeta_k)$ и равенства сдвигов между такими векторами

$$\begin{aligned}
 &\eta_{\xi_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_n}^{(1)} = \eta_{\zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(1)} = \eta_{\xi_n \zeta_n}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_m}^{(1)} = \eta_{\zeta_m}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(1)} = \eta_{\xi_m \zeta_m}^{(2)}, \quad (11.20) \\
 &\eta_{\xi_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_l}^{(1)} = \eta_{\zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(1)} = \eta_{\xi_l \zeta_l}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k}^{(2)}, \quad \eta_{\zeta_k}^{(1)} = \eta_{\zeta_k}^{(2)}, \quad \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(1)} = \eta_{\xi_k \zeta_k}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

В равенствах (11.19), (11.20) приняты обозначения: σ – нормальное напряжение, τ – касательное напряжение, η (с одним индексом) – относительное удлинение, η (с двумя индексами) – сдвиг. Нижние индексы указывают направление действия напряжений, направления относительных удлинений, изменение угла между векторами. Для разностей компонент

напряжений и деформаций в элементарных объемах тел 1, 2 при вершине пирамиды вводятся обозначения

$$\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}. \quad (11.21)$$

С использованием обозначений (11.21) условия (11.19), (11.20) запишутся двумя линейными однородными системами уравнений. Первая из них содержит двенадцать уравнений относительно параметров ζ_{ij} :

$$\begin{aligned} &\zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ &\zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha + \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha - \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &-\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha - \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \quad (11.22) \\ &\zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi + \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha - \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0, \\ &\zeta_{11} \cos^2 \psi \cos^2 \alpha + \zeta_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + \zeta_{33} \sin^2 \psi - \zeta_{12} \cos^2 \psi \sin 2\alpha - \zeta_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \zeta_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\frac{1}{2} \zeta_{11} \sin 2\psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \sin 2\psi \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \zeta_{33} \sin 2\psi - \frac{1}{2} \zeta_{12} \sin 2\psi \sin 2\alpha + \zeta_{13} \cos 2\psi \cos \alpha - \zeta_{23} \cos 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &-\frac{1}{2} \zeta_{11} \cos \psi \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \zeta_{22} \cos \psi \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \zeta_{12} \cos \psi \cos 2\alpha + \zeta_{13} \sin \psi \sin \alpha + \zeta_{23} \sin \psi \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Вторая система содержит двенадцать уравнений относительно параметров ξ_{ij} :

$$\begin{aligned} &\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha - \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ &-\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha + 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \quad (11.23) \\ &\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi + \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha + \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha + 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + \xi_{33} \cos^2 \psi - \xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha + \xi_{13} \sin 2\psi \cos \alpha - \xi_{23} \sin 2\psi \sin \alpha = 0, \\ &\xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha = 0, \\ &-\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + \xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha - 2\xi_{13} \cos \psi \sin \alpha - 2\xi_{23} \cos \psi \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Задача состоит в исследовании условий существования решений систем уравнений (11.22), (11.23) и их нахождения. Такие решения являются

ограничениями на параметры состояния в элементарных объемах тел 1, 2, содержащих вершину пирамиды.

11.2.2. Исследование систем уравнений (11.22), (11.23)

Матрица системы уравнений (11.22) совпадает с матрицей системы уравнений (11.7). В п. 1.2 выяснено, что эта матрица имеет шесть независимых строк, т.е. ее ранг равен шести. Вследствие однородности системы уравнений (11.22) она имеет лишь нулевое решение

$$\zeta_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = 0, \text{ т.е. } \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (11.24)$$

Уравнения (11.23) элементарными преобразованиями приводятся к двум автономным системам. Первая из них состоит из шести уравнений относительно четырех параметров $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}$:

$$\begin{aligned} 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi + 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha - \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha - 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0, \\ 2\xi_{11} \sin^2 \psi \cos^2 \alpha + 2\xi_{22} \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + 2\xi_{33} \cos^2 \psi - 2\xi_{12} \sin^2 \psi \sin 2\alpha &= 0, \\ \xi_{11} \sin^2 \alpha + \xi_{22} \cos^2 \alpha + \xi_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ -2\xi_{11} \sin \psi \sin 2\alpha + 2\xi_{22} \sin \psi \sin 2\alpha - 4\xi_{12} \sin \psi \cos 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Вторая система состоит из четырех независимых уравнений относительно двух параметров ξ_{13}, ξ_{23} :

$$\begin{aligned} \xi_{13} \cos \alpha + \xi_{23} \sin \alpha = 0, \quad \xi_{13} \cos \alpha - \xi_{23} \sin \alpha = 0, \\ \xi_{13} \sin \alpha + \xi_{23} \cos \alpha = 0, \quad \xi_{13} \sin \alpha - \xi_{23} \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Определитель, отвечающий первым четырем строкам системы уравнений (11.25)

$$\Delta = 3 \cos^2 \psi \sin^2 2\alpha \sin^2 \psi$$

не обращается в нуль в области допустимых значений параметров α, ψ . Следовательно, ранг матрицы системы уравнений (11.25) равен четырем, а ее решение имеет вид

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{12} = 0, \text{ т. е. } \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{33}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(2)}, \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (11.27)$$

Ранг матрицы системы уравнений (11.26) равен двум, ее решение нулевое

$$\xi_{13} = \xi_{23} = 0, \text{ т. е. } \varepsilon_{13}^{(1)} = \varepsilon_{13}^{(2)}, \varepsilon_{23}^{(1)} = \varepsilon_{23}^{(2)}. \quad (11.28)$$

11.2.3. Компоненты напряжений в элементарных объемах тел 1,2, содержащих вершину пирамиды

С использованием физических уравнений термоупругости равенства (11.27), (11.28) запишем через напряжения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ -\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (11.29)$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{11} - \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{E_1 - E_2}\right)\sigma_{22} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\sigma_{33} &= Q, \\ \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{12} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{13} = 0, \quad \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)\sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (11.30)$$

В этих равенствах E_k , G_k , ν_k , ω_k – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, коэффициенты температурной деформации скрепляемых тел; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$ (т.к. $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$); $Q = (\omega_1 - \omega_2)\Delta T$, ΔT – однородное приращение температуры.

Изучим решения систем уравнений (11.29), (11.30). Определитель матрицы системы уравнений (11.29) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{E_1 E_2}\right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (11.31)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

3. $\Delta \neq 0$. Из этого условия следует, что $G_1 \neq G_2$, поэтому уравнения (11.29), (11.30) имеют единственное решение:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (11.32)$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Оказываются известными все двенадцать компонент тензоров напряжений. Из решения (11.32) видно, что сочетание параметров, удовлетворяющее равенству

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad (11.33)$$

является критическим, так как при стремлении сочетания параметров к выполнению равенства (11.33) напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ в элементарных объемах, содержащих вершину G, стремятся к бесконечности.

4. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \quad (11.34)$$

Ранг системы уравнений (11.29) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если $Q=0$, и трем, если $Q \neq 0$, поэтому реализуются варианты:

а) $Q=0$. Напряжения σ_{ij} ($i=1,2,3$) подчинены ограничениям (т.к. в данном случае $G_1 \neq G_2$)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (11.35)$$

Общее количество ограничений на компоненты тензоров напряжений тел 1,2 в вершине пирамиды равно одиннадцати.

б) $Q \neq 0$. Уравнения (11.29) несовместны. Задача МДТТ не может быть поставлена корректно.

3. $\Delta = 0$. Причем

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (11.36)$$

Ранг матрицы системы уравнений (11.29) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

В данном случае $G_1 = G_2$, поэтому каких-либо дополнительных ограничений на компоненты σ_{ij} ($i \neq j$) не накладывается. Общее количество ограничений на компоненты напряжений элементарных объемов тел 1, 2, примыкающих к вершине пирамиды, равно семи.

4. $\Delta = 0$. Причем,

$$E_2(1-2\nu_1) - E_1(1-2\nu_2) = 0, \quad E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2) = 0. \quad (11.37)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона тел 1, 2 совпадают. Ранг системы уравнений (11.29) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если эти коэффициенты совпадают, скрепляемые материалы идентичны, особая точка отсутствует. Когда ранг расширенной матрицы равен единице ($Q \neq 0$), уравнения (11.29) несовместны. Корректная постановка задачи МДТТ становится невозможной.

Заключение

Предлагаемый в данной работе подход (в отличие от классического подхода, который базируется на асимптотической идее) позволяет определить напряженно-деформированное состояние непосредственно в элементарном объеме, соответствующем особой точке. Изучены такие точки в однородных и составных плоских клиньях, однородных и составных пространственных ребрах, в вершинах конусов и многогранников. Кроме того, рассмотрены случаи, когда указанные элементы конструкции погружены в упругую среду, т.е. являются внутренними особыми точками. Во всех случаях аналитическими

методами устанавливаются полностью или частично параметры состояния в особых точках. Такие параметры являются заданными, поэтому решения (в том числе и асимптотические) должны быть согласованы с их значениями. Развиваемый авторами подход позволяет выявить не только ограничения на компоненты напряжений и деформаций в особых точках, но и условия, накладываемые на компоненты векторов поверхностной нагрузки в их окрестности. Такие условия обеспечивают корректность постановок задач механики деформируемого твердого тела. Приведенные в работе результаты найдут применение в задачах определения коэффициентов концентрации напряжений, механике композитных материалов, изучении НДС в окрестности вершин индентеров при исследовании образцов.

Список литературы

1. *Apel T., Mehrmann V., Watkins D.* Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2002. Nr. 191. P. 4459 – 4473.
2. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. of Solid and Struct.* 2001. V. 38, Nr. 50-51. P. 9077 – 9109.
3. *Bogy D.B.* Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38, Nr 2. P. 8796.
4. *Bogy D.B.* Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials // *D.G. Bogy, K.C. Wang* // *Int. J. of Solid and Struct.* 1971. V. 7, Nr. 8, P. 993 – 1005.
5. *Bazant Z.P., Keer. L.M.* Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches and inclusions. // *Int. J. of Solid and Struct.* 1974. Nr. 10. P.957– 964.
6. *Chen Q.D., Xu K.Y., Pan E.* Inclusion of arbitrary polygon with graded eigenstrain in an anisotropic piezoelectric half plane // *Int. J. of Solid and Struct.* 2014. Nr. 51. P. 53 – 62.
7. *Mittelstedt C., Becker W.* Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method // *Int. J. of Solids and Structures.* 2006. V. 43(10). P. 2868 – 2903. URL:[http:// dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059](http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059)
8. *Dimitrov A., Andra H., Schnack E.* Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity // *Int. J. Num. Meth. Engng.* 2001. V. 52(8). P. 805 – 827. URL:<http://dx.doi.org/10.7868/s0869565214210105>
9. *Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R.* A review of T-stress and its effects in fracture // *Engng. Fract. Mech.* 2015. V. 134. P. 218 – 241.
10. *Hein V. L.* Stress singularities in a two-material wedge // *V. L. Hein, F. Erdogan* // *Int. J. Fract. Mech.* 1971. V. 7, Nr. 3. P. 317 – 330.
11. *Koguchi H.* Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure // *Int. J. of Solids and Structures.* 1997. V. 34, Nr. 4, P. 461 – 480.
12. *Koguchi H., Muramoto T.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // *Int. J. of Solids and Structures.* 2000. V. 37(35). P. 4737 – 4762. URL:[http:// dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00159-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00159-6).
13. *Koguchi H., Antonio J.* Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // *Int. J. of Solids and Structures.* 2010. V. 47. P. 3131 – 3140. URL:[http:// dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015](http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015)
14. *Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Angew Z.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // *Math. Phys.* 2018. V. 69. P. 121. [https:// doi.org/10.1007/s00033-018-1013-y](https://doi.org/10.1007/s00033-018-1013-y)
15. *Kovalenko, M.D., Menshova, I.V., Kerzhaev, A.P.* et al. Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 4339. URL:[https:// doi.org/10.1007/s00707-018-2244-x](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2244-x)
16. *Kozlov V.A., Mazya V.G., Schwab C.* On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1992. Nr. 119. P. 197 –227.
17. *Li Y.L., Hu S.Y., Yang Y.Y.* Stresses around the bond edges of axisymmetric deformation joints. // *Engng. Fract. Mech.* 2000. P.153 – 170.
18. *Luangarpa C., Koguchi H.* Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral // *Europ. J. of Mech. – A/Solids.* 2016. V. 60. P. 208 – 216.
19. *Munz D.* Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *D. Munz, Y.Y. Yang* // *J. Appl. Mech.* 1992. V. 59. Nr. 4. P. 857 – 861.
20. *Nkemzi B.* On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points. // *Math. Meth. Appl. Scien.* 2005. V. 28. Nr. 1. P. 29 – 41.
21. *Noda N., Tsuji T.* Stress singularities in edge-bonded dissimilar wedges (three-dimensional axisymmetrical elastic problems). // *Trans JSME (in Japanese)* 1992. V. 58. Nr. 546. P. 123 –129.
22. *Nozaki H., Horibe T., Taya M.* Stress field caused by polygonal inclusion // *JSME Int. J. Ser. A.* 2001. V. 44. Nr. 4. P. 472 – 482.
23. *Paggi M., Carpintery A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. V. 61. P. 020801-1-22.

24. *Pan E.* Eshelby problem of polygonal inclusions in anisotropic piezoelectric full- and half-planes // *J. Mech. Phys. Solids.* 2004. V. 52. P. 567 – 589.
25. *Parihar K.S., Keer L.M.* Elastic stress singularities at conical inclusions. // *Int. J. Solids Struct.* 1978. V.14. P. 261 – 263.
26. *Pestrenin V. M., Pestrenina I. V.* Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mech. of Comp. Materials*, 2017. V. 53. Nr. 1. P.107 – 116. URL:<http://link.springer.com/article/10.1007/s11029-017-9644-1>.
27. *Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L.V.* Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American Journal of Solids and Structures.* 2017. V. 14, N. 11. P. 2067 – 2088. URL:<http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253826>.
28. *Pestrenin V.M, Pestrenina I.V., Landik L.V.* Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mech. of Comp. Materials.* 2015. V. 51, Nr. 4. P. 489 – 504. URL:<http://dx.doi.org/10.1007/s11029-015-9520-9>.
29. *Picu C.R.* Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces. // *Int. J. Solids Struct.* 1996. V. 33. Nr. 17. P. 2453 – 2457.
30. *Sator C.* Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions/ *C. Sator, W. Becker* // *Arch. Appl. Mech.* 2012. V. 82. Nr. 5. P. 643 – 658.
31. *Sinclair G. B.* Stress singularities in classical elasticity I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. Nr. 4. P. 251 – 297.
32. *Sinclair G. B.* Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004, V. 57, Nr. 4, P. 385 – 439.
33. *Stepanova L.V., Roslyakov P.S.* Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium. *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2015. Nr. 4. P. 188 – 225. URL:<http://dx.doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12>.
34. *Sun L.G., Xu K.Y., Pan E.* Inclusion of arbitrary polygon with graded eigenstrain in an anisotropic piezoelectric full plane // *Int. J. Solids Struct.* 2012. V. 49. P. 1773 – 1785.
35. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. of App. Mech.* 1952. V. 19. P. 526 – 528.
36. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A Biologically Inspired Design // *Experimental mechanics.* 2004. V. 44. Nr. 6. P. 608 – 615.
37. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Experim. Mech.* 2004. V. 44, Nr. 6. P. 616 – 621.
38. *Yongwoo Lee, Insu Jeon, Seyoung Im.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // *Int. J. of Solids and Struct.* 2006. V. 43, Nr. 9. P. 2710 – 2722. URL:<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050>.
39. *Zhixue Wu* A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // *Engng Fract. Mech.* 2005. V. 73(7). P. 953 – 962. URL:<http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.10.010>.
40. *Аветисян А.Г.* Исследование поведения напряжений около жестко заземленной вершины составного упругого клина // *Изв. Арм. ССР. Серия: Механика.* 1981. Т. 34, № 3. С. 3 – 12.
41. *Аветисян А.Г.* Исследования характера напряженного состояния в частично заделанной окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела // *Изв. Арм. ССР. Серия: Механика.* 1972. Т. 25, № 5. С. 23 – 34.
42. *Аветисян А.Г., Чобанян К.С.* Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости // *Изв. Арм. ССР: XXV.* 1972. № 6. С.13 – 25.
43. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикладная математика и механика.* 1967. № 1. С. 178 – 186.
44. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения // *Прикладная механика.* 1982. Т. 18, № 7. С. 66 – 73.
45. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2013. № 1. С. 5 – 30.
46. *Белубекян В.М., Белубекян М.В., Терзян С.А.* Напряженное состояние окрестности вершины упругого клина // *Изв. национальной АН Армении.* 2001. Т. 54, № 2. С. 18 – 21.

47. *Будаев Б.В., Морозов Н.Ф., Нарбут М.А.* Кручение кругового конуса при статическом и динамическом нагружении // ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 152 – 156.
48. *Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Коваленко М.Д., Трубников Д.В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 1. С. 53 – 60.
49. *Денисюк И.Т.* Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред // МТТ. 2001. № 3. С. 68 – 77.
50. *Задоян М.А.* Прочность соединения составных плит // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 1. С. 111 – 122.
51. *Кондратьев, В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209 – 292.
52. *Корепанова Т.О., Матвеевко В.П., Шардаков И.Н.* Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // ДАН. 2014. Т. 457, № 3. С. 286 – 291.
53. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33 – 36.
54. *Матвеевко В.П.* Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // Изв. РАН МТТ. 1995. № 5. С. 71 – 77.
55. *Минакова С.Г.* Численно-аналитический метод расчета показателей сингулярности напряжений в вершинах плоских и пространственных клиньев: дис. ...канд. физ.-мат. наук: Пермь, 1990. 136 с.
56. *Михайлов С.Е.* Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 103 – 110.
57. *Панасюк, В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках // Киев: Наукова думка. 1976. 443с.
58. *Пестренин В.М., Пестренина И.В.* Механика композитных материалов и элементов конструкций // Учеб. пособие/ Перм. ун-т. Пермь, 2005. 364 с.
59. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 171 – 187.
DOI:10.15593/perm.mech/2015.4.11.
60. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершинах правильных треугольной и четырехугольной пирамид // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 102 – 119.
61. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко заземленными образующими // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 131 – 147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
62. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Напряженное состояние вблизи вершины плоского составного клина, одна из образующих которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 1. С. 99 – 113.
63. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78 – 87.
64. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 95 – 109.
65. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Нестандартные задачи механики деформируемого твердого тела и итерационный метод их решения // Механика наноструктурированных материалов и систем: Сб. тр. 2-й Всесоюзной конференции: 3 т. Т. 3. М.: ИПРИМ РАН, 2013. С. 104 – 118.
66. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // Вестник Томского государственного университета.

Математика и механика. 2018. № 52. С. 89 – 101. DOI 10.17223/19988621/56/9.

67. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Полянина Е.А.* Исследование напряжений в составной пластинке вблизи края линии соединения в зависимости от толщины и материальных параметров соединяющей прослойки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 1. С. 153 – 166.
68. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Эйсмонт Е.Р.* Напряженное состояние вблизи линии особых точек на свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 57. С. 84 – 98. DOI 10.17223/19988621/57/7.
69. *Попов Г.Я.* Напряженное состояние упругого составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса // ПММ. 2006. Т. 70, вып.4. С. 660 – 672.
70. *Рябов И.А.* Безопасность механически неоднородных элементов конструкций нефтегазового комплекса: Автореф. дис... канд. техн. наук. Уфа, ГУП «ИПТЭР», 2009. 26 с.
71. *Степанова Л.В., Яковлева Е.М.* Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С.129 – 162.
72. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
73. *Федоров А.Ю.* Исследование и оптимизация напряженного состояния в окрестности особых точек упругих тел : дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 Пермь, 2016. 157 с.
74. *Форсайт Д.Ж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 279 с.
75. *Черных К.Ф.* Введение в механику сплошных сред. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.
76. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338 с.
77. *Чобанян К.С., Геворкян С.Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела // Изв. АН Арм. ССР. 1971. Т. XXIV, № 5. С. 16 – 24.
78. *Шириян Р.А.* Поле напряжений в окрестности внутренней угловой точки поверхности соединения растянутой составной полосы // Изв. нац. академии наук Армении. Механика. 1999. Т. 52, № 4. С. 84 – 88.

Научное издание

Пестренин Валерий Михайлович
Пестренина Ирина Владимировна
Ландик Лидия Владимировна

Задачи механики упругих тел с особыми точками

Монография

Редактор *Л. П. Сидорова*
Компьютерная верстка: *И. В. Пестренина*

Объем данных 4,16 Мб
Подписано к использованию 02.07.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15