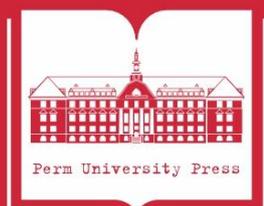


ПЕРМСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

**Н. А. Калинин**

**ДИНАМИЧЕСКАЯ  
МЕТЕОРОЛОГИЯ**

**ПРАКТИКУМ**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

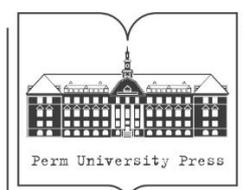
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. А. Калинин

# ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

## ПРАКТИКУМ

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по направлению подготовки бакалавров  
«Гидрометеорология»*



Пермь 2024

УДК 551.5(075.8)

ББК 26.23я73

К172

**Калинин Н.А.**

К172 Динамическая метеорология. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. А. Калинин ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2024. – 1,62 Мб ; 91 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Kalinin-Dinamicheskaya-meteorologiya-Praktikum.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4135-2

Учебное пособие состоит из 6 разделов, содержащих теоретические вопросы, задачи и лабораторные работы в соответствии с программой дисциплины «Динамическая метеорология». Решение задач направлено на закрепление теоретического материала, излагаемого в начале каждого раздела, где главное внимание уделяется физическому смыслу рассматриваемых вопросов. Каждая лабораторная работа включает цель и содержание работы, материалы, требуемые для ее выполнения, краткие методические указания.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Гидрометеорология» (профиль «Метеорология»).

УДК 551.5(075.8)

ББК 26.23я73

*Издается по решению ученого совета географического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* кафедра метеорологии, климатологии и экологии атмосферы Казанского (Приволжского) федерального университета (зав. каф. – канд. геогр. наук, доцент **Н. А. Мирсаева**);

начальник АМСГ Пермь УФ ФГБУ «Авиаметтелеком Росгидромета», канд. геогр. наук, доцент **О. Ю. Булгакова**

ISBN 978-5-7944-4135-2

© Калинин Н. А., 2024

© ПГНИУ, 2024

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	4
<b>1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ</b> .....	5
1.1. Вычисление дифференциальных характеристик метеорологических полей .....	5
1.1.1. Вычисление производных по данным карт погоды .....	5
1.1.2. Вычисление градиентов .....	6
1.1.3. Вычисление лапласианов .....	7
1.1.4. Вычисление дивергенции и завихренности .....	8
Задачи .....	22
1.2. Связь между индивидуальной и локальной производными по времени. .	23
Задачи .....	25
<b>2. ЛУЧИСТАЯ ЭНЕРГИЯ</b> .....	27
Лабораторная работа 1. Расчет потоков и притоков радиации в атмосфере .....	28
<b>3. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ</b> .....	45
<b>4. ДИНАМИКА СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЫ</b> .....	50
4.1. Геострофический ветер .....	50
Задачи .....	51
Лабораторная работа 2. Расчет градиентной линейки .....	53
4.2. Геострофическая адвекция температуры .....	55
Задачи .....	58
<b>5. ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АТМОСФЕРЫ</b> .....	60
Лабораторная работа 3. Расчет показателя динамической неустойчивости атмосферы .....	60
<b>6. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ</b> .....	67
Лабораторная работа 4. Расчет и построение профилей скорости ветра, температуры воздуха и массовой доли водяного пара в ПСА в рамках однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ ) .....	69
Лабораторная работа 5. Определение средних в ПСА характеристик турбулентности в однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ ) .....	76
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	81
<b>ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ</b> .....	87
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	89

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном пособии рассматриваются вопросы, связанные с проведением практических занятий по курсу «Динамическая метеорология».

Основное назначение практикума – закрепление теоретических знаний и получение навыков специфического счета. В нем излагаются наиболее важные понятия динамической метеорологии с выводом основных формул, приводятся задачи и лабораторные работы, выполнение которых способствует более глубокому освоению курса. Решение задач направлено на закрепление теоретического материала, изложенного в начале каждого раздела, где главное внимание уделяется физическому смыслу рассматриваемых вопросов. Каждая лабораторная работа определяет цель и содержание работы, требуемые материалы, порядок выполнения работы, содержит отчетный материал, а также краткие методические указания. В конце издания помещены ответы к задачам.

Основной справочный материал, облегчающий вычисления, приводится в приложении.

Автор благодарен И.Л. Лукину за помощь в оформлении рисунков.

# 1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

## 1.1. Вычисление дифференциальных характеристик метеорологических полей

### 1.1.1. Вычисление производных по данным карт погоды

На картах погоды непрерывные поля метеорологических величин (барическое, термическое и др.) представлены дискретными значениями этих величин в отдельных точках. Функции  $F$ , определяющие зависимость значения метеорологической величины  $f$  от координат  $f = F(x, y)$ , неизвестны. Поэтому строгое вычисление производных от  $f$  заменяется приближенным, т.е. вместо бесконечно малых приращений метеорологической величины  $f$  берутся ее конечные разности. Расчет производится с помощью сетки, представляющей собой систему равноотстоящих точек, расстояние между которыми  $r$  (шаг сетки) изменяется от 100 до 1000 км в зависимости от решаемой задачи (рис. 1.1).

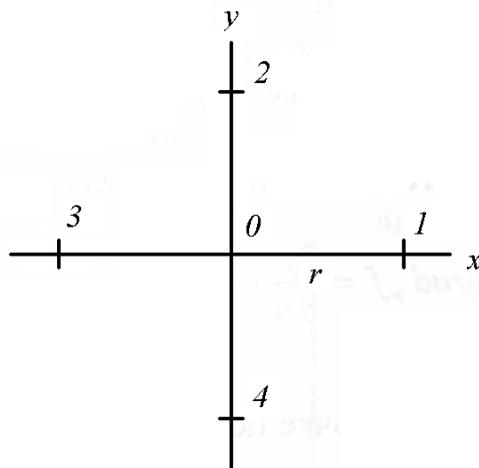


Рис. 1.1. Симметричная сетка точек

Вычисление производных производится в центральной точке  $0$  с применением следующих конечно-разностных соотношений:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_1 - f_3}{2r}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_2 - f_4}{2r}. \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{r^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{r^2}. \quad (1.2)$$

Производные могут быть вычислены для всех точек на карте поля метеорологической величины путем последовательного перемещения в них начала координат расчетной сетки. Формулы (1.1) – (1.2) используются также для вычисления градиентов, лапласианов (операторов Лапласа), дивергенции и вихря скорости ветра.

### 1.1.2. Вычисление градиентов

Градиентом величины  $f$  ( $grad f$ ) называют вектор, направленный в сторону наибольшего роста величины  $f$  и численно равный производной от  $f$  по  $N$  по этому направлению:

$$grad f = \frac{\partial f}{\partial N} = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1.3)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы (орты), направленные вдоль осей  $x, y, z$  декартовой (правой) системы координат: ( $x, y$  – горизонтальные оси координат,  $z$  – вертикальная ось).

Горизонтальный градиент представляет собой проекцию вектора градиента  $grad f$  на горизонтальную плоскость:

$$grad_n f = \frac{\partial f}{\partial n} = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (1.4)$$

В интересующей нас точке поля  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  вычисляются с помощью формул (1.1). Затем полученные значения в виде отрезков с учетом знака откладываются на осях координат и определяется вектор  $\frac{\partial f}{\partial n}$  как диагональ параллелограмма, численно равный

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \quad (1.5)$$

Вертикальный градиент представляет собой проекцию вектора градиента  $grad f$  на вертикальную ось:

$$grad_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Поскольку нормаль  $n$  направлена в сторону роста  $f$ , то горизонтальный градиент всегда положителен:  $\frac{\partial f}{\partial n} > 0$ . Вертикальный градиент может быть как

положительным, так и отрицательным, поскольку ось  $z$  всегда направлена по вертикали вверх.

Ввиду того, что в формуле (1.3) нормаль направлена в сторону возрастающих значений  $f$ , вектор метеорологического градиента по модулю равен производной от  $f$  по  $N$  с обратным знаком:

$$(\text{grad } f)_{\text{мет}} = \left| -\frac{\partial f}{\partial N} \right|.$$

### 1.1.3. Вычисление лапласианов

Горизонтальный лапласиан скалярного поля  $f(x, y)$  записывается следующим образом:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (1.7)$$

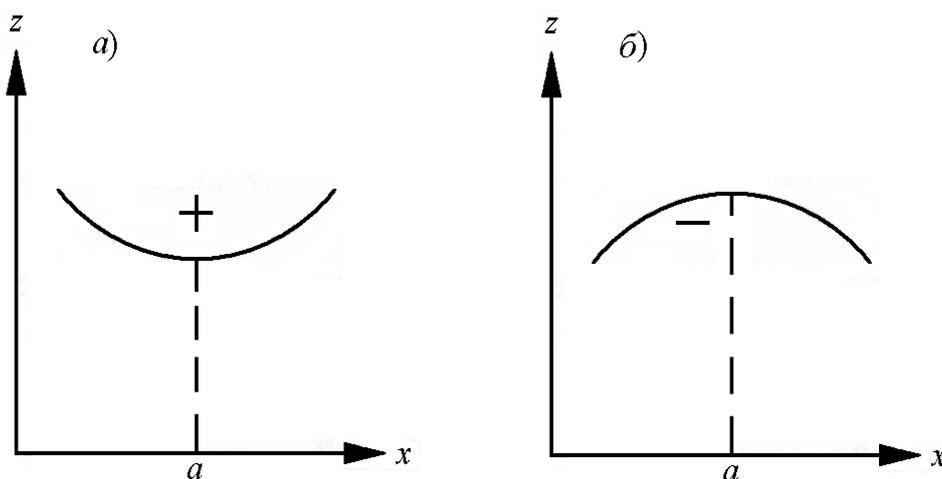


Рис. 1.2. Геометрический смысл второй производной:  
 $a$  – циклон;  $b$  – антициклон

Вторые производные в (1.7) определяются с помощью конечно-разностных формул (1.2).

По знаку лапласиана давления можно определить характер барического поля. В циклонических образованиях лапласиан давления всегда положителен, в антициклонических – отрицателен, что следует из геометрического смысла второй производной. Если вторая производная в точке  $x = a$  положительна, то линия  $z = f(x)$  обращена здесь вогнутостью кверху (рис. 1.2,  $a$ ), что соответствует циклону, если отрицательна, то – книзу (рис. 1.2,  $b$ ), что соответствует антициклону.

#### 1.1.4. Вычисление дивергенции и завихренности

В современных расчетных методах широко используются дифференциальные характеристики поля скорости ветра – дивергенция и вихрь. Исходя из большой роли упомянутых характеристик необходимо уметь определять их численные значения. Ни одна из этих величин не поддается непосредственному измерению подобно, например, ветру или температуре. Поэтому приходится определять дивергенцию и вихрь скорости ветра косвенным путем, иначе говоря, вычислять их по известным полям других метеорологических величин: ветра, давления и т.п.

Скалярное произведение оператора набла

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

и любого вектора  $\vec{a}$  представляет собой дивергенцию этого вектора:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \vec{i} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial a_y}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div } \vec{a}.$$

Дивергенция скорости  $\text{div } V$  равна скорости относительного расширения элементарной частицы:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.8)$$

где  $u, v, w$  – составляющие скорости ветра на оси  $x, y, z$ .

Иначе говоря, если бесконечно малый объем  $\delta\tau$  частицы за время  $dt$  увеличился на  $d\delta\tau$ , то

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{\partial \delta\tau}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Следовательно,  $\text{div } V > 0$ , если воздушная частица по мере движения расширяется, и  $\text{div } V < 0$ , если частица сжимается. Для несжимаемой атмосферы  $\text{div } V = 0$ .

В метеорологии применяется дивергенция главным образом не трехмерного, а двухмерного вектора скорости ветра, лежащего в горизонтальной плоскости (или на изобарической поверхности). Тогда дивергенция скорости ветра  $D$  выразится формулой

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.10)$$

В этом случае дивергенция скорости ветра представляет собой скорость относительного увеличения площади проекции частицы на горизонтальную плоскость  $\delta s$  по мере ее движения:

$$D = \frac{1}{\delta s} \frac{\partial \delta s}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Вихрь скорости ветра  $\vec{\Omega}$  представляет собой векторное произведение оператора набла  $\nabla$  на скорость ветра

$$\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w. \quad (1.12)$$

Записывая векторное произведение в виде определителя

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

и раскрывая его по известным правилам, получаем

$$\vec{\Omega} = \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.14)$$

Множители при единичных векторах представляют собой проекции вихря на оси  $x, y, z$ :

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad (1.15)$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (1.16)$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.17)$$

Горизонтальные составляющие вихря скорости ветра  $\Omega_x$  и  $\Omega_y$  характеризуют вращение воздушной массы в вертикальной плоскости с горизонтальными осями  $x$  и  $y$ . Вертикальная составляющая вихря  $\Omega_z$  характеризует вращение воздушной массы в горизонтальной плоскости с вертикальной осью (рис. 1.3).

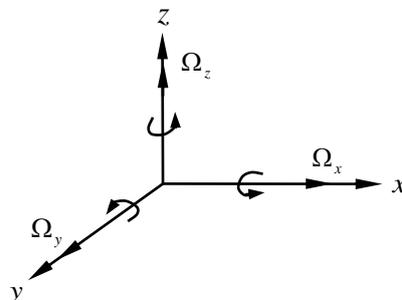


Рис. 1.3. Составляющие вихря скорости ветра

Крупномасштабные движения атмосферы преимущественно горизонтальные: составляющие  $u$ ,  $v$  на 2–3 порядка больше, чем  $w$ . Для таких движений основную роль играет вертикальная составляющая  $\Omega_z$  вихря скорости ветра:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.18)$$

Часто  $\Omega_z$  называют завихренностью, которая представляет собой удвоенную угловую скорость вращения. При этом положительному значению соответствует циклоническое вращение (против часовой стрелки), а отрицательному – антициклоническое (вращение по часовой стрелке). Поэтому положительную завихренность часто называют циклонической, а отрицательную – антициклонической.

Относительно дивергенции скорости и завихренности необходимо отметить два важных момента.

1. В качестве дифференциальных характеристик поля скорости ветра и дивергенция и завихренность представляют собой не воздушные массы и не свойства, а физические величины – первая скалярную, а вторая – векторную. И дивергенция и завихренность существуют и, вообще говоря, различны в разных точках пространства и в разные моменты времени. Иными словами, можно говорить о поле дивергенции скорости ветра и о поле завихренности или, применяя метеорологическую терминологию, утверждать, что дивергенция и завихренность – суть метеорологические величины, принципиально «не худшие», чем давление, температура, ветер и т.п. Поэтому чаще всего мы применяем термин завихренность, а не вихрь скорости ветра: под вихрем в метеорологии обычно понимают некоторый объем воздуха; говорят, например, о турбулентных вихрях, о том, что циклоны и антициклоны суть вихри большого масштаба и т.п. Ясно, что вихри в этом смысле и завихренность, введенная выше, – понятия совершенно различные.

2. Необходимо помнить, что как дивергенция, так и завихренность описывают не движение в целом, а лишь некоторую его одну компоненту, т.е. одно из простых движений, на которые может быть разложено реальное сложное движение. Поэтому отличие дивергенции скорости ветра от нуля отнюдь не означает, что движение частицы есть просто ее расширение или сжатие. Отличие дивергенции от нуля означает лишь наличие составляющей движения, представляющей собой расширение или сжатие частицы. Так, например, если  $u = u_0 + ax; v = w = 0$  ( $u_0 = const, a = const > 0$ ), то хотя такое движение, схема которого представлена на рис. 1.4, отнюдь не есть просто расширение или сжатие, дивергенция скорости ветра в этом случае – не нуль, а именно, как следует

из формулы (1.8),  $\text{div} V > 0$ . В этом случае движение сводится к параллельному переносу и расширению.

Совершенно так же, если завихренность отлична от нуля, то это не значит, что движение частицы есть просто ее вращение. Отличие завихренности от нуля означает лишь наличие составляющей движения, представляющей собой вращение. Так, например, если  $u = u_0 + by; v = w = 0$  ( $u_0 = \text{const}, b = \text{const} > 0$ ), то, хотя такое движение, схема которого представлена на рис. 1.5, отнюдь не есть просто вращение, завихренность в этом случае не нуль, а именно, как следует из соотношений (1.15)–(1.17),  $\Omega_x = 0; \Omega_y = 0; \Omega_z = -b$ . Движение сводится к параллельному переносу и вращению по часовой стрелке.

Движение, при котором завихренность скорости отлична от нуля, называют часто вихревым движением. Исходя из сказанного необходимо иметь в виду, что вихревое движение и вращательное движение – отнюдь не одно и то же.

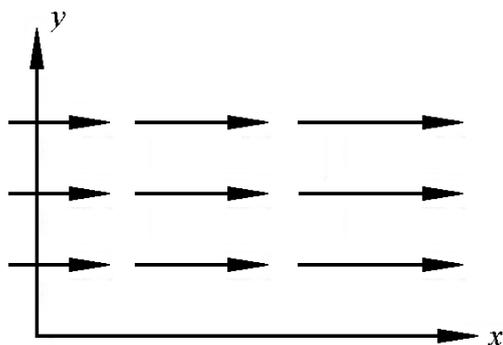


Рис. 1.4. Схема движения при  $u = u_0 + ax; v = w = 0$

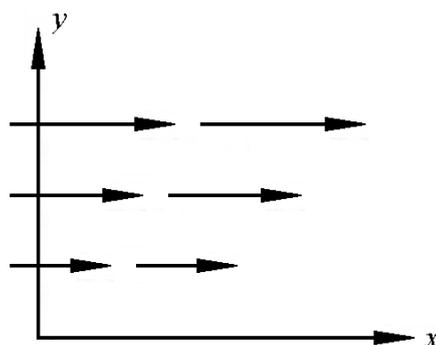


Рис. 1.5. Схема движения при  $u = u_0 + by; v = w = 0$

Для дальнейшего осмысления дивергенции и завихренности удобно перейти к рассмотрению так называемых натуральных координат – криволинейных координат, связанных с самим полем скорости,  $s$  и  $n$ .

Координатные линии  $s$  направим вдоль скорости ветра, тогда семейство координатных линий  $s$  будет семейством линий тока. Координатные линии  $n$  направим так, чтобы в каждой точке касательная к линии  $n = \text{const}$  была перпендикулярна касательной к линии  $s = \text{const}$  в той же точке. Иначе говоря, семейство координатных линий  $n$  ортогонально семейству линий  $s$ . При этом пусть кратчайший поворот от положительного направления  $s$  к положительному направлению  $n$  совершается влево (так же, как от  $x$  к  $y$ ).

Описанная система координат  $s, n$  (рис. 1.6) и носит название натуральной системы координат. Необходимо учитывать, что расположение координатных линий  $s, n$  меняется с течением времени. Угол между положительными направ-

лениями  $x$  и  $s$ , отсчитываемый от  $x$  к  $s$  (против часовой стрелки), обозначим через  $\beta$ . Этот угол меняется от точки к точке и с течением времени

$$\beta = \beta(t, s, n).$$

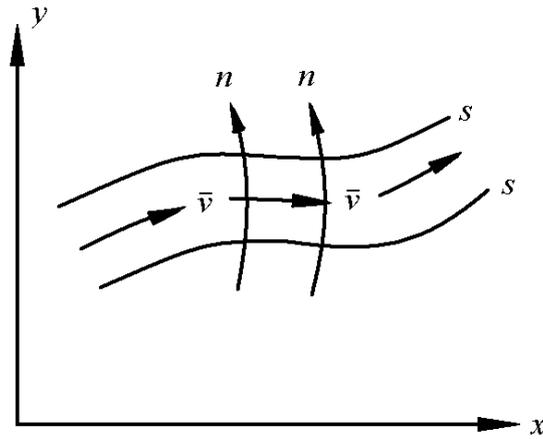


Рис. 1.6. Натуральные координаты

Производная  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  представляет собой скорость поворота ветра в данной фиксированной точке.

Производная  $\frac{\partial \beta}{\partial s}$  определяет поворот линии тока на единицу длины ее дуги, т.е. представляет собой кривизну линии тока  $k_s$ :

$$k_s = \frac{\partial \beta}{\partial s}. \quad (1.19)$$

Производная  $\frac{\partial \beta}{\partial n}$  определяет поворот нормали к линии тока (или, что то же, поворот самой линии тока) на единицу длины дуги этой нормали, т.е. кривизну нормали к линии тока  $k_n$ :

$$k_n = \frac{\partial \beta}{\partial n}. \quad (1.20)$$

Кроме этого, введем соответствующие радиусы кривизны линии тока и нормали к ней

$$R_s = \frac{1}{k_s}; \quad R_n = \frac{1}{k_n}. \quad (1.21)$$

Производная  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  положительна, если ветер в данной фиксированной точ-

ке поворачивает с течением времени влево, отрицательна, если вправо, и равна нулю, если направление ветра не меняется с течением времени.

Кривизна (а с ней и радиус кривизны) линии тока положительна, если линия тока вдоль движения поворачивает влево. Иначе говоря,  $k_s$  (и  $R_s$ ) положительна при циклонической кривизне линии тока, отрицательна при ее антициклонической кривизне и равна нулю при отсутствии кривизны.

Что касается кривизны нормали к линии тока  $k_n$ , то ее удобно связать со сходимостью или, соответственно, расходимостью линий тока вдоль направления движения. Очевидно, что циклонической кривизне этой нормали ( $k_n > 0$ ,  $R_n > 0$ ) соответствует расходимость линий тока вдоль движения, антициклонической кривизне нормали ( $k_n < 0$ ,  $R_n > 0$ ) – сходимость линий тока и отсутствие кривизны нормали к линии тока ( $k_n = 0$ ,  $R_n = \infty$ ) – параллельность соседних линий тока.

Перейдем теперь в выражениях (1.10), (1.18) для  $D$  и  $\Omega_z$  к обсуждению натуральных координат. Для этого выведем формулы перехода от обычных (декартовых) координат на плоскости к натуральным.

Прежде всего, отметим, что

$$u = V \cos \beta; v = V \sin \beta. \quad (1.22)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (1.23)$$

В прямоугольном треугольнике  $\cos \beta$  определяется отношением гипотенузы к прилежащему к углу  $\beta$  катету, а  $\sin \beta$  есть отношение гипотенузы к противолежащему углу  $\beta$  катету, поэтому

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial y} = \cos \beta; \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial n}{\partial x} = \sin \beta. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial s} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial n}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \beta \frac{\partial}{\partial s} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial n}. \quad (1.25)$$

С учетом (1.22) и (1.25) преобразуем выражение для дивергенции

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \left( \cos \beta \frac{\partial}{\partial s} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial n} \right) V \cos \beta + \left( \sin \beta \frac{\partial}{\partial s} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial n} \right) V \sin \beta =$$

$$= \cos\beta \frac{\partial V \cos\beta}{\partial s} - \sin\beta \frac{\partial V \cos\beta}{\partial n} + \sin\beta \frac{\partial V \sin\beta}{\partial s} + \cos\beta \frac{\partial V \sin\beta}{\partial n}.$$

После дифференцирования и сокращения получим

$$D = \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \beta}{\partial n}. \quad (1.26)$$

Формула (1.26) для дивергенции  $D$  на основании (1.20) может быть переписана в виде

$$D = V k_n + \frac{\partial V}{\partial s}, \quad (1.27)$$

откуда следует, что дивергенция с кинематической точки зрения определяется двумя факторами – расходимостью или сходимостью линий тока и составляющей градиента модуля скорости ветра вдоль направления движения, т.е. изменением абсолютной величины скорости вдоль линии тока. Величину  $V k_n$  называют дивергенцией линий тока. Она дает положительный вклад в  $D$  при расходимости линий тока, отрицательный – при сходимости и равный нулю – при параллельности линий тока. Величину  $\frac{\partial V}{\partial s}$  называют дивергенцией модуля скорости. Она дает положительный вклад в  $D$  при увеличении скорости вдоль потока, отрицательный – при уменьшении, равный нулю – при постоянстве скорости с координатой  $s$ .

Влияние этих слагаемых на дивергенцию  $D$ , т.е. на изменение площади частицы, иллюстрируется схемами на рис. 1.7, где в качестве простейших примеров приведены случаи, когда вклад одного из факторов отличен от нуля, а другого равен нулю.

Необходимо подчеркнуть, что ни одним из слагаемых правой части (1.27) нельзя пренебречь – они имеют одинаковый порядок величины. В частности, совершенно неправильно высказываемое иногда утверждение о том, будто дивергенция определяется исключительно (или главным образом) расходимостью или соответственно сходимостью линий тока.

С учетом (1.22) и (1.25) преобразуем выражение для завихренности:

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \cos\beta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\beta \frac{\partial}{\partial n} \right) V \sin\beta - \left( \sin\beta \frac{\partial}{\partial s} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial n} \right) V \cos\beta = \\ &= \cos\beta \frac{\partial V \sin\beta}{\partial s} - \sin\beta \frac{\partial V \sin\beta}{\partial n} - \sin\beta \frac{\partial V \cos\beta}{\partial s} - \cos\beta \frac{\partial V \cos\beta}{\partial n}. \end{aligned}$$

После дифференцирования и сокращения получим

$$\Omega_z = -\frac{\partial V}{\partial n} + V \frac{\partial \beta}{\partial s}. \quad (1.28)$$

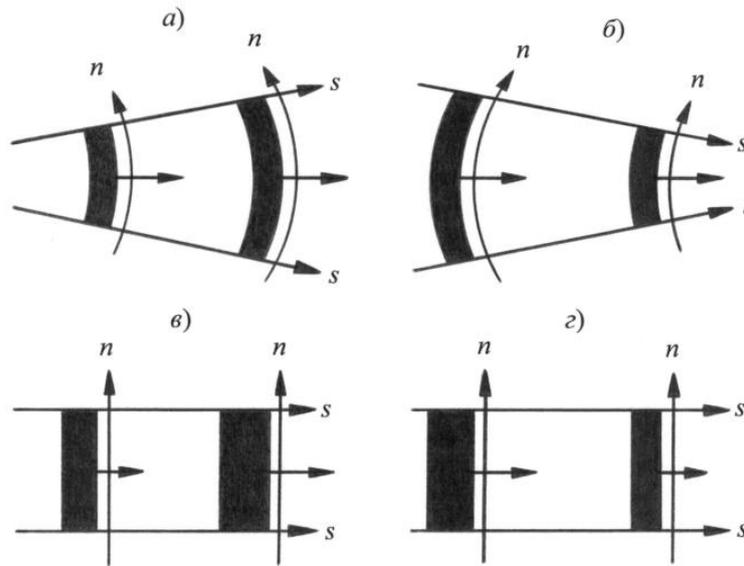


Рис. 1.7. К анализу дивергенции:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & V k_n > 0; \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 0; \quad D > 0; \quad б) \quad V k_n < 0; \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 0; \quad D < 0; \\
 в) \quad & \frac{\partial V}{\partial s} > 0; \quad V k_n = 0; \quad D > 0; \quad з) \quad \frac{\partial V}{\partial s} < 0; \quad V k_n = 0; \quad D < 0
 \end{aligned}$$

(заштрихованы два последовательных положения материальной площадки)

Формула (1.28) для завихренности  $\Omega_z$  на основании (1.19) может быть переписана в виде

$$\Omega_z = V k_s - \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (1.29)$$

откуда следует, что завихренность с кинематической точки зрения определяется двумя факторами – кривизной линий тока и составляющей градиента модуля скорости в направлении, перпендикулярном движению, т.е. изменением модуля скорости поперек линий тока. Величину  $V k_s$  называют завихренностью линий тока. Она дает положительный вклад в  $\Omega_z$  при циклонической кривизне линий тока, отрицательный – при антициклонической, и равный нулю – при прямолинейности линий тока. Величину  $-\frac{\partial V}{\partial n}$  называют завихренностью сдвига. Она

дает положительный вклад в  $\Omega_z$ , если скорость возрастает вправо от движения, отрицательный – если – влево и нулевой, если скорость в поперечном ей направлении не меняется.

Влияние этих слагаемых на завихренность  $\Omega_z$ , т.е. на поворот частицы по мере ее движения, иллюстрируется схемами на рис. 1.8, где в качестве простейших примеров приведены случаи, когда вклад одного из факторов отличен от нуля, а другого равен нулю.

Оба слагаемых в правой части формулы (1.29) имеют одинаковый порядок величины и никак не коррелируют друг с другом, т.е. ни одним из них нельзя пренебречь. В частности, совершенно неправильно высказывается иногда мнение, будто завихренность полностью (или главным образом) определяется кривизной линий тока.

Пользуясь линиями тока (линии в поле ветра, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором скорости в этой точке в данный момент) и изотахами (линии одинакового значения модуля скорости ветра), весьма удобно вычислять дивергенцию и завихренность.

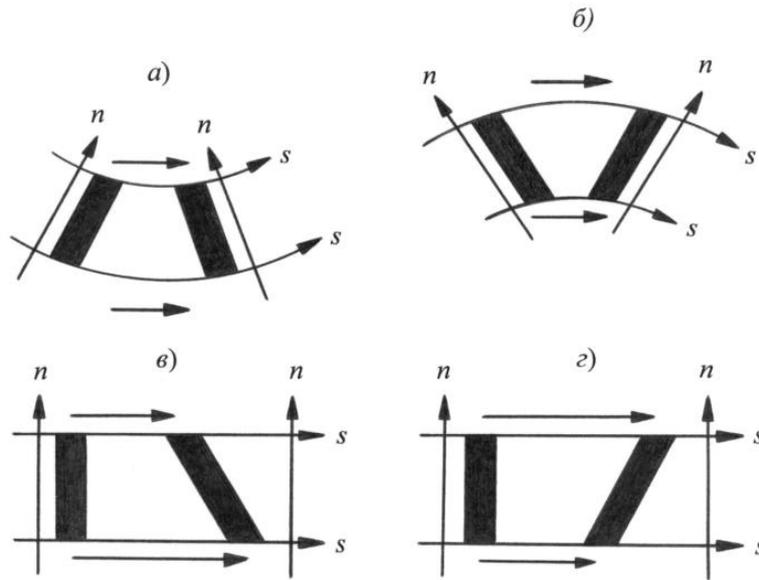


Рис. 1.8. К анализу завихренности:

$$a) vk_s > 0; -\frac{\partial V}{\partial n} = 0; \Omega_z > 0; \quad б) vk_s < 0; -\frac{\partial V}{\partial n} = 0; \Omega_z < 0;$$

$$в) -\frac{\partial V}{\partial n} > 0; vk_s = 0; \Omega_z > 0; \quad з) -\frac{\partial V}{\partial n} < 0; vk_s = 0; \Omega_z < 0$$

(заштрихованы два последовательных положения материальной площадки)

Рассмотрим площадку, ограниченную двумя соседними линиями тока и двумя соседними нормальными (точнее, ортогональными кривыми) к ним  $ABCD$  (рис. 1.9). Средний линейный размер площадки вдоль линий тока – длину криволинейного отрезка  $EF$  обозначим через  $s$ , а средний линейный размер площадки поперек линий тока – длину криволинейного отрезка  $GH$  обозначим через  $n$ . Обычно кривизна отрезков  $EF$  и  $GH$  невелика, так что с большой точностью можно использовать в качестве  $s$  просто расстояние между точками  $E$  и  $F$ , а в качестве  $n$  – расстояние между точками  $H$  и  $G$ . Выведем формулы для

определения дивергенции  $D$  и завихренности  $\Omega_z$  в центре рассматриваемой площадки.

Как видно из формул (1.26) и (1.28), для этого достаточно определить 5 величин:  $V$ ,  $\frac{\partial V}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial s}$  и  $\frac{\partial \beta}{\partial n}$ .

В качестве  $V$  проще всего применять скорость ветра  $V_0$  в центре  $O$  площадки, снятую с изотих. Продольный градиент модуля скорости  $\frac{\partial V}{\partial s}$  проще всего вычислить по формуле (рис. 1.9)

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{V_F - V_E}{s}. \quad (1.30)$$

Поперечный градиент модуля скорости  $\frac{\partial V}{\partial n}$  проще всего вычислить по формуле

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V_G - V_H}{n}. \quad (1.31)$$

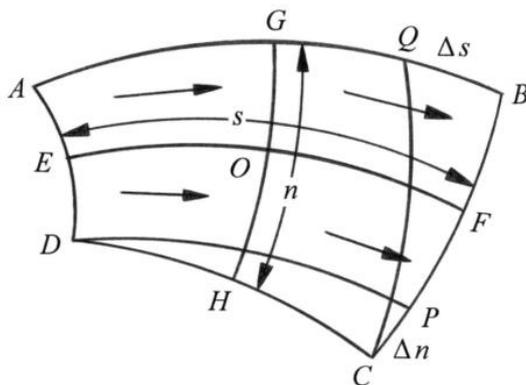


Рис. 1.9. К вычислению дивергенции и завихренности по формулам в натуральной системе координат

Что касается производных от  $\beta$ , то, поскольку углы или тем более приращения углов измерять неудобно, целесообразно перейти к расстояниям. Для этого проведем через точку  $D$  криволинейный отрезок  $DP$ , параллельный отрезку  $AB$  (при сходящихся линиях тока нужный нам отрезок проходил бы через точку  $C$ ), и обозначим длину отрезка  $CP$  через  $\Delta_n$ . Точно так же проведем через точку  $C$  криволинейный отрезок  $CQ$ , параллельный отрезку  $AD$  (при антициклонической кривизне линий тока соответствующий отрезок проходил бы через точку  $B$ ), и обозначим длину отрезка  $QB$  через  $\Delta_s$ . Тогда очевидно, что

приращение угла  $\beta$  от одной линии тока к другой определится отношением  $\frac{\Delta_n}{s}$ , так что

$$\frac{\partial\beta}{\partial n} = \frac{\Delta_n}{sn}, \quad (1.32)$$

где  $\Delta_n$  берется положительным, если линии тока расходятся, и отрицательным, если сходятся. Аналогично приращение угла  $\beta$  от наветренной нормали к подветренной оценивается как  $\frac{\Delta_s}{n}$ , так что

$$\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{\Delta_s}{ns}, \quad (1.33)$$

где  $\Delta_s$  берется положительным при циклонической и отрицательным – при антициклонической кривизне линий тока.

Подставляя (1.30) – (1.33) в (1.26) и (1.28), получим формулы, выражающие дивергенцию и завихренность через соответствующие конечные разности:

$$D = \frac{1}{s} \left( V_F - V_E + \frac{\Delta_n}{n} V_0 \right), \quad (1.34)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{n} \left( V_H - V_G + \frac{\Delta_s}{s} V_0 \right). \quad (1.35)$$

Из методов вычисления дифференциальных характеристик поля скорости ветра – дивергенции и завихренности – наиболее простыми являются методы определения их по данным о поле ветра. Однако необходимо иметь в виду принципиальный недостаток всех методов определения дивергенции и завихренности по данным поля ветра. Он состоит в локальности поля ветра, т.е. в том, что на величины вектора ветра существенно влияют возмущения весьма малого масштаба, несущественные или малосущественные для синоптических процессов. К тому же надо иметь в виду, что существующая густота сети пунктов аэрологического зондирования и точность данных такого зондирования обычно бывают недостаточными для определения этих дифференциальных характеристик с необходимой степенью точностью. Это особенно относится к дивергенции, которая, как будет показано дальше, определяется из данных о поле ветра как малая разность больших величин, а потому с весьма малой степенью точности.

Рассмотрим, можно ли вычислить дивергенцию и завихренность по величине поля давления (или абсолютного геопотенциала) на основе геострофического приближения.

Сначала рассмотрим возможность расчета дивергенции по данным поля давления (геопотенциала).

Представим  $u$  и  $v$  в виде суммы геострофической и агеострофической составляющих

$$u = u_g + u_a, \quad (1.36)$$

$$v = v_g + v_a, \quad (1.37)$$

где

$$u_g = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.38)$$

$$v_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.39)$$

Здесь  $u_g, v_g$  – составляющие геострофического ветра,  $m/c$ ;  $u_a, v_a$  – агеострофические составляющие,  $m/c$ .

По аналогии с (1.36) – (1.37) представим дивергенцию  $D$  в виде геострофической ( $D_g$ ) и агеострофической ( $D_a$ ) составляющих

$$D = D_g + D_a. \quad (1.40)$$

На основании (1.36) – (1.39) имеем

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + u_a,$$

$$v = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_a.$$

Подставив эти выражения в (1.10) и выполнив дифференцирование, последовательно получим

$$D = \left[ \frac{\partial(u_g + u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g + v_a)}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial \left( -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] + \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right);$$

$$D = \left( -\frac{1}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{l^2} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right);$$

$$D = -\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right);$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\beta} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{v_g}$

$$D = \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) - \frac{\beta}{l} v_g, \quad (1.41)$$

где  $\beta = \frac{\partial l}{\partial y}$  — параметр Россби. В окрестности широты  $\varphi$ , на которой помещено начало координат, параметр  $\beta$  можно разложить в ряд по степеням  $y$

$$\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{2\omega}{R} \left[ \cos\varphi - \frac{\sin y}{1} \frac{y}{R} - \frac{\cos}{2!} \left( \frac{y}{R} \right)^2 + \dots \right],$$

где  $R$  — радиус Земли.

Так как для рассматриваемой области (например, площадь циклона или антициклона)  $\frac{y}{R} \ll 1$ , то  $l$  и  $\beta$  можно считать постоянными и равными соответственно  $2\omega \sin\varphi$  и  $2\omega \cos\varphi / R$ .

Таким образом,

$$\frac{\beta}{l} v_g = \frac{\text{ctg } \varphi v_g}{R}.$$

Поэтому вместо (1.41) можно записать

$$D = \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) - \frac{\text{ctg } \varphi v_g}{R}. \quad (1.42)$$

Второе слагаемое в тропосфере в среднем не превышает 3–5%, поэтому геострофическая дивергенция  $D_g$  пренебрежимо мала по сравнению с агеострофической дивергенцией  $D_a$ , так что с большой точностью  $D = D_a$ .

Исходя из этого и объясняется то, что в выражении (1.10) каждый член правой части, зависящий от реального ветра, существенно больше их алгебраической суммы – дивергенции  $D$ , зависящей от малых агеострофических отклонений.

Таким образом, для дивергенции геострофическое приближение бессмысленно (дивергенция определяется почти исключительно агеострофическими отклонениями). Поэтому вопрос о вычислении дивергенции по величинам поля давления (геопотенциала) является сложным и его рассмотрение выходит за рамки данного пособия.

В отличие от дивергенции обычный путь вычисления завихренности в свободной атмосфере основывается на геострофическом приближении.

Выражение для геострофической завихренности

$$(\Omega_z)_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \quad (1.43)$$

на основании поля абсолютного геопотенциала  $\Phi$  изобарической поверхности получим, подставляя в (1.43) формулы для компонент геострофического ветра (1.38) и (1.39):

$$(\Omega_z)_g = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \quad (1.44)$$

Если составляющие геострофического ветра  $u_g, v_g$  выразить через градиенты давления

$$u_g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.45)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.46)$$

то (1.43) запишется в следующем виде:

$$(\Omega_z)_g = \frac{1}{\rho l} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (1.47)$$

При выводе формулы (1.44) пренебрежено производными по горизонтальным координатам  $x$  и  $y$  от кориолисова параметра  $l$  (первая из этих производных равна нулю, а вторая представлена в виде второго слагаемого в формулах (1.41) и (1.42)), а при выводе формулы (1.47), кроме того, – от плотности  $\rho$ . Легко показать, что соответствующие дополнительные члены в указанных формулах пренебрежимо малы – составляют не более 3–5% по сравнению с выписанными.

Полученные формулы показывают, что геострофическая завихренность выражается через вторые производные от геопотенциала (1.44) или давления (1.47). В частности, геострофическая завихренность пропорциональна двумерному (изобарическому и, соответственно, горизонтальному) оператору Лапласа (лапласиану) геопотенциала или давления, расчет которого рассмотрен в п. 1.1.3.

Применяя обозначение (1.7), перепишем формулы (1.44) и (1.47) в следующем виде:

$$(\Omega_z)_g = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi, \quad (1.48)$$

$$(\Omega_z)_g = \frac{1}{\rho l} \nabla^2 p. \quad (1.49)$$

## Задачи

1.1. Определить значение и направление горизонтального градиента давления, если известно, что в широтном направлении оно изменяется на  $3 \text{ гПа}$ , а в меридиональном – на  $5 \text{ гПа}$  на каждые  $100 \text{ км}$ .

1.2. Расстояние между двумя точками, расположенными на одной широте, составляет  $600 \text{ км}$ . Давление в этих точках отличается на  $12 \text{ гПа}$  и возрастает в восточном направлении. Изобара  $1005 \text{ гПа}$  проходит между двумя этими точками посередине и пересекает широтный круг под углом  $60^\circ$ . Определить значение и направление горизонтального градиента давления.

1.3. Найти угол наклона изотермической поверхности к горизонту, если вертикальный градиент температуры равен  $-6,5^\circ\text{C}/\text{км}$ , а горизонтальный градиент температуры составляет  $1,3^\circ\text{C}/100 \text{ км}$ .

1.4. Найти угол наклона изобарической поверхности к горизонту, если вертикальный градиент давления равен  $-0,1 \text{ гПа}/\text{м}$ , а горизонтальный градиент давления составляет  $1,5 \text{ гПа}/100 \text{ км}$ .

1.5. Определить горизонтальный градиент и лапласиан давления в точке, где давление  $p_0 = 1001 \text{ гПа}$ , если в окружающих четырех точках, удаленных на  $r = 500 \text{ км}$  в широтном и меридиональном направлениях (рис. 1.1), давление равно:  $p_1 = 991 \text{ гПа}$ ,  $p_2 = 994 \text{ гПа}$ ,  $p_3 = 995 \text{ гПа}$ ,  $p_4 = 993 \text{ гПа}$ .

1.6. Оценить погрешность расчета горизонтального градиента и лапласиана давления по данным задачи 1.5, если известно, что давление измеряется с точностью  $\pm 0,1 \text{ гПа}$ .

1.7. Рассчитать лапласиан давления в квадратной сетке точек  $3 \times 3$  с шагом  $300 \text{ км}$ , если поле давления описывается следующим выражением:  $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + p_0$ , где  $a = -0,3 \cdot 10^{-4} \text{ гПа}/\text{км}^2$ ,  $b = -0,2 \cdot 10^{-4} \text{ гПа}/\text{км}^2$ ,  $c = 10^{-5} \text{ гПа}/\text{км}^2$ ,  $d = -1,3 \cdot 10^{-2} \text{ гПа}/\text{км}$ ,  $e = -0,9 \cdot 10^{-2} \text{ гПа}/\text{км}$ ,  $p_0 = 1000 \text{ гПа}$ . Определить тип барического образования.

1.8. Определить среднее значение дивергенции и завихренности в области, ограниченной круговой линией тока антициклонической кривизны радиусом  $500 \text{ км}$  при скорости потока  $10 \text{ м}/\text{с}$ .

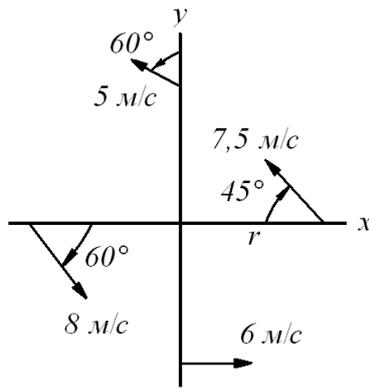


Рис. 1.6

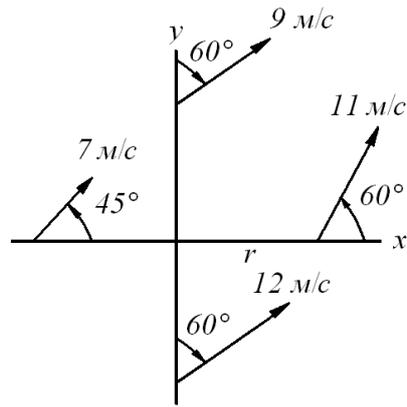


Рис. 1.7

1.9. Определить дивергенцию и завихренность по данным, приведенным на рис. 1.6, где  $r = 500$  км.

1.10. Определить дивергенцию и завихренность по данным, приведенным на рис. 1.7, где  $r = 300$  км.

## 1.2. Связь между индивидуальной и локальной производными по времени

Связь между индивидуальной (полной) и локальной (частной) производными от некоторой функции  $f$  по времени  $t$  выражается формулой

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1.50)$$

где  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости ветра по осям  $x, y, z$  декартовой системы координат.

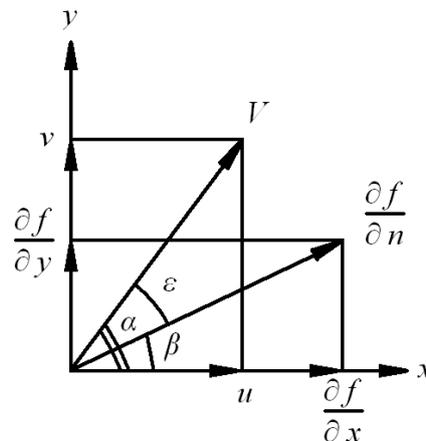


Рис. 1.8. К определению связи между индивидуальной и локальной производными по времени

Из рис. 1.8 следует, что

$$u = V \cos \alpha, v = V \sin \alpha, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos \beta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial n} \sin \beta, \quad (1.52)$$

где  $V$  – модуль горизонтальной составляющей скорости ветра;  $\frac{\partial f}{\partial n}$  – модуль горизонтального градиента функции  $f$ .

Подставив (1.51) и (1.52) в (1.50), последовательно получим

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + V \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial n} \cos \beta + V \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial n} \sin \beta + w \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial n} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + w \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (1.54)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (1.55)$$

На основании соотношений (1.54) и (1.55) окончательно получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial n} \cos \varepsilon + w \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1.56)$$

где  $\varepsilon = \alpha - \beta$  – угол между направлением горизонтального градиента  $f$  и горизонтальной составляющей вектора скорости ветра  $V$  (рис. 1.8).

## Задачи

1.11. Вычислить изменение температуры за 3 ч, которое будет зарегистрировано приборами на свободном уравновешенном аэростате, смещающемся на северо-восток со скоростью 11 м/с, если горизонтальный градиент температуры численно равен  $2^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$  и направлен на юг, а повышение температуры за последние 3 ч по данным стационарных измерений составило  $0,5^{\circ}\text{C}$ .

1.12. Вычислить изменение температуры, которое зарегистрируют приборы на привязном аэростате за 3 ч, если по данным измерений на свободном уравновешенном аэростате температура за это время не изменилась, скорость юго-западного ветра составляет 7 м/с, а горизонтальный градиент температуры равен  $3^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$  и направлен на юг.

1.13. Определить скорость перемещения свободного уравновешенного аэростата, если температура по данным его приборов не изменяется, а стационарные измерения фиксируют рост температуры на  $0,3^{\circ}\text{C}/\text{ч}$ . Известно, что горизонтальный градиент температуры равен  $1^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$ , а угол между направлением градиента и направлением движения аэростата составляет  $130^{\circ}$ .

1.14. Вычислить расстояние между двумя единичными изотермами на карте масштаба 1:20 000 000 на высоте полета свободного уравновешенного аэростата, смещающегося на восток со скоростью 12 м/с, если его приборы зарегистрировали понижение температуры на  $0,5^{\circ}\text{C}/\text{ч}$ , в то время как по данным стационарных измерений температура за это время не изменилась, а горизонтальный градиент температуры направлен на юго-запад.

1.15. Воздушная масса поднимается со скоростью 1 см/с. Вычислить изменение ее температуры за 3 ч, если вертикальный градиент равен  $0,5^{\circ}\text{C}/100\text{ м}$  (температура с высотой убывает), а на некоторой фиксированной высоте температура за это время возросла на  $2^{\circ}\text{C}$ .

1.16. Вычислить изменение температуры на некотором фиксированном уровне за 2 ч, если воздушная масса адиабатически опускается со скоростью 2 см/с, а вертикальный градиент температуры в атмосфере равен  $0,6^{\circ}\text{C}/100\text{ м}$  (температура с высотой убывает).

1.17. Увеличение температуры в движущейся воздушной массе равно уменьшению температуры в фиксированной точке. Найти угол между градиентом температуры, равным  $4^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$ , и скоростью ветра, равной 7 м/с, если за 3 ч температура в точке возросла на  $1^{\circ}\text{C}$ .

1.18. За какое время температура в будке уменьшится на  $2^{\circ}\text{C}$  при скорости восточного ветра  $7 \text{ м/с}$ , если температура убывает с запада на восток на  $4^{\circ}\text{C}/100 \text{ км}$ , а движение воздушной массы происходит изотермически?

1.19. Определить изменение температуры в воздушной массе, поднимающейся со скоростью  $1 \text{ см/с}$ , если температура в фиксированной точке пространства возросла на  $2^{\circ}\text{C}$  за  $3 \text{ ч}$ , воздушная масса сместилась за это время в северо-западном направлении на  $100 \text{ км}$ , а горизонтальный градиент температуры равен  $1^{\circ}\text{C}/100 \text{ км}$  и направлен на юг. Вертикальный градиент равен  $0,6^{\circ}\text{C}/100 \text{ м}$  (температура с высотой убывает).

1.20. Вычислить изменение температуры за  $6 \text{ ч}$  в фиксированной точке пространства, если воздушная масса смещается на восток со средней скоростью  $11 \text{ м/с}$ , адиабатически поднимаясь при этом со скоростью  $2 \text{ см/с}$ . Горизонтальный градиент температуры равен  $2^{\circ}\text{C}/100 \text{ км}$  и направлен на юго-восток, а вертикальный градиент равен  $0,6^{\circ}\text{C}/100 \text{ м}$  (температура с высотой убывает).

1.21. Воздушная масса натекает на склон горы, имеющий наклон  $1^{\circ}$  к горизонту, со скоростью  $4 \text{ м/с}$ . Вычислить изменение температуры в фиксированной точке за  $3 \text{ ч}$ , если движение происходит адиабатически, падение температуры с высотой составляет  $0,5^{\circ}\text{C}/100 \text{ м}$ , горизонтальный градиент температуры равен  $2^{\circ}\text{C}/100 \text{ км}$ , а угол между его направлением и направлением движения воздушной массы составляет  $45^{\circ}$ .

## 2. ЛУЧИСТАЯ ЭНЕРГИЯ

Лучистый приток тепла, возникающий в результате поглощения и излучения радиации, является одним из главных источников (и стоков) тепла в атмосфере. Из курса физики известно, что радиация (или излучение) представляет собой электромагнитные колебания различной частоты, распространяющиеся со скоростью  $c = 299\,793$  км/с в вакууме и с несколько меньшей скоростью в различных средах. Чем выше частота  $\nu$  (меньше длина волны  $\lambda$ ) электромагнитных колебаний, тем больше переносимая ими энергия. В атмосферных процессах существенную роль играет радиация в диапазоне длин волн  $0,3 - 60$  мкм, т. е. в ультрафиолетовой ( $0,3 < \lambda < 0,39$  мкм), видимой ( $0,39 < \lambda < 0,76$  мкм) и инфракрасной ( $0,76 < \lambda < 60$  мкм) областях спектра. Очень часто радиация проявляет себя как поток отдельных частиц — фотонов. Особенно удобно такое представление при описании процессов поглощения и излучения.

Главными источниками радиации, распространяющейся в атмосфере Земли, являются Солнце, земная поверхность, облака и сама атмосфера. При этом основные компоненты атмосферы играют незначительную роль в процессах лучистого теплообмена. С энергетической точки зрения главную роль в поглощении и излучении радиации в атмосфере играют углекислый газ, озон и особенно водяной пар. С биологической точки зрения важным обстоятельством является поглощение кислородом и озоном солнечных ультрафиолетовых лучей с  $\lambda < 0,3$  мкм, губительно действующих на живые организмы.

Уравнения переноса длинноволновой и коротковолновой радиации описывают все возможные виды радиации. Интегрирование этих уравнений для самого общего случая представляет собой чрезвычайно сложную задачу. В полученные для разных частных случаев выражения для интегральных потоков длинноволновой и коротковолновой радиации на любом уровне в атмосфере входят интегральный поток излучения черного тела (или интегральная солнечная постоянная) и соответствующие интегральные функции пропускания, зависящие от эффективной массы. Интегральные функции пропускания имеют смысл отношений радиации, поступающей к слою и выходящей из него. Такое представление чрезвычайно упрощает расчеты лучистых потоков и притоков, уменьшает их трудоемкость. Действительно, громоздкое интегрирование по направлениям и длинам волн выполняется заранее при вычислении функций пропускания. А для каждой конкретной ситуации остается выполнить два численных интегрирования по высоте — вычисление эффективных поглощающих масс, а затем вычисление потоков радиации в зависимости от массы (высоты).

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

## Расчет потоков и притоков радиации в атмосфере

### Цель работы

Основная цель радиационных расчетов — определение радиационного баланса на разных уровнях и для системы Земля – атмосфера в целом, а также лучистых притоков тепла в атмосфере.

### Содержание работы

Результирующий поток радиации на произвольном уровне  $z$  определяется из следующего выражения:

$$F(z) = -R(z) = -S(z) \cos \theta - D^\downarrow(z) + D^\uparrow(z) - F^\downarrow(z) + F^\uparrow(z). \quad (2.1)$$

Здесь  $R(z)$  — радиационный баланс,  $S(z)$  — прямая солнечная радиация, приходящая на единичную нормальную поверхность,  $\theta$  — зенитный угол Солнца,  $D^\downarrow(z)$  и  $D^\uparrow(z)$  — соответственно нисходящий поток рассеянной и восходящий поток отраженной солнечной радиации,  $F^\uparrow(z)$  и  $F^\downarrow(z)$  — восходящий и нисходящий потоки длинноволновой радиации.

Приток лучистой энергии  $\varepsilon_n$  (как и любой другой энергии) представляет собой дивергенцию результирующего потока. Поскольку радиационные потоки существенно меняются только по вертикали, в выражении дивергенции остается лишь один член  $\frac{dF}{dz}$ . Таким образом, в единицу времени лучистый приток тепла к единице объема равен

$$\left( \frac{dQ}{dV} \right)_n = -\frac{dF}{dz}.$$

Лучистый приток тепла к единице массы определяется следующим выражением:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dQ}{dV} \right)_n = -\frac{1}{\rho} \frac{dF}{dz}. \quad (2.2)$$

Физически знак минус означает следующее: если поток увеличивается в направлении распространения ( $dF > 0$ ), то собственное излучение среды преобладает над поглощением, среда теряет эквивалентное количество тепла.

Наиболее показательной характеристикой лучистого притока тепла является радиационное изменение температуры, т.е. изменение только за счет лучистого притока. Очевидно, что

$$c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_l = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dQ}{dV} \right)_l,$$

или, согласно (2.2),

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_l = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{dF}{dz} = - \frac{\varepsilon_l}{c_p}.$$

Часто бывает удобнее пользоваться изобарической системой координат. В этом случае

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_l = \frac{g}{c_p} \frac{dF}{dp} \approx \frac{g}{c_p} \frac{\Delta F}{\Delta p}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\Delta F = F(p + \Delta p) - F(p)$  — перепад полного потока в слое толщиной  $\Delta p$ .

Потоки радиации в безоблачных слоях атмосферы рассчитываются, а внутри облачного слоя определяются путем линейной интерполяции между значениями на границах облака. При частичной однослойной облачности расчет полного потока радиации может быть произведен дважды: для ясного неба и для сплошной облачности. Поток радиации при количестве облаков  $N$  (баллы) описывается соотношением

$$F = \left( 1 - \frac{N}{10} \right) F_0 + \frac{N}{10} F_{10}, \quad (2.4)$$

где  $F_0$  — поток радиации при ясном небе,  $F_{10}$  — поток радиации при сплошной облачности.

Облачность всех ярусов оказывает двоякое влияние на радиационный режим системы Земля – атмосфера. Это отмечается во многих работах как отечественных, так и зарубежных авторов. С одной стороны, увеличение облачности приводит к большему отражению солнечной радиации и, как следствие, к уменьшению нагревания системы Земля – атмосфера в целом. С другой стороны, наличие облачности обуславливает уменьшение уходящего длинноволнового излучения и приводит к уменьшению выхолаживания атмосферы.

Разберем способы расчета отдельных составляющих полного потока.

## Расчет потоков коротковолновой радиации

**Безоблачная атмосфера.** Выражения для коротковолновых радиационных потоков получаются в результате интегрирования уравнений переноса коротковолновой радиации. Прямая солнечная радиация на единичную горизонтальную поверхность определяется следующим образом:

$$S'(z) \equiv S(z) \cos \theta = S_0 \cos \theta P_{k1}(m_1, m_{c1}). \quad (2.5)$$

Нисходящая рассеянная радиация отсутствует, т.е.  $D^\downarrow(z) = 0$ , а отраженная радиация рассчитывается так:

$$D^\uparrow(z) = S_0 \cos \theta P_{k2}(m_2, m_{c2}). \quad (2.6)$$

В формулах (2.5) и (2.6)  $S_0 \cos \theta$  — инсоляция на верхней границе атмосферы,  $S_0 = 1376 \text{ Вт/м}^2$  — солнечная постоянная. Буквы  $P$  и  $m$  с индексами обозначают соответственно функции пропускания и поглощающие массы для разных видов радиации. Необходимые для их определения формулы приводятся ниже.

**Подоблачный слой.** Прямая солнечная радиация отсутствует, т.е.  $S'(z) = 0$ . Прошедшая сквозь облако нисходящая радиация:

$$D^\downarrow(z) = S_0 \cos \theta P_{k3}(m_3, m_{c3}). \quad (2.7)$$

Восходящая радиация — это радиация, отраженная от подстилающей поверхности:

$$D^\uparrow(z) = S_0 \cos \theta P_{k5}(m_4, m_{c4}). \quad (2.8)$$

**Надоблачный слой.** Поток прямой солнечной радиации  $S'(z)$  определяется так же, как и в безоблачной атмосфере по формуле (2.5), а  $D^\downarrow(z) = 0$ .

Восходящая радиация равна сумме потоков, отраженных подстилающей поверхностью и облаками (рис. 2.1):

$$D^\uparrow(z) = S_0 \cos \theta [P_{k5}(m_4, m_{c4}) + P_{k4}(m_5, m_{c5})]. \quad (2.9)$$

Интегральная функция пропускания для коротковолновой радиации в облачной атмосфере  $P_{ki}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) может быть представлена в следующем виде:

$$P_{ki}(m_j, m_{cj}) = a_i P_{uk}(m_j, m_{cj}), \quad (2.10)$$

где  $P_{uk}(m_j, m_{cj})$  — функция пропускания для инфракрасной части солнечной радиации, учитывающая поглощение радиации водяным паром и углекислым газом.

Расчеты показывают, что интегральная функция пропускания в близкой инфракрасной области спектра (0,76–5 мкм) зависит в основном от массы водяного пара. Поглощение другими газами ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{O}_3$ ) уменьшает интегральную

функцию пропускания на 1–3%, причем это уменьшение практически обусловлено углекислым газом. Поглощение озоном и кислородом пренебрежимо мало.

Аналитическое выражение интегральной функции пропускания в близкой инфракрасной области спектра имеет следующий вид:

$$P_{ук}(m_j, m_{Cj}) = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i \exp(-c_i \sqrt{m_j}) - 0,012(m_{Cj})^{0,15}, \quad (2.11)$$

где  $m_j$  и  $m_{Cj}$  – соответственно поглощающие массы водяного пара и углекислого газа,  $кг/м^2$ ;  $b_0 = 0,15$ ;  $b_1 = 0,7$ ;  $b_2 = 0,13$ ;  $b_3 = 0,02$ ;  $c_1 = 0,0342$ ;  $c_2 = 0,54$ ;  $c_3 = 2,0$ .

Коэффициент  $a_i$  учитывает отражение и пропускание солнечной радиации облаками и отражение ее земной поверхностью в инфракрасной области спектра. Для прямой солнечной радиации  $a_1 = 1$ .

Коэффициент  $a_2 = A$ , где  $A$  – интегральное альbedo подстилающей поверхности (прил. 2.2).

Коэффициент  $a_3$  представляет собой долю радиации, пропущенной облаками (прил. 2.3), а коэффициент  $a_4$  – альbedo облаков (прил. 2.3).

Коэффициент  $a_5 = a_2 \cdot a_3$  характеризует ослабление инфракрасной радиации в результате прохождения ее сквозь облако и отражения от подстилающей поверхности.

Способы расчета эффективных поглощающих масс различны для разных видов коротковолновой радиации (рис. 2.1).

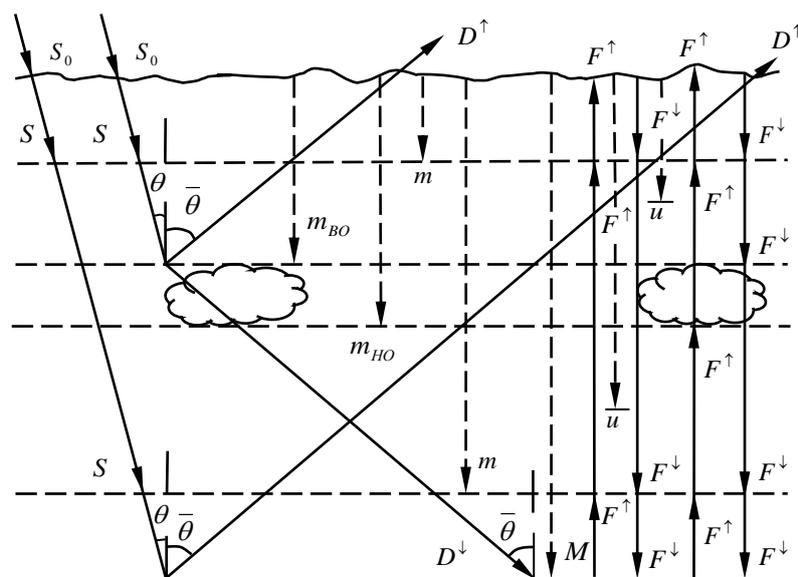


Рис. 2.1. Схема распространения лучистых потоков и эффективных поглощающих масс на пути луча для различных видов радиации

Для прямой солнечной радиации

$$m_j = m_{Cj} = m_1 = m_{C1} = m \sec \theta. \quad (2.12)$$

Для радиации, отраженной от земли (при ясном небе),

$$m_j = m_{Cj} = m_2 = m_{C2} = M \sec \theta. \quad (2.13)$$

Для радиации, пропущенной облаком,

$$m_j = m_{Cj} = m_3 = m_{C3} = m_{BO} \sec \theta + (m - m_{BO}) \overline{\sec \theta}. \quad (2.14)$$

Для радиации, отраженной от земли (при пасмурном небе),

$$m_j = m_{Cj} = m_4 = m_{C4} = m_{BO} \sec \theta + (M - m_{BO}) \overline{\sec \theta}. \quad (2.15)$$

Для радиации, отраженной от облака,

$$m_j = m_{Cj} = m_5 = m_{C5} = m_{BO} \sec \theta. \quad (2.16)$$

Здесь  $\overline{\sec \theta} = 1,66$  — средний секанс угла, под которым распространяются отраженные или прошедшие сквозь облако лучи;  $M$  — эффективная поглощающая масса всего атмосферного столба;  $m_{BO}$  — эффективная поглощающая масса надоблачного слоя;  $m$  — эффективная поглощающая масса водяного пара или углекислого газа, которая вычисляется методом трапеций ( $\kappa z/M^2$ ):

$$m_k = \frac{1}{2g} \sum_{k=i+1}^l \left[ q_{k-1} \left( \frac{p_{k-1}}{p_{cm}} \right) + q_k \left( \frac{p_k}{p_{cm}} \right) \right] (p_k - p_{k-1}). \quad (2.17)$$

Здесь  $q$  — массовая доля водяного пара или углекислого газа,  $z/\kappa z$ ;  $i = 0, 1, \dots, l-1$  — номера изобарических поверхностей, отсчитываемых сверху вниз, на которых вычислены значения  $q(p)$ ;  $p_{cm} \approx 1000 \text{ гПа}$ .

Объемная концентрация углекислого газа на всех высотах принимается равной 0,03%.

### Расчет потоков длинноволновой радиации

Расчеты потоков и притоков длинноволновой радиации весьма трудоемки и требуют знания профилей температуры и поглощающих масс во всей атмосфере.

**Безоблачная атмосфера.** Выражения для длинноволновых радиационных потоков, полученных в результате интегрирования уравнений переноса длинноволновой радиации, в случае безоблачной атмосферы имеют следующий вид:

восходящая радиация

$$F^\uparrow(m) = E(M) P_{\text{от}}(M - m) + \int_M^m E(u) \frac{dP_{\text{от}}(u - m)}{du} du, \quad (2.18)$$

нисходящая радиация

$$F^{\downarrow}(m) = \int_0^m E(u) \frac{dP_{\text{дл}}(m-u)}{du} du. \quad (2.19)$$

Здесь  $m, u, M$  – массы поглощающего вещества в слое от верхней границы атмосферы до уровня расчета ( $m$ ), до текущего переменного уровня ( $u$ ) и до земной поверхности ( $M$ ) соответственно;  $E = \sigma T^4$  – излучение абсолютно черного тела;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $T$  – температура;  $P_{\text{дл}}(|m-u|), P_{\text{дл}}(m)$  – интегральная функция пропускания для потока длинноволновой радиации в слое толщиной  $|m-u|$  или  $m$ . Поглощающая масса – величина неотрицательная, поэтому во внимание принимается только модуль разности поглощающих масс.

В указанных формулах уже сделан ряд обычно используемых приближений: 1) считается пренебрежимо малой отраженная от земной поверхности длинноволновая радиация; 2) не учитывается зависимость интегральной функции пропускания от температуры источника; 3) зависимость от давления и температуры среды учитывается путем введения эффективных поглощающих масс. Значения потока излучения абсолютно черного тела при разных температурах приведены в прил. 2.4.

Для вычисления потоков длинноволнового излучения водяного пара и углекислого газа в безоблачной атмосфере можно использовать следующие приближенные формулы, позволяющие определить потоки на произвольном уровне:

$$F^{\uparrow}(m) = E(M)P_{\text{дл}}(M-m) + [\mu_1 E(M) + (1-\mu_1)E(m)][1-P_{\text{дл}}(M-m)], \quad (2.20)$$

$$F^{\downarrow}(m) = (1-\mu_2)E(m)[1-P_{\text{дл}}(m)]. \quad (2.21)$$

Поскольку интегральная функция пропускания быстро и нелинейно убывает с увеличением поглощающей массы, в представленных выражениях значительно большую роль играет температура уровня, ближайшего к уровню расчета. Для восходящего потока весовой множитель  $\mu_1$  описывается следующей формулой:

$$\mu_1 = 0,4 \left[ 0,3 + \lg \left( \frac{p_0}{p} \right) \right], \quad (2.22)$$

где  $p_0$  – приземное давление. Для нисходящего потока  $\mu_2 = 0,03$ .

Формулы (2.20) и (2.21) очень удобны для вычислений не только ввиду своей сравнительной простоты. Главное их преимущество по сравнению с интегральными выражениями (2.18) и (2.19) заключается в том, что здесь требует-

ся минимально возможная информация относительно профилей температуры и поглощающих масс, а именно, их значения на уровне расчета и на границах атмосферы.

**Надоблачный слой.** Восходящая радиация рассчитывается по следующей формуле:

$$F^{\uparrow}(m) = E(m_{BO})P_{\text{ол}}(m_{BO} - m) + [\mu_1 E(m_{BO}) + (1 - \mu_1)E(m)][1 - P_{\text{ол}}(m_{BO} - m)], \quad (2.23)$$

а нисходящая радиация – так же, как в безоблачной атмосфере, по формуле (2.21).

**Подоблачный слой.** Восходящая радиация рассчитывается так же, как и в безоблачной атмосфере, — по формуле (2.20), а нисходящая

$$F^{\downarrow}(m) = E(m_{HO})P_{\text{ол}}(m - m_{HO}) + (1 - \mu_2)E(m)[1 - P_{\text{ол}}(m)]. \quad (2.24)$$

В формулах (2.23) и (2.24)  $m_{BO}$  и  $m_{HO}$  — эффективные поглощающие массы на уровне верхней и нижней границ облаков соответственно.

В выражениях (2.20), (2.23) и (2.24) первые члены описывают дошедшее до рассматриваемого уровня излучение земной поверхности и облаков. Интегральные члены в (2.20), (2.21), (2.23) и (2.24) описывают собственное излучение нижележащих слоев для восходящей радиации и вышележащих — для нисходящей. Интегрирование производится от границ атмосферы (или облачности) до рассматриваемого уровня  $u$  (рис. 2.1).

Интегральная функция пропускания для длинноволновой радиации имеет следующий вид:

$$P_{\text{ол}}(x, x_1, y) = (0,4599 + 0,1966y) \exp(-0,1982x) + (0,2211 + 0,0316y) \exp(-2,0715x) + 0,0908 \exp(-13,284x_1), \quad (2.25)$$

где  $x = \sqrt{m}$ ,  $x_1 = \frac{m}{\sqrt{0,01906 + m}}$ ,  $y = 1 - 2,07\sqrt{m_c}$  при  $m_c \leq 0,0115 \text{ кг/м}^2$ ,

$y = 0,2824 - 0,1111 \cdot \ln(m_c)$  при  $m_c > 0,0115 \text{ кг/м}^2$ .

Эффективная поглощающая масса водяного пара и углекислого газа  $m$  также, как и в случае расчета потоков и притоков коротковолновой радиации, определяется по формуле (2.17). Объемная концентрация углекислого газа на всех высотах принимается равной 0,03 %.

### Материалы для работы

Данные по температуре и массовой доле водяного пара получены в результате обработки аэрологической информации (вариант задания указывается преподавателем).

## Порядок выполнения работы

**Задание 1.** Рассчитать эффективные поглощающие массы водяного пара  $m$  в слое 100–1000 гПа по данным, представленным в прил. 2.1.

**Задание 2.** Рассчитать эффективные поглощающие массы углекислого газа  $m_c$  в слое 100–1000 гПа.

**Задание 3.** Рассчитать прямую и отраженную от земной поверхности радиацию в безоблачной атмосфере для зенитного угла Солнца, равного  $50^\circ$ . Альбе́до подстилающей поверхности  $A = 0,15$ .

**Задание 4.** Используя результаты, полученные в задании 3, рассчитать изменение температуры  $\frac{\partial T}{\partial t}$  за счет поглощения коротковолновой радиации для слоев толщиной 100 гПа, а также среднее для всей атмосферы радиационное изменение температуры (в К/сут).

**Задание 5.** Рассчитать восходящую и нисходящую коротковолновую радиации на поверхностях 200 и 1000 гПа, а также на границах облачного слоя. Зенитный угол Солнца равен  $50^\circ$ . Сплошной слой облаков  $A_s$  расположен в слое 500–600 гПа. Альбе́до подстилающей поверхности  $A = 0,1$ .

**Задание 6.** Рассчитать изменения температуры за счет поглощения коротковолновой радиации (в К/сут) для надоблачного, облачного и подоблачного слоев, а также для всей атмосферы в среднем, используя результаты, полученные при выполнении задания 5.

**Задание 7.** Рассчитать восходящую и нисходящую длинноволновую радиации в безоблачной атмосфере.

**Задание 8.** Используя результаты выполнения задания 7, рассчитать изменение температуры за счет длинноволновой радиации (в К/сут) для слоев толщиной 100 гПа, а также в среднем для всей атмосферы.

**Задание 9.** Рассчитать радиационный баланс на изобарических поверхностях, а также полное радиационное изменение температуры для слоев толщиной 100 гПа и для всей атмосферы в среднем с учетом результатов заданий 3,7.

**Задание 10.** Рассчитать восходящий и нисходящий потоки длинноволновой радиации на поверхностях 200 и 1000 гПа, а также на границах облачного слоя. Сплошной слой облаков  $A_s$  расположен в слое 500–600 гПа.

**Задание 11.** Рассчитать изменения температуры за счет поглощения длинноволновой радиации (в К/сут) для надоблачного, облачного и подоблачного слоев, а также для всей атмосферы в среднем, используя результаты, полученные при выполнении задания 10.

**Задание 12.** Рассчитать радиационный баланс на поверхностях 200, 500, 600 и 1000 гПа, а также полные радиационные изменения температуры для надоблачного, облачного и подоблачного слоев, а также для всей атмосферы в среднем с учетом выполненных заданий 5 и 10.

### Отчетный материал

**Задание 1.** Результаты расчета эффективной поглощающей массы водяного пара представить в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Значения эффективной поглощающей массы водяного пара, кг/м<sup>2</sup>**

Характеристика	<i>p, гПа</i>								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\Delta m$									
$m_k$									

**Задание 2.** Результаты расчета эффективной поглощающей массы углекислого газа представить в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

**Значения эффективной поглощающей массы углекислого газа, кг/м<sup>2</sup>**

Характеристика	<i>p, гПа</i>								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\Delta m$									
$m_k$									

**Задание 3.** Результаты расчета  $S'$  и  $D^\uparrow$  представить в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3

**Значения  $S'$  и  $D^\uparrow$ , Вт/м<sup>2</sup>**

Характеристика	<i>p, гПа</i>								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$S'$									
$D^\uparrow$									

**Задание 4.** Результаты расчета  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , *K/сут*

Слой, <i>гПа</i>								
200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900	900–1000	200–1000

**Задание 5.** Результаты расчета  $S'$ ,  $D^\uparrow$  и  $D^\downarrow$  представить в виде табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения  $S'$ ,  $D^\uparrow$  и  $D^\downarrow$ , *Вт/м<sup>2</sup>*

<i>p</i> , <i>гПа</i>	$S'$	$D^\downarrow$	$D^\uparrow$
200		0	
500		0	
600	0		
1000	0		

**Задание 6.** Результаты расчета  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.6.

Таблица 2.6

Значения  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , *K/сут*

Слой, <i>гПа</i>			
200–500	500–600	600–1000	200–1000

**Задание 7.** Результаты расчета  $F^\uparrow$  и  $F^\downarrow$  представить в виде табл. 2.7.

Таблица 2.7

Значения  $F^\uparrow$  и  $F^\downarrow$ , *Вт/м<sup>2</sup>*

Характеристика	<i>p</i> , <i>гПа</i>								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$F^\uparrow$									
$F^\downarrow$									

**Задание 8.** Результаты расчета  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.8.

Таблица 2.8

Значения  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , *К/сут*

Слой, <i>гПа</i>								
200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900	900–1000	200–1000

**Задание 9.** Результаты расчета  $R$  и  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.9–2.10.

Таблица 2.9

Значения  $R$ , *Вт/м<sup>2</sup>*

<i>p</i> , <i>гПа</i>								
200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Таблица 2.10

Значения  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , *К/сут*

Слой, <i>гПа</i>								
200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800	800–900	900–1000	200–1000

**Задание 10.** Результаты расчета  $F^\uparrow$  и  $F^\downarrow$  представить в виде табл. 2.11.

Таблица 2.11

Значения  $F^\uparrow$  и  $F^\downarrow$ , *Вт/м<sup>2</sup>*

<i>p</i> , <i>гПа</i>	$F^\uparrow$	$F^\downarrow$
200		
500		
600		
1000		

**Задание 11.** Результаты расчета  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.12.

Таблица 2.12

Значения  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , *К/сут*

Слой, <i>гПа</i>			
200–500	500–600	600–1000	200–1000

**Задание 12.** Результаты расчета  $R$  и  $\frac{\partial T}{\partial t}$  представить в виде табл. 2.13–2.14.

Таблица 2.13

Значения $R$ , Вт/м <sup>2</sup>			
$p$ , гПа			
200	500	600	1000

Таблица 2.14

Значения $\frac{\partial T}{\partial t}$ , К/сут			
Слой, гПа			
200–500	500–600	600–1000	200–1000

### Методические указания

**Задание 1.** Расчет  $m$  производить с помощью формулы (2.17). Прежде чем подставлять в формулу (2.17) значения  $q$  (в г/кг) и  $p$  (в гПа), необходимо определить значение размерности  $m$  (в кг/м<sup>2</sup>).

При отсутствии данных по  $q$  и наличии информации о парциальном давлении водяного пара  $e$  значения  $q$  определяются из соотношения

$$q = 622 \frac{e}{p}. \quad (2.26)$$

Если же  $e$  не известно, а имеются только данные о температуре точки росы  $T_d$ , то величину  $e$ , имея в виду известное соотношение  $e = E(T_d)$ , можно определить из следующей аппроксимационной формулы:

$$\lg e = 26,25102 - \frac{3049,50}{T_d} - 5,86970 \lg T_d. \quad (2.27)$$

**Задание 2.** Массовая доля (массовая концентрация) углекислого газа определяется из следующего соотношения:

$$q_c = \frac{m_{CO_2}}{m_{Возд}} = \frac{v_{CO_2} \rho_{CO_2}}{v_{Возд} \rho_{Возд}}, \quad (2.28)$$

где  $m_{CO_2}$  – масса углекислого газа, кг;  $m_{Возд}$  – масса воздуха, кг;  $v_{CO_2}, v_{Возд}$  – объемы, занимаемые соответственно углекислым газом и воздухом при условии приведения их к одинаковому давлению и температуре, м<sup>3</sup>;  $\rho_{CO_2}$  – плотность углекислого газа, кг/м<sup>-3</sup>;  $\rho_{Возд}$  – плотность воздуха, кг/м<sup>-3</sup>.

При этом  $\rho_{\text{Возд}} = \frac{\mu_{\text{Возд}}}{V}$ ,  $V$  – объем моля любого газа, который при фиксированных давлении и температуре для всех газов одинаков;  $\mu_{\text{CO}_2}$ ,  $\mu_{\text{Возд}}$  – относительная молекулярная масса (по углеродной шкале) углекислого газа и воздуха.

Ввиду того, что объемная концентрация углекислого газа составляет 0,03%, или (в долях единицы) 0,0003, а относительная молекулярная масса углекислого газа и воздуха – соответственно 44,01 и 28,96, получим

$$\mu \frac{m_{\text{CO}_2}}{m_{\text{Возд}}} = \frac{v_{\text{CO}_2} \mu_{\text{CO}_2}}{v_{\text{Возд}} \mu_{\text{Возд}}} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{44,01}{28,96} = 4,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{кг}}.$$

Если массовую долю углекислого газа выразить в г/кг, то окончательно получим значения  $q_C$  на всех высотах

$$q_C = 0,46 \text{ г/кг}. \quad (2.29)$$

С учетом (2.29) далее  $m_C$  рассчитываем на основе формулы (2.17).

**Задание 3.** Для расчета  $S'$  и  $D^\uparrow$  необходимо использовать формулы (2.5) и (2.6). Интегральные функции пропускания и функции пропускания для инфракрасной части солнечной радиации рассчитываются с помощью соотношений (2.10) и (2.11). Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  равны соответственно 1 и 0,15. Эффективные поглощающие массы определяются из выражений (2.12) и (2.13).

**Задание 4.** Изменение температуры рассчитывается с использованием формулы (2.3) с учетом получения для  $\frac{\partial T}{\partial t}$  размерности  $K/\text{сут}$ . Для определения результирующих потоков радиации  $F$  на изобарических поверхностях применяется формула (2.1), в которой необходимо учесть только потоки  $S' = S(z) \cos \theta$  и  $D^\uparrow(z)$ , рассчитанные в задании 3.

**Задание 5.** Поток прямой солнечной радиации определяется так же, как и в безоблачной атмосфере, т.е. для поверхностей 200 и 500 гПа значения  $S'$  необходимо взять из предыдущего задания 3. Для этих же поверхностей  $D^\downarrow(z) = 0$ . Восходящая радиация  $D^\uparrow(z)$ , равная сумме потоков, отраженных подстилающей поверхностью и облаками (рис. 2.1), определяется по формуле (2.9). В интегральных функциях пропускания  $P_{k5}$  и  $P_{k4}$  эффективные поглощающие массы  $m_4, m_{C4}, m_5, m_{C5}$  определяются по формулам (2.15), (2.16). Коэффициент  $a_4$  определяется с помощью прил. 2.3. В коэффициенте  $a_5$ , равном произведению  $a_2 \cdot a_3$ ,  $a_2 = A$ , а  $a_3$  также определяется из прил. 2.3. Прошедшая сквозь облако нисходящая радиация  $D^\downarrow$  определяется по формуле (2.7), а восходящая радиация  $D^\uparrow$  – по формуле (2.8).

**Задание 6.** Расчеты выполняются аналогично заданию 4. Для определения результирующих потоков радиации  $F$  на изобарических поверхностях применяется формула (2.1), в которой необходимо учесть только потоки, представленные в табл. 2.5.

**Задание 7.** Восходящая  $F^\uparrow$  и нисходящая  $F^\downarrow$  длинноволновая радиации в безоблачной атмосфере рассчитываются по соотношениям (2.20) и (2.21). Излучение абсолютно черного тела на различных изобарических поверхностях определяется из прил. 2.4. Интегральная функция пропускания  $P_{ол}$  вычисляется по формуле (2.25). Эффективные значения поглощающих масс водяного пара и углекислого газа используются из заданий 1 и 2.

**Задание 8.** Расчеты выполняются аналогично заданию 4. Для определения результирующих потоков радиации  $F$  на изобарических поверхностях применяется формула (2.1), в которой необходимо учесть только потоки, представленные в табл. 2.7.

**Задание 9.** Радиационный баланс рассчитывается по формуле (2.1) с учетом радиационных потоков, полученных в заданиях 3 и 7. На этих же изобарических поверхностях с использованием формулы (2.1) определяются потоки  $F$ , а затем изменения температуры  $\frac{\partial T}{\partial t}$  по формуле (2.3).

**Задание 10.** В надоблачном слое (200 и 500 гПа) восходящая радиация рассчитывается по соотношению (2.23), а нисходящая – так же, как в безоблачной атмосфере, т. е. по соотношению (2.21) (последние данные можно взять из задания 7). В подоблачном слое (600 и 1000 гПа) восходящая радиация определяется по формуле (2.20), т. е. так же, как в безоблачной атмосфере (эти данные можно также взять из задания 7), а нисходящая радиация – по формуле (2.24).

**Задание 11.** Расчеты выполняются аналогично заданию 4. Для определения результирующих потоков радиации  $F$  на изобарических поверхностях применяется формула (2.1), в которой необходимо учесть только потоки, представленные в табл. 2.11.

**Задание 12.** Радиационный баланс рассчитывается по формуле (2.1) с учетом радиационных потоков, полученных в заданиях 5 и 10. На этих же изобарических поверхностях с использованием формулы (2.1) определяются потоки  $F$ , а затем изменения температуры  $\frac{\partial T}{\partial t}$  по формуле (2.3).

Температура ( $T$ ) и массовая доля водяного пара ( $q$ ) 27.08.2021 г. 0 ч ВСВ

Характеристика	Давление, гПа									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1. Архангельск (22550)										
$T$	226	226	223	240	253	262	267	273	278	281
$q$	0,002	0,03	0,09	0,44	1,19	2,05	2,41	3,43	4,41	4,85
2. Верхнее Дуброво (28440)										
$T$	220	212	230	247	258	270	277	284	290	292
$q$	0,002	0,03	0,20	0,79	0,94	2,40	5,68	6,07	6,98	7,91
3. Воейково (26063)										
$T$	225	219	229	235	248	258	266	271	276	282
$q$	0,002	0,03	0,06	0,24	0,51	1,14	2,41	3,45	4,91	6,90
4. Вологда (27037)										
$T$	226	231	229	234	247	259	266	272	278	281
$q$	0,002	0,03	0,11	0,15	0,57	1,11	2,26	3,16	4,37	6,02
5. Ивдель (23921)										
$T$	222	212	229	246	257	266	273	278	281	283
$q$	0,002	0,03	0,19	0,87	1,85	3,21	4,22	5,87	6,23	6,67
6. Казань (27595)										
$T$	219	214	231	248	259	272	275	280	288	294
$q$	0,002	0,03	0,22	0,84	1,08	2,47	5,84	6,16	7,02	8,16
7. Кандалакша (22217)										
$T$	227	223	225	239	249	257	265	268	270	277
$q$	0,002	0,03	0,10	0,37	0,87	1,19	1,57	2,41	2,91	4,35
8. Киров (27196)										
$T$	224	225	230	247	256	261	263	271	283	286
$q$	0,002	0,03	0,11	0,95	1,73	1,77	1,82	2,85	4,37	6,58
9. Нижний Новгород (27553)										
$T$	224	228	229	240	250	260	268	274	278	283
$q$	0,002	0,03	0,08	0,19	0,44	1,08	2,37	3,41	4,80	6,71
10. Омск (28698)										
$T$	223	215	230	245	254	267	276	283	290	291
$q$	0,002	0,03	0,16	0,59	0,85	2,04	5,47	6,09	6,97	7,88
11. Пермь (28225)										
$T$	221	211	231	247	257	266	274	282	288	290
$q$	0,002	0,03	0,21	0,77	0,88	2,31	5,51	6,14	6,92	7,84
12. Оренбург (35121)										
$T$	221	214	230	246	258	268	277	286	293	295
$q$	0,002	0,03	0,18	0,57	0,70	2,05	5,32	5,94	6,82	7,64
13. Петрозаводск (22820)										
$T$	226	229	223	239	251	260	267	272	276	280
$q$	0,002	0,03	0,10	0,45	1,07	2,14	3,24	4,28	5,05	5,87
14. Печора (23418)										
$T$	225	224	224	242	259	262	267	273	277	279
$q$	0,002	0,03	0,07	0,30	1,06	1,73	2,34	3,39	4,14	4,68

15. СЫКТЫВКАР (23804)										
<i>T</i>	223	221	226	243	256	264	266	275	283	286
<i>q</i>	0,002	0,03	0,13	0,58	1,60	2,63	2,77	4,85	5,96	6,34
16. Уфа (28722)										
<i>T</i>	221	213	230	246	255	267	276	285	290	292
<i>q</i>	0,002	0,03	0,25	0,79	0,96	2,35	5,78	6,31	7,05	8,01
17. Шойна (22271)										
<i>T</i>	228	224	225	238	250	258	264	268	273	280
<i>q</i>	0,002	0,03	0,10	0,31	0,63	0,91	1,05	2,24	3,31	4,78
18. Красноярск (29574)										
<i>T</i>	224	220	225	244	258	261	267	276	282	287
<i>q</i>	0,002	0,03	0,15	0,56	1,58	2,60	2,71	4,95	5,91	6,47
19. Новосибирск (29634)										
<i>T</i>	220	215	228	247	256	269	279	285	292	294
<i>q</i>	0,002	0,03	0,28	0,82	0,98	2,39	5,83	6,38	7,15	8,11
20. Барабинск (29612)										
<i>T</i>	221	220	225	241	255	261	264	273	280	286
<i>q</i>	0,002	0,03	0,12	0,54	1,57	2,60	2,73	4,80	5,86	6,24
21. Тобольск (28275)										
<i>T</i>	225	228	232	239	252	261	268	273	277	284
<i>q</i>	0,002	0,03	0,10	0,47	1,17	2,24	3,34	4,33	5,14	5,97
22. Салехард (23330)										
<i>T</i>	219	212	230	246	258	264	272	280	289	291
<i>q</i>	0,002	0,03	0,22	0,79	0,91	2,39	5,58	6,24	6,99	7,94
23. Туруханск (23472)										
<i>T</i>	224	216	231	246	257	269	279	285	291	292
<i>q</i>	0,002	0,03	0,19	0,65	0,95	2,14	5,67	6,29	7,07	7,97
24. Саратов (34172)										
<i>T</i>	220	215	230	247	257	270	276	282	289	293
<i>q</i>	0,002	0,03	0,18	0,78	1,01	2,27	5,86	6,26	7,21	8,31

**Альbedo различных подстилающих поверхностей  
в ближней инфракрасной области спектра**

Подстилающая поверхность	Альbedo
Песок белый (речной)	0,53
Чернозем	0,12
Зеленая растительность	0,43
Снег свежесыпавший, сухой	0,81
Снег мокрый	0,47
Гладкая водная поверхность при угле падения радиации:	
≤ 30°	0,02
50°	0,03
60°	0,06
70°	0,13
80°	0,35
90°	1,00

Приложение 2.3

**Радиационные характеристики облачности  
в ближней инфракрасной области спектра**

Доля радиации	Облака			
	Ci	As	St	Ns, Cb
Пропущенная	0,77	0,34	0,20	0,10
Отраженная	0,19	0,46	0,50	0,60
Поглощенная	0,04	0,20	0,30	0,30

Приложение 2.4

**Поток излучения абсолютно черного тела  $\sigma T^4$  ( $Вт/м^2$ ) [ $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} Вт/(м^2 \cdot К^4)$ ]**

$T, К$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	60	61	62	64	65	66	68	69	71	72
190	74	75	77	79	80	82	84	85	87	89
200	91	92	94	96	98	100	102	104	106	108
210	110	112	115	117	119	121	123	126	128	130
220	133	135	138	140	143	145	148	151	153	156
230	159	161	164	167	170	173	176	179	182	185
240	188	191	194	198	201	204	208	211	214	218
250	221	225	229	232	236	240	243	247	251	255
260	259	263	267	271	275	280	284	288	292	297
270	301	306	310	315	320	324	329	334	338	343
280	348	353	358	364	369	374	379	385	390	395
290	401	406	412	418	424	429	435	441	447	453
300	459	465	472	478	484	490	497	504	510	517
310	524	530	537	544	551	558	565	572	580	587
320	594	602	609	617	624	632	640	648	656	664

### 3. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Общая система уравнений гидротермодинамики атмосферы является нелинейной. Она описывает сложный механизм притока тепла и эффекты турбулентности, что безусловно, усложняет математические исследования.

Несмотря на значительный прогресс, обусловленный внедрением численных методов с использованием ЭВМ, подчас решение задач метеорологии приводит к большим математическим трудностям. В связи с этим, во-первых, требуется развитие приближенных методов интегрирования уравнений, а во-вторых, упрощение системы, которое тем не менее обеспечит достаточную для приложения точность.

Исходя из этого, при исследовании конкретных явлений целесообразно провести предварительный качественный анализ общих уравнений, оценку вклада каждого слагаемого, т.е., по существу, это означает упрощение уравнений, основанное на пренебрежении второстепенными эффектами.

Обычно упрощение уравнений производится на основе анализа порядка величин метеорологических элементов. *Под порядком величины элемента* понимается значение этого элемента в диапазоне, включающем не менее 99% всех возможных значений. Порядок величины элемента обычно определяется в системе *MTC* с округлением до ближайшей степени числа 10 и обозначается буквой *O* (*ordo* — по латыни порядок). Если верхняя и нижняя границы имеют различный порядок, то указываются оба значения. Например, давление на уровне моря колеблется от 940 до 1070 *гПа* или от 94 до 107 *сантибаров (сб)*. Значения порядков верхнего и нижнего пределов одинаковы и составляют  $10^2$  *сб*. Поэтому можно записать  $O(p) = 10^2$ . Скорость ветра изменяется от 0 до 50–60 *м/с*, поэтому порядок величины скорости ветра составляет  $10^0$ – $10^1$  и записывается так:  $O(v) = 10^0$ – $10^1$ .

Практически для упрощения уравнений удобно пользоваться таблицей среднеквадратических значений метеорологических величин и их производных, составленной М.И. Юдиным и дополненной Г.И. Куликовым (таблица). Здесь интервалы для независимых переменных выбраны следующие: для времени – 12 *ч*, для длины в горизонтальном направлении – 400 *км*, в вертикальном направлении – 5 *км*.

При упрощении уравнений должны быть соблюдены следующие основные принципы: 1) необходимо сохранить главные и второстепенные слагаемые, равные примерно одной десятой главных слагаемых. Слагаемые, которые меньше главных в 50–100 раз, могут быть отброшены; 2) уравнение должно содержать 2 или более главных слагаемых, компенсирующих друг друга. Выявле-

ние только одного главного слагаемого является явной ошибкой, поскольку окажется, что единственное самое большое слагаемое равно нулю!

### Среднеквадратические значения метеорологических величин и их производных

Порядок производных	Метеорологические величины					
	$u, v$	$p$	$T$	$\rho$	$w$	$\Omega_z$
Исходные характерные значения	$7 \cdot 10^0$	$7 \cdot 10^1$	$3 \cdot 10^2$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-11}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-10}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-9}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$10^{-11}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\partial^2}{\partial s^2}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$10^{-15}$

Применим результаты, полученные М.И. Юдиным и Г.И. Куликовым, к анализу уравнений движения. Полагая  $k_1 = k_2 = const, k_3 = const$ , а также  $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$  и  $u \equiv v_1, v \equiv v_2, w \equiv v_3$ , запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega \cos \varphi w + 2\Omega \sin \varphi v + \\ &+ k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi u + \\ &+ k_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega \cos \varphi u + \end{aligned}$$

$$+ k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим вначале уравнения горизонтального движения.

Примем, что  $k_1 = k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $k_3 = 5 \text{ м}^2/\text{с}$  и для умеренных широт

$$O(2\Omega \sin \varphi) \approx O(2\Omega \cos \varphi) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} 1/\text{с}.$$

Тогда

$$O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = O\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \approx 1,2 \cdot 10^{-4},$$

$$O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = O\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) = O\left(u \frac{\partial v}{\partial y}\right) \approx 7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \approx 0,8 \cdot 10^{-4},$$

$$O\left(w \frac{\partial u}{\partial z}\right) = O\left(w \frac{\partial v}{\partial z}\right) \approx 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5},$$

$$O(2\Omega \sin \varphi v) = O(2\Omega \sin \varphi u) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 7 \approx 0,8 \cdot 10^{-3},$$

$$O(2\Omega \cos \varphi w) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 1,2 \cdot 10^{-6},$$

$$O\left(k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = O\left(k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = O\left(k_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = O\left(k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \approx \\ \approx 5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-11} = 1,5 \cdot 10^{-6},$$

$$O\left(k_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = O\left(k_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \approx 5 \cdot 10^0 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-6},$$

$$O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) \approx 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-7} = 0,8 \cdot 10^{-3}.$$

Подставив найденные значения порядков под соответствующими слагаемыми, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{1,2 \cdot 10^{-4}} + u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0,8 \cdot 10^{-4}} + v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{0,8 \cdot 10^{-4}} + w \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{2 \cdot 10^{-5}} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega \cos \varphi w + 2\Omega \sin \varphi v + k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{0,8 \cdot 10^{-3}} - \underbrace{\quad}_{1,2 \cdot 10^{-6}} - \underbrace{-2\Omega \sin \varphi u}_{0,8 \cdot 10^{-3}} + \underbrace{k_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{1,5 \cdot 10^{-6}} + \underbrace{k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{1,5 \cdot 10^{-6}} + \underbrace{k_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{6 \cdot 10^{-6}}.$$

В уравнения входят в качестве отдельных составляющих слагаемые с порядками  $10^{-3}$  и  $10^{-6}$ . Ясно, что слагаемые с порядком  $10^{-6}$  являются пренебрежимо малыми по сравнению с остальными слагаемыми уравнений и поэтому могут быть опущены. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \end{aligned}$$

где  $l = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса.

Теперь уравнения движения содержат слагаемые, имеющие порядок от  $0,8 \cdot 10^{-3}$  до  $2 \cdot 10^{-5}$ . Полученные уравнения обычно используются в качестве уравнений горизонтального движения воздуха в свободной атмосфере.

Два слагаемых каждого из выписанных уравнений, имеющие порядок  $0,8 \cdot 10^{-3}$ , являются главными. Остальные слагаемые рассматриваемых уравнений на один два порядка меньше. Поэтому в самом грубом приближении уравнения горизонтального движения можно записать в следующем виде:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu.$$

Отсюда получаем формулы для составляющих геострофического ветра:

$$u_g = -\frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Произведем анализ третьего уравнения движения. Из таблицы имеем

$$O\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) \approx 2 \cdot 10^{-7}, \quad O\left(u \frac{\partial w}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial w}{\partial y}\right) \approx 7 \cdot 10^0 \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 1,4 \cdot 10^{-7},$$

$$O\left(w \frac{\partial w}{\partial z}\right) \approx 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-8}, \quad O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right) \approx 10^3 \cdot 10^{-2} = 10^1,$$

$$O(g) \approx 10^1, \quad O(2\Omega \cos \varphi u) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 7 \approx 0,8 \cdot 10^{-3},$$

$$O\left(k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = O\left(k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \approx 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-13} = 2,5 \cdot 10^{-8},$$

$$O\left(k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \approx 5 \cdot 10^0 \cdot 1,2 \cdot 10^{-9} = 6 \cdot 10^{-9}.$$

Подставив найденные значения порядков под соответствующими слагаемыми, получим

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{2 \cdot 10^{-7}} + u \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{1,4 \cdot 10^{-7}} + v \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{1,4 \cdot 10^{-7}} + w \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{3 \cdot 10^{-8}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{10^1} - \underbrace{g}_{10^1} + \underbrace{2\Omega \cos \varphi u}_{0,8 \cdot 10^{-3}} +$$

$$+ \underbrace{k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{2,5 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{2,5 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{6 \cdot 10^{-9}}.$$

В рассматриваемом уравнении имеются два слагаемых с порядком  $10^1$ . Остальные слагаемые, по крайней мере, в  $10^6$  раз меньше этих двух. Поэтому с достаточной степенью точности данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

т.е. в результате упрощения мы получили известное уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g.$$

Необходимо подчеркнуть, что уравнение статики справедливо лишь для метеорологических процессов, определяющих изменение погоды над сравнительно большими районами (порядка нескольких тысяч километров). Для процессов другого масштаба проделанные упрощения могут оказаться неверными. К ним относятся, например, мезомасштабные движения в грозовых облаках, где ускорения воздушных масс иногда сравнимы с ускорением силы тяжести.

Мы рассмотрели технику упрощения уравнений динамики. Она, разумеется, пригодна и для других уравнений, в частности, для уравнения притока тепла. Однако из анализа уравнения притока тепла не вытекают легко обозримые и характерные для атмосферы свойства, как это следует, например, из уравнений динамики (квазигеострофичность и статическое равновесие). В уравнении притока тепла в зависимости от конкретной задачи любое из слагаемых может оказаться главным, а часто все слагаемые близки по значению.

## 4. ДИНАМИКА СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

### 4.1. Геострофический ветер

Ветер при стационарных условиях, скорость которого определяется равновесием двух сил – силы барического градиента и силы Кориолиса, называют *геострофическим ветром*. Его модуль определяется формулой

$$V_g = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (4.1)$$

где  $l = 2\Omega \sin \varphi$  – параметр Кориолиса;  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли;  $\rho$  – плотность воздуха;  $p$  – давление воздуха.

Составляющие геострофического ветра  $u_g$  и  $v_g$  определяются из следующих выражений:

$$u_g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4.2)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.3)$$

где  $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$  – составляющие горизонтального градиента давления  $\frac{\partial p}{\partial n}$ .

Из формулы (4.1) следует, что скорость геострофического ветра пропорциональна силе барического градиента, а его направление совпадает с изобарами таким образом, что область более низкого давления находится слева от направления движения.

Поскольку в синоптической практике для характеристики высотных полей давления строятся не карты изобар, а карты барической топографии, целесообразно преобразовать формулу (4.1), заменив градиент давления градиентом абсолютного геопотенциала.

Из постоянства давления на изобарической поверхности следует, что

$$d p = \frac{\partial p}{\partial n} d n + \frac{\partial p}{\partial z} d z = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{d z}{d n}.$$

Поскольку  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  и согласно соотношению геометрической и геопотенциальной высот  $dz = \frac{9,8}{g} dH$  (здесь  $H$  – геопотенциальная высота, измеряемая в метрах), то

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 9,8\rho \frac{\partial H}{\partial n}.$$

Таким образом, равенство (4.1) может быть переписано в следующем виде:

$$V_g = \frac{9,8}{l} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (4.4)$$

Если вместо  $H$  воспользоваться геопотенциалом ( $\Phi = 9,8 \cdot H$ ), то получим

$$V_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \quad (4.5)$$

Из связи  $H$  и  $p$  следует, что вектор геострофического ветра перпендикулярен градиенту абсолютного геопотенциала и направлен в северном полушарии таким образом, что слева остается область более низких значений  $H$  ( $\Phi$ ).

### Задачи

4.1. Вывести рабочие формулы для определения скорости геострофического ветра (в  $m/c$ ) на некоторой широте  $\varphi$ , если известен горизонтальный градиент давления в  $гПа$  на 100 и 200 км. Принять плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.2. Вывести рабочие формулы для определения скорости геострофического ветра (в  $m/c$ ) на некоторой широте  $\varphi$ , если известен горизонтальный градиент абсолютного геопотенциала в  $гп. дам$  на 100 и 200 км.

4.3. Определить скорость и направление геострофического ветра, если широтная и меридиональная составляющие горизонтального градиента давления равны соответственно 2,3 и 1,2  $гПа/100 \text{ км}$ . Широта места  $55^\circ$ . Принять плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.4. Вычислить скорость геострофического ветра на уровне моря, если расстояние между соседними изобарами (здесь и далее полагается, что изобары проводятся через 5  $гПа$ ) на карте масштаба 1:20 000 000 равно 3 см для  $\varphi = 60^\circ$  при стандартном значении плотности воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.5. Определить широту места и скорость геострофического ветра, если его меридиональная составляющая равна 8,5  $m/c$ , а горизонтальный градиент дав-

ления отклонен на  $30^\circ$  вправо от направления на восток и равен  $1,4 \text{ гПа}/100 \text{ км}$ . Принять плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4.6. Определить наименьший угол между осью  $OX$ , направленной на восток, и прямолинейными изобарами, отстоящими друг от друга на  $2 \text{ см}$  на карте масштаба  $1:20\,000\,000$ , если меридиональная составляющая геострофического ветра равна  $5 \text{ м}/\text{с}$ . Широта места  $55^\circ$ , плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4.7. Проекция вектора горизонтального градиента давления на широтное и меридиональное направления равны соответственно  $0,9$  и  $1,2 \text{ гПа}/100 \text{ км}$ . Скорость геострофического ветра при этом составляет  $9,5 \text{ м}/\text{с}$ . Определить широту места. Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4.8. Определить значение и направление горизонтального градиента давления на широте  $60^\circ$ , если широтная и меридиональная проекции вектора геострофического ветра равны соответственно  $9,6$  и  $7,2 \text{ м}/\text{с}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4.9. Найти широту места, а также значение и направление горизонтального градиента давления, если известно, что широтная и меридиональная составляющие скорости геострофического ветра равны соответственно  $6,1$  и  $7,5 \text{ м}/\text{с}$  и что вдоль широты давление растет с запада на восток на  $1,25 \text{ гПа}$  на каждые  $100 \text{ км}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4.10. Определить расстояние между изогипсами на карте  $AT_{500}$  (масштаб  $1:20\,000\,000$ ) в пункте на широте  $45^\circ$ , если известно, что широтная и меридиональная составляющие скорости геострофического ветра равны соответственно  $7$  и  $9 \text{ м}/\text{с}$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

### Расчет градиентной линейки

#### Цель работы

Для определения скорости геострофического ветра, как на приземных картах, так и на картах барической топографии, научиться строить градиентную линейку с дальнейшим ее использованием.

#### Содержание работы

Для определения скорости геострофического ветра по приземным картам погоды и картам барической топографии используются номограммы с входными параметрами: широта места  $\varphi$  и расстояние между соседними изобарами (изогипсами). Такие номограммы называются *градиентными линейками*. Они строятся с учетом масштаба карты.

#### Материалы для работы

1. Лист миллиметровой бумаги.
2. Комплект синоптических карт: приземная карта, карта барической топографии.

#### Порядок выполнения работы

Построить градиентную линейку для определения скорости геострофического ветра по расстоянию между изобарами (изогипсами) на карте масштаба 1:20 000 000. Расчеты произвести для широт 40, 50, 60, 70, 80° и скоростей геострофического ветра 50, 40, 30, 20, 15, 10, 7, 5, 3 и 2 м/с.

#### Отчетный материал

Градиентная линейка. Определенные в разных точках (указанных преподавателем) синоптических карт скорости геострофического ветра, а также рассчитанные на основе этих скоростей расстояния, пройденные воздушными частицами за 12 ч.

## Методические указания

1. Для построения градиентной линейки необходимо нанести изолинии скорости ветра в системе координат  $(\Delta n, \varphi)$ , где  $\Delta n$  – откладывать в масштабе карты. Расчет  $\Delta n$  осуществляется с использованием следующих формул:

$$V_g = \frac{2,72}{\sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (4.6)$$

$$V_g = \frac{3,4}{\sin \varphi} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (4.7)$$

Используя приближение  $\frac{\partial p}{\partial n} \approx \frac{\Delta p}{\Delta n}$ ;  $\frac{\partial H}{\partial n} \approx \frac{\Delta H}{\Delta n}$ , получаем для  $\Delta n$  следующие соотношения:

$$\Delta n = \frac{2,72 \cdot \Delta p}{V_g \cdot \sin \varphi}, \quad (4.8)$$

$$\Delta n = \frac{3,4 \cdot \Delta H}{V_g \cdot \sin \varphi}. \quad (4.9)$$

Так как  $\Delta p = 5 \text{ гПа}$ , а  $\Delta H = 4 \text{ гн. дам}$ , то из (4.8) и (4.9) получаем

$$\Delta n = \frac{13,6}{V_g \cdot \sin \varphi}. \quad (4.10)$$

**Данные  $\Delta n$  для построения градиентной линейки для карт масштаба 1:20 000 000 ( $\Delta n$  в долях см)**

$\varphi$ , град	$V_g$ , м/с									
	50	40	30	20	15	10	7	5	3	2
80										
70										
60										
50										
40										

Соотношение (4.10) может быть получено как на основе формулы (4.8), так и (4.9), что свидетельствует об универсальности градиентной линейки, которая может быть использована для определения скорости геострофического ветра как по приземным картам, так и по картам барической топографии.

Результаты расчета  $\Delta n$  необходимо представить в виде таблицы.

2. На том же листе миллиметровой бумаги, где построена градиентная линейка, рассчитать отрезок прямой, длина которого будет соответствовать пути воздушной частицы, который она пройдет за 12 ч в диапазоне скоростей, указанных в таблице.

## 4.2. Геострофическая адвекция температуры

Согласно уравнению притока тепла локальные изменения температуры, описываемые величиной

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) - w(\gamma_a - \gamma) + \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (4.11)$$

могут быть представлены в виде суммы следующих слагаемых:

1) изменений, связанных с адвекцией температуры, т.е. переносом поля температуры ветром, и описываемых величиной

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right); \quad (4.12)$$

2) изменений, связанных с адиабатическим движением воздуха по вертикали и описываемых величиной

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o = -w(\gamma_a - \gamma); \quad (4.13)$$

3) изменений, связанных с притоком или оттоком тепла в движущейся воздушной массе

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_T = \frac{\varepsilon}{c_p}. \quad (4.14)$$

Величина  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a$  описывает адвективные изменения температуры, величина

на  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o$  — динамические изменения температуры (применяется еще термин

«вертикальная адвекция») и величина  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_T$  — неадиабатические, или трансформационные, изменения температуры.

Трансформационные изменения температуры значительны главным образом в пограничном слое атмосферы, а в свободной атмосфере, по крайней мере, применительно к интервалам времени около суток, этими изменениями, как показывают оценки, можно пренебречь. Исключение составляют берега океанов: при переходе воздушных масс с океана на сушу или обратно могут иметь место трансформационные изменения температуры, существенные вплоть до больших высот. Кроме этого, необходимо отметить, что трансформационные изменения температуры часто меняются с течением времени значительно медлен-

нее, чем адвективные и динамические. Поэтому для больших интервалов времени нельзя пренебрегать трансформационными изменениями температуры.

Динамические изменения температуры в среднем несколько меньше адвективных изменений, однако не настолько, чтобы ими можно было всегда пренебрегать. Поэтому если отождествлять адвективные изменения температуры (в свободной атмосфере за сроки порядка суток) с реальными ее изменениями, то при этом допускается ошибка главным образом за счет пренебрежения динамическими изменениями.

Чаще всего динамические и трансформационные изменения температуры обратны по знаку ее адвективным изменениям и несколько меньше их. Поэтому, судя о реальных изменениях температуры по адвективным ее изменениям, целесообразно учитывать, что первые обычно меньше вторых.

Адвективные изменения температуры можно подразделить на геострофическую и агеострофическую температурную адвекцию. Помня о том, что

$$u = u_g + u_a, v = v_g + v_a,$$

получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^a,$$

где

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^a = -\left(u_a \frac{\partial T}{\partial x} + v_a \frac{\partial T}{\partial y}\right). \quad (4.16)$$

Величина  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g$  характеризует геострофическую адвекцию температуры,

а величина  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^a$  — агеострофическую адвекцию. Поскольку для движений большого масштаба агеострофические отклонения малы по сравнению с геострофическим ветром, то и агеострофическая адвекция температуры мала по сравнению с геострофической. Исключения составляют особые точки барического поля (центры циклонов и антициклонов, гиперболические точки), в которых геострофический ветер, а с ним и геострофическая адвекция температуры, обращается в нуль, а потому реальная адвекция равна агеострофической.

На основании сказанного можно сделать вывод о том, что геострофическая адвекция должна хорошо коррелировать с реальными изменениями температу-

ры в свободной атмосфере. Действительно, как показывают расчеты, соответствующий коэффициент корреляции составляет около 0,7. Поэтому изучение свойств геострофической адвекции температуры и путей ее вычисления представляет определенный прогностический интерес.

Расчеты показывают, что в среднем реальные локальные изменения температуры несколько меньше ее геострофической адвекции. Поэтому, чтобы прогноз температуры был ближе к действительности, целесообразно умножать геострофическую адвекцию на некоторый коэффициент, меньший единицы. В среднем этот коэффициент составляет около 0,8.

Если в соотношение (4.15) подставить значения  $u_g$  и  $v_g$ , выраженные через составляющие градиента давления или градиента абсолютного геопотенциала, то получим следующие формулы:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{\rho l} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{l} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (4.18)$$

Выражение вида

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где  $A$  и  $B$  — какие-либо две метеорологические величины, а  $x$  и  $y$  — горизонтальные координаты, называется определителем Якоби, или якобианом, и

обозначается либо  $J(A, B)$ , либо  $\frac{D(A, B)}{D(x, y)}$ :

$$J(A, B) \equiv \frac{D(A, B)}{D(x, y)} \equiv \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (4.19)$$

С учетом (4.19) формулы (4.17) и (4.18) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{\rho l} J(p, T), \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{l} J(\Phi, T). \quad (4.21)$$

Якобиан определяется как

$$J(A, B) = \text{grad } A \cdot \text{grad } B \cdot \sin(\text{grad } A, \text{grad } B). \quad (4.22)$$

На основании (4.20)–(4.22) окончательно запишем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \sin \delta, \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a^g = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \sin \delta, \quad (4.24)$$

где  $\delta$  — угол между градиентом давления (геопотенциала) и градиентом температуры, отсчитываемый от градиента давления (геопотенциала) к градиенту температуры против часовой стрелки (рис. 4.1).

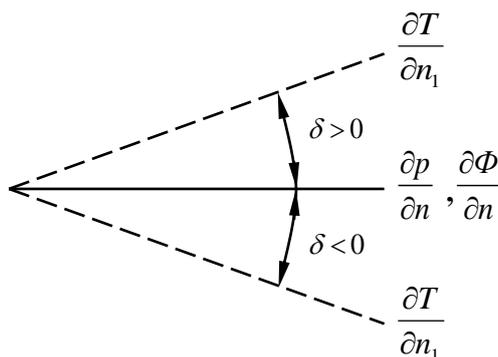


Рис. 4.1. Угол между градиентами давления (геопотенциала) и температуры

Из формул (4.23) и (4.24) следует вывод о том, что если ветер с высотой поворачивает вправо, то  $\delta < 0$  и температура в фиксированной точке повышается, т.е. имеет место адвекция тепла. При левом вращении ветра с высотой  $\delta > 0$  (рис. 4.1) и наблюдается адвекция холода. Этот вывод представляет интерес для практики, так как позволяет даже на основании наблюдений в одной точке делать обоснованные предположения о качественном изменении температуры.

### Задачи

4.11. Вывести рабочие формулы для определения геострофической адвекции (в  $^{\circ}\text{C}/ч$ ) на некоторой широте, если известны горизонтальные градиенты давления (в  $гПа/100 км$  и  $гПа/200 км$ ), температуры (в  $^{\circ}\text{C}/100 км$  и  $^{\circ}\text{C}/200 км$ ) и угол между ними. Плотность воздуха  $\rho = 1,26 кг/м^3$ .

4.12. Вывести рабочие формулы для определения геострофической адвекции (в  $^{\circ}\text{C}/ч$ ) на изобарической поверхности на некоторой широте, если известны горизонтальные градиенты абсолютного геопотенциала (в  $гп. дам/100 км$  и  $гп. дам/200 км$ ), температуры (в  $^{\circ}\text{C}/100 км$  и  $^{\circ}\text{C}/200 км$ ) и угол между ними.

4.13. Определить геострофическую адвекцию на высоте  $0,2 км$ , если для этого уровня на карте масштаба  $1:10\,000\,000$  расстояние между соседними изобарами равно  $2 см$ , а между изотермами —  $1 см$ . Градиент температуры отклонен

от градиента давления на  $30^\circ$  влево. Широта места  $55^\circ$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.14. Вычислить геострофическую адвекцию по данным, приведенным на рис. 4.2. Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

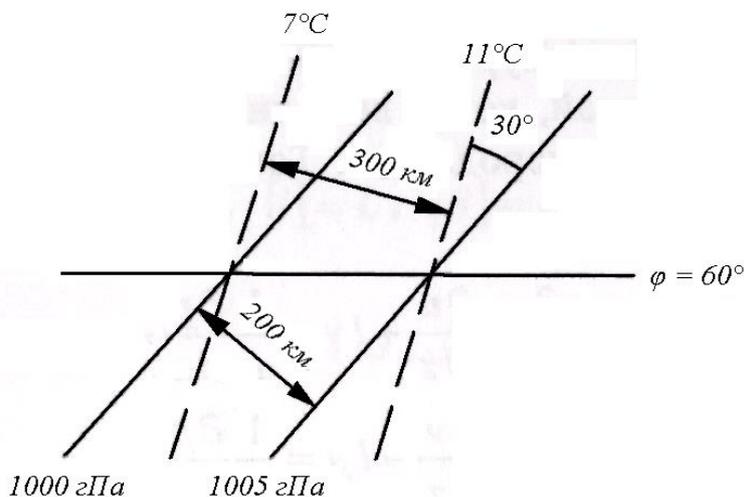


Рис. 4.2. Фрагмент термобарического поля

4.15. Вычислить максимально возможную геострофическую адвекцию на широте  $60^\circ$ , если горизонтальные градиенты давления и температуры соответственно равны  $1,8 \text{ гПа}$  и  $1,4^\circ\text{C}$  на  $100 \text{ км}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.16. Каким должен быть угол между градиентом абсолютного геопотенциала  $1,5 \text{ дам/100 км}$  и градиентом температуры  $1,3^\circ\text{C/100 км}$ , чтобы геострофическая адвекция на широте  $55^\circ$  составляла  $-3^\circ\text{C/сут}$ ?

4.17. На сколько градусов отличается температура в двух пунктах, расположенных на расстоянии  $500 \text{ км}$  друг от друга вдоль широтного круга, если при юго-западном ветре  $15 \text{ м/с}$  на высоте  $0,4 \text{ км}$  температура за  $8 \text{ ч}$  понизилась на  $3^\circ\text{C}$ ? Вдоль меридиана температура не изменяется. Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

4.18. Вычислить скорость северо-восточного ветра, при котором адвективное понижение температуры составило  $1,2^\circ\text{C/ч}$ , если температура убывает с запада на восток на  $1,9^\circ\text{C}$  на каждые  $100 \text{ км}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

## 5. ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АТМОСФЕРЫ

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

#### Расчет показателя динамической неустойчивости атмосферы

##### Цель работы

Научиться рассчитывать показатель динамической неустойчивости атмосферы, определяющий возможность возникновения возмущений синоптического масштаба.

##### Содержание работы

Динамическая неустойчивость атмосферы является одним из необходимых условий возникновения возмущений синоптического масштаба. Однако и прямо, и косвенно она участвует в генерации малых возмущений. Так, при возникновении мезоциклонов наличие динамической неустойчивости непосредственно влияет на формирование этих возмущений.

Для количественной оценки динамической неустойчивости существует множество различных показателей. Наиболее общим из них является показатель

$$DI = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{l^2}{\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}, \quad (5.1)$$

который включает в себя как баротропную (два первых слагаемых в правой части), так и бароклинную неустойчивость (третье слагаемое в правой части). В умеренных и высоких широтах баротропными слагаемыми можно пренебречь, так как они, по крайней мере, на порядок меньше третьего, бароклинного, слагаемого. Третье слагаемое в (5.1) по существу указывает на контраст температуры.

В (5.1)  $R$  – радиус кривизны линий тока;  $V$  – вектор скорости ветра;  $n$  – нормаль к линии тока, направленная вправо от направления течения;  $l = 2\omega \sin\varphi$  – параметр Кориолиса:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p},$$

где  $\Phi$  – геопотенциал,  $m^2/c^2$ ;  $p$  – давление,  $гПа$ ;  $\Theta$  – потенциальная температура,  $K$ .

Так как  $\Phi = g z$ , то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{g(z_e - z_n)}{\Delta p},$$

где  $\Delta p$  – толщина слоя (в гПа), а индексы «в» и «н» обозначают верхнюю и нижнюю границы слоя соответственно. Аналогично

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p} = \frac{\Theta_e - \Theta_n}{\Delta p}.$$

Если рассматривать какой-либо конкретный слой, например, 500–850 гПа, то

$$\sigma_{850}^{500} = \frac{g}{\Theta} \frac{(z_{500} - z_{850})(\Theta_{500} - \Theta_{850})}{12,25 \cdot 10^8}$$

или, принимая  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  и  $\Theta \approx 3 \cdot 10^2 \text{ К}$ ,

$$\sigma_{850}^{500} = 2,7 \cdot 10^{-11} (z_{500} - z_{850})(\Theta_{500} - \Theta_{850}). \quad (5.2)$$

Для того же слоя

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_{850}^{500} = \frac{V_{850} + V_{500} - 2V_{700}}{\left( \frac{2 \cdot 10^4 + 1,5 \cdot 10^4}{2} \right)^2} = \frac{1}{1,75 \cdot 10^8} \left[ \frac{V_{850} - V_{700}}{1,5} - \frac{V_{700} - V_{500}}{2} \right]$$

или, обозначая  $V_{850} - V_{700} = V_1$  и  $V_{700} - V_{500} = V_2$ ,

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_{850}^{500} = \frac{2}{5,25 \cdot 10^8} [V_1 - 0,75V_2]. \quad (5.3)$$

Здесь  $V_1$  – вектор вертикального сдвига ветра в слое 700–850 гПа,  $V_2$  – то же в слое 700–500 гПа.

Модули векторов  $V_1$  и  $V_2$  могут быть вычислены как

$$V_1 = \sqrt{V_{700}^2 + V_{850}^2 - 2V_{700}V_{850} \cos \alpha_1},$$

где  $\alpha_1$  – угол между направлениями ветра на поверхностях 850 и 700 гПа;

$$V_2 = \sqrt{V_{500}^2 + V_{700}^2 - 2V_{500}V_{700} \cos \alpha_2},$$

где  $\alpha_2$  – угол между направлениями ветра на поверхностях 700 и 500 гПа.

Направления этих векторов вычисляются как

$$d_1 = d_{850} \pm \arccos \frac{V_{850} - V_{700} \cos \alpha_1}{V_1},$$

$$d_2 = d_{700} \pm \arccos \frac{V_{700} - V_{500} \cos \alpha_2}{V_2}.$$

При левом повороте ветра с высотой используется верхний знак перед вторым слагаемым, при правом – нижний.

Выражение (5.3) можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_{850}^{500} = \frac{2\sqrt{V_1^2 + (0,75V_2)^2 - 1,5V_1V_2 \cos |d_1 - d_2|}}{5,25 \cdot 10^8}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) и (5.2) в (5.1), получаем

$$DI_{850}^{500} = \frac{3 \cdot 10^{-6} (\sin \varphi)^2 \sqrt{V_1^2 + (0,75V_2)^2 - 1,5V_1 V_2 \cos |d_1 - d_2|}}{(z_{500} - z_{850}) (\Theta_{500} - \Theta_{850})}. \quad (5.5)$$

Здесь  $\varphi$  – широта места, где было произведено температурно-ветровое зондирование атмосферы (место, для которого вычисляется значение  $DI$ ).

Из выражения (5.1) видно, что величина  $DI$  имеет размерность  $m^{-1} \cdot c^{-1}$ . Приведем показатель динамической неустойчивости к безразмерному виду, для чего разделим величину  $DI$  на критическое значение этой же величины

$$D = \frac{DI}{|DI|_k}. \quad (5.6)$$

Здесь  $D$  – безразмерный показатель динамической неустойчивости,  $|DI|_k$  – минимальное значение  $DI$ , при котором возможен циклогенез. Опыт показывает, что  $|DI|_k \approx 10^{-10} m^{-1} \cdot c^{-1}$ . Тогда

$$D = \frac{DI}{10^{-10}} = 10^{10} DI. \quad (5.7)$$

Атмосфера считается динамически неустойчивой при  $D \geq 1,0$ .

#### Материалы для работы

Данные температурно-ветрового зондирования атмосферы (вариант задания указывается преподавателем).

#### Порядок выполнения работы

Рассчитать безразмерный показатель динамической неустойчивости атмосферы  $D$  по данным, представленным в табл. 5.5.

#### Отчетный материал

Представленные в виде табл. 5.1 результаты расчета безразмерного показателя динамической неустойчивости  $D$ .

Значения  $D$ 

Вариант	Параметры							
	$\Theta_{500}-\Theta_{850}$	$V_1$	$d_1$	$V_2$	$d_2$	$DI$	$D$	Вывод

## Методические указания

Алгоритм расчета рассмотрим на примере исходных данных, приведенных в табл. 5.2.

**Данные температурно-ветрового зондирования  
(Архангельск ( $\varphi = 65^\circ$  с.ш.). 30 июля 2023 г., 0 ч ВСВ)**

$p$	$z$	$T$	$d$	$V$
850	1470	7,2	160	11
700	3040	-4,1	180	10
500	5650	-18,3	170	15

1. Вычисляются значения  $\Theta_{850}$  и  $\Theta_{500}$ :

$$\Theta_{850} = (273,2 + 7,2) \left( \frac{1000}{850} \right)^{\frac{R}{c_p}} = (273,2 + 7,2) \left( \frac{1000}{850} \right)^{0,285} = 293,7;$$

$$\Theta_{500} = (273,2 - 18,3) \left( \frac{1000}{500} \right)^{0,285} = 310,6.$$

2.  $(\Theta_{500} - \Theta_{850}) = 16,9$ .

3. Вычисляются значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\alpha_1 = |180 - 160| = 20^\circ$ ;  $\alpha_2 = |170 - 180| = 10^\circ$ .

4. Вычисляются модули и направления векторов сдвигов ветра в слоях 700–850 и 500–700 гПа:

$$V_1 = \sqrt{10^2 + 11^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos 20^\circ} = 3,8 \text{ м/с};$$

$$d_1 = 160 - \arccos \frac{11 - 10 \cdot \cos 20^\circ}{3,8} = 95^\circ.$$

Здесь перед вторым слагаемым взят знак «-», так как имеет место правый поворот ветра с высотой.

$$V_2 = \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 10^\circ} = 5,4 \text{ м/с};$$

$$d_2 = 180 + \arccos \frac{10 - 15 \cdot \cos 10^\circ}{5,4} = 332^\circ.$$

Здесь перед вторым слагаемым взят знак «+», так как имеет место левый поворот ветра с высотой.

5. Теперь все необходимые данные есть. Воспользовавшись формулой (5.5), можно рассчитать значение  $DI_{850}^{500}$ :

$$DI_{850}^{500} = \frac{3 \cdot 10^{-6} (\sin 65) ^2 \sqrt{3,8^2 + (0,75 \cdot 5,4)^2 - 1,5 \cdot 3,8 \cdot 5,4 \cdot \cos |95 - 332|}}{(5650 - 1470) \cdot 16,9} = 2,35 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

На основании (5.7) получаем

$$D = 10^{10} \cdot 2,35 \cdot 10^{-10} = 2,35.$$

Так как в данном примере  $D \geq 1,0$ , то атмосфера считается динамически неустойчивой.

Второй пример попробуйте сделать сами (необходимые данные приведены в табл. 5.3).

Таблица 5.3

**Данные температурно-ветрового зондирования  
(Киров ( $\varphi = 58^\circ$  с.ш.). 20 июля 2023 г., 0 ч ВСВ)**

$p$	$z$	$T$	$d$	$V$
850	1510	11,8	20	10
700	3100	2,2	360	12
500	5740	-15,1	350	18

Если Вы все сделали правильно, Ваш ответ должен быть следующим (табл. 5.4).

Таблица 5.4

**Результаты расчета  $D$  по данным табл. 5.3**

Параметры							
$\Theta_{500} - \Theta_{850}$	$V_1$	$d_1$	$V_2$	$d_2$	$DI$	$D$	Вывод
16,0	4,3	127	6,5	152	$0,66 \cdot 10^{-10}$	0,66	Уст.

## Данные температурно-ветрового зондирования

$p$	$z$	$T$	$d$	$V$
1. Киров ( $\varphi = 58^\circ$ с.ш.). 10 июля 2021 г., 12 ч ВСВ				
850	1440	8,4	225	7
700	3030	3,0	250	11
500	5660	-15,9	280	13
2. Киров. 21 июля 2021 г., 12 ч ВСВ				
850	1550	15,4	300	8
700	3160	4,8	360	9
500	5840	-11,5	50	13
3. Киров. 23 июля 2021 г., 12 ч ВСВ				
850	1540	15,8	235	7
700	3160	5,8	255	10
500	5820	-12,7	270	11
4. Киров. 27 июля 2021 г., 0 ч ВСВ				
850	1460	5,4	305	12
700	3030	-15,0	335	14
500	5650	-14,7	320	21
5. Киров. 2 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1250	-12,5	340	20
700	2700	-23,1	335	23
500	5100	-38,5	330	26
6. Киров. 4 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1350	-22,9	360	13
700	2760	-28,5	5	16
500	5100	-42,3	10	17
7. Киров. 7 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1290	-21,7	5	10
700	2740	-23,1	335	13
500	5120	-39,3	330	21
8. Киров. 8 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1360	-13,2	255	19
700	2830	-17,9	280	16
500	5280	-32,3	295	18
9. Киров. 16 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1370	-16,1	185	9
700	2810	-22,7	210	10
500	5220	-35,9	260	14
10. Киров. 22 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1360	-8,7	235	9
700	2840	-18,9	240	16
500	5250	-37,1	265	12
11. Киров. 27 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1340	-3,1	230	12
700	2860	-10,5	245	16
500	5370	-26,9	240	21

$p$	$z$	$T$	$d$	$V$
12. Киров. 29 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1420	-7,9	265	12
700	2910	-16,7	260	21
500	5350	-34,3	255	17
13. Ивдель ( $\varphi = 60^\circ$ с.ш.). 6 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1240	-15,5	300	23
700	2700	-18,7	325	21
500	5120	-37,9	330	24
14. Ивдель. 9 января 2023 г., 12 ч ВСВ				
850	1240	-22,3	300	7
700	2690	-20,7	295	13
500	5110	-35,3	305	21
15. Ивдель. 10 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1270	-17,5	255	7
700	2720	-21,1	280	12
500	5140	-35,3	285	23
16. Ивдель. 18 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1410	-15,1	185	12
700	2870	-21,7	205	10
500	5270	-38,5	240	13
17. Ивдель. 20 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1370	-11,1	175	10
700	2850	-18,7	190	12
500	5270	-34,3	190	14
18. Ивдель. 22 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1420	-12,4	210	9
700	2870	-22,5	215	10
500	5290	-33,7	240	10
19. Ивдель. 25 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1380	-17,4	210	10
700	2820	-25,5	115	4
500	5180	-42,7	150	6
20. Ивдель. 30 января 2023 г., 0 ч ВСВ				
850	1440	-5,4	320	16
700	2900	-11,5	335	14
500	5320	-19,7	315	28

## 6. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

*Пограничным слоем атмосферы (ПСА)* называется нижний 1,5–2-километровый слой, в пределах которого распределение метеорологических величин определяется непосредственным влиянием подстилающей поверхности и турбулентностью.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия стационарности и горизонтальной однородности. Тогда уравнения движения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} + lv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} - lu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Считая градиент давления внешним параметром и выражая его через геострофический ветер, получим

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + lv - \frac{l}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - lu - \frac{l}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0.$$

Окончательно

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + l(v - v_g) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - l(u - u_g) = 0. \quad (6.2)$$

Для замыкания системы используем уравнение баланса кинетической энергии турбулентности

$$k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz} \right] + \frac{d}{dz} k \frac{dB}{dz} - \varepsilon_\delta = 0, \quad (6.3)$$

где  $\varepsilon_\delta$  — диссипация.

Предположим, что все характеристики турбулентности можно представить как функции от характерного размера турбулентных пульсаций — масштаба турбулентности  $l$  и кинетической энергии турбулентности  $B$ :

$$k = F_1(l, B), \quad \varepsilon_\delta = F_2(l, B), \quad (6.4)$$

где

$$[k] = L^2 T^{-1}, \quad [l] = L, \quad [B] = L^2 T^{-2}, \quad [\varepsilon_\delta] = L^2 T^{-3}, \quad (6.5)$$

откуда

$$k = l\sqrt{B}, \quad (6.6)$$

$$\varepsilon_0 = c \frac{B^2}{k}, \quad (6.7)$$

где  $c$  – постоянная, определяемая из эмпирического материала.

С учетом (6.7) уравнение (6.3) можно записать в следующем виде:

$$k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz} \right] + \frac{d}{dz} k \frac{dB}{dz} - c \frac{B^2}{k} = 0. \quad (6.8)$$

В уравнениях (6.1) – (6.2), (6.6) и (6.8) содержатся шесть неизвестных ( $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $B$ ,  $\Theta$ ).

Для определения потенциальной температуры  $\Theta$  воспользуемся уравнением притока тепла, принимая во внимание лишь вертикальный турбулентный поток тепла

$$k \frac{d\Theta}{dz} = - \frac{P(z)}{\rho c_p}, \quad (6.9)$$

где  $P(z)$  – турбулентный поток тепла.

Уравнение притока влаги (для определения  $q$ ) запишем в виде

$$k \frac{dq}{dz} = - \frac{E(z)}{\rho}, \quad (6.10)$$

где  $E(z)$  – турбулентный поток влаги.

Для определения  $l$  воспользуемся выражением

$$l = -c_1 \frac{\psi}{\frac{d\psi}{dz}}, \quad (6.11)$$

где  $c_1$  – константа, определяемая из эмпирического материала:

$$\psi = \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz}.$$

Полученная система уравнений (6.1) – (6.2), (6.6), (6.8) – (6.11) является замкнутой и позволяет определить все искомые величины ( $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $B$ ,  $\Theta$ ,  $q$ ) при заданных граничных условиях, характер которых будет зависеть от конкретной специфики задачи.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

### Расчет и построение профилей скорости ветра, температуры воздуха и массовой доли водяного пара в ПСА в рамках однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ )

#### Цель работы

Научиться рассчитывать составляющие скорости ветра, модуль и направление вектора ветра, строить спираль Экмана, рассчитывать и строить вертикальные профили температуры воздуха и массовой доли водяного пара в ПСА в рамках однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ ).

#### Содержание работы

Основные трудности в решении системы (6.1)–(6.2), (6.6), (6.8)–(6.11) заключаются в определении коэффициента турбулентности, который связан с профилями метеорологических величин сложными нелинейными зависимостями. Вместе с тем известно, что модели с априорным заданием значения коэффициента турбулентности дают хорошее согласование с наблюдениями, особенно в нижней части пограничного слоя. Можно указать на две причины удовлетворительного согласия модельных результатов с наблюдениями. Во-первых, несмотря на широкий диапазон изменений коэффициента турбулентности, он всегда остается положительным. Во-вторых, искомые функции — ветер, температура и влажность — удовлетворяют точным граничным условиям.

Рассмотрим наиболее простую модель, которая приводит к обозримым формулам и позволяет понять механизм формирования процессов в пограничном слое атмосферы.

Заменим коэффициент турбулентности средним по высоте значением  $\bar{k}$ . В этом случае уравнения движения (6.1)–(6.2) примут следующий вид:

$$\bar{k} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\Omega_z (v - v_g) = 0, \quad (6.12)$$

$$\bar{k} \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\Omega_z (u - u_g) = 0. \quad (6.13)$$

Для определения  $\bar{k}$  используем интегральное уравнение баланса кинетической энергии турбулентности, которое можно записать в форме

$$\frac{\bar{k}}{H} \int_0^H \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz} \right] dz - \frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz + \frac{1}{H} \int_0^H D dz = 0, \quad (6.14)$$

где  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ ;  $H$  — высота ПСА;  $D$  — диффузия энергии турбулентности.

Так как диффузия представляет собой только перераспределение энергии турбулентности и ею на границах можно пренебречь, в интегральном уравнении баланса можно не учитывать последнее слагаемое.

Предположим, что средняя по пограничному слою диссипация является функцией двух параметров — среднего коэффициента турбулентности и толщины ПСА. Вид этой функции можно найти из анализа размерности (6.5):

$$\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz = f(\bar{k}, H) = c_2 \frac{\bar{k}^3}{H^4}, \quad (6.15)$$

где  $c_2$  — константа, определяемая из эмпирического материала.

С учетом приведенных соображений уравнение (6.14) можно переписать в виде

$$\frac{\bar{k}}{H} \int_0^H \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz} \right] dz - c_2 \frac{\bar{k}^3}{H^3} = 0. \quad (6.16)$$

Для определения изменения турбулентного потока тепла и влаги с высотой примем простой линейный закон, который правильно учитывает известные из наблюдений факты: у поверхности земли при  $z = 0$

$$P(0) = P_0, \quad E(0) = E_0,$$

на верхней границе ПСА при  $z = H$  все турбулентные потоки должны стремиться к нулю, т.е.

$$P(H) = E(H) = 0.$$

В таком случае уравнения притока тепла и влаги примут следующий вид:

$$\bar{k} \frac{d\Theta}{dz} = -\frac{P_0}{\rho c_p} \left( 1 - \frac{z}{H} \right), \quad (6.17)$$

$$\bar{k} \frac{dq}{dz} = -\frac{E_0}{\rho} \left( 1 - \frac{z}{H} \right). \quad (6.18)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо дополнительное соотношение для определения  $H$ :

$$\frac{v}{u} \Big|_{z=H} = \frac{v_g}{u_g}, \quad (6.19)$$

где  $u_g, v_g$  — соответственно проекции геострофического ветра на оси  $OX$  и  $OY$ .

Воспользуемся следующими граничными условиями:

при

$$z = 0 \quad v = u = 0, \quad (6.20)$$

при

$$z = H \quad u \rightarrow u_g, \quad v \rightarrow v_g, \quad T = T_H, \quad q = q_H. \quad (6.21)$$

Примем следующий алгоритм решения: сначала из (6.12) и (6.13) определим профиль ветра, а из (6.17) и (6.18) — профили температуры и массовой доли водяного пара. Затем используем полученные решения и найдем из (6.15), (6.16) и (6.19) диссипацию  $\varepsilon$ , коэффициент турбулентности  $k$  и высоту пограничного слоя  $H$ .

Для составляющих скорости ветра имеем следующие решения:

$$u = u_g - e^{-az} (u_g \cos az + v_g \sin az), \quad (6.22)$$

$$v = v_g - e^{-az} (v_g \cos az - u_g \sin az), \quad (6.23)$$

где  $a = \sqrt{\frac{\Omega_z}{k}}$ .

Годограф ветра, описываемый соотношениями (6.22) и (6.23), называется спиралью Экмана. Для частного случая, когда ось  $OX$  совпадает с направлением геострофического ветра ( $v_g = 0, u_g = V_g$ ), формулы (6.22) – (6.23) принимают следующий вид:

$$u = V_g (1 - e^{-az} \cos az), \quad (6.24)$$

$$v = V_g e^{-az} \sin az. \quad (6.25)$$

Из анализа (6.22)–(6.23) или (6.24)–(6.25) хорошо видно влияние турбулентности на вертикальный профиль ветра: сильная турбулентность (большие значения  $\bar{k}$ ) вызывает медленное увеличение ветра с высотой, а слабая — быстрое. Так как  $\Omega_z = \Omega \sin \varphi$  ( $\varphi$  — широта), то увеличение широты соответствует уменьшению  $\bar{k}$ , а уменьшение  $\varphi$  — увеличению  $\bar{k}$ .

Угол между вектором геострофического ветра и вектором ветра на любой высоте с учетом (6.24) – (6.25) определяется как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}. \quad (6.26)$$

При  $z = 0$  в (6.26) получается неопределенность, раскрыв которую (по правилу Лопиталя), находим, что

$$\alpha|_{z=0} = 45^\circ,$$

т.е. ветер у поверхности земли отклоняется влево от геострофического на угол  $45^\circ$ . Полученное значение угла примерно в 1,5–2 раза больше наблюдаемого

(для средних условий), что связано главным образом с предположением о среднем коэффициенте турбулентности.

Если проинтегрировать (6.17) и (6.18) при условии (6.21), то получим следующие выражения для профилей температуры и массовой доли водяного пара:

$$T_z = T_H + \gamma_a (H - z) + \frac{P_0}{\rho c_p \bar{k}} \frac{(H - z)^2}{2H}, \quad (6.27)$$

$$q_z = q_H + \frac{E_0}{\rho \bar{k}} \frac{(H - z)^2}{2H}. \quad (6.28)$$

Реальное вертикальное распределение  $T$  и  $q$  в ПСА может заметно отличаться от распределения, описываемого формулами (6.27) и (6.28), вследствие:

- 1) предположения о линейном изменении потоков с высотой;
- 2) выбора  $k = \bar{k}$ .

В первом случае не учитывается известный из наблюдений факт смены знака градиента температуры, а, следовательно, направления потока тепла. Во втором случае профили искажаются вследствие завышения коэффициента турбулентности в нижней части ПСА и занижения его в верхней части.

### Материалы для работы

1. Данные о широте места станции, скорости геострофического ветра, среднем в пограничном слое коэффициенте турбулентности, плотности воздуха, турбулентном потоке тепла и влаги у поверхности земли, температуре воздуха и массовой доле водяного пара на верхней границе ПСА (вариант задания указывается преподавателем).

2. Миллиметровка.

### Порядок выполнения работы

**Задание 1.** Определить горизонтальные составляющие скорости ветра, модуль и направление вектора ветра в ПСА для высот 0, 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 и 1200 м по данным, представленным в прил. 4.1. На основании расчетов построить спираль Экмана; ось  $OX$  направить вдоль вектора геострофического ветра ( $v_g = 0, u_g = V_g$ ). Широта места  $60^\circ$ .

**Задание 2.** Рассчитать и построить вертикальные профили температуры воздуха и массовой доли водяного пара в ПСА для высот 0, 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800, 1000 и 1200 м по данным, представленным в прил. 4.2. Считать  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3, H = 1200 \text{ м}$ .

## Отчетный материал

**Задание 1.** Представленные в виде табл. 6.1 результаты расчета  $u, v, V, \alpha$  в ПСА. Построенная на миллиметровке Спираль Экмана.

Таблица 6.1

**Значения  $u, v, V, \text{ м/с}$  и  $\alpha, \text{ град.}$**

Величина	$z, \text{ м}$									
	0	25	50	100	200	400	600	800	1000	1200
$u$										
$v$										
$V$										
$\alpha$										

**Задание 2.** Представленные в виде табл. 6.2. результаты расчета температуры воздуха и массовой доли водяного пара в ПСА. Построенные на миллиметровке вертикальные профили  $T_z$  и  $q_z$ .

Таблица 6.2

**Значения  $T_z, \text{ }^\circ\text{C}$  и  $q_z, \text{ г/кг}$**

$z, \text{ м}$	$T_z$			$q_z$		
	$P_0 = 0$	$P_0 > 0$	$P_0 < 0$	$E_0 = 0$	$E_0 > 0$	$E_0 < 0$
0						
25						
50						
100						
200						
400						
600						
800						
1000						
1200						

### Методические указания

**Задание 1.** Расчет  $u$  и  $v$  производить с помощью формул (6.24) и (6.25). Углы в тригонометрических функциях  $\sin$  и  $\cos$  считать в радианах. Годограф ветра (спираль Экмана) необходимо строить в системе координат

$$u_n = \frac{u}{V_g}, v_n = \frac{v}{V_g}.$$

Точки на кривой соответствуют разным значениям  $z_n = az$ . Вектор ветра (обозначим его через угол  $\alpha$ ) на высоте  $z_{ni}$  равен вектору, имеющему начало в точке  $u_n = v_n = 0$ , а конец – в точке с соответствующим значением  $z_n$ . Угол  $\alpha$  определяется из соотношения (6.26).

**Задание 2.** Расчет  $T_z$  и  $q_z$  производить с помощью формул (6.27) и (6.28). Исходя из исходных данных (прил. 6.2), для каждого варианта получится по три вертикальных профиля  $T_z$  и  $q_z$ . При расчете  $q_z$  учесть, что 1 мм слоя воды в турбулентном потоке влаги имеет размерность  $1 \text{ кг/м}^2$ .

Приложение 6.1

**Значения скорости геострофического ветра  $V_g$ , м/с и среднего в ПСА коэффициента турбулентности  $\bar{k}$ , м<sup>2</sup>/с**

Вариант	Величина	
	$V_g$	$\bar{k}$
1	10	3
2	11	3
3	12	3
4	13	4
5	14	4
6	15	4
7	16	5
8	17	5
9	18	5
10	19	6
11	20	6
12	21	6
13	22	7
14	23	7
15	24	7
16	25	8
17	26	8
18	27	8
19	28	9
20	29	9

Значения  $T_H$ , °С,  $q_H$ , г/кг,  $\bar{k}$ , м<sup>2</sup>/с,  $P_0$ , Вт/м<sup>2</sup>,  $E_0$ , мм/ч в ПСА

Вариант	Величина								
	$T_H$	$q_H$	$\bar{k}$	$P_0$	$P_0$	$P_0$	$E_0$	$E_0$	$E_0$
1	5	4,0	3	0	70	-70	0	0,10	-0,10
2	5,5	4,2	3	0	75	-75	0	0,12	-0,12
3	6	4,8	3	0	80	-80	0	0,14	-0,14
4	6,5	5,0	4	0	85	-85	0	0,16	-0,16
5	7	5,5	4	0	90	-90	0	0,18	-0,18
6	7,5	5,8	4	0	95	-95	0	0,20	-0,20
7	8	6,0	5	0	100	-100	0	0,22	-0,22
8	8,5	6,4	5	0	105	-105	0	0,24	-0,24
9	9	6,8	5	0	110	-110	0	0,26	-0,26
10	9,5	7,4	6	0	115	-115	0	0,28	-0,28
11	10	7,8	6	0	120	-120	0	0,30	-0,30
12	10,5	8,0	6	0	125	-125	0	0,32	-0,32
13	11	8,5	7	0	130	-130	0	0,34	-0,34
14	11,5	9,0	7	0	135	-135	0	0,36	-0,36
15	12	9,5	7	0	140	-140	0	0,38	-0,38
16	12,5	9,7	8	0	145	-145	0	0,40	-0,40
17	13	9,9	8	0	150	-150	0	0,42	-0,42
18	13,5	10,0	8	0	155	-155	0	0,44	-0,44
19	14	10,4	9	0	160	-160	0	0,46	-0,46
20	14,5	10,8	9	0	165	-165	0	0,48	-0,48

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

### Определение средних в ПСА характеристик турбулентности в однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ )

#### Цель работы

Научиться рассчитывать средние в ПСА коэффициент турбулентности и диссипацию, а также высоту ПСА в рамках однопараметрической модели ПСА ( $k = \text{const}$ ).

#### Содержание работы

В полученные выражения для профилей скорости ветра, температуры и влажности входят неизвестные пока величины — высота ПСА и коэффициент турбулентности. Для определения  $H$  используем (6.19), из которого с учетом (6.22) и (6.23) последовательно получим

$$vu_g = uv_g;$$

$$[v_g - e^{-aH}(v_g \cos aH - u_g \sin aH)]u_g = [u_g - e^{-aH}(u_g \cos aH + v_g \sin aH)]v_g;$$

$$u_g^2 e^{-aH} \sin aH = -v_g^2 e^{-aH} \sin aH;$$

$$(u_g^2 + v_g^2) \sin aH = 0.$$

Откуда

$$aH = \pi; \quad (6.29)$$

$$H = \pi \sqrt{\frac{\bar{k}}{\Omega_z}}. \quad (6.30)$$

Таким образом, высота ПСА увеличивается с ростом  $\bar{k}$  и уменьшением  $\Omega_z$  (следует помнить, что для экватора неприменимы геострофические соотношения и полученные выше формулы не могут быть использованы).

Средний коэффициент турбулентности получим из уравнения баланса кинетической энергии турбулентности. Для этого выразим через (6.24), (6.25) и (6.17) компоненты баланса

$$\bar{k} \int_0^H \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz = -V_g^2 a \bar{k} (e^{-2aH} - 1) = V_g^2 \sqrt{\Omega_z \bar{k}},$$

так как  $e^{-2aH} \ll 1$  и

$$\frac{g}{T} \int_0^H \bar{k} \frac{d\Theta}{dz} dz = -\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \frac{H}{2}.$$

Тогда (6.16) примет вид

$$V_g^2 \sqrt{\Omega_z \bar{k}} + \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \frac{H}{2} - c_2 \frac{\bar{k}^3}{H^3} = 0.$$

Подставив в это уравнение (6.30) и решив его относительно  $\bar{k}$ , получим

$$\bar{k} = m \frac{V_g^2}{\Omega_z} \left( 1 + \frac{g}{T} \frac{\pi}{2\rho c_p \Omega_z} \frac{P_0}{V_g^2} \right). \quad (6.31)$$

Константу  $m = \pi^3 / c_2$  можно определить на основании эмпирических данных. При безразличной стратификации ( $P_0 = 0$ )

$$\bar{k} = m \frac{V_g^2}{\Omega_z}. \quad (6.32)$$

Подставляя (6.32) в (6.30), получим

$$m = \frac{H^2 \Omega_z^2}{\pi^2 V_g^2}. \quad (6.33)$$

С определением  $\bar{k}$  задача решена, и теперь можно рассчитать профили метеорологических величин, если известны  $V_g, \Omega_z, P_0, E_0, T_H, q_H$ .

Получим выражение для средней по пограничному слою диссипации. Подставляя в (6.15) значение  $H$ , определяемое формулой (6.30), получим

$$\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz = c_2 \frac{\bar{k}^3}{H^4} = \frac{c_2 \bar{k}^3 \Omega_z^2}{\pi^4 \bar{k}^2} = \frac{c_2 \bar{k} \Omega_z^2}{\pi^4} = \frac{\Omega_z^2}{\pi m} \bar{k}, \quad (6.34)$$

или

$$\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz = \frac{\Omega_z}{\pi} V_g^2 \left( 1 + \frac{g}{T} \frac{\pi}{2\rho c_p \Omega_z} \frac{P_0}{V_g^2} \right). \quad (6.35)$$

Необходимо обратить внимание на то, что формулы (6.31) и (6.35) справедливы только в случае, если

$$\frac{g}{T} \frac{\pi}{2\rho c_p \Omega_z} \frac{P_0}{V_g^2} > -1,0. \quad (6.36)$$

Указанное ограничение отражает возможность исчезновения турбулентности при сильно устойчивой стратификации и справедливо в количественном отношении только в рамках рассмотренной модели.

Рассмотренная модель пограничного слоя атмосферы, несмотря на ряд допущений, обладает определенными достоинствами. Во-первых, она позволяет получить обзримые аналитические выражения для описания основных про-

цессов в ПСА. Во-вторых, она может быть использована в численных прогнозах для приближенного учета влияния ПСА, так как при этом важны не детали вертикальной структуры ПСА, а интегральные эффекты  $(\bar{k}, H, \varepsilon)$ , которые определяются довольно неплохо.

### Материалы для работы

Данные о широте места станции, скорости геострофического ветра, турбулентном потоке тепла у поверхности земли, температуре и плотности воздуха (вариант задания указывается преподавателем).

### Порядок выполнения работы

**Задание 1.** Определить средний в ПСА коэффициент турбулентности по данным, представленным в прил. 6.3. Считать  $V_g = 10 \text{ м/с}$ ,  $T = 280 \text{ К}$ ,  $m = 3 \cdot 10^{-6}$ ,  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задание 2.** С учетом рассчитанных в предыдущем задании 1 значений  $\bar{k}$  (по каждому варианту три значения  $\bar{k}$ ) определить среднюю в ПСА диссипацию энергии турбулентности. Считать  $m = 3 \cdot 10^{-6}$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задание 3.** С учетом рассчитанных в задании 1 значений  $\bar{k}$  (по каждому варианту три значения  $\bar{k}$ ) определить высоту ПСА. Считать  $\varphi = 60^\circ$ .

### Отчетный материал

**Задание 1.** Представленные в виде табл. 6.3 результаты расчета  $\bar{k}$  в ПСА.

Таблица 6.3

Значения  $\bar{k}$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$

Вариант	$P_0 = 0$	$P_0 > 0$	$P_0 < 0$

**Задание 2.** Представленные в виде табл. 6.4 результаты расчета  $\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz$  в ПСА.

Таблица 6.4

Значения  $\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz$ , Вт/кг

Вариант	$\bar{k}_1$ ( $P_0 = 0$ )	$\bar{k}_2$ ( $P_0 > 0$ )	$\bar{k}_3$ ( $P_0 < 0$ )

**Задание 3.** Представленные в виде табл. 6.5 результаты расчета  $H$ .

Таблица 6.5

Значения  $H$ , м

Вариант	$\bar{k}_1$ ( $P_0 = 0$ )	$\bar{k}_2$ ( $P_0 > 0$ )	$\bar{k}_3$ ( $P_0 < 0$ )

#### Методические указания

**Задание 1.** Расчет  $\bar{k}$  производить с помощью формулы (6.31). С использованием исходных данных (прил. 6.3) для каждого варианта получится по три значения  $\bar{k}$ .

**Задание 2.** Расчет  $\frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon dz$  производить с помощью формулы (6.34). Значения  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$  используются из предыдущего задания 1.

**Задание 3.** Расчет  $H$  производить с помощью формулы (6.30). Значения  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$  используются из задания 1.

Значения  $P_0$ , Вт/м<sup>2</sup> в ПСА

Вариант	Величина		
	$P_0 = 0$	$P_0 > 0$	$P_0 < 0$
1	0	70	-70
2	0	75	-75
3	0	80	-80
4	0	85	-85
5	0	90	-90
6	0	95	-95
7	0	100	-100
8	0	105	-105
9	0	110	-110
10	0	115	-115
11	0	120	-120
12	0	125	-125
13	0	130	-130
14	0	135	-135
15	0	140	-140
16	0	145	-145
17	0	150	-150
18	0	155	-155
19	0	160	-160
20	0	165	-165

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барашкова Н.К., Кижнер Л.И., Кужевская И.В. Атмосферные процессы: динамика, численный анализ, моделирование. Томск: ТМЛ-Пресс, 2010. 312 с.
2. Белов П.Н. Практические методы численного прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 335 с.
3. Белов П.Н. Сборник упражнений по численным методам прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 136 с.
4. Быков А.В., Ветров А.Л., Фрик П.Г., Сухановский А.Н., Калинин Н.А., Степанов Р.А. Численное моделирование предельных состояний планетарной атмосферы // Географический вестник. 2023. № 4 (67). С. 85–98.
5. Бызова Н.Л., Иванов В.Н., Гаргер Е.К. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 263 с.
6. Вагер Б.Г., Надежина Е.Д. Пограничный слой в условиях горизонтальной неоднородности. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 124 с.
7. Вагер Б.Г., Серков Н.К. Слайны при решении прикладных задач в метеорологии и гидрологии. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 160 с.
8. Воробьев В.И. Синоптическая метеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 616 с.
9. Гандин Л.С. Введение в расчетные методы прогноза погоды. Л.: Изд-во ЛКВВИА им. А.Ф. Можайского, 1960. 210 с.
10. Динамическая метеорология / под ред. Д.Л. Лайхтмана. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 608 с.
11. Задачник по динамической метеорологии / А.С. Гаврилов, А.М. Данович, К.Л. Егоров и др. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 166 с.
12. Зверев А.С. Синоптическая метеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 712 с.
13. Израэль Ю.А. Науки о Земле на рубеже веков: науки об атмосфере и гидросфере // Метеорология и гидрология. 1999. № 5. С. 18–31.
14. Калинин Н.А. Исследование энергетики циклонов умеренных широт // Метеорология и гидрология. 1994. № 5. С. 55–67.
15. Калинин Н.А. Исследование генерации кинетической энергии циклонов умеренных широт // Метеорология и гидрология. 1995. № 2. С. 26–35.
16. Калинин Н.А. Исследование доступной потенциальной энергии циклонов умеренных широт // Метеорология и гидрология. 1997. № 1. С. 37–49.
17. Калинин Н.А. Энергетика циклонов умеренных широт. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. 192 с.

18. Калинин Н.А. Пространственная структура трансформации и притока кинетической энергии под действием процессов вихреобразования в циклонах. Метеорология и гидрология. 2000. № 9. С. 20–25.
19. Калинин Н.А. Исследование атмосферы с помощью импульсных метеорологических радиолокаторов: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2000. 103 с.
20. Калинин Н.А. Динамическая метеорология: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Гидрометеорология», специальности «Метеорология» / Перм. ун-т. Пермь: РГГМУ; СПб., изд. второе, испр. Пермь: Перм. кн. изд-во, 2009. 256 с.
21. Калинин Н.А. Мониторинг, моделирование и прогноз состояния атмосферы в умеренных широтах / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. 308 с.
22. Калинин Н.А. Физическая метеорология [Электронный ресурс]: учебное пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2023. 257 с. Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Kalinin-Fizicheskayameteorologiya.pdf>. (дата обращения 21.01.2024).
23. Калинин Н.А., Быков А.В., Шихов А.Н. Объектно-ориентированная оценка краткосрочного прогноза конвективных опасных явлений погоды в Пермском крае по модели WRF // Оптика атмосферы и океана. 2022. Т. 35. № 3. С. 232–240.
24. Калинин Н.А., Булгакова О.Ю. Проблемы среднесрочного прогнозирования температуры воздуха и их решение на региональном уровне / под общ. ред. Н.А. Калинина. Перм. ун-т. Пермь, 2005. 180 с.
25. Калинин Н.А., Ветров А.Л. Генерация доступной потенциальной энергии вследствие крупномасштабной конденсации в циклонах умеренных широт // Метеорология и гидрология. 2002. № 4. С. 17–27.
26. Калинин Н.А., Ветров А.Л. Индексы комфортности климата в Перми и городах-миллионниках Сибири за 1991–2020 гг. // Геосферные исследования. 2023. № 4. С. 132–142.
27. Калинин Н.А., Ветров А.Л., Пищальникова Е.В., Связов Е.М., Шихов А.Н. Оценка качества прогноза очень сильного снегопада на Урале с помощью модели WRF // Метеорология и гидрология. 2016. № 3. С. 55–62.
28. Калинин Н.А., Ермакова Л.Н., Аликина И.Я. Особенности формирования высокой температуры воздуха в сентябре–октябре 2003 г. на Среднем и Южном Урале // Метеорология и гидрология. 2005. № 5. С. 82–89.
29. Калинин Н.А., Заморин И.С., Толмачева Н.И. Метеорологические информационно-измерительные системы и комплексы: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2007. 334 с.

30. Калинин Н.А., Кислов А.В., Бабина Е.Д., Ветров А.Л. Оценка качества воспроизведения моделью MM5 температуры воздуха в июле на Урале // Метеорология и гидрология. 2010. № 10. С. 15–22.
31. Калинин Н.А., Лукин И.Л. Генерация доступной потенциальной энергии вследствие притока длинноволновой радиации в атмосфере // Метеорология и гидрология. 2014. № 3. С. 50–62.
32. Калинин Н.А., Связов Е.М. Трансформация и приток кинетической энергии в циклонах вследствие вихревой турбулентности // Метеорология и гидрология. 1999. № 12. С. 13–20.
33. Калинин Н.А., Связов Е.М. Трансформация кинетической энергии в циклонах умеренных широт / Перм. ун-т. Пермь, 2008. 116 с.
34. Калинин Н.А., Сивков Б.А. Численный прогноз летних осадков разной интенсивности с использованием модели WRF и индексов неустойчивости атмосферы // Географический вестник. 2022. № 3 (62). С. 92–108.
35. Калинин Н.А., Смирнова А.А. Исследование радиолокационных характеристик для распознавания опасных явлений погоды, связанных с кучево-дождевой облачностью // Метеорология и гидрология. 2005. № 1. С. 84–95.
36. Калинин Н.А., Смирнова А.А., Ветров А.Л. Географические информационные системы в метеорологии: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2007. 368 с.
37. Калинин Н.А., Толмачева Н.И. Радиометеорология: учеб. пособие / Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2002. 100 с.
38. Калинин Н.А., Толмачева Н.И. Космические методы исследований в метеорологии: учебник / Перм. ун-т. Пермь, 2005, 348 с.
39. Калинин Н.А., Толмачева Н.И. Дистанционное зондирование атмосферы: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь. 2007, 252 с.
40. Калинин Н.А., Толмачева Н.И. Информационные системы зондирования атмосферы: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2007, 382 с.
41. Калинин Н.А., Фрик Л.В., Смирнова А.А. Исследование влияния рельефа Пермского края на распределение полей осадков // Географический вестник. 2008. № 2 (8). С. 187–195.
42. Калинин Н.А., Шихов А.Н., Быков А.В., Поморцева А.А., Абдуллин Р.К., Ажигов И.О. Условия формирования и краткосрочный прогноз конвективных опасных явлений погоды в Уральском регионе в теплый период 2020 года // Оптика атмосферы и океана. 2021. Т. 34. № 1. С. 46–56.
43. Калинин Н.А., Шихов А.Н., Чернокульский А.В., Костарев С.В., Быков А.В. Условия возникновения сильных шквалов и смерчей, вызывающих крупные ветровалы в лесной зоне европейской части России и Урала // Метеорология и гидрология. 2021. № 2. С. 35–49.

44. Кислов А.В. Климатология с основами метеорологии. М.: Издательский дом МГУ, 2023. 255 с.
45. Клемин В.В., Кулешов Ю.В., Суворов С.С., Волконский Ю.Н. Динамика атмосферы. СПб.: Наука, 2013. 422 с.
46. Крючков А.Д., Калинин Н.А. Сравнение характеристик снежного покрова по данным метеорологических станций и реанализа ERA 5-Land на территории Пермского края // Гидрометеорологические исследования и прогнозы. 2021. № 2 (380). С. 95–110.
47. Крючков А.Д., Калинин Н.А., Сидоров И.А. Качество характеристик снежного покрова, полученных на основе реанализа ERA 5-Land для территории Пермского края // Лёд и снег. 2023. Т. 63. № 3. С. 383–396.
48. Куликов Г.И. Динамическая метеорология. Пермь, 1966. 274 с.
49. Лоренц Э.Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 260 с.
50. Лутфулин И.З. Новые методы предвычисления метеорологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1966. 262 с.
51. Матвеев Л.Т. Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 296 с.
52. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеиздат, 2000. 780 с.
53. Облака и облачная атмосфера: справочник / под ред. И.П. Мазина и А.Х. Хргиана. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
54. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 414 с.
55. Оке Т.Р. Климаты пограничного слоя. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 360 с.
56. Пальмен Э., Ньютон Ч. Циркуляционные системы атмосферы / пер. с англ. / под ред. С.П. Хромова. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 615 с.
57. Панин Б.Д., Подольская Э.Л., Неёлова Л.О. Влияние изменений коротковолновой радиации на эволюцию барических образований // Метеорология и гидрология. 1987. № 10. С. 105–108.
58. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика / пер. с англ. / под ред. В.М. Каменковича и А.С. Мони́на. М.: Мир, 1984. Т. 1. 400 с., Т. 2. 411 с.
59. Петтерсен С. Анализ и прогноз погоды / пер. с англ. / под ред. А.С. Зверева. Л.: Гидрометеиздат, 1961. 652 с.
60. Пищальникова Е.В., Калинин Н.А. Условия формирования и прогноз обильных снегопадов в Пермском крае / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. 168 с.
61. Подольская Э.Л. Механика жидкости и газа. Раздел «Геофизическая гидродинамика». СПб.: Изд-во РГГМУ, 2007. 154 с.

62. Приходько М.Г. Справочник инженера – синоптика. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 328 с.
63. Прох Л.З. Словарь ветров. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 312 с.
64. Пьянков С.В., Калинин Н.А., Свизов Е.М., Смирнова А.А., Некрасов И.Б. Мониторинг состояния сельскохозяйственных культур в Пермском крае по данным дистанционного зондирования Земли // Вестник Пермского университета. 2009. Вып. 10 (36). С. 147–153.
65. Российский гидрометеорологический энциклопедический словарь. Т. I, II, III / под ред. А.И. Бедрицкого. СПб.: Изд-во Летний сад, 2008–2009. 311 с., 308 с., 214 с.
66. Русин И.Н. Динамическая метеорология (ознакомительный курс). СПб.: Изд-во РГГМУ, 2008. 274 с.
67. Русин И.Н., Тараканов Г.Г. Сверхкраткосрочные прогнозы погоды. СПб.: Изд-во РГГМИ, 1996. 308 с.
68. Рыбакова Ж.В. Облака. Томск: Изд-во Томск. гос. пед. ун-та, 2008. 134 с.
69. Саранин В.А. Физика атмосферы и атмосферного электричества: краткий курс. Глазов: Изд-во ГГПИ, 1997. 76 с.
70. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
71. Семенченко Б.А. Физическая метеорология. М.: Аспект Пресс, 2002. 415 с.
72. Сергеева Е.С., Калинин Н.А., Пищальникова Е.В. О возможности применения карт метеорологических явлений НИЦ «Планета» для изучения и прогноза гроз на территории Урала // Вестник Удмуртского университета. Серия Биология. Науки о Земле. 2022. Т. 31. Вып. 1. С. 59–66.
73. Сивков С.И. Методы расчета характеристик солнечной радиации. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 232 с.
74. Смородин Б.Л., Калинин Н.А., Давыдов Д.В. Моделирование процесса изменения температуры капель при выпадении замерзающих осадков // Метеорология и гидрология. 2014, № 9. С. 34–40.
75. Снег: справочник / под ред. Д.М. Грея и Д.Х. Мейла; пер. с англ. под ред. В.М. Котлякова. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 752 с.
76. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. 259 с.
77. Тверской П.Н. Курс метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1962. 700 с.
78. Толмачева Н.И., Калинин Н.А. Аэрология: учебник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011. 336 с.
79. Турбулентность в свободной атмосфере / Н.К. Винниченко, Н.З. Пинус, С.М. Шметер, Г.Н. Шур. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 288 с.

80. Хабутдинов Ю.Г., Шанталинский К.М., Николаев А.А. Учение об атмосфере / Казан. гос. ун-т. Казань, 2010. 245 с.
81. Хргиан А.Х. Физика атмосферы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 328 с.
82. Хромов С.П., Мамонтова Л.И. Метеорологический словарь. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 568 с.
83. Хромов С.П., Петросянц М.А. Метеорология и климатология. М.: Изд-во Моск. ун-та; Изд-во КолосС, 2004. 582 с.
84. Чен Б.Б. Введение в теоретическую физику атмосферы (динамическая метеорология). Бишкек: Изд-во КРСУ, 2003. 103 с.
85. Шихов А.Н., Калинин Н.А., Быков А.В., Ажигов И.О., Шумихина А.В. Смерчи в условиях слабой конвективной неустойчивости атмосферы: анализ двух случаев на востоке европейской территории России // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2020. Т. 17. № 5. С. 255–268.
86. Шихов А.Н., Чернокульский А.В., Калинин Н.А., Пьянков С.В. Ветровалы в лесной зоне России и условия их возникновения / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2023. 284 с.
87. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1990. 624 с.

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

## К главе 1

1.1. 5,8 гПа/100 км, 31°.

1.2. 2,3 гПа/100 км, 120°.

1.3. 7'.

1.4. 31".

1.5.  $\frac{\partial p}{\partial x} = -0,4 \text{ гПа/100 км}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0,1 \text{ гПа/100 км}$ ,  $\nabla^2 p = -1,24 \cdot 10^{-4} \text{ гПа/км}^2$ .

1.6.  $\delta \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \leq 0,02 \text{ гПа/100 км}$ ,  $\delta \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) \leq 0,02 \text{ гПа/100 км}$ ,  $\delta (\nabla^2 p) \leq 0,032 \cdot 10^{-4} \text{ гПа/км}^2$ .

1.7.  $p(300, 0) = 993,4 \text{ гПа}$ ;  $p(600, 0) = 981,4 \text{ гПа}$ ;  $p(0, 300) = 995,5 \text{ гПа}$ ;  $p(300, 300) = 989,8 \text{ гПа}$ ;  $p(600, 300) = 978,7 \text{ гПа}$ ;  $p(0, 600) = 987,4 \text{ гПа}$ ;  $p(300, 600) = 982,6 \text{ гПа}$ ;  $p(600, 600) = 972,4 \text{ гПа}$ ;  $\nabla^2 p = -10^{-4} \text{ гПа/км}^2$ ; гребень антициклона.

1.8. 0;  $-4 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

1.9.  $D = -0,68 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega_z = 2,23 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

1.10.  $D = -1,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega_z = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

1.11.  $-1,2^\circ\text{C}$ .

1.12.  $1,6^\circ\text{C}$ .

1.13. 13 м/с.

1.14. 0,51 см.

1.15.  $1,46^\circ\text{C}$ .

1.16.  $0,58^\circ\text{C}$ .

1.17.  $131^\circ$ .

1.18. 2 ч.

1.19.  $0,64^\circ\text{C}$ .

1.20.  $-5,1^\circ\text{C}$ .

1.21.  $-4,4^\circ\text{C}$ .

## К главе 4

4.1.  $V_g = \frac{5,44}{\sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial n}$ ,  $V_g = \frac{2,72}{\sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial n}$ .

4.2.  $V_g = \frac{6,7}{\sin \varphi} \frac{\partial H}{\partial n}$ ,  $V_g = \frac{3,4}{\sin \varphi} \frac{\partial H}{\partial n}$ .

4.3. 17,2 м/с, юго-восточный ( $152^\circ$ ).

4.4. 5,2 м/с.

4.5. 9,8 м/с,  $51^\circ$ .

4.6.  $37^\circ$ .

4.7.  $59^\circ$ .

4.8.  $1,9 \text{ гПа}/100 \text{ км}$ ,  $143^\circ$ .

4.9.  $65^\circ$ ,  $1,6 \text{ гПа}/100 \text{ км}$ ,  $129^\circ$ .

4.10.  $1,7 \text{ см}$ .

$$4.11. \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a^g = -0,20 \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a^g = -0,05 \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

$$4.12. \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a^g = -0,24 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a^g = -0,06 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n_1} \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

4.13.  $-0,31^\circ\text{C}/\text{ч}$ .

4.14.  $-0,38^\circ\text{C}/\text{ч}$ .

4.15.  $\pm 0,58^\circ\text{C}/\text{ч}$ .

4.16.  $15^\circ$ .

4.17.  $4,8^\circ\text{C}$ .

4.18.  $24,3 \text{ м/с}$ .

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

**Единицы некоторых физических величин в различных системах**

Величины	Система единиц		
	Международная, СИ	Физическая, СГС	Промышленная, МТС
Длина $L$	Метр, $m$ ( $m$ )	Сантиметр, $см$ ( $см$ ), $1 см = 10^{-2} м$	Метр, $m$ , $1 м = 10^2 см$
Масса $M$	Килограмм, $кг$ ( $kg$ )	Грамм, $г$ ( $g$ ), $1 г = 10^{-3} кг$	Тонна, $т$ ( $t$ ), $1 т = 10^3 кг = 10^6 г$
Время $T$	Секунда, $с$ ( $s$ )	Секунда, $с$	Секунда, $с$
Сила (вес) $F$	Ньютон, $H$ ( $N$ ), $1 H = кг \cdot м \cdot с^{-2}$	Дина, $дин$ ( $дин$ ), $1 дин = г \cdot см \cdot с^{-2}$ $1 дин = 10^{-5} H$	Стен, $сн$ ( $сн$ ), $1 сн = т \cdot м \cdot с^{-2} = 10^3 H = 10^8 дин$
Давление $P$	Паскаль, $Па$ ( $Pa$ ), $1 Па = H \cdot м^{-2} = кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2} = 10 дин \cdot см^{-2} = 10 г \cdot см^{-1} \cdot с^{-2} = 10^{-2} мбар = 10^{-2} гПа$	$Дин \cdot см^{-2} = 0,1 Па = г \cdot см^{-1} \cdot с^{-2} = 10^{-1} H \cdot м^{-2} = 10^{-3} мбар = 10^{-3} гПа$	Сантибар, $сбар$ , $1 сбар = сн \cdot м^{-2} = т \cdot м^{-1} \cdot с^{-2} = 10^3 H \cdot м^{-2} = 10^{-2} бар = 10 мбар = 10 гПа$
Работа, энергия, количество теплоты $A$	Джоуль, $Дж$ ( $J$ ), $1 Дж = H \cdot м = кг \cdot м^2 \cdot с^{-2} = 10^7 эрг = 0,2388 кал$	Эрг, $эрг$ ( $erg$ ), $1 эрг = дин \cdot см = г \cdot см^2 \cdot с^{-2} = 10^{-7} Дж$	Килоджоуль, $кДж$ ( $kJ$ ), $1 кДж = сн \cdot м = т \cdot м^2 \cdot с^{-2} = 10^3 Дж = 10^{10} эрг$
Мощность, тепловой поток $N$	Ватт, $Вт$ ( $W$ ), $1 Вт = Дж \cdot с^{-1} = кг \cdot м^2 \cdot с^{-3}$	$1 эрг \cdot с^{-1} = г \cdot см^2 \cdot с^{-3} = 10^{-7} Вт$	Киловатт, $кВт$ ( $kW$ ), $1 кВт = кДж \cdot с^{-1} = т \cdot м^2 \cdot с^{-3} = 10^3 Вт = 10^{10} эрг \cdot с^{-1}$

Таблица 2

**Приставки для образования кратных и дольных единиц**

Приставка кратной единицы	Отношение к основной единице	Обозначение	Приставка кратной единицы	Отношение к основной единице	Обозначение
Тера	$10^{12}$	$T$ ( $T$ )	Деци	$10^{-1}$	$d$ ( $d$ )
Гига	$10^9$	$G$ ( $G$ )	Сант	$10^{-2}$	$c$ ( $c$ )
Мега	$10^6$	$M$ ( $M$ )	Милли	$10^{-3}$	$m$ ( $m$ )
Кило	$10^3$	$k$ ( $k$ )	Микро	$10^{-6}$	$μ$ ( $μ$ )
Гекто	$10^2$	$h$ ( $h$ )	Нано	$10^{-9}$	$n$ ( $n$ )
Дека	$10^1$	$da$ ( $da$ )	Пико	$10^{-12}$	$p$ ( $p$ )

## Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Численное значение
Нормальное ускорение свободного падения	9,81 м/с <sup>2</sup>
Постоянная Стефана – Больцмана	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Универсальная газовая постоянная	8,31 Дж/(моль · К)
Удельная газовая постоянная сухого воздуха	287 Дж/(кг · К)
Удельная газовая постоянная водяного пара	461,5 Дж/(кг · К)
Молярная масса сухого воздуха	28,97 кг/кмоль
Молярная масса водяного пара	18,02 кг/кмоль
Удельная теплоемкость воздуха при $p = \text{const}$	1005 Дж/(кг · К)
Удельная теплоемкость воздуха при $v = \text{const}$	718 Дж/(кг · К)
Удельная теплота парообразования (конденсации)	$(2501 \cdot 10^3 - 2,72 \cdot 10^3 \text{ т}) \text{ Дж}/\text{кг}$
Удельная теплота сублимации	$(2835 \cdot 10^3 - 1,51 \cdot 10^3 \text{ т}) \text{ Дж}/\text{кг}$
Нормальное давление $p_0$	1013 гПа = $1,013 \cdot 10^5 \text{ Н}/\text{м}^2$
Плотность воздуха при $t = 0^\circ\text{C}$ , $f = 0\%$ , $p = 1000 \text{ гПа}$	1,292 кг/м <sup>3</sup>
Плотность воды	$10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Солнечная постоянная	1376 Вт/м <sup>2</sup>
Угловая скорость вращения Земли	$7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$
Средний радиус Земли	6368 км

*Учебное издание*

**Калинин Николай Александрович**

**Динамическая метеорология. Практикум**

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стракаловская*  
Корректор *Н. И. Цветкова*  
Компьютерная верстка: *Н. А. Калинин*

---

Объем данных 1,62 Мб  
Подписано к использованию 09.07.2024

---

Размещено в открытом доступе  
на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)  
в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета  
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15