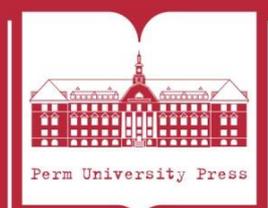


ПЕРМСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

М. А. Семин

КОМПЬЮТЕРНОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ



Пермь 2023

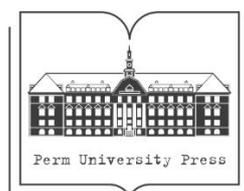
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М. А. Семин

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по направлению подготовки бакалавров  
«Механика и математическое моделирование»*



Пермь 2023

УДК 531/534: 519.6(075.8)  
ББК 22.253.3я73  
С306

**Семин М. А.**

С306 Компьютерное моделирование в гидрогазодинамике [Электронный ресурс]: учебное пособие / М. А. Семин, Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2023. – 2,96 Мб ; 88 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Semin-Kompyuternoe-modelirovanie-v-gidrogazodinamike.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4017-1

Учебное пособие содержит необходимые теоретические, методические и практические положения для проведения лекционных и семинарских занятий; организации самостоятельной работы студентов по дисциплинам, связанным с компьютерным моделированием течений жидких и газообразных сред. Особое внимание уделяется вопросам создания и дискретизации геометрии, описанию применяемых на сегодняшний день численных схем и алгоритмов численного решения гидрогазодинамических задач.

Издание предназначено для студентов высших учебных заведений всех форм обучения направления «Механика и математическое моделирование», а также будет полезно при изучении дисциплин по газовой динамике, механике сплошных сред, численных методах решения механических задач.

**УДК 531/534: 519.6(075.8)**  
**ББК 22.253.3я73**

*Издается по решению ученого совета механико-математического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* кафедра «Разработка месторождений полезных ископаемых»  
Пермского национального исследовательского политехнического  
университета (зав. кафедрой – д-р техн. наук, профессор **Ан-  
дрейко С. С.**);

директор Института безопасности труда, производства и человека  
Пермского национального исследовательского политехнического  
университета, Заслуженный работник высшей школы РФ,  
д-р техн. наук, профессор **Файнбург Г. З.**

ISBN 978-5-7944-4017-1

© ПГНИУ, 2023  
© Семин М. А., 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Понятие компьютерного моделирования.....	5
1.1. Терминология.....	5
1.2. Компьютерное моделирование и методология научных исследований.....	7
1.3. Адекватность моделей.....	9
1.4. Виды и иерархия моделей.....	11
1.5. Имитационные и суррогатные модели.....	13
1.6. Алгоритм компьютерного моделирования.....	14
1.7. Задания для самостоятельной работы.....	16
2. Построение компьютерной модели.....	17
2.1. Этапы построения компьютерной модели.....	17
2.2. Создание геометрии.....	18
2.3. Дискретизация геометрии.....	22
2.3.1. Структурированные сетки.....	25
2.3.2. Неструктурированные сетки.....	28
2.3.3. Типы элементов.....	33
2.3.4. Качество сетки и методы его улучшения.....	34
2.4. Численные схемы.....	38
2.4.1. Сеточные методы.....	40
2.4.2. Бессеточные методы.....	47
2.5. Задания для самостоятельной работы.....	54
3. Компьютерные модели в гидрогазодинамике.....	55
3.1. Fluent или CFX?.....	55
3.2. Типы решателей.....	56
3.3. Пространственная дискретизация. Метод конечных объемов.....	56
3.4. Временная дискретизация.....	60
3.5. Метод SIMPLE.....	61
3.6. Алгоритм PISO.....	62
3.7. Численные модели турбулентности.....	63
3.7.1. Метод крупных вихрей.....	65
3.7.2. Усреднение по Рейнольдсу.....	66
3.7.3. Теория пути перемешивания Прандтля.....	68
3.7.4. Двухпараметрические модели турбулентности.....	71
3.7.5. Модель турбулентности Transition SST.....	82
3.8. Задания для самостоятельной работы.....	84
Библиографический список.....	85

## ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день компьютерное моделирование представляет собой очень обширную область знаний, затрагивающую практически все естественнонаучные и многие гуманитарные дисциплины. Во многих ВУЗах страны читаются курсы, посвященные компьютерному моделированию. Одни курсы ориентированы на компьютерное моделирование в информатике, другие – в молекулярной и квантовой физике, третьи – в механике. Ввиду невозможности объять всю область компьютерного моделирования преподаватели концентрируют внимание на отдельных вопросах компьютерного моделирования, которые важны в рамках освоения той или иной специальности – механики, физики, информационных технологий и пр. В данном курсе, читаемом для студентов старших курсов механико-математических факультетов, обучающихся по направлению «Механика и математическое моделирование», рассматриваются особенности компьютерного моделирования гидрогазодинамических процессов, существующие подходы, методы и программные средства компьютерного моделирования. Учитывая, что курс ограничен по времени, в первую очередь изучаются вопросы, с которыми сталкиваются исследователи и инженеры, выполняющие разработку математических моделей и проведение расчетов на них в таких программных пакетах, как Ansys Fluent и CFX.

Несмотря на такую узкую направленность курса, в первой главе представлена общая информация о понятии компьютерного моделирования как отдельного метода научного познания, что в равной мере справедливо как для вычислительной гидрогазодинамики, так и для других областей вычислительной механики.

Вторая глава посвящена существующим подходам к построению геометрий, их дискретизации, что также характеризует общую методологию построения компьютерных моделей произвольных механических систем в рамках подхода сплошных сред. Однако в конце второй главы дана информация об особенностях численных схем и методов расчета в большей степени применительно к полям гидрогазодинамических параметров. Это связано с тем, что выбор численных схем и методов решения задачи уже существенно зависит от типа задачи и решаемых уравнений. И поскольку данный курс изначально ориентировался на решение гидрогазодинамических задач, то обсуждаются соответствующих схемы и методы численного расчета.

Третья глава содержит информацию о реализации численных схем и методов в таких программных пакетах как Ansys Fluent и CFX. Рассматриваются наиболее применяемые на сегодняшний день подходы, схемы и алгоритмы расчета задач, связанных с турбулентными потоками жидкости и газа. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы дать студентам общее представление о существующих программных пакетах, повысить их уровень понимания математики, лежащей в основе этих пакетов.

# 1. ПОНЯТИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## 1.1. Терминология

Компьютерное моделирование – достаточно молодой метод научного познания, который появился только в последние десятилетия наряду с развитием вычислительной техники. Прежде всего, необходимо дать определение этому методу, показать его место среди других методов научного познания, а также обсудить его отличия от других методов научного познания. Несмотря на то, что данный курс лекций более ориентирован на компьютерное моделирование в гидродинамике, в первой главе мы введем основные понятия, которые справедливы для моделирования любых физических процессов.

**Наука** – сфера человеческой деятельности, функцией которой является выработка новых знаний о мире, их систематизация и построение на этой основе образа мира и способов взаимодействия с ним.

**Научное познание** – это форма духовной человеческой деятельности, основная функция которой состоит в выработке новых знаний о мире, их систематизация и построение на этой основе образа мира и способов взаимодействия с ним.

Процесс научного познания включает в себя ряд взаимоорганизованных элементов: субъект, объект, знание как результат и метод исследования.

**Субъект познания** – это тот, кто его реализует, т.е. творческая личность (коллектив), формирующая новое знание.

**Объект познания** – это фрагмент реального мира, оказавшийся в фокусе внимания исследователя. Это та часть мира, с которой в той или другой форме взаимодействует субъект, или до чего он может и хочет «дотянуться».

Ученый, используя эмпирические методы познания (наблюдение и эксперимент), устанавливает факты, характеризующие объект. Элементарные факты обобщаются, на основании чего формулируются эмпирические законы. Следующий шаг состоит в развитии теории, объясняющей поведение объекта.

По М.О. Штейнхаузеру [1]:

**Теория** – логическая система общих принципов пониженной сложности по сравнению с реальным изучаемым объектом, которая помогает понять наблюдения.

Теория должна быть логичной и соответствовать фактам, установленным эмпирически. Теория позволяет перейти от рассуждений о фрагменте реального мира к рассуждениям о некоторой модели, заменяющей фрагмент реального мира.

По Р.В. Майеру [2]:

**Модель** – это материальный или идеальный объект, замещающий исследуемую систему и адекватным образом отображающий ее существенные стороны.

По М.О. Штейнхаузеру [1]:

**Модель**, по сути, является идеализированным представлением или примером, который дает ориентир для размышлений о реальном явлении.

**Математическая модель** служит точно той же цели: это описание экспериментально очерченного явления с помощью математики с целью уловить основные аспекты рассматриваемого явления.

Модель является более широким понятием, чем математическое описание наблюдений в функциональной форме, – она нацелена на более широкую общность, чем описание конкретного случая, но все же ограничивается скромным набором аналогичных ситуаций, в которых основные принципы не применяются или недоступны.

Модель объекта должна отражать его наиболее важные качества, пренебрегая второстепенными [2, 3]. Тут уместно вспомнить притчу о трех незрячих мудрецах, решивших узнать, что такое слон. Один мудрец подержал слона за хобот и заявил, что слон – гибкий шланг. Другой потрогал слона за ногу и решил, что слон – это колонна. Третий мудрец подергал за хвост и пришел к мнению, что слон – это веревка. Ясно, что все мудрецы ошиблись: ни один из названных объектов (шланг, колонна, веревка) не отражает существенных сторон изучаемого объекта (слон), поэтому их ответы (предлагаемые модели) не являются правильными.

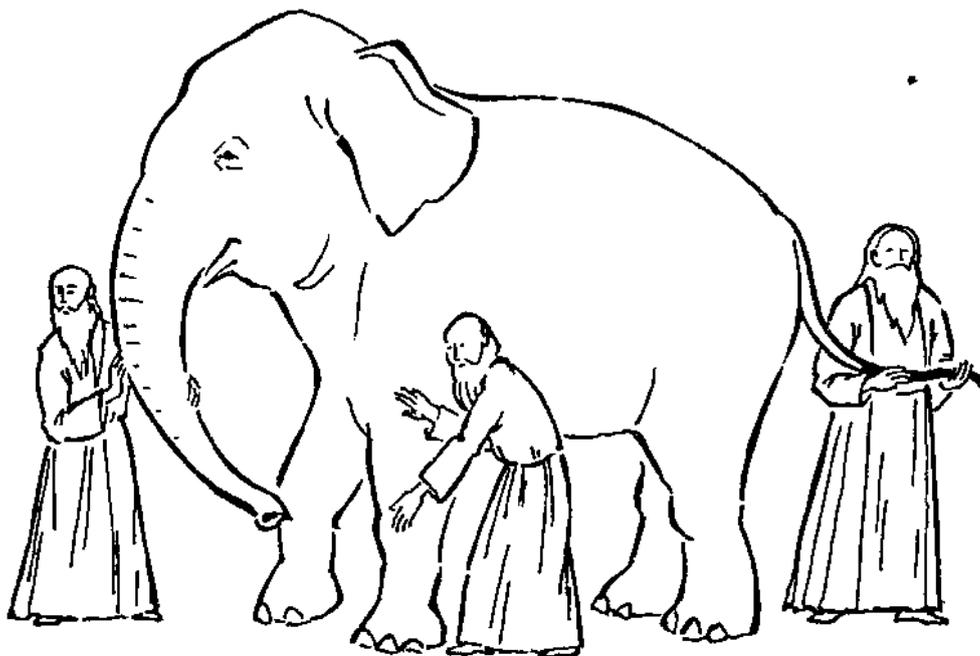


Рис. 1.1. Притча о трех незрячих мудрецах, решивших узнать, что такое слон

**Моделирование** – это метод познания, состоящий в создании и исследовании моделей реальных физических систем и процессов.

**Компьютерное моделирование** – это моделирование, выполняемое на компьютере и предназначенное для прогнозирования поведения реальной физической системы. Иногда в качестве синонима термина «компьютерное моделирование» используется термин «вычислительный эксперимент».

Компьютерное моделирование включает в себя две существенные части:

1. Моделирование.
2. Расчет на модели с помощью алгоритмов.

По М.О. Штейнхаузеру [1]:

**Алгоритм** – это конечная, детерминированная, эффективная пошаговая инструкция для решения задачи, во время которой некоторые входные данные передаются в некоторые выходные данные.

**Компьютерная модель** – это алгоритмы и уравнения, используемые для определения поведения моделируемой системы.

В противоположность компьютерному моделированию, будем выделять также **аналитическое моделирование**, в рамках которого используются не приближенные численные алгоритмы поиска решения, а точные аналитические методы решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений, образующих математическую модель.

## **1.2. Компьютерное моделирование и методология научных исследований**

«Мы буквально находимся на важном этапе истории. Третья ветвь научного метода, компьютерное моделирование, становится повседневным инструментом. Моделирование занимает свое место рядом с экспериментальными разработками и математической теорией как путь к новым открытиям в науке и технике», – это было частью речи Джона Роллвагена, председателя и генерального директора Cray Research, на открытии конференции Supercomputing 89. Данная цитата дает понимание места компьютерного моделирования в общей методологии научного исследования (см. рис. 1.2).

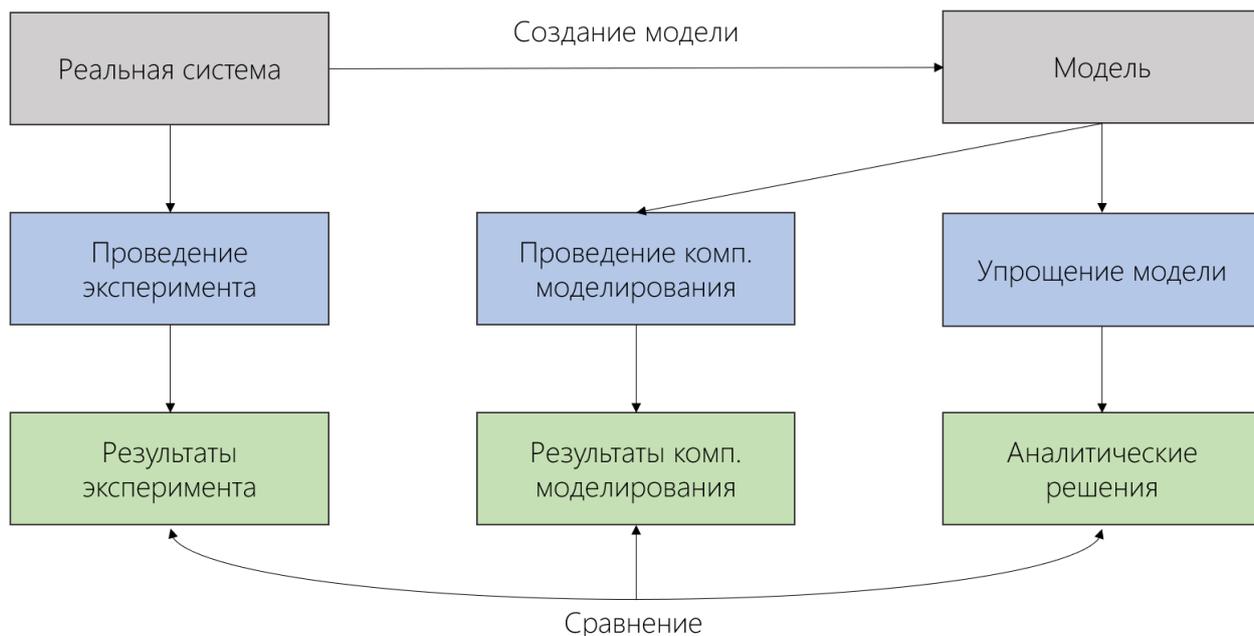


Рис. 1.2. Место компьютерного моделирования в общей методологии научного исследования

Компьютерное моделирование занимает промежуточное место между экспериментом, проводимым над реальной физической системой, и исследованием аналитических решений математической модели, поставленной в соответствие изучаемой реальной физической системе. Компьютерное моделирование является промежуточным вариантом между натурным экспериментом и аналитическим моделированием по ряду критериев: время проведения исследования, стоимость проведения исследования, точность результата, удобство анализа результатов и возможность обобщения знаний о системе в целом.

Преимущества компьютерного моделирования над натурным экспериментом следующие:

- 1) скорость,
- 2) дешевизна,
- 3) безопасность,
- 4) масштабируемость,
- 5) удобство анализа полученных результатов,
- 6) возможность обобщения знаний о системе в целом.

Недостатком компьютерного моделирования в отличие от эксперимента является погрешность при условии, что натурный эксперимент проведен по обоснованной методике с использованием достаточно высокоточного оборудования. Существует несколько видов погрешностей:

1. погрешность модели (ошибка входных данных, ошибка вследствие идеализации модели);

2. погрешность вычислений алгоритма (ошибка дискретизации, ошибка сходимости);

3. погрешность ЭВМ (ошибка округления, ошибка арифметических действий над приближенными числами).

Практически такие же преимущества и недостатки имеет аналитическое моделирование по сравнению с компьютерным моделированием. Единственным исключением являются безопасность и масштабируемость – они свойственны обоим подходам к моделированию.

Еще одним преимуществом компьютерного моделирования как над натурным экспериментом, так и над аналитическим моделированием является его гибкость, т.е. проводя компьютерное моделирование, мы вправе сами задаваться желаемой степенью точности компьютерной модели и тем самым менять трудозатраты (время и стоимость) на проведение расчетов. При этом нет возможности так же гибко менять реальный физический объект или явление при проведении натурального эксперимента. Также часто нет возможности произвольно менять модель, используемую для проведения аналитического моделирования, так как существование точных аналитических решений той или иной исследуемой математической задачи чаще всего возможно в довольно узком диапазоне принятых модельных допущений при анализе задачи.

### 1.3. Адекватность моделей

**Адекватность** модели предполагает воспроизведение моделью с необходимой полнотой всех характеристик объекта, существенных для цели моделирования. Цели моделирования при этом могут быть совершенно различны. Можно выделить, как минимум, три вида целей:

1. Изучение определенных свойств объекта или процесса (кинематические параметры, напряженно-деформированное состояние, температурные свойства, электромагнетизм и пр.).

2. Прогнозирование эволюции объекта или процесса в будущем при заданных особых физических или технических условиях.

3. Оптимизация объекта или процесса по заданным критериям.

Адекватность модели не означает воспроизведения ею всех тонкостей и особенностей реального изучаемого объекта. Это чаще всего невозможно (или очень трудоемко) и лишено смысла. Достаточно, чтобы модель воспроизводила только те физические процессы, которые нам интересны, с такой точностью, которой нам достаточно. По терминологии М.О. Штейнхаузера [1], такие модели называ-

ются «хорошими». В отличие от плохих моделей хорошие модели удовлетворяют таким критериям, как согласованность, эффективность и соответствие как можно меньшему количеству параметров.

Если наблюдателю доступна только одна модель, вопрос о ее адекватности объекту принимается на основе следующих фундаментальных научных положений:

1) непротиворечивость: невозможна одновременная истинность высказывания (А) и противоречащего ему высказывания (не А);

2) закон достаточного основания: «...ни одно явление не может оказаться истинным или действительным, ни одно утверждение справедливым, без достаточного основания, почему дело обстоит именно так, а не иначе...» (Г.В. Лейбниц);

3) законы сохранения массы, импульса, энергии, заряда и пр.;

4) свойство симметрии: если какое-либо состояние или процесс встречаются в природе, то для него существует обращенное во времени состояние или процесс, который также может реализоваться в природе.;

5) принцип бритвы Оккама: «Не плоды рассуждений больше сущности»;

б) принцип соответствия: если корректно уточнить адекватную модель или область действия адекватной модели, то в результате получится адекватная модель (впервые отчетливо сформулирован датским физиком Н. Бором).

Однако данных научных положений еще недостаточно, чтобы сделать окончательный вывод об адекватности модели. Модель, удовлетворяющая всем шести свойствам, будет согласованной и, вероятно, эффективной. Тем не менее этого по-прежнему может быть недостаточно для достижения цели, особенно если требуется количественное совпадение параметров модели и соответствующего ему реального объекта. Как правило, количественная оценка адекватности компьютерной модели достигается за счет ее верификации и валидации.

**Верификация** – процесс установления соответствия между численной моделью и математической моделью. Таким образом, задача верификации – убедиться в том, что на этапе построения и выполнения численной процедуры поиска решения не было допущено ошибок.

**Валидация** – процесс определения степени соответствия модели реальному физическому объекту в рамках области планируемого использования данной модели. Задача валидации – убедиться в том, что при постановке математической модели не было допущено ошибок.

В рамках каждой из указанных двух процедур необходимо задаваться какими-либо количественными критериями, из которых наиболее широко распространены:

1) средняя относительная ошибка (отклонение),

2) максимальная относительная ошибка (отклонение),

- 3) средняя квадратичная ошибка,
- 4) «коэффициент несовпадения» Тейла [4].

Популярным способом успешной валидации модели (после того, как она была верифицирована) является калибровка (или настройка) параметров модели. Смысл этой процедуры заключается в таком подборе параметров модели, при котором достигается наилучшее соответствие между данными модели и натурального эксперимента по выбранному количественному критерию. При этом проведение процедуры калибровки недостаточно для валидации модели.

Одним из важных свойств хороших моделей является содержание в них как можно меньшего количества параметров. Это связано с тем, что зачастую при параметризации различных изучаемых объектов невозможно выполнить измерения некоторых его свойств. К примеру, нельзя заглянуть внутрь планет или звезд. В результате некоторые параметры моделей вынужденно берутся эвристически или на основании других, схожих объектов. В этом случае всегда есть риск возникновения артефактов численного счета – явлений, проявляющихся в компьютерных моделях, но отсутствующих у реальных физических объектов.

#### **1.4. Виды и иерархия моделей**

Математические модели (а вслед за ними и компьютерные модели) можно классифицировать по нескольким независимым парам атрибутов, включая:

- 1) непрерывные (континуальные) или дискретные,
- 2) стохастические или детерминированные (и, как частный случай, детерминированные, хаотические),
- 3) стационарные или динамические,
- 4) линейные или нелинейные,
- 5) дедуктивные или индуктивные.

Также модели можно классифицировать по их пространственной размерности: нульмерные, одномерные, двухмерные, трехмерные и пр.

Для компьютерных моделей, как объектов более сложных по сравнению с математическими моделями, существуют дополнительные классификации:

- 1) по способу дискретизации домена: сеточные и бессеточные;
- 2) по среде разработки и представлению данных в коде: функциональная, объектная, логическая;
- 3) по распределению вычислений: алгоритмизованные последовательно и параллельно.

Очень важной является (эволюционная) классификация моделей в процессе моделирования. Процесс моделирования можно представить как переход от од-

них моделей к другим, учитывая, что каждая из моделей в этой последовательности переходов будет описывать один и тот же исследуемый объект. Существует множество классификаций моделей. Условно выделяют три больших класса моделей:

- 1) когнитивные,
- 2) содержательные,
- 3) формальные.

При наблюдении за объектом-оригиналом у исследователя формируется некий мысленный образ объекта, его идеальная модель, которую в научной литературе принято называть **КОГНИТИВНОЙ** (мысленной, способствующей познанию). Формируя такую модель, исследователь, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы, поэтому от бесконечно сложного устройства объекта отсекается все ненужное с целью получения его более компактного и лаконичного описания. Представление когнитивной модели на естественном языке называется **содержательной моделью**.

**Концептуальной моделью** принято называть содержательную модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знания, занимающихся изучением объекта моделирования [5].

Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.

Логико-семантическая модель является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением знаний, накопленных в соответствующих предметных областях.

При построении структурно-функциональной модели объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы или подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Для представления подобных моделей удобны различного рода схемы, карты и диаграммы.

Причинно-следственная модель часто используется для объяснения и прогнозирования поведения объекта. Данные модели ориентированы в основном на следующее:

- 1) выявление главных взаимосвязей между составными элементами изучаемого объекта;
- 2) определение того, как изменение одних факторов влияет на состояние компонентов модели;

3) понимание того, как в целом будет функционировать модель и будет ли она адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров.

**Формальная модель** является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий, специальных языков моделирования или алгоритмических языков). В гуманитарных науках процесс моделирования во многих случаях заканчивается созданием концептуальной модели объекта. В естественно-научных дисциплинах, как правило, удается построить формальную модель [5].

### 1.5. Имитационные и суррогатные модели

В настоящее время в учебной и научной литературе часто можно встретить такие понятия, как имитационное и суррогатное моделирование. Термин «имитационное моделирование» трактуется различными авторами по-разному. Иногда под имитационным моделированием понимается полный аналог обычного компьютерного моделирования [6]. Иногда имитационное моделирование рассматривают как моделирование с применением вероятностного подхода (например, при применении метода Монте-Карло в физике элементарных частиц). Иногда – как дискретно-событийное моделирование, где основной упор делается на взаимосвязь различных элементов исследуемых систем и правил их взаимодействия на качественном уровне, последовательность изменения системы в различные фиксированные моменты времени [7].

В данном курсе термин имитационная модель будет использоваться как синоним к термину компьютерная модель.

Предположим, мы создали очень детальную имитационную модель некоторого изучаемого физического процесса. Проведение расчетов на такой модели занимает большое количество времени, в то время как нам нужно произвести большую серию расчетов на данной имитационной модели в достаточно сжатые временные сроки. Обычно такая большая серия расчетов, при которой пошагово меняются один или несколько входных параметров системы, называется **многопараметрическим моделированием**.

Одним из решений указанной проблемы является использование так называемого суррогатного моделирования. **Идея суррогатного моделирования** заключается в замене исходной сложной модели изучаемого процесса на суррогатную модель [8].

**Суррогатная модель** – модель машинного обучения, позволяющая с достаточной точностью воспроизвести поведение исходной физической или математической модели.

Один «прогон» обученной суррогатной модели требует гораздо меньше времени и вычислительных ресурсов, чем проведение расчета на исходной математической модели или проведение эксперимента на физической модели. Экономия трудозатрат достигается в том случае, если для обучения суррогатной модели требуется провести существенно меньше расчетов на исходной модели, чем при проведении итогового многопараметрического моделирования. На рис. 1.3 представлена схема проведения исследования с использованием суррогатной модели. Здесь  $X_i$  – некоторые входные параметры задачи, характеризующие изучаемый процесс (например, геометрические размеры, начальные и граничные условия), а  $Y_i$  – выходные параметры моделирования (распределения скоростей, давлений, деформаций и пр.),  $f$  – оператор, задающий решаемую полную систему математических уравнений.

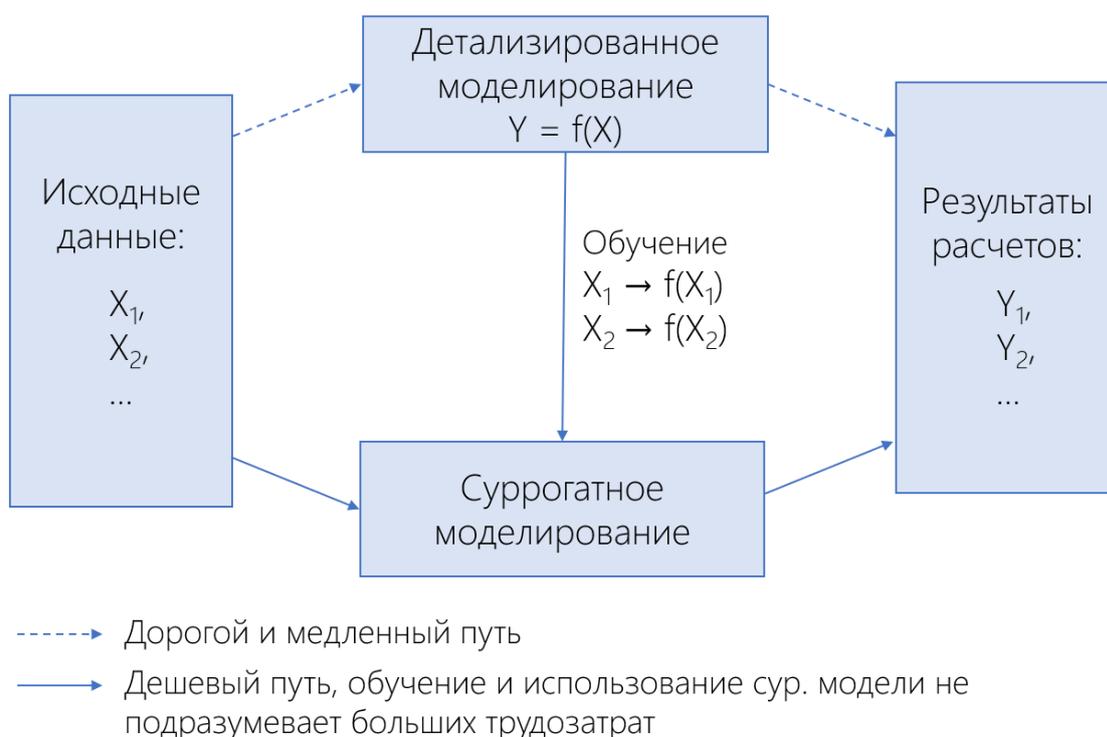


Рис. 1.3. Схема проведения исследования с использованием суррогатной модели

Таким образом, **суррогатное моделирование** – это вид моделирования, когда исходная физическая модель подменяется на суррогатную модель, обученную для достаточно точной аппроксимации результатов моделирования.

### 1.6. Алгоритм компьютерного моделирования

На рис. 1.4 представлены основные этапы проведения компьютерного моделирования.

Первым этапом является выбор цели моделирования. Цель может возникнуть как заранее (априори) исходя из потребностей решения производственных

задач, так и в процессе когнитивной и содержательной постановок задачи, например, если исследователю станет не ясен тот или иной аспект изучаемого им объекта.

Далее исходя из поставленной цели следует определить, насколько сильно мы можем огрубить нашу модель на этапе концептуальной постановки задачи – какие свойства реального объекта необходимо отбросить, полагая их несущественными. Огрубление модели лучше всего выполнять именно на этапе концептуальной постановки задачи, поскольку заключения о значимости тех или иных физических процессов, а также использование тех или иных гипотез возможно сделать только в привязке к конкретным техническим (или научным) терминам, характеризующим объект исследования.

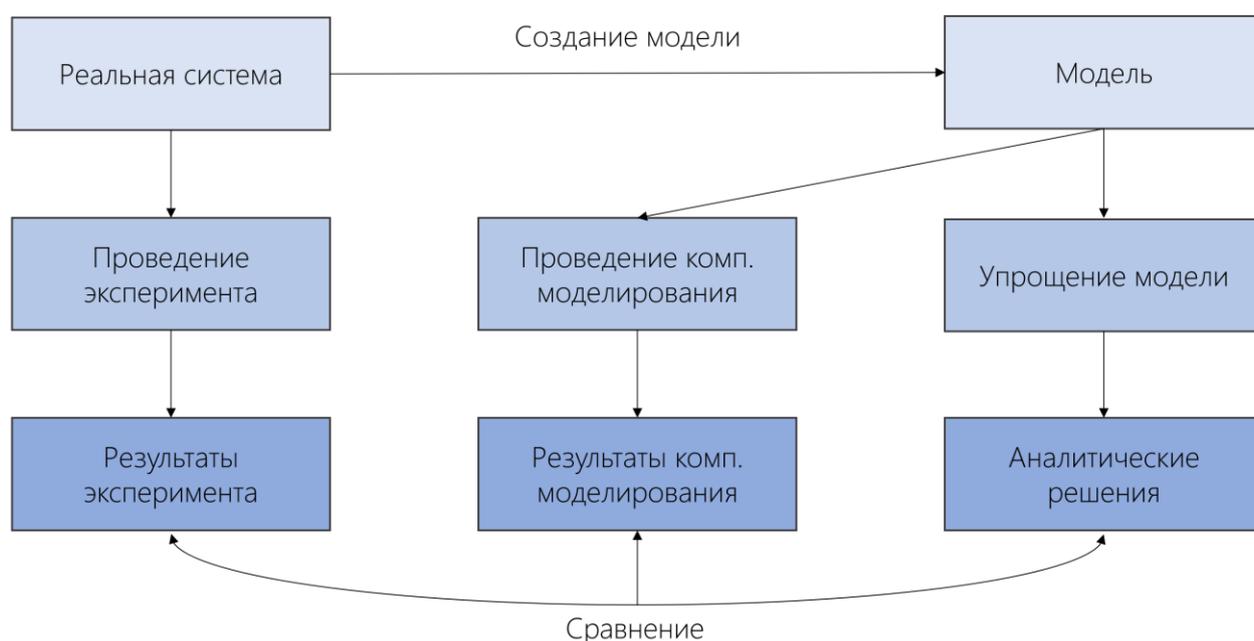


Рис. 1.4. Блок-схема алгоритма компьютерного моделирования

После того, как модель огрублена, на следующем этапе осуществляется формализация модели, формулируется математическая модель – система уравнений с начальными и граничными условиями (если последние нужны).

Далее выбирается численный метод, пригодный для получения надежного, устойчивого решения задачи в рамках выбранной математической модели. Производятся алгоритмизация и программирование метода. После того, как метод, реализующий математическую модель, запрограммирован, появляется возможность запуска вычислительного эксперимента (блок «компьютерное моделирование»).

Результат компьютерного моделирования сравнивается как с результатами аналитического моделирования на исходной модели в каких-либо простых ситуациях (верификация численного алгоритма), так и с данными натурных измерений (валидация). Если результат расчетов достаточно хорошо согласуется с ре-

зультатами натуральных измерений и оценками на аналитической модели на интересующем нас диапазоне изменения входных параметров задачи, делается вывод об адекватности компьютерной модели. Такие результаты нас устраивают, а модель может быть далее применена для решения тех или иных задач, для которых она разрабатывалась.

Если результаты расчетов не согласуются с результатами натуральных измерений или оценками на аналитической модели, необходимо провести уточнение модели. Уточнение может быть выполнено как с помощью калибровки параметров модели, так и посредством изменения основополагающих гипотез, использованных при создании модели (учет новых физических процессов, ранее отброшенных по причине их предполагаемого слабого влияния на результат, и пр.). После уточнения модели необходимо повторить последовательность блоков от формализации до компьютерного моделирования. Это продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто соответствие между данными численного моделирования, результатами натуральных измерений и оценками на аналитической модели.

### **1.7. Задания для самостоятельной работы**

А. Постройте модель математического маятника заданной длины  $L$ , с помощью которой можно будет определить ускорение свободного падения на планете в месте установки этого маятника.

Б. Постройте модель математического маятника заданной длины  $L$ , с помощью которой можно будет определить минимальную толщину нити, при которой она не будет обрываться в результате совершения маятником малых колебаний.

В. Постройте модель математического маятника заданной длины  $L$ , с помощью которой можно будет определить минимальную толщину нити, при которой она не будет обрываться в результате совершения маятником колебаний в диапазоне углов отклонения  $[-15^\circ; +15^\circ]$ .

Г. Создайте компьютерную модель математического маятника (груз на нити) в любой удобной для вас среде программирования. Рассчитайте временную зависимость изменения угла отклонения маятника с использованием линейной и нелинейной моделей математического маятника. Определите такой начальный угол отклонения нити, при котором появляются значимые отклонения в положении груза, подвешенного на нити в рамках линейной и нелинейной постановок.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ

### 2.1. Этапы построения компьютерной модели

Как правило, выделяется три этапа построения компьютерной модели:

1. Создание геометрии.
2. Дискретизация геометрии.
3. Создание численного алгоритма.

Эта классификация не рассматривает саму процедуру выполнения расчетов на модели и анализа полученных данных моделирования. Далее в этой главе будет подробно рассказано о каждом из этих трех этапов.

Вообще говоря, этапы 2 и 3 не всегда могут быть нужны для построения компьютерной модели. Например, если ставится задача проектирования изделий и оформления технической документации при помощи персонального компьютера без проведения каких-либо расчетов прочности деталей или протекания иных физических процессов в них, то этапа 1 будет вполне достаточно. Системы, которые предназначены для решения этапа 1, называются САД-системами.

Под **САД-системами** (computer-aided design – компьютерная поддержка проектирования) понимают программное обеспечение, которое автоматизирует труд инженера-конструктора и позволяет решать задачи проектирования изделий и оформления технической документации при помощи персонального компьютера. При этом САД не подразумевает проведение какого-то физического моделирования на построенной геометрии.

Помимо САД-систем выделяются также и более общие, САЕ-системы, подразумевающие решение не только этапа 1, но и этапов 2-3.

**САЕ-системы** (англ. Computer-aided engineering) – общее название для программ и программных пакетов, предназначенных для решения различных инженерных задач: расчётов, анализа и симуляции физических процессов. Расчётная часть пакетов чаще всего основана на численных методах решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В русском языке есть термин САПР (или Система автоматизированного проектирования), который подразумевает всё вместе: САД, САЕ, САМ и PDM.

**Система автоматизированного проектирования** – автоматизированная система, реализующая информационную технологию выполнения функций проектирования [9], представляет собой организационно-техническую систему, предназначенную для автоматизации процесса проектирования, состоящую из персонала и комплекса технических, программных и других средств автоматизации его деятельности.

**САМ-системы** (computer-aided manufacturing – компьютерная поддержка изготовления) автоматизируют расчеты траекторий перемещения инструмента для обработки на станках с ЧПУ и обеспечивают выдачу управляющих программ с помощью компьютера.

**PDM-система** (англ. Product Data Management – система управления данными об изделии) – это организационно-техническая система, обеспечивающая управление всей информацией об изделии.

**PLM-система** (англ. product lifecycle management) – это прикладное программное обеспечение для управления жизненным циклом продукции. Технологии PLM объединяют методики и средства информационной поддержки изделий на протяжении всех этапов их жизненного цикла.

Примеры программных пакетов каждого вида представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

### Программные пакеты

CAD	CAE	PDM
Компас	ANSYS	Brandifyer
AutoCAD	SolidWorks	Aqua Pro
BricsCAD	Abaqus	Plytix PIM
DraftSight	Nastran	SolidWorks Enterprise PDM
SketchUp	Star CCM+	Dozuki Electronic Work Instructions
	FlowVision	

## 2.2. Создание геометрии

Первым этапом построения компьютерной модели является построение соответствующей геометрической модели, задание расчетного домена. В настоящее время существует целый ряд инженерных программ, предназначенных для создания геометрических моделей (AutoCAD, Компас и пр.). Все они могут быть классифицированы на две большие группы в зависимости от используемого в них подхода к созданию и изменению геометрии.

**Параметрическое моделирование (параметризация)** – геометрическое моделирование изделия с использованием параметров элементов формы и соотношений между этими параметрами.

В параметрических геометрических моделях размеры и положение каждого элемента могут быть изменены, что позволяет быстро получать по существующей модели изделия его модификации. Различают два основных вида параметрического проектирования – на базе предыстории и вариационное проектирование.

CAD-системы и модули с возможностями параметрического моделирования: Компас, AutoCAD, Ansys Design modeler и др.

Недостатки параметрического моделирования [10]:

- сложность и непрозрачность для пользователя. Чтобы изменить геометрическую форму, требуется найти в дереве построения нужный конструктивный элемент и понять, значение какого параметра необходимо изменить;

- длительность истории построения у сложных геометрических моделей;

- сложности в изменении параметров модели. Принятие решений о том, какие параметры модели можно менять, происходит в процессе ее создания. Если потребуется поменять какой-то параметр, который отсутствует в дереве построения, то решение будет непростым – либо перестроить модель с нуля, либо применять сложные оптимизационные алгоритмы, которые путем варьирования значений определяющих параметров пытаются подобрать желаемое значение требуемого параметра;

- процедурный подход к построению модели. Все параметры модели подразделяются на входные и выходные. Изменять можно только значения входных параметров, а значения выходных рассчитываются в соответствии с predetermined процедурами, формулами, историей построения и т. п.;

- трудности в работе с разнородными и унаследованными данными. Проектировщики часто работают в контакте со смежными специалистами, предоставляющими данные для моделей в ином формате. При трансляции модели из одного формата в другой история построения обычно теряется, исчезают параметрические связи между ее элементами.

**Прямое (явное) моделирование** – геометрическое моделирование изделия, которое состоит в непосредственном манипулировании ее граничными элементами на конечно-пользовательском уровне. Прямое моделирование не подразумевает сохранения истории модификаций. Любое последующее действие при моделировании выполняется на текущем состоянии модели, а то, откуда взялась та или иная геометрия, не играет никакой роли.

Основные операции прямого моделирования – создание замкнутого плоского профиля, его вытягивание (англ. push/pull) для добавления/вычитания объема, а также непосредственное перемещение граней, ребер и вершин (прямое редактирование) с сохранением связности смежных элементов. Прямое моделирование является альтернативой параметрическому.

CAD-системы и модули с возможностями прямого моделирования: BricsCAD, CoCreate, KeyCreator, SpaceClaim, DesignSpark Mechanical и др.

Недостатки прямого моделирования:

– Сложность быстрого изменения заданных параметров исследуемого объекта. При прямом моделировании не хранится информация о значениях конкретных параметров геометрии, которые можно было бы легко изменять посредством ввода в текстовом поле. Для изменения геометрических параметров здесь требуется производить непосредственные манипуляции с геометрией тела, в результате чего это приводит к нежелательному изменению других параметров.

– Редактирование сложных NURBS-поверхностей, образованных различными гранями (плоские, цилиндрические, сферические, конические, торические).

Большинство современных пакетов основаны на параметрическом редактировании геометрии, т.е. опираются на историю построения модели. Системы, основанные на прямом моделировании, до недавнего времени проигрывали в популярности параметрическим. Однако в 2007 г. компания PTC объявила о своей сделке с CoCreate, и в апреле вышла первая версия абсолютно новой системы прямого моделирования SpaceClaim. Далее в рамках почти всех систем САД стали появляться модули прямого моделирования. На сегодняшний день можно говорить о том, что в среде производителей все более явно заметна тенденция использования САД-технологии прямого моделирования.

В данном курсе мы рассматриваем два САД-модуля – Ansys DesignModeler и Ansys SpaceClaim.

Ansys DesignModeler – функциональный аналог САД, который был неотъемлемой частью Ansys Workbench с момента его появления в середине 2000-х гг. Принцип работы с геометрией здесь такой же, как в большинстве САД-систем: древовидная иерархическая структура операций, последовательность которых косвенно отражает технологический процесс изготовления детали; работа с эскизами (скетчами), параметризация размеров, определение взаимосвязей и зависимостей; построение трехмерных объектов на базе эскизов и проведение с ними различных операций и т.п. Наличие Ansys DesignModeler в среде Ansys Workbench предоставляло пользователям ряд новых возможностей в численном моделировании (например, в процессах параметрических и оптимизационных расчетов).

В то же время основной причиной существования этого геометрического препроцессора была необходимость в инструменте, способном редактировать импортированную геометрию из САД-систем и создавать несложные детали для численного моделирования. Исходные САД-модели не всегда пригодны для расчетов. Для построения качественной сеточной модели в большинстве случаев необходимо доработать геометрию – подчистить, упростить, перестроить отдельные элементы и т.п. Ввиду описанного выше принципа последовательных

примитивных операций с геометрией работать с импортированной сторонней геометрией в Ansys DesignModeler не всегда удобно и быстро. Но, с другой стороны, этот рабочий процесс, который быстро осваивают инженеры и конструкторы, становится эффективным инструментом при работе с геометрией. Так, на стадии эскизного проектирования, когда необходимо промоделировать множество вариантов детали, Ansys DesignModeler перестраивает параметризованную геометрию очень быстро и гарантирует, что сетка, построенная на ней, будет отвечать всем требованиям качества.

На рис. 2.1 представлено рабочее окно программы Ansys DesignModeler.

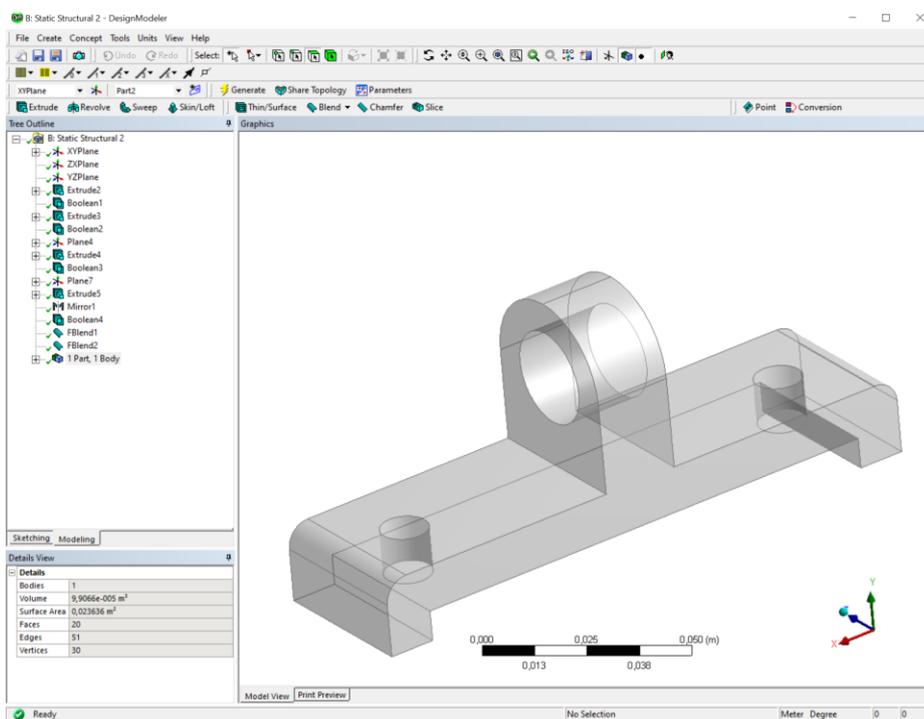


Рис. 2.1. Рабочее окно программы Ansys DesignModeler

Ansys SpaceClaim – функциональный аналог CAD, основанный на технологии прямого моделирования. Технология прямого моделирования SpaceClaim в первую очередь выражается через пользовательский интерфейс в четырех инструментах: вытягивание, перемещение, заливка и объединение:

– «Вытягивание» содержит большую часть функций по созданию тел, имеющих в традиционных системах САПР, выполняется посредством выделения пользователем интересующих граней и ребер, оперирования ими напрямую с помощью курсора мыши и дополнительных направляющих инструментов. Например, при использовании инструмента «Потянуть» на грани по умолчанию грань смещается по направлению движения курсора мыши, а при использовании инструмента «Потянуть» на кромке последняя скругляется.

– «Перемещение» позволяет сместить компоненты или геометрию в целом, а также может использоваться для создания массивов однотипных частей деталей.

– «Заливка» в первую очередь удаляет геометрию из детали, расширяя геометрию для заполнения окружающей области. Популярное использование включает удаление скруглений и отверстий из модели. SpaceClaim Engineer также включает более специализированные инструменты для подготовки моделей.

– «Объединение» выполняет логические операции и операции разделения. Эти функции были разработаны в ядре моделирования ACIS, лицензированном для SpaceClaim компанией Dassault Systemes.

На рис. 2.2 представлено рабочее окно программы Ansys SpaceClaim.

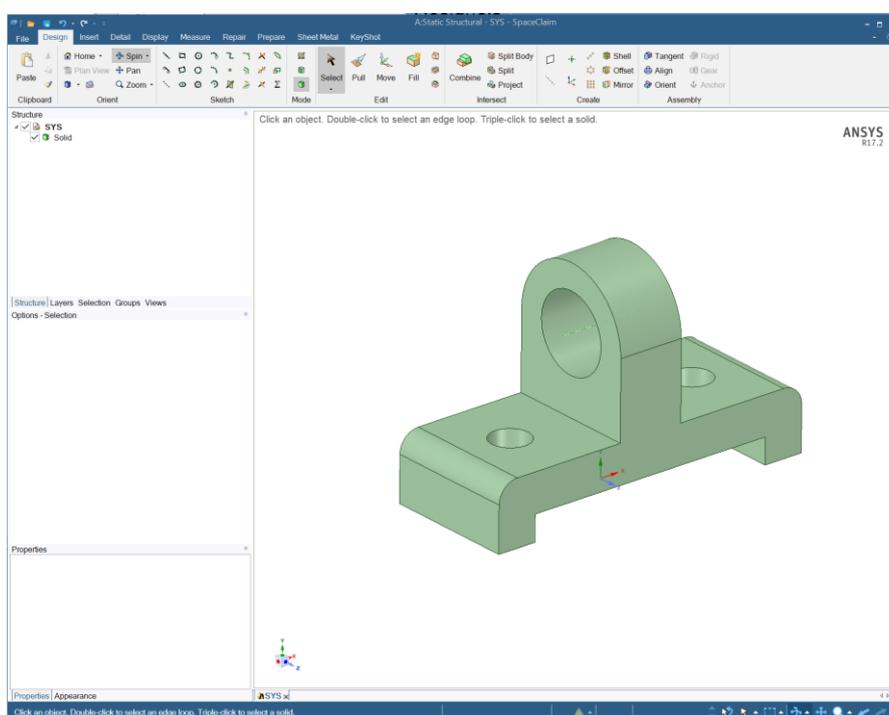


Рис. 2.2. Рабочее окно программы Ansys SpaceClaim

### 2.3. Дискретизация геометрии

Дискретизация геометрии заключается в разделении непрерывной геометрии исследуемого тела на конечное множество отдельных элементов (объемов, ячеек). Это конечное множество образует **расчетную сетку** (конечно-элементную, конечно-объемную или конечно-разностную в зависимости от того, какой численный метод будет использоваться).

Введем понятие конечно-разностной сетки. Пусть у нас есть отрезок  $x = [0, L]$ , на котором мы ищем решение некоторой системы уравнений.

Разобьём этот отрезок точками  $x_i = ih$  ( $i = 1, \dots, N; h > 0$ ) на  $N$  равных частей длины  $h = L/N$  [11]. Тогда множество точек

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, \dots, N\} \quad (2.1)$$

будет являться **конечно-разностной сеткой** на отрезке  $0 \leq x \leq L$ . Число  $h$  при этом будет называться шагом сетки (в общем случае оно может быть не постоянным). Очевидно, что данное определение конечно-разностной сетки легко обобщается на двумерный и трехмерный случаи.

В конечно-разностных сетках ключевым объектом является узел, поскольку именно в терминах узловых значений функций далее записываются дискретные формы решаемых дифференциальных уравнений. Иная ситуация обстоит с конечно-элементными (конечно-объемными) сетками. В них ключевыми объектами наряду с узлами являются элементы (или объемы), а также их грани. В элементах содержится дополнительная информация (функции формы, значения искомых переменных в центроидах элемента, ссылки на граничные элементы и пр.). В этом смысле **конечно-элементная (конечно-объемная) сетка** – это упорядоченное множество элементов, покрывающих всю исследуемую расчетную область, а также упорядоченные множества граней, ребер и узлов, содержащие информацию о геометрических связях (принадлежности, смежности, соседства элементов и пр.).

Расчётная сетка нужна для двух целей. Первая – разбиение геометрий на меньшие части или элементы. По ним можно записать систему уравнений, описывающую решение задачи. Кроме того, сетка используется для отображения области решений физических задач. Необходимо помнить, что существует погрешность, связанная с дискретизацией геометрии и дискретизацией решения.

Существует большое количество методов создания расчетных сеток. Ниже приведена небольшая классификация существующих методов по упорядоченности их элементов:

- 1) структурированные (регулярные) сетки;
- 2) неструктурированные (нерегулярные) сетки.

**Структурированная (регулярная) сетка** – это такая расчетная сетка, множество элементов которой является упорядоченным. Выделяют декартовы, прямолинейные и криволинейные структурированные сетки (см. рис. 2.3).

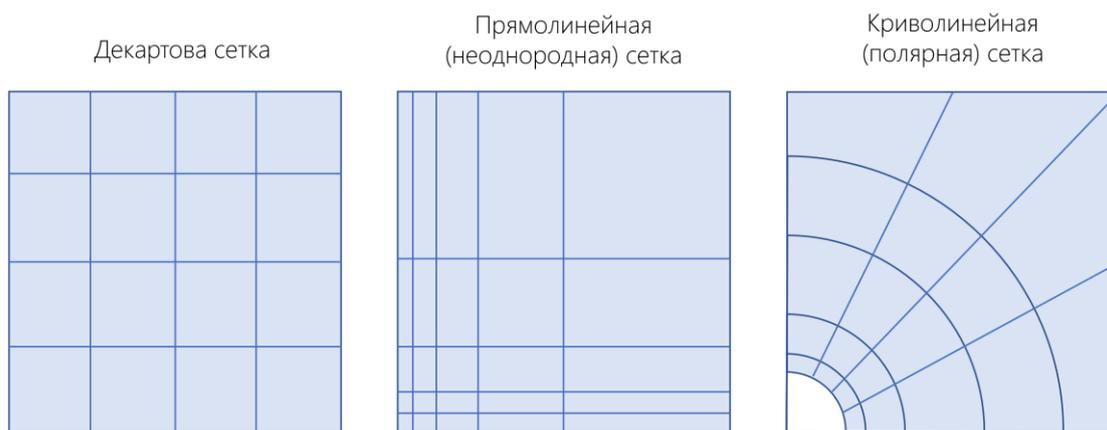


Рис. 2.3. Виды структурированных сеток

**Неструктурированная сетка** – это такая расчетная сетка, которая состоит из элементов простых форм, таких как треугольники или тетраэдры, покрывающие исходный объем произвольным образом, лишенным видимой структуры и порядка.

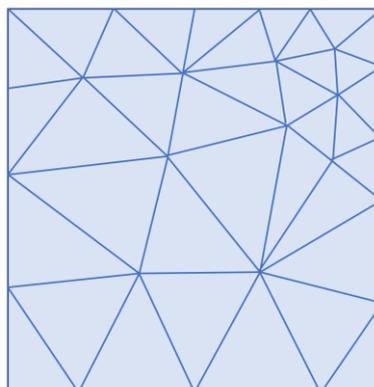


Рис. 2.4. Неструктурированная сетка

Суть отличия неструктурированной сетки от структурированной в том, что первую нелегко выразить как двумерный или трехмерный массив в памяти компьютера. По сравнению со структурированными сетками использование неструктурированной сетки может быть очень неэффективным, поскольку требует явного хранения отношений соседства. Эти сетки обычно используют треугольники в 2D и тетраэдрические в 3D.

Еще одна классификация сеток относится к характеру отличий между ее элементами (ячейками):

- 1) однородные сетки (все элементы имеют одинаковые размеры, форму);
- 2) неоднородные сетки (элементы имеют различные размеры, формы).

Поговорим о некоторых основных методах построения сеток. И прежде всего рассмотрим методы построения структурированных сеток, среди которых наиболее распространены трансфинитная интерполяция, конформные отображения, морфинг.

### 2.3.1. Структурированные сетки

Наиболее простым методом построения сетки является **алгебраический метод построения декартовой сетки**, который заключается в задании массива узлов, равноотстоящих друг от друга на некоторое заданное расстояние  $\Delta h$ . Данный метод имеет очень ограниченную область применения: только для тел в форме прямоугольников (2D) и параллелепипедов (3D).

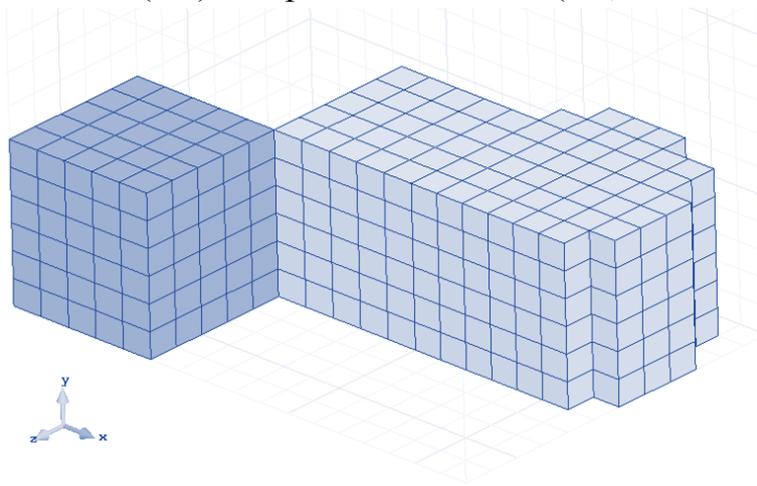


Рис. 2.5. Декартова сетка

Следующим по сложности методом является **трансфинитная интерполяция**, которая включает в себя следующие операции: взять в начальной системе координат  $OXY$  исследуемую физическую область  $ABCD$ ; найти такое преобразование системы координат  $OXY$  в новую систему координат  $O'\xi\eta$ , чтобы грани исследуемой области перешли в единичные отрезки, параллельные осям новой системы координат (см. рис. 2.6). Затем в новой системе координат в получившейся прямоугольной области построить алгебраическую декартову сетку. Если теперь эту декартову сетку преобразовать с помощью обратного преобразования из системы координат  $O'\xi\eta$  в систему координат  $OXY$ , то получится искомая сетка для области  $ABCD$ .

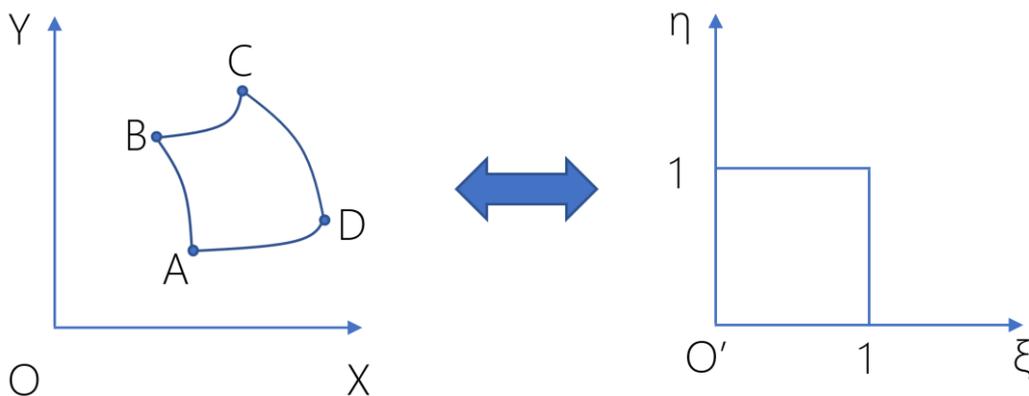


Рис. 2.6. Трансфинитная интерполяция для двухмерной области

Аналогичным образом осуществляется трансфинитная интерполяция для трехмерной области.

Схожим методом генерации структурированной криволинейной сетки является **метод конформных отображений**, который в свое время был широко распространен в гидрогазодинамике при моделировании обтекания лопаток. Важность конформного отображения в механике жидкости обусловлена хорошо известным свойством инвариантности уравнения Лапласа через конформное отображение. В то время как в теории двумерных течений несжимаемых сред в ламинарном режиме уравнение Лапласа является ключевым.

Наиболее известным примером конформного отображения является отображение Жуковского, открытое в 1910 г. (см. рис. 2.7):

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}, \quad (2.2)$$

где  $z$  и  $\zeta$  – комплексные числа.

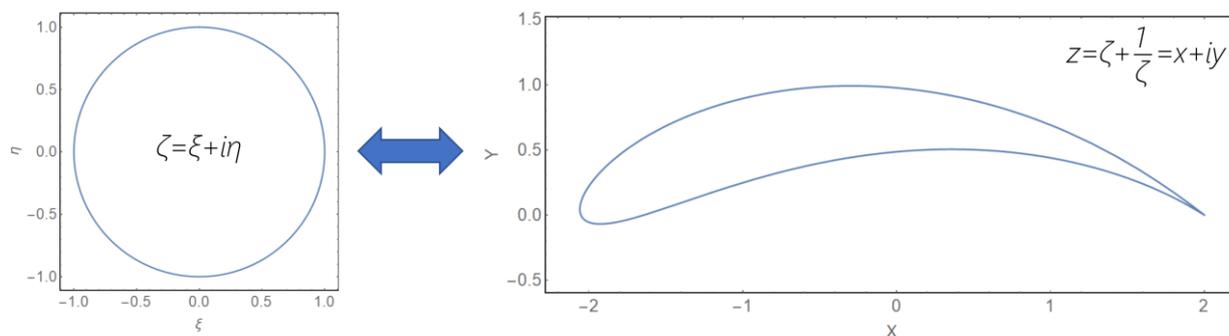


Рис. 2.7. Конформное отображение Жуковского

Используя круг в качестве основного контура на комплексной плоскости  $O\xi\eta$ , отображение Жуковского может генерировать двухпараметрическое семейство профилей с выступом и трехпараметрическое семейство гладких контуров, начиная от знакомых эллипсов до фигур в форме арахиса. Несмотря на свои плохие аэродинамические свойства профили Жуковского сыграли решающую роль в понимании механизма подъемной силы.

Метод конформных отображений отличается от трансфинитной интерполяции тем, что последняя основана на поиске преобразований, в первую очередь для боковых граней исследуемого тела, и оперирует в области действительных чисел. В то время как метод конформных отображений использует алгебру комплексных чисел и переводит единым взаимно-однозначным преобразованием всю плоскость  $O\xi\eta$  в плоскость  $Oxy$ .

**Морфинг** сетки заключается в адаптации регулярной вычислительной сетки путем задания смещений узлов исходной сетки по определенному критерию (например, проецирование на некоторую поверхность более сложной

формы). При этом топология сетки (количество узлов, количество ячеек, связность) остается неизменной. Обновляются только координаты  $x, y, z$  узлов той части модели, которая претерпевает изменение формы.

**Модификации структурированных сеток.** Структурированные сетки удобны с той точки зрения, что можно быстро и понятно производить их преобразования: растяжение, сжатие. Процедуры локальных растяжения и сжатия сетки могут быть осуществлены, если ввести еще одно промежуточное преобразование координат. Так, например, если нужно сгустить сетку вдоль некоторой координаты  $\xi$ , то можно ввести преобразование в координату  $s$  вида

$$s = P\xi + (1 - P) \left\{ 1 - \frac{\tanh[Q(1 - \xi)]}{\tanh[Q]} \right\}. \quad (2.3)$$

Это эффективная функция растяжения Робертса-Эйземана [12], предложенная Робертсом и модифицированная Эйземаном. В ней  $P$  и  $Q$  – параметры, обеспечивающие контроль распределения точек сетки.

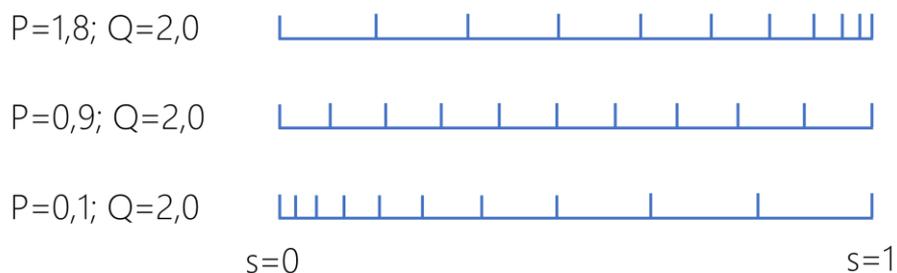


Рис. 2.8. Преобразование декартовой сетки растяжением Робертса-Эйземана с разными параметрами

Зачастую бывает необходимо контролировать отношение размеров соседних ячеек, а в этом случае эффективная функция растяжения Робертса-Эйземана не очень удобна. Более удобным является задание неоднородных регулярных сеток с использованием степенного закона с параметром  $r$ , характеризующим отношение размеров соседних ячеек:

$$h_i = h_1 \cdot r^i, \quad (2.4)$$

$$h_1 = \frac{L}{\sum_{i=1}^N r^i}, \quad (2.5)$$

где  $h_1$  – ширина первой ячейки,  $h_i$  – ширина ячейки №  $i$ ,  $L$  – ширина расчетного домена,  $N$  – количество ячеек.

### 2.3.2. Неструктурированные сетки

Наиболее популярным и распространенным методом построения неструктурированных сеток является триангуляция Делоне. Основным принципом данного метода является выработанный русским математиком Б.Н. Делоне критерий (или принцип) пустого круга.

*Неструктурированная сетка из треугольников (тетраэдров) удовлетворяет критерию Делоне, если окружность (сфера), описанная вокруг любого из треугольников (тетраэдров), не содержит внутри себя других узлов сетки кроме узлов, принадлежащих данному треугольнику (тетраэдру).*

Продемонстрируем это на визуальном примере. На рис. 2.9 представлено два возможных случая. В первом случае (слева) сетка удовлетворяет принципу пустого круга, а во втором (справа) не удовлетворяет, так как узел  $M_1$  попадает во вписанную окружность соседнего элемента.

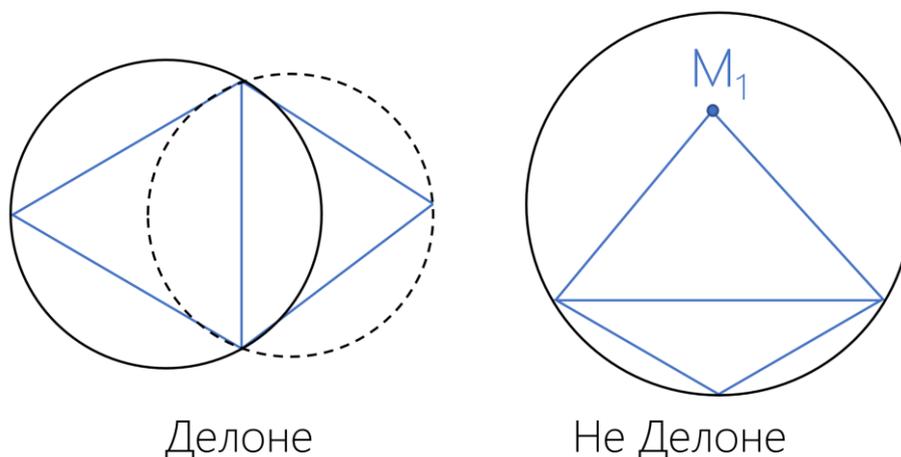


Рис. 2.9. Пример элементов, удовлетворяющих и не удовлетворяющих критерию Делоне

Построение неструктурированной сетки, состоящей только из треугольников, называют **триангуляцией**. В качестве начального шага строят сетку для границы области, затем точки на границе используются для построения начальной сетки внутри области, после чего данная сетка измельчается путём вставки новых точек и образования новых элементов (см. рис. 2.10).

Проверку сетки на соответствие критерию Делоне можно производить либо на каждом шаге такого алгоритма (при каждой вставке нового узла), либо же в конце. Триангуляцию Делоне можно получить из любой другой триангуляции по той же системе точек, последовательно перестраивая пары соседних треугольников, не удовлетворяющих условию Делоне, в новые пары треугольников посредством т.н. «переброски» ребра [13] (см. рис. 2.11). Данная процедура также называется процедурой локальной оптимизации (local optimization procedure - LOP).

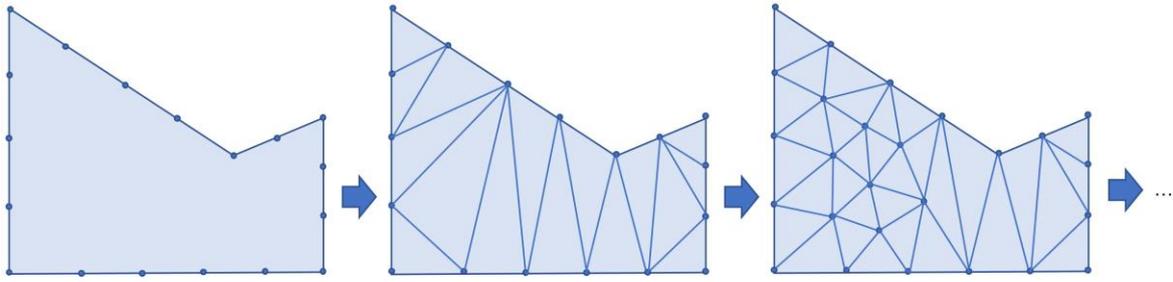


Рис. 2.10. Этапы построения сетки

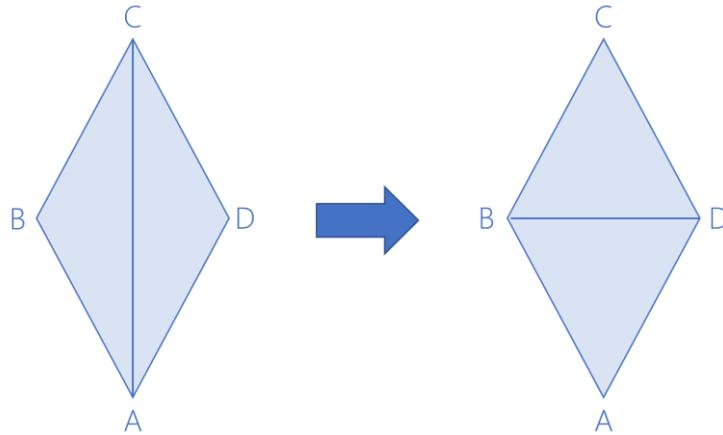


Рис. 2.11. Переброска ребер (процедура LOP)

Существует несколько алгоритмов добавления новых узлов к неструктурированной сетке в соответствии с критерием Делоне, наиболее известные из них: алгоритм Лоусона, алгоритм Бойера-Уотсона.

**Алгоритм поэтапной вставки Лоусона** был предложен Чарльзом Лоусоном в 1977 г. Алгоритм имеет простую идею и легко программируется. Он включает в себя несколько шагов, которые, на примере двумерной неструктурированной сетки, могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) найти треугольник, содержащий новый узел  $X$ ;
- 2) разделить этот треугольник на несколько треугольников, одной из вершин которых является новый узел  $X$ ;
- 3) рекурсивно проверить новые и прилегающие к ним треугольники на предмет выполнения критерия пустого круга. При необходимости применить процедуру LOP (см. рис. 2.12).

**Преимущества.** Простота алгоритмизации, а также локальный характер модификации сетки, при котором корректируются только заданный элемент  $X$  и его ближайшие соседи, что исключает необходимость обрабатывать все остальные узловы вершины и элементы.

**Недостатки.** В практических приложениях этот алгоритм построения сетки относительно медленный, особенно когда набор узловых точек большой. Если

сетка является невыпуклой областью или имеется внутреннее кольцо, то есть вероятность генерации недопустимого треугольника.

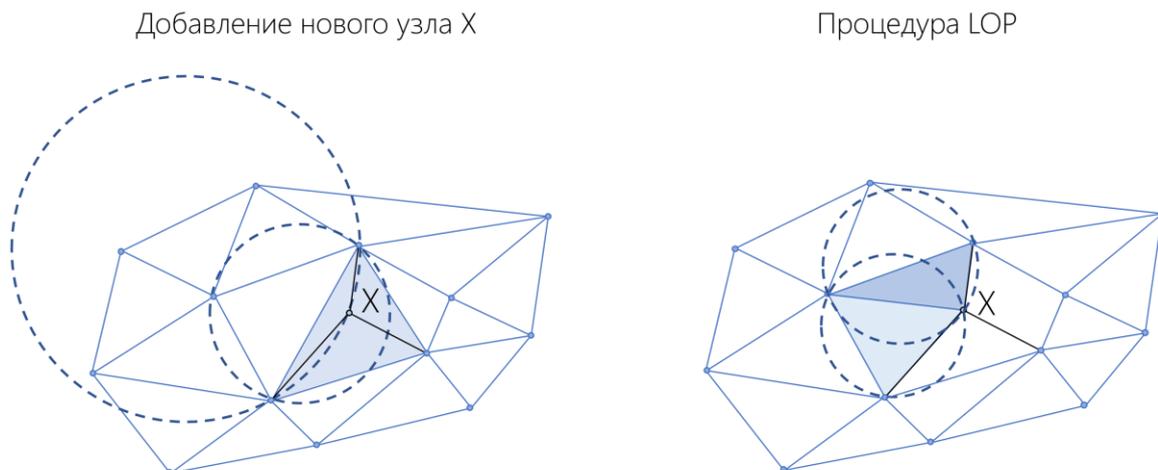


Рис. 2.12. Алгоритм Лоусона добавления нового узла

**Алгоритм Бойера-Уотсона** включает в себя несколько шагов, которые также на примере двумерной неструктурированной сетки, могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) найти треугольник, содержащий новый узел  $X$ ;
- 2) найти все треугольники, окружности которых содержат точку  $X$ ;
- 3) удалить найденные треугольники (создавая пустоту в сетке);
- 4) сформировать новые треугольники из новой точки и граничных с пустотой узлов таким образом, чтобы для всех элементов выполнялся критерий пустого круга (см. рис. 2.13).

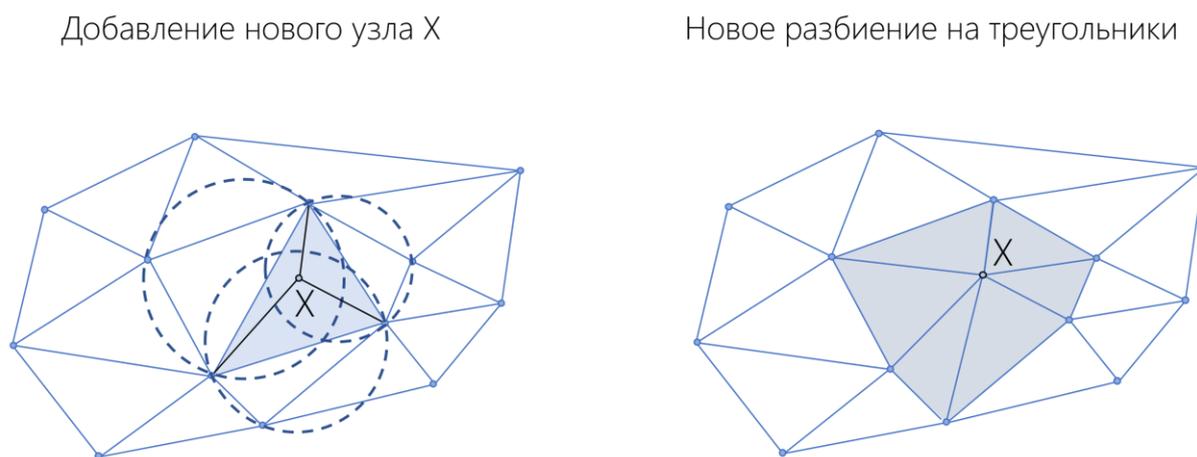


Рис. 2.13. Алгоритм Бойера-Уотсона добавления нового узла

**Метод движущегося фронта** заключается в построении сетки последовательно, начиная от некоторой границы внутрь области. Последний слой элементов составляет активный фронт. Оптимальное местоположение для новых узлов

генерируется для каждого сегмента фронта; новый узел генерируется путем проверки всех существующих узлов и этого нового оптимального местоположения. Проверка пересечения требуется, чтобы избежать перекрытия элементов.

Положительной стороной данного метода является его относительная простота и чёткое соблюдение границы области. Однако для некоторых сложных геометрий (особенно в трёхмерном случае) данный метод может быть неприменим. Также в рамках этого метода на стыках различных сегментов сетка может иметь низкое качество (см. рис. 2.14).

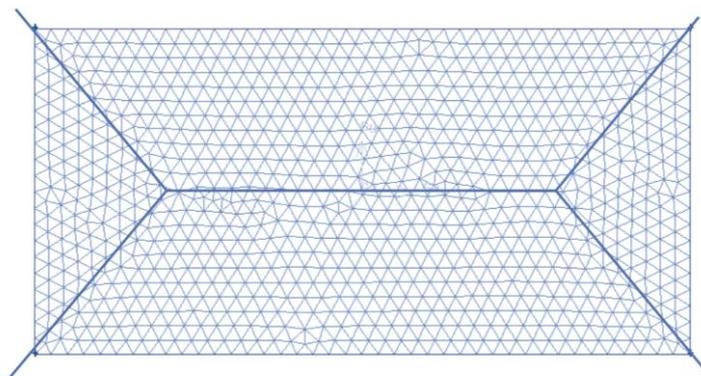


Рис. 2.14. Метод движущегося фронта

**Метод квадродеревьев** (для двухмерного случая) и **октодеревьев** (для трёхмерного случая) подразумевает наложение на область равномерной квадратной (в трёхмерном случае – октаэдрической) сетки. После чего эта сетка обрезается границей области, каждый квадрат (октаэдр) разделяется на два треугольника (тетраэдра). Также возможен вариант сгущения сетки путем рекурсивного деления квадратов, содержащих границы, до получения желаемого пространственного разрешения (см. рис. 2.15).

Основным достоинством этого метода является то, что он высоко автоматизированный. Недостаток метода состоит в том, что он не может точно отражать криволинейные границы расчетной области.

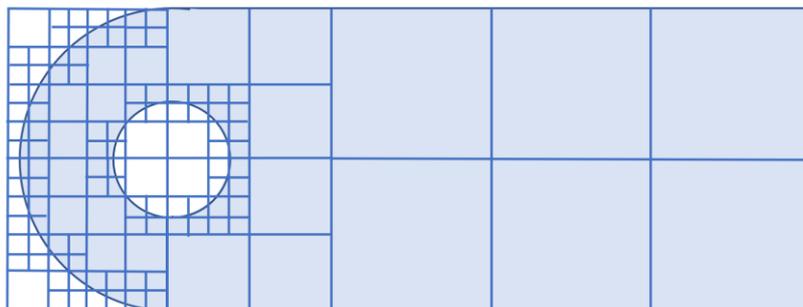


Рис. 2.15. Метод квадродерева

**Метод мощения (paving)** основан на итеративном наложении или укладке рядов элементов внутрь области от ее границы. Как показано в краткой последовательности на рис. 2.16, эти ряды в конечном итоге заполняют область от ее границы внутрь. По мере того, как ряды начинают перекрываться или совпадать внутри геометрии, они тщательно соединяются вместе, чтобы сформировать правильную четырехугольную сетку. Метод включает в себя несколько шагов: выбор ряда, проверки закрытия, генерацию строки, сглаживание, сшивание, настройку ряда, обработку пересечений и очистку завершенной сетки.

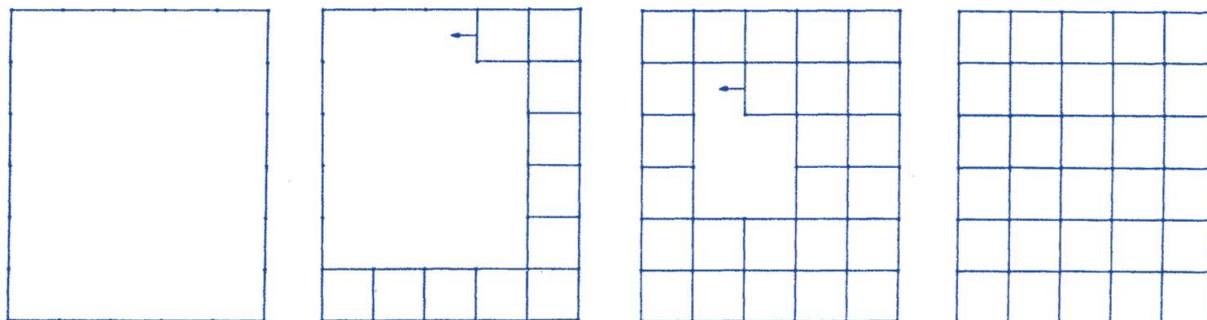


Рис. 2.16. Метод мощения

**Метод вытягивания (sweeping)** является еще одним методом построения трехмерных сеток. В данном методе строится сетка для исходной, начальной поверхности (source), после чего данная сетка вытягивается вдоль границ тела до целевой поверхности (target) вдоль некоторых направляющих поверхностей (см. рис 2.17).

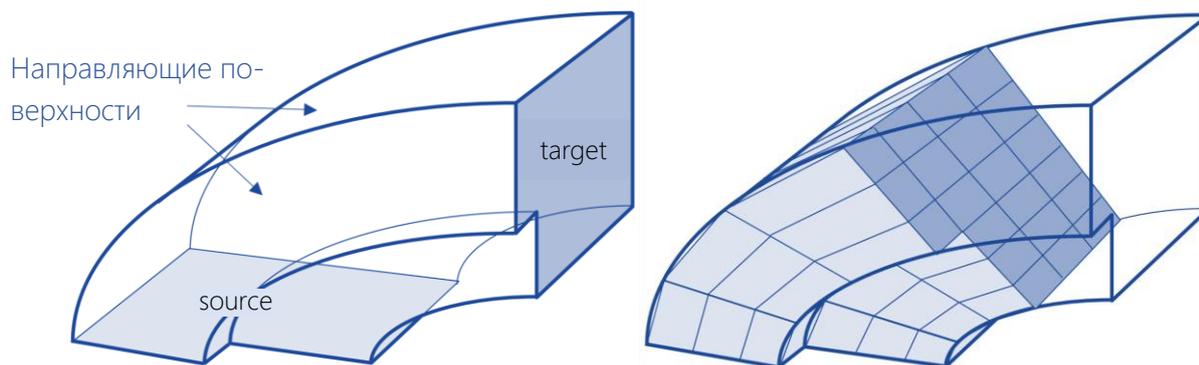


Рис. 2.17. Метод вытягивания

Данный метод применим только для тел, имеющих трансляционную или вращательную симметрию.

### 2.3.3. Типы элементов

На плоскости существует два стандартных типа элемента (треугольник и прямоугольник), а то время как в трехмерном объеме – четыре: шестигранники (гексаэдры), тетраэдры, пирамиды и призмы (см. рис. 2.18). Здесь мы будем говорить только о стандартных, наиболее распространенных типах элементов сеток, в то время как на практике при построении иногда используют и более сложные многогранники (например, сетки на основе диаграммы Вороного).

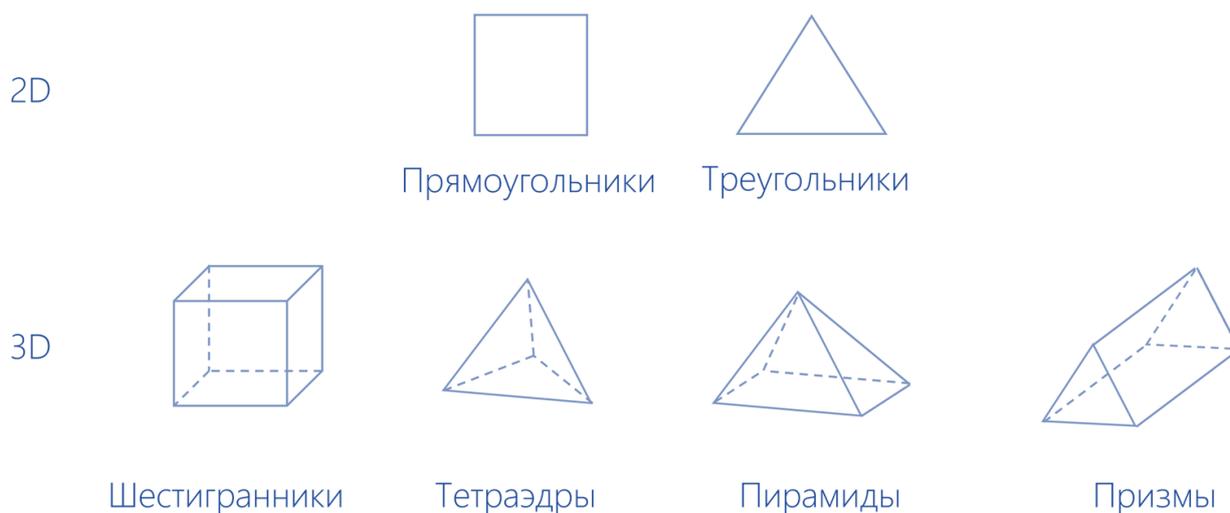


Рис. 2.18. Типы элементов

Выбор того или иного типа элемента при решении задач должен основываться на следующих принципах:

1. Максимальный объем покрытия для элемента заданного размера и, следовательно, минимум общего количества элементов достигается для шестигранных элементов (3D), прямоугольных элементов (2D).

2. Максимальное соотношение «узлы / элементы» достигается для шестигранных элементов (3D); в двухмерном случае разницы практически нет.

3. Дискретизация на стенках домена наиболее высококачественная при использовании призматических элементов (важно при рассмотрении, например, пограничных слоев).

4. Автоматическое объединение чрезвычайно сложных по топологии регионов проще осуществляется с помощью тетраэдров (3D) или треугольников (2D).

5. Переход между тетраэдрами и шестигранниками проще всего осуществить через призматические или пирамидные элементы.

### *2.3.4. Качество сетки и методы его улучшения*

Расчетная сетка должна быть качественной. Общие требования к качеству сетки такие:

1. Сетки должны быть максимально близки к ортогональным (границы элементов сетки должны пересекать под углами близкими к  $90^\circ$ ), а элементы – к соответствующим геометрическим фигурам правильной формы (равносторонний треугольник, квадрат и пр.)

2. Отношение сторон элемента сетки не должно быть слишком большим (в идеале, близко к единице).

3. Сетка должна иметь сгущение в тех областях, где возможно появление больших градиентов искомых функций.

4. Соотношение размеров соседних элементов не должно быть более 1,2.

5. Боковые грани элементов сетки должны быть ориентированы так, чтобы потоки рассматриваемых в задаче физических полей (теплоты, массы, заряда и пр.) через грани элементов были ортогональны этим границам элементов.

Ниже перечислены основные принципы, на которых нужно основываться при выборе сетки:

1. Структурированные сетки допускают более высокий порядок аппроксимации, чем неструктурированные.

2. Течения с сильными ударными волнами точнее моделируются на структурированных сетках, чем на неструктурированных.

3. Программы, использующие регулярные сетки, проще, так как не требуют хранения и переработки информации о соседних ячейках, ребрах, гранях (ориентация, длины и т. п.), необходимой при расчете на неструктурированных сетках.

4. Построение регулярных сеток для тел сложной геометрии – сложно; кроме того, возможно появление вырожденных ячеек, что приводит к существенному снижению точности.

5. Существенным преимуществом неструктурированного подхода является гибкая структура построения сетки, позволяющая точно отобразить геометрию расчетной области и сгенерировать сетку с меньшими затратами для областей сложной геометрии, главным образом, пространственных конфигураций.

6. Адаптация сетки к решению задачи в случае неструктурированного подхода производится сравнительно проще, чем в случае регулярных методов построения сетки.

Качество сетки влияет на:

- 1) точность решения (элементы с линейной интерполяцией искомой функции характеристик среды не способны воспроизвести изменения рассчитываемых характеристик среды на пространственных масштабах менее размера элемента, поэтому надо уменьшать размеры элементов до допустимой величины);
- 2) скорость сходимости (сетка низкого качества может приводить к плохой обусловленности матрицы системы линейных уравнений, что, в свою очередь, обусловит увеличение трудозатрат на ее решение, а в наиболее пессимистичном сценарии приведет к расходимости итерационной процедуры);
- 3) независимость решения от сетки (решение считается независимым от сетки с данными параметрами дискретизации, если при их дальнейшем практически неограниченном уменьшении решение не меняется значимо).

Задача построения расчетной сетки: нахождение отображения, которое переводит узлы сетки из физической области в вычислительную.

Для количественной оценки качества сетки существует ряд критериев, наиболее известные из которых:

- 1) соотношение сторон элемента;
- 2) асимметрия;
- 3) индекс сжатия ячейки.

Критерий соотношения сторон элемента (*aspect ratio*) определяет максимальную разницу между сторонами (гранями, характерными размерами по разным направлениям) элемента:

$$\textit{Aspect Ratio} = \frac{\max(a_1, \dots, a_N)}{\min(a_1, \dots, a_N)}, \quad (2.6)$$

где  $a_1, \dots, a_N$  – множество длин граней элемента.

Величина критерия, близкая к единице для всех элементов сетки, соответствует качественной сетке. Обычно нет возможности удовлетворить этому критерию сразу для всех элементов сетки, поэтому чаще всего говорят о распределении элементов сетки по значениям критерия соотношения сторон. На рис. 2.19 представлены примеры хороших и плохих элементов по критерию соотношения сторон.

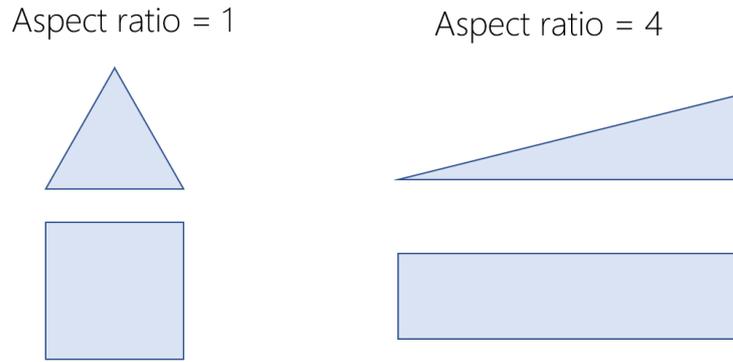


Рис. 2.19. Примеры хороших и плохих элементов по критерию соотношения сторон

Существует множество способов определения асимметрии (skewness) сетки. Для треугольных элементов она обычно определяется на основе эквilateralного объема по формуле

$$Skewness = \frac{S_o - S}{S_o}, \quad (2.7)$$

где  $S_o$  – оптимальный размер элемента (равносторонний треугольник),  $S$  – фактический размер элемента.

Для призматических и пирамидных элементов она обычно определяется по отклонению от нормированного равностороннего угла:

$$Skewness = \max \left[ \frac{\theta_{max} - 90^\circ}{90^\circ}; \frac{90^\circ - \theta_{min}}{90^\circ} \right]. \quad (2.8)$$

Углы  $\theta_{min}$  и  $\theta_{max}$  показаны на рис. 2.20.



Рис. 2.20. Расчет асимметрии отклонения от нормированного равностороннего угла

Индекс сжатия ячеек – это мера качества сетки, которая рассчитывается из скалярных произведений каждого вектора, указывающего от центра ячейки к центру каждой из ее граней, и соответствующего нормального вектора к грани:

$$Cell\ squish\ index = \max \left[ 1 - \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{r}_{c0/x f_i}}{|\mathbf{A}_i| \cdot |\mathbf{r}_{c0/x f_i}|} \right]. \quad (2.9)$$

Обозначения величин  $\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{r}_{c0/x f_i}$  представлены на рис. 2.21.

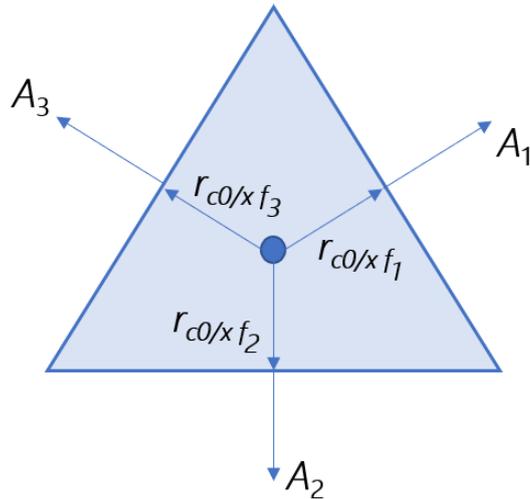


Рис. 2.21. К вычислению индекса сжатия ячеек

В случае, если по каким-либо критериям качества сетка является низкокачественной, требуется улучшать ее либо путем лучшего сгущения отдельных ее мест, либо путем проведения специальных процедур усреднения. Например, на рис. 2.22 представлен пример базового алгоритма сглаживания Лапласа. Принцип алгоритма сглаживания Лапласа заключается в перемещении каждой вершины  $P$  в среднее положение соседних вершин, т.е. с использованием так называемого зонтикообразного оператора  $Umb$ :

$$P^* = Umb(P) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i, \quad (2.10)$$

где  $P_i$  – соседние узлы по отношению к узлу  $P$ .

Когда происходит корректировка положения узла  $P$ , новые координаты этого узла определяются средним арифметическим координат его соседей.

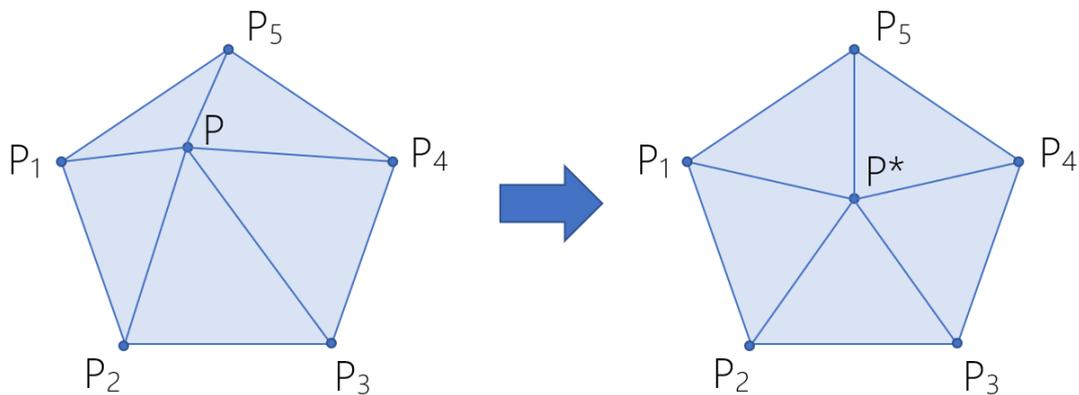


Рис. 2.22. Алгоритм сглаживания Лапласа

Существует модификация данного алгоритма, когда усреднение (сглаживание) происходит не по координатам узлов-соседей, а путем поиска взвешенного среднего по геометрическим центрам смежных ячеек:

$$P^* = \frac{\sum_{i=1}^N A_i C_i}{\sum_{i=1}^N A_i}, \quad (2.11)$$

где  $A_i$  – площадь  $i$ -й смежной ячейки,  $C_i$  – координата центраида  $i$ -й смежной ячейки.

## 2.4. Численные схемы

Математическая модель в механике чаще всего представляет собой набор дифференциальных уравнений в частных производных, а также граничных и начальных условий. Искомые неизвестные функции (деформации, напряжения, скорости, давления и пр. – в зависимости от типа задачи) должны быть такими, чтобы дифференциальные уравнения удовлетворялись во всех внутренних точках расчетной области, в то время как граничные и начальные условия – на всех границах расчетной области (в случае начального условия речь идет о временной границе, соответствующей начальному моменту времени).

Ниже представлен пример математической модели в механике жидкости и газа – системы уравнений для описания плоского неустановившегося течения несжимаемой среды (воды или воздуха):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$(x, y) \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$(x, y) \in \Omega$

$$U = U_{in}, \quad V = V_{in}, \quad (x, y) \in \Gamma_{in} \quad (2.15)$$

$$V = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{wall} \quad (2.16)$$

$$p = p_{out}, \quad (x, y) \in \Gamma_{out} \quad (2.17)$$

$$U = U_0, \quad V = V_0, \quad p = p_0, \quad t = 0 \quad (2.18)$$

где  $\rho$  – плотность,  $U, V$  – компоненты вектора скорости,  $t$  – время,  $x, y$  – координаты,  $\Omega$  – внутренний объем расчетной области,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $U_{in}, V_{in}$  – компоненты скорости на входной границе  $\Gamma_{in}$ ,  $p_{out}$  – давление на выходной границе  $\Gamma_{out}$ ,  $U_0, V_0, p_0$  – компоненты скорости и давление в начальный момент времени  $t = 0$ , На стенке задано условие прилипание потока.

Однако после того, как расчетная область дискретизована, исходная система дифференциальных уравнений в частных производных не может быть применена к этой области обычным образом. Это связано с тем, что в дискретизованной расчетной области мы оперируем значениями неизвестных функций в узлах, а также, в некоторых случаях, в центрах ячеек (или элементов). В этом смысле не существует классическое понятие производной функции как предела отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. А значит, исходная система уравнений должна быть преобразована к другому, сеточному виду.

Для этого мы должны перейти от непрерывных функций (в данном примере – компоненты скорости  $U, V$  давление  $p$ ) к сеточным функциям (т.е. функциям, заданным на сетке). В простейшем одномерном случае сеткой может служить отрезок  $[0, L]$ , разбитый равномерно на  $N$  частей с шагом  $h$ , как это было показано в главе 2 (см. рис. 2.23).

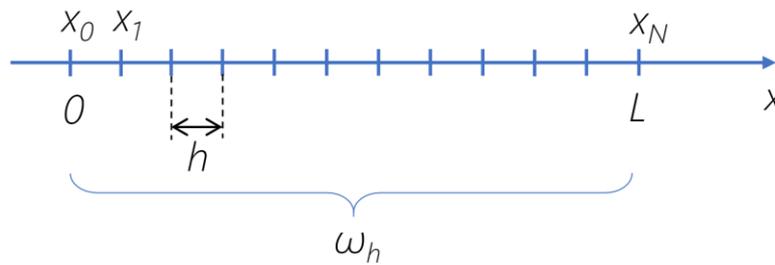


Рис. 2.23. Равномерная сетка на отрезке  $[0, L]$

Соответственно сеточная функция, значения которой определены только в узлах сетки, записывается следующим образом:

$$y_h = y_h(x_k), \quad x_k \in \omega_h \quad (2.19)$$

Данный подход легко обобщается на двумерный и трехмерный случаи. Например, функция давления  $p = p(t, x, y)$  может быть заменена на следующую сеточную функцию:

$$p_h = p_h(t_i, x_j, y_k). \quad (2.20)$$

Здесь  $t_i, x_j, y_k$  – дискретные наборы значений времен и пространственных координат. Индекс  $h$  указывает на то, что речь идет именно о сеточной функции. Далее мы будем его отбрасывать, а при сеточных функциях – писать индексы, соответствующие номерам временного и пространственных слоев:

$$p_{j,k}^i = p(t_i, x_j, y_k). \quad (2.21)$$

Отдельным интересным вопросом является установление степени близости сеточной функции к исходной непрерывной функции. В данном курсе этот вопрос рассматриваться не будет, однако он обсуждается в [11].

После того, как мы дискретизовали неизвестные функции, нужно дискретизовать исходную систему уравнений. Этот вопрос является достаточно нетривиальным. На сегодняшний день существует множество подходов и методов дискретизации, применимых и эффективных для разных типов дифференциальных уравнений. Наиболее известные из них – метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод конечных объемов. Но ими всё далеко не исчерпывается. Далее в этом параграфе будет более подробно рассказано о существующих методах дискретизации исходной системы уравнений.

Наиболее общей классификацией существующих методов является классификация по использованию сетки:

- сеточные,
- бессеточные,
- комбинированные.

### 2.4.1. Сеточные методы

Чаще всего приходится иметь дело с сеточными методами, которые наиболее проработаны. Глобально выделяются два сеточных метода [14]:

- метод конечных разностей;
- метод взвешенных невязок.

#### **Метод конечных разностей**

Метод конечных разностей – численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами.

В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор  $Lu = du/dx$  и построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке  $\omega_h$  с шагом  $h$ . В произвольной внутренней точке  $x_k \in \omega_h$  разностные операторы, аппроксимирующие  $L$ , можно построить следующими способами:

$$L_h^+ u = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (2.22)$$

$$L_h^- u = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad (2.23)$$

$$L_h^{0.5} u = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \quad (2.24)$$

Оператор  $L_h^+$  называют правой односторонней производной,  $L_h^-$  – левой односторонней производной,  $L_h^{0.5}$  – центральной производной. Они используются для построения разностных аппроксимаций дифференциальных операторов более высокого порядка.

Односторонние разностные производные  $L_h^+ u$  и  $L_h^- u$  аппроксимируют первую производную в точке  $x$  с первым порядком, а симметричная разностная производная  $L_h^{0.5} u$  – со вторым. Вывод формул для разностных производных  $L_h^+ u$  и  $L_h^- u$  может быть сделан путем разложения функции  $u$  в ряд Тейлора около точки  $x$  и отбрасывания членов  $O(h^2)$  и большего порядка по  $h$ .

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию второй производной  $Lu = d^2u/dx^2$  на равномерной сетке с шагом  $h$ :

$$L_h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \quad (2.25)$$

Представленные дифференциальные операторы (2.22) – (2.24) являются основными и наиболее часто используемыми в вычислительной механике сплошных сред. С их помощью можно дискретизовать различные системы уравнений. Например, параболическое уравнение теплопроводности в одномерном случае может быть записано в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2}. \quad (2.26)$$

Здесь  $a$  – коэффициент температуропроводности среды. Схема (2.26) – это схема **ВВЦП** (верхняя по времени, центральная по пространству). Существуют и другие конечно-разностные схемы для данного уравнения, однако мы не будем касаться их в данном курсе.

Более сложная ситуация наблюдается при решении уравнения теплопроводности с конвективным (адвективным) слагаемым:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.27)$$

где  $V$  – скорость потока в среде.

Какой из разностных операторов (2.22)–(2.24) нужно применить здесь для дискретизации конвективного слагаемого? На первый взгляд, наиболее эффек-

тивным является оператор (2.24), так как он имеет второй порядок точности. Однако данный оператор привнесет в нашу систему одно нефизичное свойство – в случае достаточно больших скоростей потока  $V > 0$  температура в узле  $i$  будет зависеть от значения не только в соседнем слева узле  $i-1$ , но и в соседнем справа узле  $i+1$ , расположенном ниже по потоку. Также оператор (2.24), используемый для записи конвективных слагаемых, часто приводит к появлению нефизичных осцилляций решения. По данной причине оператор (2.24) не используется для дискретизации конвективных слагаемых. Для них была изобретена **схема «вверх по потоку»** (Upwind scheme) [15].

Самая простая из возможных схем вверх по потоку – это схема первого порядка. В рамках нее уравнение (3.14) будет иметь следующий дискретный вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} + V \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{h} \\ = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} \quad \text{для } V > 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} + V \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{h} \\ = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} \quad \text{для } V < 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Тем не менее конечно-разностный оператор (2.24) всё же применим при решении определенного класса задач, например, уравнения теплопроводности в цилиндрических или сферических координатах.

Представленные дифференциальные операторы могут быть использованы и для дискретизации исходной системы уравнений (2.12) – (2.18) для описания плоского неустановившегося течения несжимаемой среды (воды или воздуха), однако в данном случае это делается несколько более замысловато, с применением так называемых **разнесенных сеток**. Численное решение уравнений неразрывности и Навье-Стокса обычно проводится на разнесенной сетке [14]. Суть метода разнесенных сеток заключается в том, что различные зависимые переменные определяются в разных точках сетки. Как правило, давление определяется в центре ячейки, а компоненты скорости – в центрах граней (см. рис. 2.24), в связи с чем индексы становятся дробными. Благодаря такой процедуре сетка становится удобной для проведения дискретизации по методу конечных объемов, о котором мы поговорим чуть позднее.

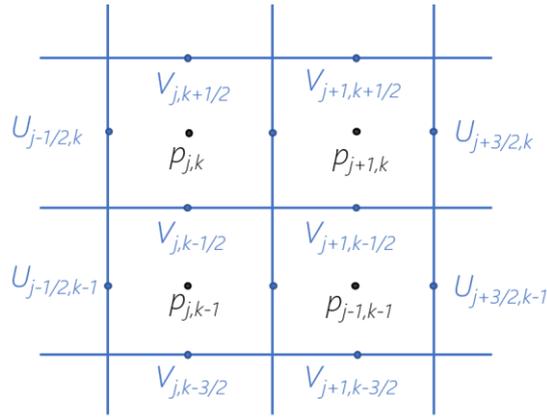


Рис. 2.24. Разнесенная сетка

С учетом такого подхода система уравнений (2.12)–(2.18) запишется в виде:

$$\frac{U_{j+\frac{1}{2},k} - U_{j-\frac{1}{2},k}}{h_x} + \frac{V_{j,k+\frac{1}{2}} - V_{j,k-\frac{1}{2}}}{h_y} = 0, \quad (2.30)$$

$$U_{j+\frac{1}{2},k}^{i+1} = \alpha_{j+\frac{1}{2},k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta t}{h_x} (p_{j,k} - p_{j+1,k}) \quad (2.31)$$

$$V_{j,k+\frac{1}{2}}^{i+1} = \beta_{j,k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta t}{h_x} (p_{j,k} - p_{j,k+1}) \quad (2.32)$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2},k} = U_{j+\frac{1}{2},k}$$

$$\begin{aligned} & + \Delta t \left\{ \frac{U_{j,k}^2 - U_{j+1,k}^2}{h_x} + \frac{(UV)_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (UV)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h_y} \right. \\ & + \frac{2}{h_x^2} \left[ v_{j+1,k} \left( U_{j+\frac{3}{2},k} - U_{j+\frac{1}{2},k} \right) \right. \\ & \left. \left. - v_{j,k} \left( U_{j+\frac{1}{2},k} - U_{j-\frac{1}{2},k} \right) \right] \right. \\ & + \frac{1}{h_y} \left[ v_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{j+\frac{1}{2},k+1} - U_{j+\frac{1}{2},k}}{h_y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{V_{j+1,k+\frac{1}{2}} - V_{j,k+\frac{1}{2}}}{h_x} \right) \\ & \left. - v_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{j+\frac{1}{2},k} - U_{j+\frac{1}{2},k-1}}{h_y} + \frac{V_{j+1,k-\frac{1}{2}} - V_{j,k-\frac{1}{2}}}{h_x} \right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{j,k+\frac{1}{2}} &= V_{j,k+\frac{1}{2}} \\
&+ \Delta t \left\{ \frac{V_{j,k}^2 - V_{j,k+1}^2}{h_y} + \frac{(UV)_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (UV)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h_x} \right. \\
&+ \frac{2}{h_y^2} \left[ v_{j,k+1} \left( V_{j,k+\frac{3}{2}} - V_{j,k+\frac{1}{2}} \right) - v_{j,k} \left( V_{j,k+\frac{1}{2}} - V_{j,k-\frac{1}{2}} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{h_x} \left[ v_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{j+\frac{1}{2},k+1} - U_{j+\frac{1}{2},k}}{h_y} + \frac{V_{j+1,k+\frac{1}{2}} - V_{j,k+\frac{1}{2}}}{h_x} \right) \right. \\
&\left. \left. - v_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{j-\frac{1}{2},k+1} - U_{j-\frac{1}{2},k}}{h_y} + \frac{V_{j,k+\frac{1}{2}} - V_{j-1,k+\frac{1}{2}}}{h_x} \right) \right] \right\}. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Индекс  $i$  нумерует временные слои, а индексы  $j, k$  – пространственные слои. Для переменных на текущем временном слое индекс  $i$  опущен.

Уравнения (2.30) – (2.34) являются составной частью известного **метода маркеров и ячеек** (МАС метод), предложенного Харлоу и Уэлшем в 1965 г. [16]. Они дополняются уравнением Пуассона для определения узловых значений давления на каждом новом временном слое:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{j+1,k}^{i+1} - 2p_{j,k}^{i+1} + p_{j-1,k}^{i+1}}{h_x^2} + \frac{p_{j,k+1}^{i+1} - 2p_{j,k}^{i+1} + p_{j,k-1}^{i+1}}{h_y^2} \\
= A, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

где правая часть  $A$  является известной сложной функцией от  $\alpha_{j+\frac{1}{2},k}, \beta_{j,k+\frac{1}{2}}$  временного и пространственных шагов сетки. Метод МАС эффективен при решении нестационарных задач со свободными границами.

В настоящее время при численном решении задач гидрогазодинамики конечно-разностные методы практически не используются, так как они во многом проигрывают другому классу методов, о котором пойдет речь далее.

### Методы взвешенных невязок

Метод взвешенных невязок концептуально отличается от метода конечных разностей тем, что в методе взвешенных невязок исходят из предположения о возможности аналитического представления решения. Например, в виде:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x), \tag{2.36}$$

где  $a_j$  – неизвестные коэффициенты,  $\varphi_j(x)$  – известные аналитические функции (пробные функции, функции формы).

Аппроксимирующие функции  $\varphi_j(x)$  предполагаются известными. Роль аппроксимирующих функций могут играть полиномы, тригонометрические функции или кусочно-линейные функции вида (см. рис. 2.25).

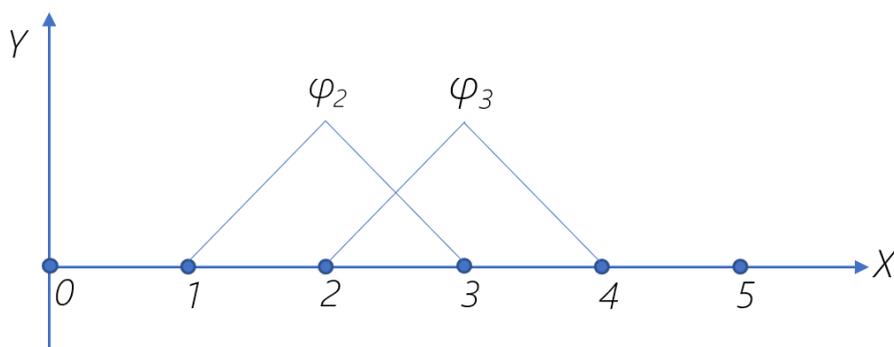


Рис. 2.25. Кусочно-линейные функции формы

Коэффициенты  $a_j$  заранее неизвестны и их следует определять путем решения системы алгебраических уравнений, получаемых из исходных дифференциальных уравнений. Например, пусть имеется исходное уравнение (или система уравнений), заданное оператором  $L$ :

$$L(\bar{u}) = 0, \quad (2.37)$$

где черта сверху обозначает точное решение.

Если подставить (2.36) в (2.37), то последнее не будет тождественно удовлетворяться:

$$L(u) = R, \quad (2.38)$$

где величина  $R$  будет называться в дальнейшем невязкой уравнения.

То есть за счет принудительного навязываемого характера аналитической формы решения в виде (2.36) вносится некоторая ошибка, если только  $N$  не будет произвольно большим. В общем случае  $R$  является непрерывной функцией пространственных и временной координат в задаче.

Коэффициенты  $a_j$  выбираются таким образом, чтобы функция  $R$  оставалась достаточно малой во всей вычислительной области. Математически это может быть выражено следующим условием:

$$\iiint W_m(x, y, z) R dx dy dz = 0, \quad m = 1, \dots, N. \quad (2.39)$$

Если поочередно принять  $m = 1, \dots, N$ , то получится система уравнений для определения  $a_j$ . Для нестационарного случая это будет система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени. В стационарном случае получается система алгебраических уравнений.

Различные варианты выбора весовой (поверочной) функции  $W_m$  в уравнении (2.39) приводят к построению различных методов, принадлежащих к классу

методов взвешенных невязок. Охарактеризуем кратко некоторые из этих методов.

**Метод подобластей.** Вычислительная область разделяется на  $N$  подобластей  $D_m$ , способных перекрывать друг друга, причем полагают

$$W_m = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_m \\ 0, & (x, y) \notin D_m \end{cases} \quad (2.40)$$

Метод подобластей совпадает с методом конечных объемов по способу решения уравнения (2.39). Функционал (2.39) в сочетании с условиями (2.40) обеспечивает необходимую основу для выполнения законов сохранения на уровне дискретизованного уравнения. Тем самым гарантируется реализация тех свойств сохранения, которые присущи исходным уравнениям. Это преимущество особенно важно при построении достаточно точных решений, описывающих внутренние течения или течения с ударными волнами.

**Метод коллокаций.** В вычислительной области выбирается  $N$  точек, характеризующихся радиус-векторами  $\mathbf{r}_m$ . Весовые функции задаются следующим образом:

$$W_m = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad (2.41)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Как показывает подстановка (2.41) в уравнение (2.39), для метода коллокаций характерно, что полагают  $R(\mathbf{r}_m) = 0$ . Следовательно, конечно-разностные методы являются, по существу, методами коллокаций без использования приближенного решения.

Особенно эффективной разновидностью данного метода является метод ортогональных коллокаций [17]. Этот метод основан на том, что аппроксимирующие функции выбираются из числа ортогональных полиномов, а неизвестными служат узловые значения неизвестной функции. Точки коллокаций выбираются из числа корней ортогональных полиномов, являющихся аппроксимирующими функциями.

Метод коллокаций требует выполнения условия (2.41) в заданных точках расчетной области (узлах) и не содержит информацию о соединении этих узлов между собой, о сетке, составной частью которых являются эти узлы. По этой причине метод коллокаций также используется для минимизации функционалов невязок, подобных (2.39) в классе бессеточных методов.

**Метод наименьших квадратов.** Если принять в качестве весовых функций выражения вида

$$W_m = \frac{\partial R}{\partial a_m}, \quad (2.42)$$

то (2.39) будет эквивалентно тому, чтобы выполнялось условие минимальности величины следующего интеграла:

$$I = \iiint R^2 dx dy dz. \quad (2.43)$$

Из (2.43) становится понятным происхождение названия метода – осуществляется минимизация квадрата невязки.

**Метод Галеркина.** Весовые функции выбираются из того же семейства, что и аппроксимирующие (пробные) функции:

$$W_m = \varphi_m. \quad (2.44)$$

Если аппроксимирующие функции составляют полную систему, то уравнение (2.39) показывает, что невязка ортогональна к каждому элементу полной системы. Следовательно, по мере того как  $N$  стремится к бесконечности, приближенное решение  $u$  будет сходиться к точному решению  $\bar{u}$ .

Метод Галеркина при определенных условиях, накладываемых на оператор  $L$ , приводит к такой же системе линейных алгебраических уравнений, как и известный метод Ритца, используемый для решения краевых задач вариационного исчисления и составляющий основу метода конечных элементов. Однако, в отличие от метода Ритца, метод Галеркина определяет коэффициенты разложения путем проекции исходного уравнения на пространство базисных функций. Это и приводит к формированию решаемой системы линейных уравнений.

### 2.4.2. Бессеточные методы

Бессеточными считаются методы, используемые для создания системы алгебраических уравнений для всей области без использования предварительно определенной сетки для дискретизации области. Они скорее основаны на взаимодействии каждого узла со всеми его соседями. Как следствие, исходные свойства, такие как масса или кинетическая энергия, присваиваются не элементам сетки, а отдельным узлам. Бессеточные методы позволяют моделировать некоторые сложные типы задач за счет дополнительных вычислительных затрат и усилий по программированию. Так, например, в расчетах, где моделируемый материал может перемещаться (как в вычислительной гидродинамике) или где могут происходить большие деформации материала (как при моделировании пластических материалов), связность сетки бывает трудно поддерживать без внесения ошибки в процедуру численного моделирования. Если во время моделирования сетка запутывается или вырождается, определенные на ней операторы могут давать неправильные значения. Сетку можно воссоздать во время моделирования (динамические сетки), но это также может привести к ошибке, поскольку

все существующие узлы должны быть сопоставлены с новым набором узлов, что обуславливает дополнительную вычислительную погрешность. Бессеточные методы наиболее эффективны при решении этих проблем.

Наиболее известные бессеточные методы приведены ниже [18]:

- метод частиц в ячейках;
- метод радиальных базисных функций;
- метод динамики частиц;
- метод (гидродинамики) сглаженных частиц;
- метод диффузного элемента;
- метод свободного элемента Галеркина.

В рамках этого курса мы заострим внимание лишь на двух основных и очень родственных друг другу бессеточных методах.

### Метод динамики частиц

Метод основан на представлении материала совокупностью взаимодействующих частиц (материальных точек или твердых тел), для которых записываются классические уравнения динамики [19]. Взаимодействие частиц описывается посредством потенциалов взаимодействия, основными свойствами которых являются отталкивание при сближении и притяжение при удалении. Простейший потенциал межчастичного взаимодействия – потенциал Леннарда-Джонса  $\Pi$ , задаваемый формулой

$$\Pi(r) = D \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{r} \right)^6 \right], \quad (2.45)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Pi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (2.46)$$

Здесь  $m$  – масса частицы,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор частицы (вектора отмечаем полужирным шрифтом),  $r$  – скалярная величина, равная межчастичному расстоянию,  $\mathbf{F}_{ij}$  – векторная сила взаимодействия между частицами  $i$  и  $j$ .

Вид потенциала Леннарда-Джонса представлен графически на рис. 2.26. В окрестности точки  $r = a$  притягивающая сила уравновешивает отталкивающую силу, а само положение равновесия является устойчивым по отношению к малым отклонениям от него. Важно отметить, что потенциал Леннарда-Джонса является двухпараметрическим, а потому он имеет очень ограниченные возможности для вариации макроскопических параметров моделируемого им материала. По данной причине в методе динамики частиц особенно важен вопрос корректного выбора потенциалов взаимодействия для описания особенностей исследуемой

среды. В литературных источниках можно встретить больше количество таких потенциалов: Ми, Морзе, Bonded-Particle Model и пр.

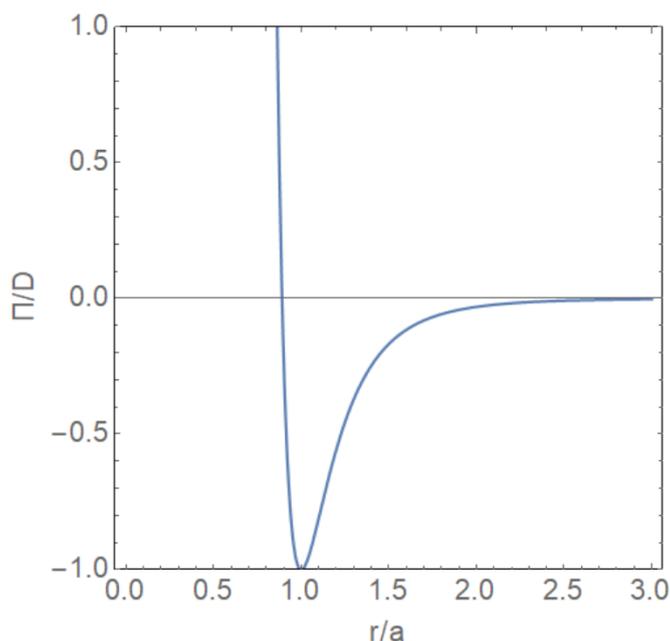


Рис. 2.26. Потенциал взаимодействия между частицами в методе динамики частиц

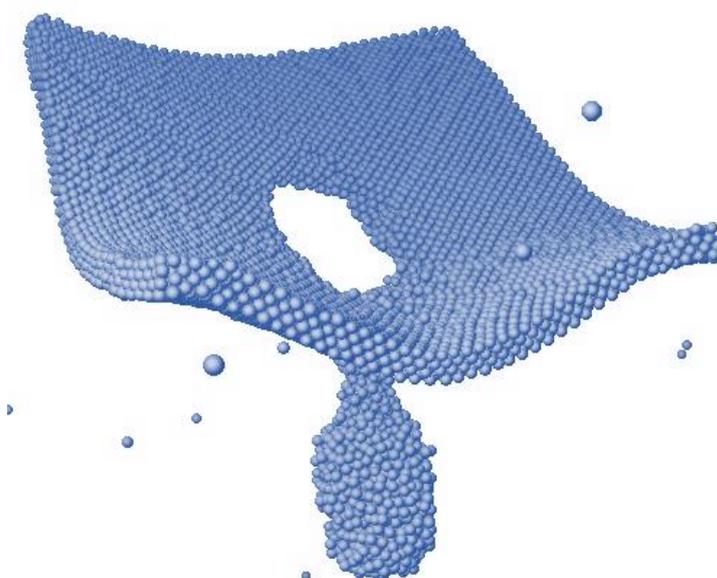


Рис. 2.27. Метод динамики частиц: моделирование пробивания пластины

В начальный момент времени задается некоторое распределение положений частиц в пространстве (исходная структура материала) и распределение скоростей частиц (механическое и тепловое движение системы в исходном состоянии). Далее задача сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На непроницаемых стенках расчетной области задаются условия прилипания либо упругого (неупругого) соударения частиц о стенку. При необходимости также вводятся граничные условия типа «вход» и «выход».

Изначально метод динамики частиц применялся для решения задач, находящихся на двух противоположных сторонах масштабной шкалы – для описания молекулярных систем, где в качестве частиц выступали атомы и молекулы, и для описания астрофизических систем, где частицами являлись объекты значительно большего масштабного уровня (планеты, звезды, галактики). Оба указанных класса задач решаются с применением сходных математических моделей.

Постепенно, по мере развития вычислительной техники, данный метод все более широко применяется для описания процессов на промежуточных масштабных уровнях, моделирования физико-механических свойств материалов и гранулированных сред (см. рис. 3.5). В этом случае частицы могут представлять собой гранулы или зерна материала, однако они могут быть и не связаны напрямую с некоторыми физическими объектами, а использоваться как конечные элементы для изучения процессов, в которых нарушается континуальность материала.

Существует множество способов численного интегрирования уравнений движения (2.46), но метод частиц имеет свою специфику. Он включает в себя интегрирование большого количества уравнений, что требует экономии компьютерной памяти. Кроме того, основное время расчетов тратится на вычисление силы, действующей на каждую частицу, что связано с нелинейностью силы взаимодействия и необходимостью суммирования большого числа слагаемых. Исходя из этого существенно снижается эффективность методов, которые требуют многократного вычисления правой части уравнения (2.46) на каждом шаге, поэтому метод Рунге-Кутты редко применяется в методе частиц. Ввиду этого используется алгоритм Верле [19], который является одним из наиболее простых и распространенных методов, позволяющим вычислить положение частицы по ее предыдущим двум положениям:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{w}(t)\Delta t^2, \quad (2.47)$$

где  $\Delta t$  – временной шаг,  $\mathbf{w}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$  – ускорение частицы. Схема (2.47) не требует вычисления скоростей, однако скорость движения частиц при необходимости может быть вычислена так:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (2.48)$$

Еще одним популярным методом интегрирования уравнения (2.46) является метод центральных разностей, который эквивалентен методу Верле:

$$\mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = \mathbf{v}\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) + \mathbf{w}(t)\Delta t, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t. \quad (2.50)$$

## Метод сглаженных частиц

Метод (гидродинамики) сглаженных частиц (smoothed particle hydrodynamics – SPH) – это вычислительный метод, используемый для моделирования механики сплошных сред, например механики твердого тела и потоков жидкости.

Метод SPH работает путём деления жидкости на дискретные элементы, называемые частицами. Эти частицы имеют пространственное расстояние (известное как «длина сглаживания», обычно представляемая в уравнениях как  $h$ , на котором их свойства «сглаживаются» функцией ядра  $W$  (см. рис. 2.28).

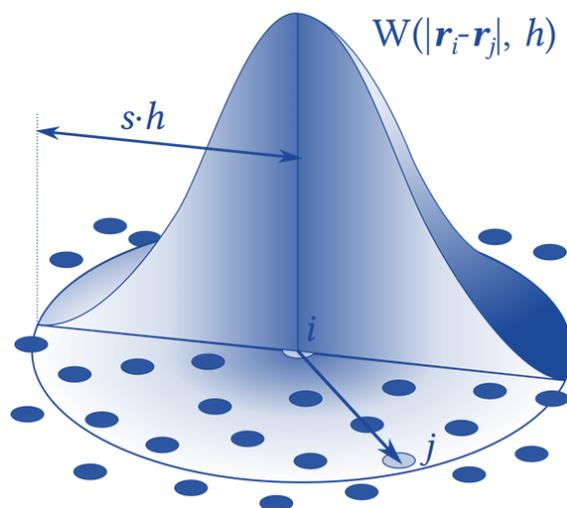


Рис. 2.28. Метод сглаженных частиц

Это значит, что любая физическая величина любой частицы может быть получена путём суммирования соответствующих величин всех частиц, которые находятся в пределах двух сглаженных длин. Например, температура  $T$  в точке  $x$  зависит от температуры всех частиц на расстоянии  $2h$  от  $x$ .

Влияние каждой частицы на ее соседей оценивается в соответствии с распределением её плотности и расстоянием до интересующих частиц. Распределение плотности математически описывается функцией ядра. В качестве функции ядра обычно используют функцию Гаусса (функция нормального распределения):

$$W(u, h) = \frac{1}{\pi^{1/2} h^3} \exp(-u^2/h^2). \quad (2.51)$$

Эту функцию целесообразно принять равной нулю для частиц, находящихся дальше, чем две сглаженные длины  $2h$ . Это позволяет экономить вычислительные ресурсы, исключая относительно малое влияние отдаленных частиц. Также необходимо принять во внимание, что интеграл функции (2.41) по всей расчетной области должен быть равен единице.

Еще более экономичным вариантом записи функции ядра является сплайн:

$$W(u, h) = C_d \begin{cases} \left(2 - \frac{u}{h}\right)^3 - 4\left(1 - \frac{u}{h}\right)^3, & 0 \leq u \leq h \\ \left(2 - \frac{u}{h}\right)^3, & h \leq u \leq 2h \\ 0, & u > 2h \end{cases} \quad (2.52)$$

Параметр  $C_d$  выбирается из условия нормировки интеграла функции ядра. Для 1D, 2D и 3D геометрий он имеет различные значения:

$$C_d = \begin{cases} \frac{1}{6h}, & d = 1 \\ \frac{15}{14\pi} \frac{1}{h^2}, & d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{h^3}, & d = 3 \end{cases} \quad (2.53)$$

где  $d$  – параметр, равный количеству пространственных измерений в задаче.

Значение любой физической величины  $A$  в точке  $\mathbf{r}$ , задаётся формулой:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h), \quad (2.54)$$

$$\nabla A(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h), \quad (2.55)$$

где  $m_j$  – масса частицы №  $j$ ,  $A_j$  – значение величины  $A$  для частицы №  $j$ ,  $\rho_j$  – плотность, связанная с частицей №  $j$ , и  $W$  – функция ядра, упомянутая выше.

В результате уравнение неразрывности и Эйлера для движения жидкой среды в рамках метода SPH запишутся в виде:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = 2\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^*) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2.56)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2\rho_i \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \mathbf{g}, \quad (2.57)$$

где  $\Pi_{ij}$  – вязкостное слагаемое,  $\mathbf{g}$  – вектор силы тяжести.

Примечательно, что уравнение (2.57) баланса импульса не содержит градиента давления, который был в исходном континуальном уравнении (например, в

2.13). Дело в том, что уравнение (2.57) получено несколько иначе – посредством записи Лагранжиана частицы

$$L_{sph} = \sum_j m_j \left( \frac{1}{2} v_j^2 - u_j \right) \quad (2.58)$$

и последующего использование уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{sph}}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L_{sph}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (2.59)$$

где  $v_j$  – модуль скорости  $j$ -й частицы,  $u_j$  – внутренняя энергия  $j$ -й частицы. Запись уравнения (2.57) в терминах градиента давления приводит к неустойчивости численной схемы.

В уравнении (2.57) содержится член, отвечающий за вязкость, которую нужно учитывать при моделировании вязких течений, для этого есть несколько подходов. Учет вязкости требует особого рассмотрения, поскольку включает в себя дифференциальный оператор Лапласа с производными второго порядка. Поскольку прямой учет этого оператора в рамках формализма метода SPH не дал удовлетворительных результатов, учеными предложено несколько подходов к моделированию вязкостной диффузии. Например, в виде [20]:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-2\alpha c \mu_{ij} + 2\beta \mu_{ij}^2}{\rho_i + \rho_j}, \\ 0 \end{cases}, \quad (2.60)$$

$$\mu_{ij} = h \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}^2 + 0,01h^2}. \quad (2.61)$$

Далее по рассчитанному полю скоростей (2.57) производится пересчет положений каждой частицы, в результате чего на новой временной итерации значения функций ядер меняются.

При численной реализации метода SPH обычно используется подход слабой сжимаемости:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} < 1\%. \quad (2.62)$$

Для этого система уравнений дополняется искусственным «жестким» уравнением состояния вида

$$p = p_0 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad n \approx 7. \quad (2.63)$$

На рис. 2.29 представлен пример расчета методом SPH – распределение давления потока прорыва плотины.

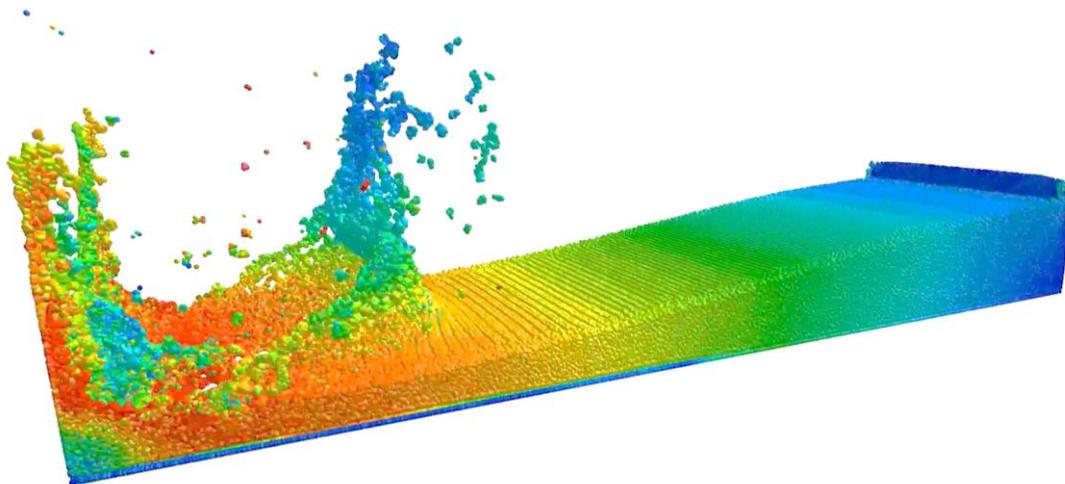


Рис. 2.29. Пример расчета движения жидкости с помощью SPH

## 2.5. Задания для самостоятельной работы

А. Возьмите квадрат со стороной, равной 1. На каждом из сторон квадрата задайте по узлу –  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Во внутреннем объеме квадрата поместите еще один, пятый узел  $P$  (можно поместить его в центр квадрата). Соедините его со всеми остальными четырьмя узлами. В итоге образуется 4 треугольных элемента. Удовлетворяется ли для сетки, образованной этими 4-мя элементами, критерий пустого круга Дэлоне? Можно ли найти такое положение узла  $P$  во внутреннем объеме квадрата, чтобы условие Дэлоне нарушалось?

Б. Постройте изолинии функции Жуковского в пространстве  $Oxy$ , где  $x$  – действительная, а  $y$  – мнимая часть  $z = \zeta + 1/\zeta$ . Сравните ее с обобщением функции Жуковского (преобразование Кармана – Треффца) вида

$$\frac{\zeta - k}{\zeta + k} = \frac{(z - 1)^k}{(z + 1)^k},$$

где  $k$  – переменный параметр.

В. Решите дифференциальное уравнение  $y' = y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0,1]$  одним из методов взвешенных невязок. В качестве базисных функций выберите полиномиальные функции  $1, x, x^2, \dots$ . Сравните полученное численное решение с точным аналитическим решением задачи в зависимости от количества базисных функций.

Г. Получите уравнение (2.57) из уравнений (2.58) и (2.59).

## 3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ

### 3.1. Fluent или CFX?

В данной главе рассматриваются особенности создания физических моделей в гидрогазодинамических решателях (или солверах) программного комплекса Ansys. Модули Ansys CFX и Ansys Fluent представляют собой решатели, которые давно интегрированы в линейку программных продуктов Ansys, объединенных на платформе Workbench, и используются в качестве альтернативных инструментов для гидрогазодинамического моделирования. Оба решателя базируются на решении методом конечных (или контрольных) объемов уравнений неразрывности и Навье-Стокса, используют сеточное разбиение области течения в качестве входных геометрических данных. Однако у двух упомянутых решателей есть некоторые ключевые различия. В Ansys Fluent за центр контрольного объема принимается центр ячейки сетки, в то время как в Ansys CFX – узел сетки. Это приводит к тому, что разрешение пристеночного течения в Ansys CFX оказывается на половину ячейки «точнее», чем на той же самой сетке в Ansys Fluent. Однако в Ansys Fluent есть поддержка полиэдрических элементов, которые нивелируют это «отставание» от Ansys CFX.

Первый вопрос, который возникает перед начинающим пользователем ANSYS при решении задачи механики жидкости и газа, – это вопрос выбора: CFX или Fluent? Исторически сложилось так, что Ansys CFX используется инженерами и конструкторами, для которых важно быстрое получение результатов моделирования с гарантированной надежностью и минимальным количеством исходных данных, вводимых непосредственно пользователем. Это связано с тем, что Ansys CFX имеет очень ограниченное количество настроек и в большинстве практических случаев хорошо справляется с поставленными задачами без вмешательства пользователя. Это дает возможность расчетчику фокусироваться исключительно на прикладных аспектах задачи. Ansys Fluent чаще выбирают пользователи с углубленной математической подготовкой. Ansys Fluent позволяет провести анализ влияния на получаемое решение различных моделей турбулентности, моделей многофазных сред, различных модификаций численных схем и способов интерполяций. Также в Ansys Fluent есть возможность подключать макросы, написанные на языке Си и реализующие различные сложные параметрические зависимости свойств среды (например, зависимость вязкости от температуры, давления и пр.)

### 3.2. Типы решателей

В этом курсе пойдет речь об Ansys Fluent, который позволяют выбирать между двумя типами решателей [21]:

- решатели на основе давления (pressure-based solvers),
- решатели на основе плотности (density-based solvers).

Исторически сложилось так, что методы, основанные на давлении, разрабатывались для низкоскоростных несжимаемых потоков, в то время как методы на основе плотности – для высокоскоростных сжимаемых потоков. Однако к сегодняшнему дню оба типа решателей расширены и переформулированы для возможности работы в широком диапазоне параметров потока, выходящих за рамки их традиционного или первоначального предназначения.

В обоих типах решателей поле скорости получается из уравнений количества движения. При этом в решателях, основанных на плотности, уравнение неразрывности используется для получения поля плотности, тогда как поле давления определяется из уравнения состояния (например, уравнения Менделеева-Клапейрона). С другой стороны, в решателях, основанных на давлении, поле давления определяется путем решения специального уравнения давления или поправки на давление, которое получается путем манипулирования уравнениями неразрывности и импульса. Подобное уравнение было записано ранее для метода MAC – см. уравнение (2.35).

Любой из этих типов решателей подразумевает решение интегральных уравнений сохранения массы и импульса, т.е. применение метода конечных объемов, о котором упоминалось ранее.

### 3.3. Пространственная дискретизация. Метод конечных объемов

Метод конечных (контрольных) объемов (FVM) – это метод представления и решения дифференциальных уравнений в частных производных в форме алгебраических уравнений [22]. Метод использует интегральную запись уравнений баланса массы, импульса и энергии. Для некоторой характеристики потока  $u$ , в качестве которой могут выступать и масса, и импульс, и энергия, интегральная запись уравнения баланса такова:

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{f}(u) dV = 0. \quad (3.1)$$

В методе конечных объемов объемные интегралы в уравнении с частными производными, которые содержат член дивергенции, преобразуются в поверхностные интегралы с использованием теоремы о дивергенции. Затем эти члены оцениваются как потоки на поверхностях каждого конечного объема (см. рис. 3.1).

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \oint_{\partial V_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(u) dS = 0. \quad (3.2)$$

В случае, если рассматривать изменение средней величины  $\langle u \rangle$  в объеме  $V_i$ , уравнение (3.2) преобразуется к виду:

$$V_i \cdot \Delta \langle u \rangle = \Delta t \sum_{j=1}^5 S_j f_j. \quad (3.3)$$

Физический смысл уравнения (3.3) также ясен из рис. 3.1. Изменение средней величины  $\langle u \rangle$  в объеме равно сумме всех потоков этой величины через все грани объема.

Поскольку метод конечных объемов напрямую оперирует балансовыми соотношениями для каждого отдельно взятого объема, он является консервативным. Еще одно преимущество метода конечных объемов состоит в том, что он легко формулируется для учета неструктурированных сеток. Метод конечных объемов используется в большинстве известных пакетов вычислительной гидродинамики. «Конечный объем» относится к небольшому объему, окружающему каждую узловую точку на сетке.

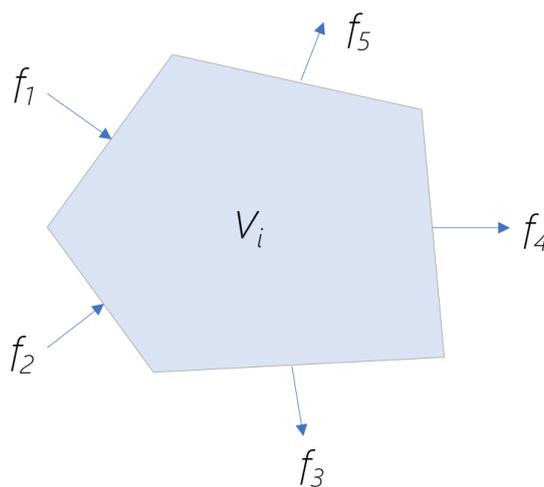


Рис. 3.1. Баланс величины  $\langle u \rangle$  в конечном объеме  $V_i$

Если сравнить (3.1) с (2.39), то становится ясно, что вышеназванный метод подобен методу подобластей, если не учитывать, что здесь не вводится в явной форме какое-либо приближенное решение наподобие выражения (2.36). Этот ме-

тод оказывается особенно компактным, если определяющие уравнения включают только первые производные. Если же присутствуют и вторые производные, то требуются некоторые дополнительные операции.

Проиллюстрируем применение метода конечных объемов к решению уравнения первого порядка в общем виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Очевидно, что при надлежащем выборе  $q, F, G$  оно может представлять собой как уравнение баланса массы, так и уравнение баланса импульса в проекциях по различным осям (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

### Значения параметров $q, F, G$

Параметры	Уравнение неразрывности	Уравнение движения по X	Уравнение движения по Y
$q$	$\rho$	$\rho U$	$\rho V$
$F$	$\rho U$	$\rho U^2 + p$	$\rho UV$
$G$	$\rho V$	$\rho UV$	$\rho V^2 + p$

Также уравнение (3.4) может быть использовано для описания переноса любых других характеристик потока (энергия, турбулентные свойства потока). Однако здесь это не так важно, поскольку целью данного параграфа является демонстрация метода применительно к уравнению переноса любой характеристики потока, представимого в виде (3.4).

Если теперь рассмотреть произвольный малый объем ABCD (см. рис. 3.2) и применить к уравнению (3.4) метод подобластей, то получится следующее интегральное равенство:

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (3.5)$$

По теореме Грина оно сведется к такому:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{ABCD} q dx dy + \oint_{ABCD} (F dx - G dy) = 0. \quad (3.6)$$

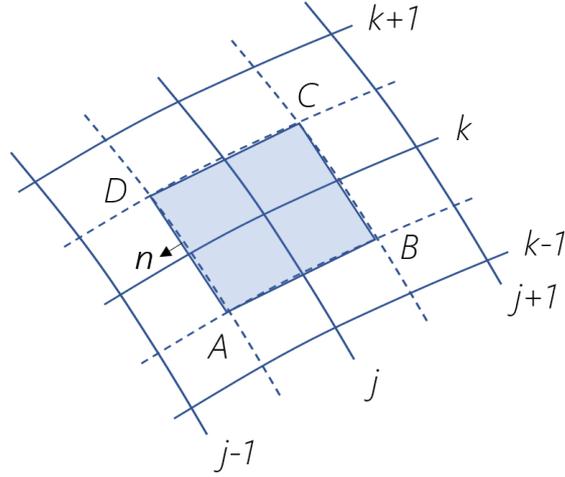


Рис. 3.2. Малый объем ABCD

В терминах конечных шагов по пространству  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и среднего значения характеристики  $q$  в малом объеме ABCD уравнение (3.6) представимо в виде:

$$\frac{d}{dt}(Sq_{jk}) + \sum_{AB}^{DA} (F\Delta y - G\Delta x) = 0, \quad (3.7)$$

где  $S$  – площадь ячейки ABCD.

Далее распишем сумму (3.7) для случая декартовой сетки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Sq_{jk}) + F_{AB}\Delta y_{AB} - G_{AB}\Delta x_{AB} + \\ + F_{BC}\Delta y_{BC} - G_{BC}\Delta x_{BC} - \\ - F_{CD}\Delta y_{CD} + G_{CD}\Delta x_{CD} - \\ - F_{DA}\Delta y_{DA} + G_{DA}\Delta x_{DA} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

С учетом того, что  $\Delta y_{AB} = \Delta x_{BC} = \Delta y_{CD} = \Delta x_{DA} = 0$ , а  $\Delta x_{AB} = \Delta x_{CD} = \Delta x$ ,  $\Delta y_{BC} = \Delta y_{DA} = \Delta y$ ,  $S = \Delta x\Delta y$ , получаем:

$$\frac{d}{dt}(\Delta x\Delta yq_{jk}) + (G_{CD} - G_{AB})\Delta x + (F_{BC} - F_{DA})\Delta y = 0. \quad (3.9)$$

Если теперь уравнение (3.9) разделить на  $\Delta x\Delta y$ , то получится конечно-разностная аппроксимация балансового уравнения (3.4) по пространству. В этом смысле метод конечных объемов на декартовых прямоугольных сетках сводится к методу конечных разностей.

Мы рассмотрели случай дискретизации уравнения первого порядка. В случае, если требуется дискретизовать слагаемые, содержащие вторые производные, применяют теорему Грина:

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint_{ABCD} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx \right), \quad (3.10)$$

где  $\Phi$  – некоторая функция.

Дискретная форма записи (3.10) имеет следующий вид:

$$\sum_{AB}^{DA} \left( \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rangle \Delta y - \langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \rangle \Delta x \right). \quad (3.11)$$

Оператор  $\langle . \rangle$  означает взятие среднего значения величины на грани. Обычно в качестве такого значения принимается значение величины на центроиде рассматриваемой грани.

### 3.4. Временная дискретизация

Для моделирования переходных процессов основные балансовые уравнения должны быть дискретизированы как в пространстве, так и во времени. Пространственная дискретизация для уравнений, зависящих от времени, идентична стационарному случаю. Временная дискретизация включает в себя интегрирование каждого члена в дифференциальных уравнениях с шагом по времени  $\Delta t$ . Интеграция переходных членов проста, как показано ниже.

Пусть дано исходное уравнение баланса величины  $q$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = F(q). \quad (3.12)$$

Тогда дискретизация по времени первого порядка точности дается выражением

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = F(q^n) \quad (3.13)$$

для явной временной схемы и выражением

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = F(q^{n+1}) \quad (3.14)$$

для неявной временной схемы.

Преимущество полностью неявной схемы состоит в том, что она безусловно устойчива по отношению к шагу по времени. Если же мы говорим о явной схеме, то для нее шаг по времени ограничен условием Куранта-Фридриха-Леви. Использование явного шага по времени имеет ограниченную применимость. Он используется в основном для расчета переходного поведения движущихся волн,

потому что в таких случаях он более точен и менее затратен, чем методы неявного шага по времени. В Ansys явные временные схемы можно задать только для решателей на основе плотности.

### 3.5. Алгоритм SIMPLE

Основная сложность, возникающая при попытке численного решения уравнений несжимаемости и Навье-Стокса, заключается в отсутствии явного уравнения для вычисления поля давления, которое появляется в уравнении импульса. Из уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nabla \cdot \{ \nu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \} \quad (3.16)$$

видно, что, хотя поле скоростей может быть вычислено с помощью уравнения количества движения, поле давления, появляющееся в уравнении количества движения, не может быть вычислено непосредственно из уравнения неразрывности. В силу несжимаемости потока при решении (3.15)–(3.16) нельзя использовать уравнения состояния (например, уравнение Менделеева-Клапейрона).

Суть алгоритма SIMPLE заключается в том, чтобы получить уравнение для расчета давления из уравнений Навье-Стокса и неразрывности, а также вычислить корректирующую поправку для поля скорости, чтобы оно удовлетворяло уравнению неразрывности на каждой итерации.

Уравнение Навье-Стокса может быть записано в следующем матричном виде:

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица коэффициентов, полученная после дискретизации уравнения (3.16) методом конечных объемов.

Далее можно разделить матрицу  $\mathbf{M}$  на два слагаемых – матрицу  $\mathbf{A}$ , содержащую все диагональные компоненты матрицы  $\mathbf{M}$ , и матрицу  $\mathbf{B}$ , содержащую все недиагональные компоненты матрицы  $\mathbf{M}$ . Тогда справедливо следующее:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{H} = -\frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{H} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$ .

Учитывая, что для диагональной матрицы можно легко вычислить обратную матрицу, уравнение (3.18) можно переписать так:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \frac{\nabla p}{\rho_0}. \quad (3.19)$$

Если теперь подставить (3.19) в уравнение неразрывности (3.15), получим следующее уравнение:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{A}^{-1}}{\rho_0} \cdot \nabla p \right) = \nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}). \quad (3.20)$$

Получено уравнение Пуассона для расчета поля давления. В алгоритме SIMPLE оно решается вместо уравнения (3.15). Очевидно, данное уравнение вместе с уравнениями (3.17) и (3.19) могут быть легко дискретизованы с помощью метода конечных объемов.

Алгоритм SIMPLE включает в себя три базовых шага:

1. Расчет пробных значений компонент вектора скорости на новом временном слое путем решения уравнения Навье-Стокса (3.17).
2. Расчет узловых значений поля давления посредством решения уравнения (3.20).
3. Использование рассчитанного поля давления для корректировки пробных значений компонент вектора скорости на предмет удовлетворения уравнения неразрывности. Для этого решается уравнение (3.19).

Если на первом и втором шагах данного алгоритма расчет компонент вектора скорости и давления происходит с использованием неявных схем, то на третьем шаге алгоритма корректировка компонент вектора скорости осуществляется по явной формуле (3.19), что, по-видимому, и связано с таким названием алгоритма – SIMPLE (Semi-implicit method for pressure-linked equations). Шаг 1 называется предиктором, а шаги 2-3 – корректором.

### 3.6. Алгоритм PISO

Одним из недостатков алгоритма SIMPLE является то, что после того, как на данной глобальной временной итерации мы выполняем все три базовых шага этого алгоритма, результирующее поле скоростей и давлений таково, что уравнение (3.20) не выполняется. Оно выполняется после шага 2 алгоритма, однако на шаге 3 мы проводим корректировку поля скорости, вследствие чего матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{H}$  изменяются, что приводит к нарушению равенства в (3.20).

Данная ситуация может быть поправлена только на следующей глобальной итерации при выполнении шага 2. И этого не всегда бывает достаточно, особенно при исследовании нестационарных течений. Одним из вариантов избежания данного недостатка является использование алгоритма PISO (Pressure-Implicit with

Splitting of Operators). Суть данного алгоритма в том, чтобы в начале каждой итерации сделать один шаг предиктора и несколько последовательных шагов корректора. Это позволит добиться более качественной увязки полей давления и скоростей потока.

На рис. 3.3 представлено сравнение алгоритмов SIMPLE и PISO на примере выполнения одной глобальной временной итерации. Алгоритм PISO записан для случая двух подытераций внутреннего цикла корректора, однако на практике алгоритм PISO может включать в себя любое заданное количество подытераций внутреннего цикла.

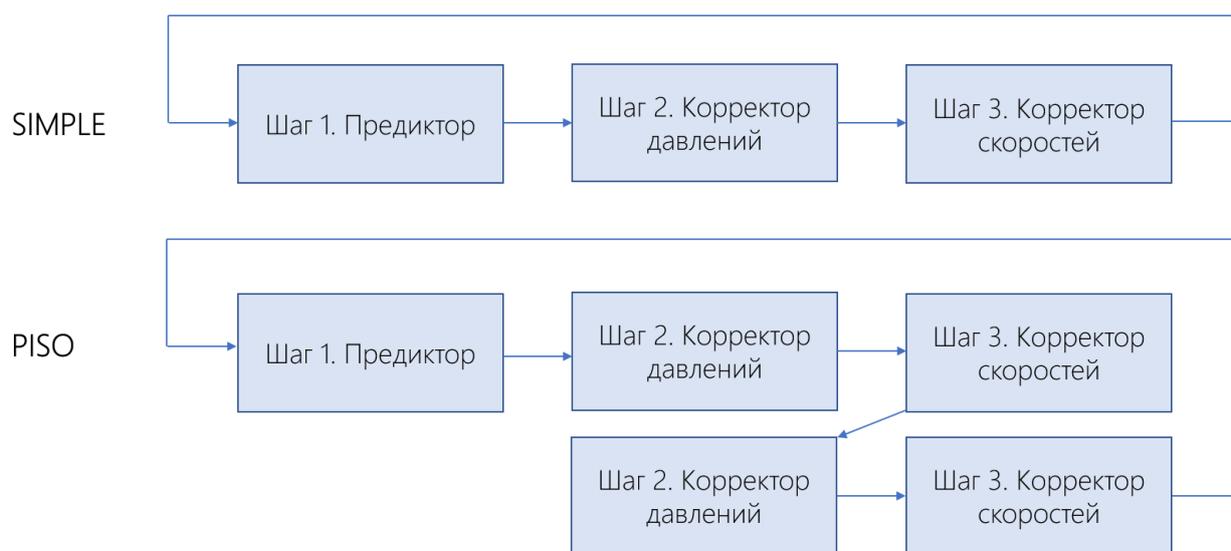


Рис. 3.3. Сравнение алгоритмов SIMPLE и PISO

### 3.7. Численные модели турбулентности

Ранее речь шла об особенностях численной дискретизации уравнений баланса основных исследуемых характеристик потока в общем случае, не вдаваясь в смысл данных характеристик. В данном параграфе обсудим выбор исследуемых характеристик потока, который может оказаться весьма нетривиальным, применительно к расчету турбулентных течений жидкостей и газов.

Экспериментальным путём установлено, что существует два принципиально различных режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный. Ламинарным называется упорядоченное слоистое движение жидкости без поперечного перемешивания и пульсаций скорости и давления. Ламинарный режим может установиться при движении очень вязких жидкостей: глицерина, минеральных масел, нефти, мазута. Он наблюдается в тонких капиллярных трубках: при фильтрации воды в порах грунта и движении крови в кровеносных сосудах. Только в ламинарном режиме возможно получение точных решений уравнения движения жидкости (уравнений Навье – Стокса), например, течение Пуазейля.

В рассматриваемом курсе мы практически не будем затрагивать вопрос расчета ламинарных течений жидкостей и газов. Это связано с тем, что ламинарные течения в природе встречаются довольно редко, а численный расчет ламинарных течений жидкостей или газов относительно прост, поскольку в этом случае требуется решать уравнения баланса только для основных величин: скорости потока, давления (или плотности), энергии. Не так просто обстоит дело в турбулентных режимах течения.

Турбулентным называется вихревое, хаотичное, крайне нерегулярное движение жидкости. Оно характеризуется пульсирующими полями скорости, давления и прочих характеристики потока. Эти колебания смешивают переносимые количества, такие как импульс, энергия и концентрация частиц, а также вызывают колебания переносимых количеств. Весь спектр турбулентных колебаний должен учитываться в том или ином виде (явно или косвенно) для получения корректного решения. Однако поскольку эти колебания могут быть мелкомасштабными и высокочастотными, они слишком дороги в вычислительном отношении, чтобы моделировать их явно.

Максимальный размер турбулентных вихрей, существующих в потоке, имеет порядок характерного линейного масштаба течения. В то время как минимальный размер турбулентных вихрей, начиная с которого вихри диссипируют в тепло под воздействием вязкости, определяется колмогоровским масштабом:

$$\eta_k = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.21)$$

где  $\varepsilon$  – местная скорость диссипации на единицу массы,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Величина  $\eta_k$  имеет порядок 1 мм (для чисел Рейнольдса порядка 10 000 и характерного размера домена порядка 1 м).

Поэтому при использовании подхода **прямого численного моделирования** (Direct numeric simulation, DNS) характерный размер элемента должен быть порядка масштаба (3.21). Все пространственные масштабы турбулентности должны быть разрешены в вычислительной сетке, от наименьших диссипативных масштабов (микромасштабов Колмогорова) до наибольшего масштаба. Это связано с тем, что в рамках прямого численного моделирования уравнения Навье-Стокса решаются численно без какой-либо модели турбулентности.

Этот подход довольно экзотичен и практически всегда не оправдан с точки зрения вычислительных затрат, а потому вместо того, чтобы пытаться смоделировать весь спектр турбулентных вихрей до масштаба (3.21), чаще всего бывает эффективнее усреднить по времени точные управляющие уравнения, или иным образом изменить их для устранения разрешения малых масштабов. Это приво-

дит к модифицированному набору уравнений, решение которых требует меньших вычислительных затрат. Однако модифицированные уравнения обычно содержат дополнительные неизвестные переменные, характеризующие явление турбулентности, а для определения этих дополнительных переменных в терминах известных величин необходимо решать дополнительные дифференциальные уравнения переноса.

В настоящее время существует множество подходов к тому, какие дополнительные переменные вводить и какие дополнительные переменные для них решать. Эти подходы порождают различные модели турбулентности. Наиболее популярные на сегодня модели турбулентности классифицированы ниже:

1. Модели, основанные на усреднении по Рейнольдсу (RANS-based).

1.1. Линейные модели турбулентности.

1.1.1. Алгебраические модели.

1.1.2. Модели с дополнительными 1 или 2 уравнениями переноса.

1.2. Нелинейные модели турбулентности, алгебраические модели напряжений.

1.3. Модели переноса Рейнольдсовых напряжений.

2. Метод крупных вихрей.

3. Метод отсоединенных вихрей и прочие гибридные модели.

4. Прямое численное моделирование.

Далее по порядку опишем особенности каждой из моделей.

### ***3.7.1. Метод крупных вихрей***

Метод крупных вихрей (Large eddy simulation, LES) – это метод моделирования турбулентных потоков, основная идея которого заключается в снижении вычислительных затрат за счет пренебрежения наименьшими масштабами длины, которые являются наиболее дорогостоящими для вычисления, с помощью фильтрации нижних частот уравнений Навье–Стокса. Такая фильтрация нижних частот, которую можно рассматривать как усреднение по времени и пространству, эффективно удаляет мелкомасштабную информацию из численного решения. Однако эта информация является существенной, и ее влияние на поле течения должно быть смоделировано корректным образом (последняя задача на сегодняшний день представляет собой активную область научных исследований).

Первоначально метод LES был предложен в 1963 г. Джозефом Смагоринским для моделирования атмосферных воздушных потоков и впервые исследован Дирдорфом в 1970 г. [22]. В настоящее время LES применяется в широком спектре инженерных приложений, включая горение, акустику и моделирование

пограничного слоя атмосферы. Является основным расчетным методом в задачах, связанных с горением, так как «ухватывает» низкочастотные изменения параметров, в отличие от подхода RANS, когда в итоге получаются постоянные средние значения величин.

### 3.7.2. Усреднение по Рейнольдсу

Основным инструментом, необходимым для вывода усредненных по Рейнольдсу уравнений (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations, RANS) из мгновенных уравнений Навье–Стокса, является усреднение по Рейнольдсу. Усреднение по Рейнольдсу подразумевает, прежде всего, разделение переменной потока (например, компонент вектора скорости потока  $u_i$ ) на среднюю часть  $\bar{u}_i$  (усредненную по некоторому малому промежутку времени  $\tau$ ) и флуктуирующую часть  $u_i'$ :

$$u_i(x_j, t) = \bar{u}_i(x_j, t) + u_i'(x_j, t), \quad (3.22)$$

где  $x_j$  – компоненты вектора положения,  $t$  – время.

Операция усреднения обладает рядом свойств. Одним из таких свойств является то, что среднее значение флуктуирующей величины равно нулю ( $\bar{u}_i' = 0$ ). Усреднение осуществляется на промежутке времени  $\tau$ , называемом периодом усреднения, который предполагается достаточно большим по сравнению с периодом пульсаций и достаточно малым по сравнению с характерным временем для усреднённого течения.

Далее (3.22) подставляется в уравнения баланса массы и импульса, после чего осуществляются преобразования данных уравнений с учетом ряда свойств операции усреднения, а в итоге формулируются усредненные по Рейнольдсу уравнения (RANS). В предположении стационарности усредненных характеристик потока уравнения RANS имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right). \quad (3.24)$$

Принципиальное отличие усредненных по Рейнольдсу уравнений состоит в том, что в уравнении баланса импульса (3.24) появляется новое слагаемое, включающее в себя флуктуации скорости и характеризующее турбулентные (рейнольдсовы) напряжения.

Усреднение по Рейнольдсу уравнений динамики вязкой жидкости (уравнений Навье–Стокса и несжимаемости) приводит к уравнениям Рейнольдса, чаще

называемым уравнениями для первых моментов. В общем случае проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных (рейнольдсовых) напряжений:

$$\tau_t = \rho \begin{pmatrix} \overline{u_1'^2} & \overline{u_1' u_2'} & \overline{u_1' u_3'} \\ \overline{u_2' u_1'} & \overline{u_2'^2} & \overline{u_2' u_3'} \\ \overline{u_3' u_1'} & \overline{u_3' u_2'} & \overline{u_3'^2} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

с тензором осредненных скоростей деформаций.

Вероятно, первая, основанная на чисто интуитивных соображениях, попытка описания процессов переноса количества движения в турбулентных потоках принадлежит Буссинеску. Согласно модели Буссинеска турбулентное движение среды рассматривалось как движение ньютоновской «турбулентной жидкости». Иными словами, формула, получившая имя Буссинеска, предполагала линейную связь тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (3.26)$$

где  $\mu_t$  – турбулентная вязкость,  $k$  – турбулентная кинетическая энергия,  $S_{ij}$  – средняя скорость деформирования потока:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} (\overline{u_1' u_1'} + \overline{u_2' u_2'} + \overline{u_3' u_3'}), \quad (3.27)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.28)$$

С учетом гипотезы Буссинеска задача, связанная с описанием турбулентного течения потока, свелась к определению неизвестной функции  $\mu_t$ . Вычислив эту величину и подставив ее в уравнения RANS, дополненные необходимыми начальными и граничными условиями, мы сможем рассчитать распределения средних характеристик потока – скоростей, давлений, энергии и пр. В отличие от коэффициента молекулярной вязкости  $\mu$  коэффициент  $\mu_t$  неоднороден по объему рассматриваемого потока и связан с другими свойствами жидкости. Он может сильно изменяться от точки к точке пространства в зависимости от типа течения.

Иногда при расчетах турбулентных течений коэффициент турбулентной вязкости принимается постоянным: (как и полагал первоначально Буссинеск). Такое предположение вместе с гипотезой Буссинеска является простейшей моделью турбулентности, называемой **моделью Буссинеска**. Подвергаясь справедливой критике как физически необоснованное, это предположение, однако, довольно широко применяется, поскольку позволяет получать вполне приемлемые результаты в инженерной практике. Но столь грубое описание турбулентности

допустимо в тех случаях, когда величина турбулентного переноса не имеет существенного значения или использование более сложных конструкций представляется неоправданным.

В более реалистичных моделях турбулентности наряду с гипотезой Буссинеска либо используются алгебраические соотношения, связывающие коэффициент турбулентной вязкости с характеристиками осредненного течения (алгебраические модели), либо строятся дополнительные уравнения переноса для осредненных пульсационных характеристик, через которые выражается  $\mu_t$ .

### 3.7.3. Теория пути перемешивания Прандтля

Модель турбулентности Прандтля относится к классу алгебраических моделей, так как использует алгебраические соотношения, связывающие коэффициент турбулентной вязкости с характеристиками осредненного течения. Данная модель базируется на понятии пути перемешивания  $l$ .

Рассмотрим плоскопараллельный поток со скоростью, направленной вдоль оси  $x$  (см. рис. 3.4), и выделим в нем две параллельные линии тока, отстоящие друг от друга на расстоянии  $l$ . Примем, что усреднённое поле скоростей имеет только одну ненулевую компоненту – параллельную оси  $x$ . При этом в силу турбулентного характера течения будет происходить перенос количества движения с одной линии тока на другую и наоборот. Скорость переноса количества движения между смежными линиями тока слоев – это, по сути, поперечная пульсационная скорость.

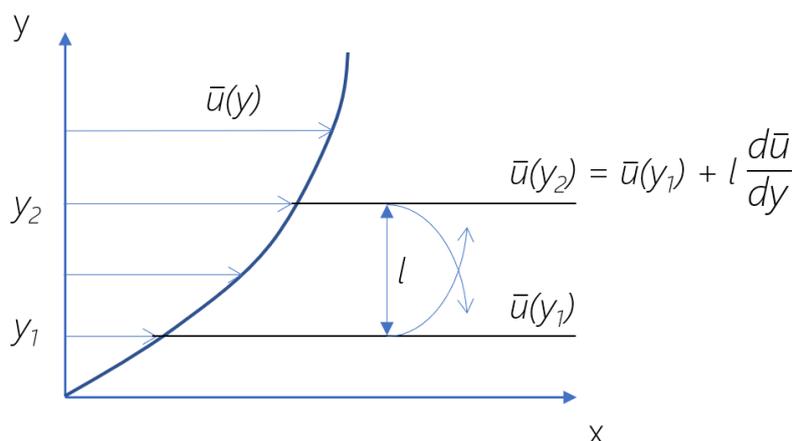


Рис. 3.4. Схема модели пути смешения по Прандтлю

С другой стороны, из разложения функции  $\bar{u}(y)$  в ряд Тейлора в окрестности  $y_1$  следует, что разница скоростей в двух линиях тока определяется  $y$ -компонентой градиента средней скорости потока. Следовательно, поперечная пульсационная скорость равна  $v' = l \, d\bar{u}/dy$ . Продольная пульсационная скорость  $u'$

равна той же самой величине. По данной причине Рейнольдсовская составляющая  $-\rho\bar{u}\bar{v}$  касательного напряжения, взятая по модулю, может быть рассчитана следующим образом:

$$\tau_t = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (3.29)$$

Согласно закону вязкого трения Ньютона, величину  $\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$  в (3.29) можно трактовать как динамический коэффициент турбулентной вязкости. Тогда его отношение к плотности

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (3.30)$$

можно трактовать как кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

По своему физическому смыслу величина  $l$  аналогична длине свободного пробега молекулы в теории молекулярного обмена, а расстояние от линии тока, откуда объем вышел, до линии тока, где произошло перемешивание, принято называть путем перемешивания. По данной причине теория называется теорией пути перемешивания Прандтля. В настоящее время в литературе считается, что величина  $l$  является масштабом турбулентности.

Модель пути перемешивания позволяет достаточно точно рассчитать характеристики турбулентных течений при использовании эмпирически подобранных зависимостей для пути перемешивания.

Теория Прандтля считается отправной точкой современной полуэмпирической теории турбулентности. В 1950-х гг. были опубликованы работы Ван-Дриста [23] и Клаузера [24], которые оказались весьма продуктивными для полуэмпирической теории пристенной турбулентности. В работе Ван-Дриста была решена проблема взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на основе аналогии между движением вязкой жидкости вблизи колеблющейся пластины и турбулентным движением в окрестности стенки. Был предложен демпфирующий множитель Ван-Дриста ( $D$ ), который описывает данное взаимодействие:

$$D = \left[ 1 - \exp \left( -\frac{yv_*}{26\nu} \right) \right]^2. \quad (3.31)$$

Путь перемешивания в этом случае равен

$$l = \kappa y D, \quad (3.32)$$

где  $\kappa$  – константа Кармана,  $y$  – расстояние до стенки.

Также было введено понятие эффективной вязкости

$$v_{eff} = \nu + \nu_t D. \quad (3.33)$$

Это позволило отказаться от использования дискретной схемы Прандтля, которая разделяет течение на ламинарный подслой и турбулентное ядро, и открыло возможности для непрерывного описания структуры пограничного слоя. Работа Клаузера завершила формирование современных представлений о структуре пограничного слоя, который состоит из пяти слоев. Внутренняя область, также называемая областью «закона стенки», включает в себя вязкий подслой, буферную зону и зону логарифмического профиля скоростей, занимая приблизительно 20% толщины пограничного слоя (см. рис. 3.5).

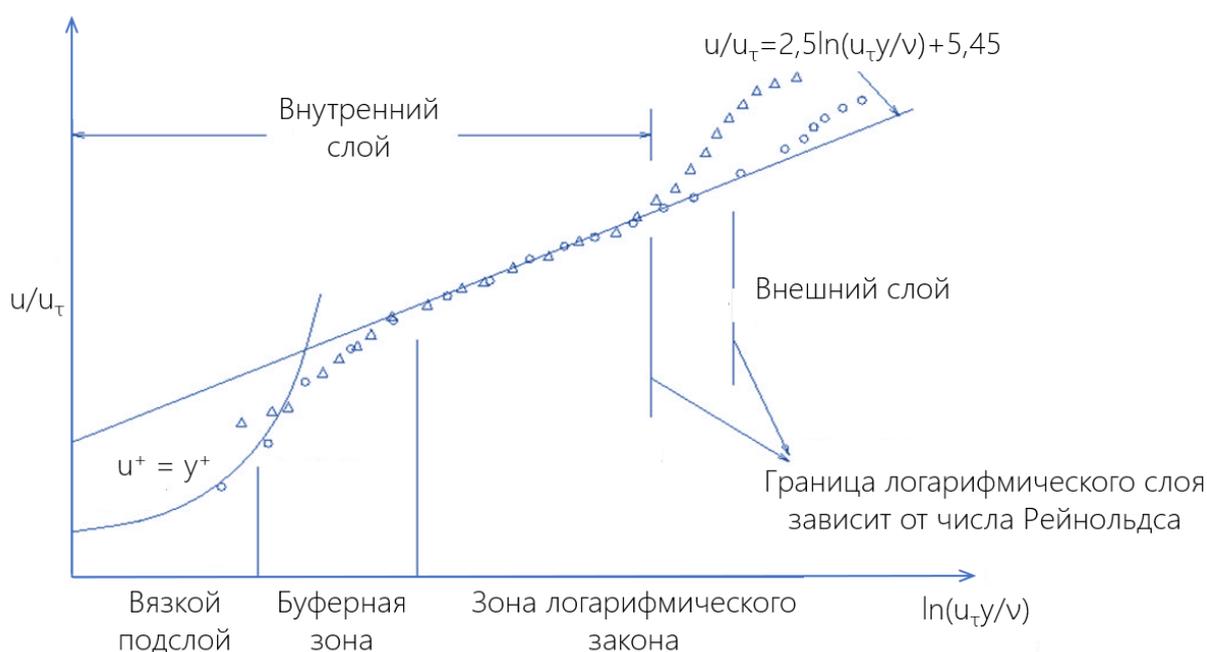


Рис. 3.5. Структура пограничного слоя

В этой области образуется около 80% энергии турбулентности. Существование «закона стенки» (логарифмического профиля скоростей) обусловлено квазиизотропностью мелкомасштабной турбулентности внутренней области. Опыты Клаузера по исследованию затухания возмущений показали, что внутренняя область имеет «короткую память» (т.к. затухание возмущений происходит на «коротких» расстояниях порядка нескольких толщин пограничного слоя), тогда как внешняя область имеет «долгую память».

В целом в рамках описанного подхода путь перемешивания обычно считается алгебраически – с помощью более или менее простых формул, например, формулы (3.32), исходя из расстояния до ближайшей стенки. Однако экспериментально установлено, что турбулентные характеристики потока подвержены конвективному и диффузионному переносу, а потому такой статический подход

к определению турбулентной вязкости оказывается не совсем физичным. Необходимо решать уравнения переноса турбулентных характеристик потока. По данной причине впоследствии были развиты модели турбулентности, основанные на решении уравнения переноса таких характеристик. Далее речь пойдет о таких моделях.

### 3.7.4. Двухпараметрические модели турбулентности

Наиболее представительную группу дифференциальных моделей турбулентности на сегодняшний день составляют модели с двумя дополнительными уравнениями (или двухпараметрические модели турбулентности). С чем это может быть связано? Турбулентные вихри в каждом малом объеме рассматриваемой среды можно охарактеризовать двумя параметрами: интенсивностью и средним размером. Поэтому если мы хотим лучше учесть структуру турбулентного потока, мы должны пользоваться как минимум двумя дополнительными параметрами.

Среди двухпараметрических моделей наиболее часто используются модели  $k - \varepsilon$  и модели  $k - \omega$ . Это две группы моделей, в каждую из которых входят несколько разновидностей (или модификаций). Прежде всего, рассмотрим вывод уравнений в моделях  $k - \varepsilon$ .

#### Модели турбулентности $k - \varepsilon$

Как было показано ранее, уравнение Навье-Стокса с усредненными по Рейнольдсу характеристиками имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ = \rho g_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Если выполнить некоторые алгебраические преобразования и умножить (3.34) на  $u_j$ , то данное уравнение можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) &= - \left( \overline{u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) - 2\mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \\
&\quad - \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
&\quad + \mu \Delta \overline{u_i u_j}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Если теперь здесь ввести обозначение  $k = 0.5 \overline{u'_i u'_j}$  и принять, что  $i=j$ , то получится уравнение

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) &= - \overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_i}}{\partial x_k} \\
&\quad - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \mu \Delta k.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Величину  $k$  исходя из ее размерности можно назвать кинетической энергией. А поскольку она содержит в себе усредняемые по времени флуктуации скорости, ее называют турбулентной кинетической энергией. Она также присутствует в выражении для турбулентной вязкости, как это следует из (3.26). Второе слагаемое справа, по определению, является диссипацией  $\varepsilon$  турбулентной кинетической энергии, умноженной на плотность потока:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k}. \tag{3.37}$$

Четвертое слагаемое правой части (3.36) является генерацией энергии, несмотря на знак минус:

$$P = - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{3.38}$$

Первый множитель справа в (3.38) определяется с помощью формулы Буссинеска (3.26). Также следует отметить, что слагаемое (3.38), отвечающее за генерацию энергии, часто записывают с индексом  $k$ . Это делается в тех случаях, когда помимо данного, основного слагаемого присутствуют другие слагаемые, также характеризующие генерацию турбулентной энергии. Примером такого

слагаемого может быть генерация энергии из-за сил плавучести – оно имеет несколько иное выражение, в которое входят число Прандтля и градиент температуры.

Далее с учетом предположения

$$-\frac{1}{2} \frac{\overline{\partial u'_k u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (3.39)$$

получаем окончательное уравнение для турбулентной кинетической энергии:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right). \quad (3.40)$$

Здесь появился новый эмпирический параметр  $\sigma_k$ , который в самом простом случае принимается равным единице.

Уравнение для диссипации записывается по аналогии с (3.40) в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{C'_{1\varepsilon} P \varepsilon}{k} - \frac{C'_{2\varepsilon} \varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right), \quad (3.41)$$

где  $C'_{1\varepsilon}$ ,  $C'_{2\varepsilon}$  и  $\sigma_\varepsilon$  – эмпирические константы. В стандартной модели  $k - \varepsilon$  их принимают равными 1,44, 1,92 и 1,3 соответственно.

Два представленных выше уравнения составляют основу самой первой версии моделей этого типа – standard  $k - \varepsilon$  [25]. Коэффициент турбулентной вязкости в модели standard  $k - \varepsilon$  рассчитывается по формуле

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.42)$$

Эмпирическая константа  $C_\mu$  принимается равной 0,09 в модели standard  $k - \varepsilon$ .

Следует отметить, что в руководствах пользователя различных программных комплексов (например, Ansys Fluent) уравнения стандартной модели  $k - \varepsilon$  записываются иногда несколько иначе, с некоторыми дополнительными источниками и стоковыми членами [21], которые мы здесь для простоты опустили.

Применение модели standard  $k - \varepsilon$  сталкивается с трудностями при описании пограничных слоев с градиентом давления, сильно закрученных течений с большой кривизной линий тока, ламинарно-турбулентного перехода, а также при моделировании сжимаемых и отрывных течений (standard  $k - \varepsilon$  модель не дает удовлетворительного предсказания точки отрыва пограничного слоя). На рис. 3.6 представлены некоторые примеры течений, плохо воспроизводимых данной моделью. Во многих случаях она дает завышенные значения турбулент-

ной энергии, например, в окрестности критической точки, но хорошо согласуется с данными измерений по скорости. Для учета влияния стенки (при  $Re_t$  порядка 1) используются демпфирующие функции.

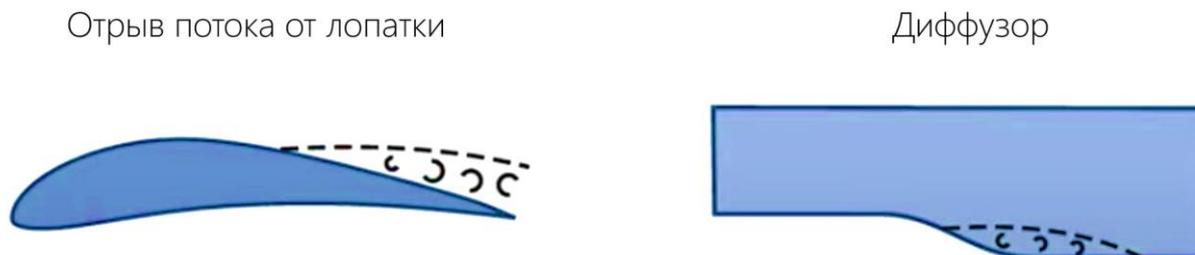


Рис. 3.6. Проблемы модели  $k - \varepsilon$

Существует несколько модификаций описанной выше модели  $k - \varepsilon$ , которые частично решают проблемы стандартной модели.

В модели RNG  $k - \varepsilon$  [26] вводится дополнительное условие в уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, которое улучшает точность решения для потоков с большими величинами касательных напряжений. При этом также учитывается эффект циркуляции турбулентности, что улучшает точность расчета, высокоскоростных вращающихся и циркуляционных потоков. Вводится аналитическая зависимость для вычисления турбулентного числа Прандтля в процессе решения задачи (в standard  $k - \varepsilon$  турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение). Использование аналитической формулы для расчета турбулентной вязкости позволяет более качественно рассчитывать характеристики турбулентных течений при низких числах Рейнольдса (при хорошем сеточном разрешении в области пограничного слоя).

Модифицированное уравнение переноса диссипации в модели RNG  $k - \varepsilon$  представлено ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon u_i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (3.44)$$

$$\eta = \frac{Sk}{\varepsilon}, \quad S = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}. \quad (3.45)$$

При этом турбулентная вязкость рассчитывается так же, как и в стандартной модели  $k - \varepsilon$ . Здесь  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформации.

Интересно отметить, что значения всех констант (кроме экспериментально полученной величины  $\beta$ ) выводятся явно в процедуре ренормализации групп (эта процедура определила и название данной модификации модели  $k - \varepsilon$ , RNG – Re-Normalization Group). Они приведены ниже в таблице и сравнены с часто используемыми значениями в стандартной модели  $k - \varepsilon$ .

Таблица 3.2

**Параметры моделей standard, RNG и realizable  $k - \varepsilon$**

Параметр	Standard $k - \varepsilon$	RNG $k - \varepsilon$	Realizable $k - \varepsilon$
$C_\mu$	0,09	0,00845	1,44
$\sigma_k$	1,0	0,7194	1,0
$\sigma_\varepsilon$	1,3	0,7194	1,2
$C_{1\varepsilon}$	1,44	1,42	1,44
$C_{2\varepsilon}$	1,68	1,68	–
$C_2$	–	–	1,9
$\eta_0$	–	4,38	–
$\beta$	–	0,012	–

Еще одна модификация – модель realizable  $k - \varepsilon$  [27]. По сравнению со standard  $k - \varepsilon$  в realizable  $k - \varepsilon$  модели вводится улучшенный способ расчета турбулентной вязкости. Преимущество данной модели состоит в том, что она более точно предсказывает распределение диссипации плоских и круглых струй, а также обеспечивает лучшее предсказание характеристик вращающихся потоков, пограничных слоев, подверженных сильным градиентам давления, отрывных течений, рециркуляционных течений и потоков, в которых существуют развитые вторичные течения. Недостаток модели заключается в том, что она завышает или занижает турбулентную вязкость потока, когда вычислительная область содержит одновременно вращающиеся и неподвижные области (при использовании множественных систем координат или скользящих сеток). Это объясняется тем, что модель использует эффект осредненного вращения при определении турбулентной вязкости.

Модифицированное уравнение переноса диссипации в модели realizable  $k - \varepsilon$ , а также измененное выражение для турбулентной вязкости представлены ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon u_i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon \\ &\quad - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon}, \quad (3.47)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.48)$$

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{k U^*}{\varepsilon}} \quad (3.49)$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad (3.50)$$

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij} - 3 E_{ijk} \omega_k, \quad (3.51)$$

где  $\Omega_{ij}$  – тензор средней скорости вращения во вращающейся системе отсчета с угловой скоростью  $\omega_k$ ;  $E_{ijk}$  – тензор Леви-Чивита.

Величина  $\varepsilon$  представляет скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в наименьших масштабах, где турбулентность почти изотропна. Вблизи стенок, где турбулентное число Рейнольдса низкое, турбулентность не изотропна, и скорость диссипации должна быть соответствующим образом изменена. По данной причине для моделирования тонкого пограничного слоя у стенок в моделях  $k - \varepsilon$  обычно вводятся специальные пристеночные функции. Пристеночные функции основаны на идее, что основная структура турбулентных пограничных слоев хорошо известна. Идея следующая: взамен явного разрешения уравнений Навье-Стокса и неразрывности во всем пограничном слое вплоть до вязкого подслоя с помощью очень густой сетки мы можем сделать сетку более грубой, но при условии, чтобы на участке от центроида граничной со стенкой ячейки до самой стенки использовалась нелинейная интерполяция (см. рис. 3.7).

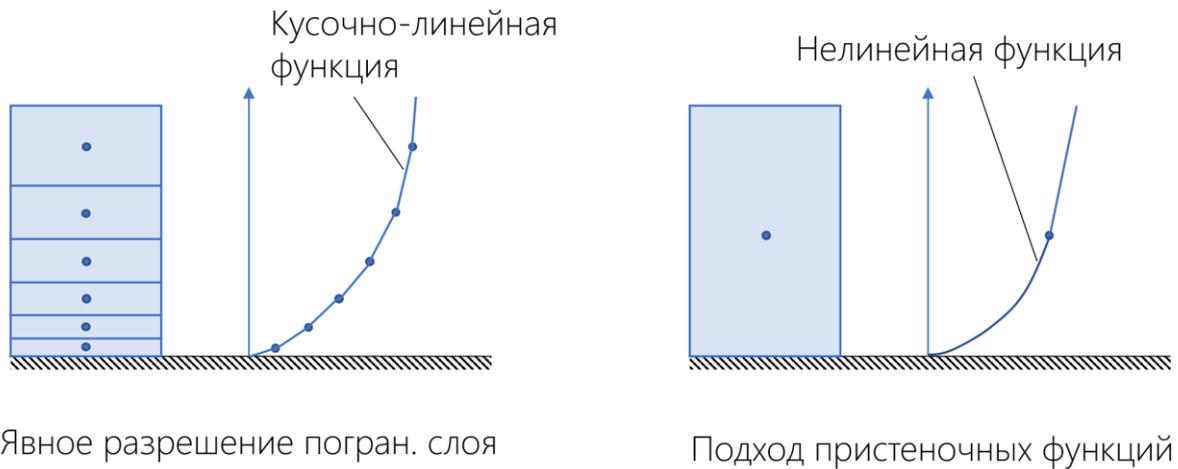


Рис. 3.7. Суть подхода пристеночных функций

Для того чтобы понять, как количественно определить данную нелинейную интерполяцию, необходимо дать некоторые определения. Подходящим масштабом скорости течения в пристеночной области является **скорость трения**, определяемая выражением

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad (3.52)$$

где  $\tau_w$  – напряжение сдвига на стенке, а  $\rho_w$  – плотность потока на стенке. Используя эту шкалу скоростей, можно получить выражения для **безразмерной скорости  $u^+$** , направленной параллельно стенке, и **безразмерной координаты  $y^+$** , отсчитываемой по нормали от стенки:

$$u^+ = \frac{u}{u^*}, \quad (3.53)$$

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu}, \quad (3.54)$$

где  $u$  – составляющая скорости, параллельная стенке,  $y$  – расстояние по нормали к стенке,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Типичный профиль скорости турбулентного пограничного слоя показан на рис. 3.5.

Уравнение, описывающее профиль скорости в логарифмической области, имеет вид

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (3.55)$$

где  $\kappa$  – постоянная фон Кармана, а  $B$  – дополнительная постоянная. Эмпирически установлено, что значения  $\kappa$  и  $B$  попадают в диапазоны 0,40–0,41 и 4,9–5,5 соот-

ветственно. В расчетах обычно для  $k$  и  $B$  используются значения 0,41 и 5,0. Выражение (3.55) применяется в качестве нелинейной интерполяционной функции, если центроид крайней ячейки попадает в логарифмический подслой.

Использование пристеночных функций имеет ряд преимуществ. Обычно расчетные методы требуют достаточно высокого разрешения всего пограничного слоя. Следовательно, узел сетки, наиболее близкий к стенке, должен располагаться в вязком подслое, обычно при  $y^+$  меньше пяти. Для пристеночных функций первая точка сетки обычно располагается в нижней части логарифмической области примерно от  $y^+ = 30$  до  $y^+ = 100$ . Тем самым пристеночные функции приводят к значительной экономии количества точек сетки и объема необходимой компьютерной памяти. При использовании пристеночных функций требуется примерно в два раза меньше узлов сетки по сравнению с моделями с низким числом Рейнольдса (о них будет сказано далее). Поскольку минимальный шаг сетки для случая пристеночных функций намного больше, для заданного числа Куранта можно использовать больший временной шаг (для расчетов в установившемся режиме), что приводит к дополнительной экономии времени процессора. Уменьшение объема памяти, необходимого при использовании функций стенки, может быть чрезвычайно важно для расчета сложных трехмерных полей течения.

Одним из недостатков пристеночных функций является то, что логарифмическое уравнение не является точным для некоторых полей течения, например, с областями отрывного потока. Кроме того, стандартная формулировка пристеночной функции требует предположения, что турбулентность изотропна в первой точке сетки, удаленной от стенки, что не всегда справедливо.

Для решения вышеупомянутой проблемы в своё время было разработано множество низкорейнольдсовых моделей турбулентности (low-Re formulation) типа  $k - \varepsilon$ . Среди них, к примеру, несколько моделей, основанных на тех же самых уравнениях (3.41) и (3.43) с дополнительными демпфирующими множителями при источниковых и стоковых членах. Они введены для того, чтобы уменьшить интенсивность диссипации энергии при приближении к стенке. В рамках таких модифицированных моделей  $k - \varepsilon$  появилась возможность моделировать внутренний пограничный слой вплоть до значений  $y^+$  порядка 1.

Однако предложенные в литературе эмпирические демпфирующие функции также оказались несовершенны, так как выводились только для частных случаев и не могли учесть весь спектр возможных гидродинамических условий.

## Модели турбулентности $k - \omega$

Другим решением проблемы некорректного моделирования турбулентности потока у стенки является изменение исходной системы уравнений. Например, в еще одном известном классе двухпараметрических моделей турбулентности (моделях  $k - \omega$ ) решаются уравнения переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  и еще одной переменной – удельной диссипации  $\omega$ , связанной с  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \beta^* \omega k. \quad (3.56)$$

Здесь  $\beta^*$  – некоторая числовая константа.

Такой подход позволяет избежать неограниченного роста  $k$  вблизи стенки из-за стремления  $\varepsilon$  к нулю. Также модели  $k - \omega$  оказались способными естественным образом рассчитать течение в пристеночной области без введения специальных демпфирующих пристеночных функций, как это имело место для low-Re  $k - \varepsilon$  моделей, что и стало основным достоинством данного класса моделей. В этом смысле модели  $k - \omega$  явно моделируют течение потока во всем пограничном слое вплоть до ламинарного подслоя у самой стенки. Именно по данной причине эти модели относятся к классу низкорейнольдсовых.

Термин «модель с низким числом Рейнольдса» звучит как противоречие, поскольку потоки могут быть турбулентными, только если число Рейнольдса достаточно велико. Обозначение «низкое число Рейнольдса» относится не к течению в глобальном масштабе, а к области вблизи стенки, где преобладают вязкие эффекты; вязкий подслой на рисунке выше. Модель с низким числом Рейнольдса – это модель, которая правильно воспроизводит ограничивающее поведение различных величин потока, когда расстояние до стенки приближается к нулю. Таким образом, модель с низким числом Рейнольдса должна, например, предсказывать, что  $u \sim y$  при  $y \rightarrow 0$ . Правильное предельное поведение означает, что модель турбулентности можно использовать для моделирования всего пограничного слоя, включая вязкий подслой и буферный слой.

Большинство моделей на основе  $\omega$  по своей конструкции являются моделями с низким числом Рейнольдса. При этом, стандартная модель  $k - \varepsilon$  и другие часто встречающиеся модели  $k - \varepsilon$  не являются моделями с низким числом Рейнольдса – они относятся к классу высокорейнольдсовых моделей. Однако некоторые из них могут быть дополнены так называемыми демпфирующими функциями, обеспечивающими правильное поведение ограничения. Они известны как модели  $k - \varepsilon$  с низким числом Рейнольдса и здесь обсуждаться не будут.

Согласно стандартной модели  $k - \omega$ , предложенной Уилкоксом [28], уравнение переноса для  $\omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega u_i)}{\partial x_i} \\ = \frac{\alpha\omega}{k} \rho P - \beta\rho\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega\mu_t) \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (3.58)$$

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}. \quad (3.59)$$

Здесь  $\tau_{ij}$  – это тензор турбулентных напряжений. Примечательно, что в правой части (3.59) теперь отсутствуют числовые множители за счет соответствующего подбора параметра  $\beta^*$  в (3.56).

Уравнение для переноса турбулентной кинетической энергии немного изменяется ввиду замены  $\varepsilon$  на  $\omega$ :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \rho P - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]. \quad (3.60)$$

Константы модели сведены в табл. 3.3. Важно отметить, что иногда константы  $\sigma_k$  и  $\sigma_\omega$  записываются не в числителе выражения для эффективной вязкости, а в знаменателе. В этом случае они имеют иные значения по сравнению с данными табл. 3.3 (вместо 1/2 следует их брать равными 2).

Таблица 3.3

### Параметры модели standard Wilcox's $k - \omega$

Параметр	$\alpha$	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
Значение	5/9	3/40	9/100	1/2	1/2

Основным недостатком классической модели Wilcox's  $k - \omega$  является ее сильная чувствительность к условиям потока на бесконечности. К примеру, если мы зададим некоторые граничные значения  $k_0$  и  $\omega_0$  на входе в расчетную область, то численное решение задачи будет сильно меняться даже при их малом изменении. Модели  $k - \varepsilon$  не обладали таким недостатком.

По данной причине Ментером в 1992 г. была изобретена модель SST  $k - \omega$ , которая, по сути, является комбинацией моделей  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$  [29]. Если мы возьмем уравнение для диссипации турбулентной кинетической энергии  $\varepsilon$  и с помощью связи (3.56) перейдем в нем к переменной  $\omega$ , то в результате получится уравнение, схожее с (3.57), но имеющее одно дополнительное слагаемое справа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega u_i)}{\partial x_i} &= \frac{\alpha\omega}{k} \rho P - \beta\rho\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right] \\ &+ \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial\omega}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Если теперь к этому слагаемому добавить весовой множитель вида

$$\frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial\omega}{\partial x_i} \rightarrow (1 - F_1) \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial\omega}{\partial x_i}, \quad (3.62)$$

$$F_1 = \tanh \left( \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{C D_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right), \quad (3.63)$$

то получится, что в пристеночной зоне данное слагаемое нулевое, а в ядре потока – нет. Аналогичным образом можно определить и турбулентную вязкость:

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)}, \quad (3.64)$$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.65)$$

Здесь  $S$  – скалярный параметр, зависящий от компонент тензора скоростей деформаций,  $y$  – расстояние до стенки.

В области около стенки величина  $\mu_t$  в (3.64) стремится к (3.59), в то время как в ядре потока она имеет значение, близкое к единице, что соответствует случаю моделей  $k - \varepsilon$ . В этом смысле с помощью таких стыковочных функций  $F_1$  и  $F_2$  удастся связать модели в единую модель. В области вблизи пограничного слоя мы будем иметь модель  $k - \omega$ , а в ядре потока – модель  $k - \varepsilon$  (см. рис. 3.8).

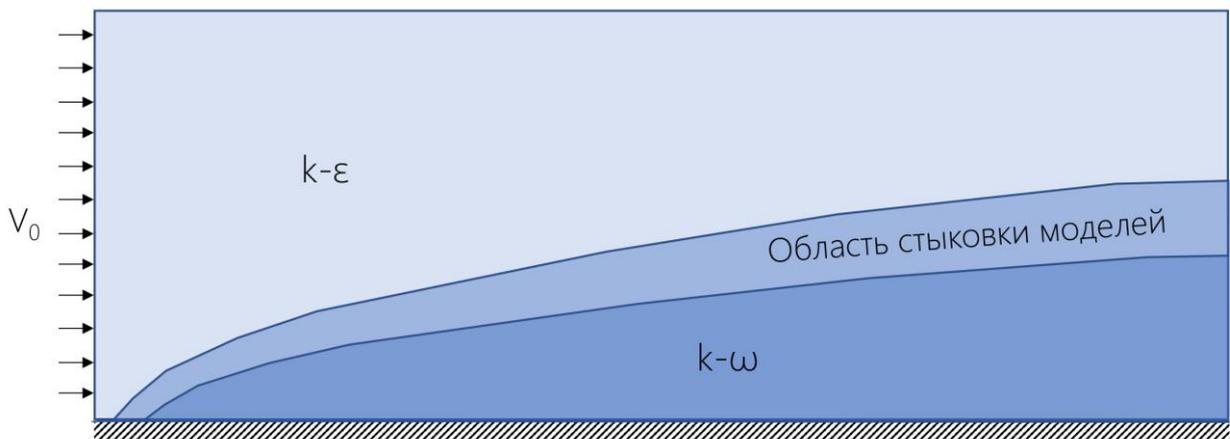


Рис. 3.8. Смысл модели SST  $k - \omega$

Первая стыковочная функция  $F_1$  также используется для того, чтобы состыковать между собой параметры моделей  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ , представленные в табл. 3.2 и 3.3. Для них используется следующая формула:

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1), \quad (3.66)$$

где в качестве  $\phi_i$  выступают параметры  $\alpha_i, \beta_i, \sigma_{ki}, \sigma_{\omega i}$ . Их значения представлены в табл. 3.4 – в ней пристеночный регион обозначен номером 1, а регион ядра потока – номером 2.

Таблица 3.4

**Параметры модели SST  $k - \omega$**

Регион	Параметры			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
1	5/9	3/40	0,85	0,5
2	0,44	0,0828	1	0,856

При этом параметр  $\beta^*$  не меняется при переходе из региона 1 в регион 2.

### 3.7.5. Модель турбулентности Transition SST

Модель SST  $k - \omega$  не следует путать с другой моделью турбулентности – **Transition SST**. Последняя также часто называется **моделью  $\gamma$ - $Re_\theta$** . Она основана на SST  $k - \omega$  модели, но в то же время сильно отличается от нее. В модели Transition SST присутствуют два дополнительных уравнения переноса, одно – для перемежаемости турбулентности (turbulent intermittency)  $\gamma$ , а второе – для числа Рейнольдса, в которой в качестве характерного пространственного размера выступает толщина потери импульса (momentum-thickness Reynolds number) [25, 30].

Перемежаемость турбулентности  $\gamma$  вводится в качестве множителя к слагаемому источника турбулентной энергии  $\rho P$ :

$$\rho P \rightarrow \rho P \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (3.67)$$

а также в качестве множителя к слагаемому диссипации турбулентной энергии  $\rho D = \beta^* \rho \omega k$ :

$$\rho D \rightarrow \rho D \min[\max(\gamma; 0,1), 1] \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (3.68)$$

По сути,  $\gamma$  является демпфирующим множителем в области ламинарного пограничного слоя в области, где турбулентный воздушный поток еще не стабилизировался гидродинамически. Корректный учет генерации турбулентной

энергии важен при рассмотрении, к примеру, задачи обтекания крыла или лопатки, задачи о нагреве корпуса космического корабля, входящего в атмосферу планеты (см. рис. 3.9).

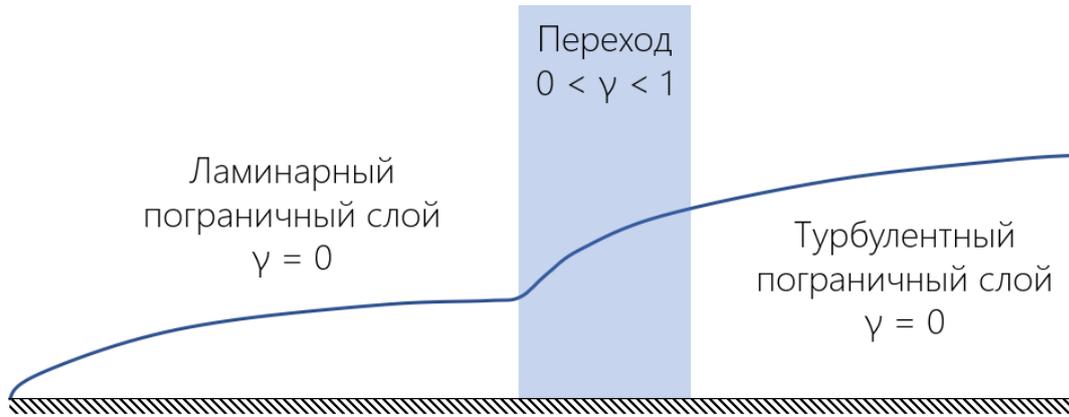


Рис. 3.9. Переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному

Переход от модели  $k - \omega$  к модели  $k - \varepsilon$  и обратно задается с помощью модифицированной сшивающей функции:

$$F_1^{(mod)} \rightarrow \max(F_1; F_3), \quad (3.69)$$

$$F_3 = \exp \left[ - \left( \frac{R_y}{120} \right)^3 \right], \quad (3.70)$$

$$R_y = \frac{\rho y k^{0,5}}{\mu}, \quad (3.71)$$

где  $y$  – расстояние по нормали к стенке.

Далее записывается балансовое уравнение для  $\gamma$ :

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\gamma u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] + P_\gamma - D_\gamma, \quad (3.72)$$

где  $P_\gamma$  и  $D_\gamma$  – соответственно источниковое и стоковое слагаемые.

Переход к началу генерации перемежаемости турбулентности регулируется параметром  $F_{onset}$

$$P_\gamma \sim (\gamma F_{onset})^{0,5}. \quad (3.73)$$

Принимается, что  $F_{onset}$  является функцией числа Рейнольдса  $Re_\theta$ , в которой в качестве характерного пространственного размера выступает толщина потери импульса  $\theta$ :

$$Re_\theta = \frac{\rho u \theta}{\mu}, \quad (3.74)$$

где  $u$  – модуль вектора усредненной скорости.

Для  $Re_\theta$  также вводится уравнение переноса стандартно вида (3.72), которое содержит источниковый член  $P_\theta$ , но не содержит стокового члена:

$$\frac{\partial(\rho Re_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Re_\theta u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_\theta (\mu + \mu_t) \frac{\partial Re_\theta}{\partial x_j} \right] + P_\theta. \quad (3.75)$$

Для более подробной информации о слагаемых и константах, входящих в представленные балансовые уравнения, см. источник [31].

### 3.8. Задания для самостоятельной работы

А. Задано двумерное уравнение Лапласа в декартовых координатах:  $\Delta_{(x,y)} \Phi = 0$ . Запишите для него выражение (3.11) для прямоугольной ячейки с длинами ребер  $h_x$  и  $h_y$ . Запишите конечно-разностное выражение для уравнения Лапласа, используя центральную конечную разность второго порядка. Оцените сходство двух получившихся выражений.

Б. Есть ли связь между эмпирическими константами  $C_\mu$  и  $\beta^*$  в моделях турбулентности  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ ?

В. В вязком подслое безразмерная скорость зависит от безразмерной координаты по линейному закону  $u^+ = y^+$ , в то время как в логарифмическом подслое – по закону (3.54). В какой точке  $y^+$  следует выполнить переключение между этими функциями, чтобы общая зависимость  $u^+(y^+)$  была непрерывна?

Г. Проведите численный расчет установившегося турбулентного течения воздуха в трубе диаметра  $D=0,1$  м и длины  $l=5$  м. Для расчета используйте модель турбулентности  $k - \varepsilon$ . Постройте поперечные профили турбулентных характеристик потока. В какой зоне поперечного сечения трубы будет происходить наибольшая диссипация турбулентной кинетической энергии? В какой зоне поперечного сечения трубы будет наблюдаться максимум  $k$ ? Меняются ли распределения турбулентных характеристик потока при изменении выбора местоположения поперечного сечения трубы? Почему?

Д. Проведите математические выкладки и получите слагаемое (3.61) путем подстановки выражения (3.55) в уравнение (3.46).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Steinhauser M. O. Computer simulation in physics and engineering. Walter de Gruyter, 2012. 529 с.
2. Майер Р. В. Компьютерное моделирование: учеб.-метод. пособие для студентов педвузов. Глазов: Изд-во Глазов. гос. пед. ин-та, 2015. 620 с.
3. Дворецкий С. И., Муромцев Ю. Л., Погонин В. А. Моделирование систем. М.: Изд. центр «Академия», 2009. 320 с.
4. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. М.: Статистика, 1971. 488 с.
5. Трусов П. В. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2004. 440 с.
6. Павловский Ю. Н. Имитационные модели и системы. М.: Фазис, 2000. 144 с.
7. Дигрис А. В. Дискретно-событийное моделирование. Минск: Изд-во БГУ, 2011. 174 с.
8. Капырин Н. Введение в суррогатные модели. Ч. 1: Актуальность // ЦИТМ Экспонента. 2022. URL: [https://habr.com/ru/companies/etmc\\_exponenta/articles/663578/](https://habr.com/ru/companies/etmc_exponenta/articles/663578/) (дата обращения: 24.04.2023).
9. ГОСТ 34.602–2020. Информационные технологии. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Техническое задание на создание автоматизированной системы «Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Термины и определения». М., 2021. 12 с.
10. Кондратьев Д. Что такое прямое моделирование? // САПР журнал. 2015. URL: <https://sapr-journal.ru/stati/chto-takoe-pryamoe-modelirovanie/> (дата обращения: 24.04.2023).
11. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е.С. Николаев; ред. Т.Н. Галишникова. М.: Наука, 1978. 592 с.
12. Молчанов А. М. и др. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники / А. М. Молчанов, М. А. Щербаков, Д. С. Янышев, М. Ю. Куприков, Л. В. Быков. М.: Изд-во МАИ. 2013. 260 с.
13. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. // Алексей Владимирович Скворцов. Томск: Изд-во Том. ун.та, 2006. 170 с.

14. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2-х т.: Т. 1 / пер. с англ. М.: Мир, 1991. 504 с.
15. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on pure and applied mathematics. 1952. Т. 5. № 3. С. 243–255.
16. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // The physics of fluids. 1965. Т. 8. № 12. С. 2182–2189.
17. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2-х т.: Т. 2 / пер. с англ. М.: Мир, 1991. 552 с.
18. Колодяжный В.М., Лисина О.Ю. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов // Проблемы машиностроения. 2010. № 13, № 3. С. 67–74.
19. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 304 с.
20. Morris J.P., Fox P.J., Zhu Y. Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH // Journal of Computational Physics. 1997. Т. 136. № 1. С. 214–226.
21. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. 2009. 816 с.
22. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1970. Т. 41. № 2. С. 453–480.
23. Van-Driest E.R. On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci. 1956. Т. 23. № 10. С. 1007–1011.
24. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой // Проблемы механики. Вып.2, М.: Изд-во иност. лит. 1959. С. 297–340.
25. Jones W.P., Launder B.E. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1972. Т. 15. С. 301–314.
26. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids A. 1992. Т. 4. № 7. С. 1510–1520.
27. Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J. A new k- $\epsilon$  eddy viscosity model for high:reynolds number turbulent flows // Computers and Fluids. 1995. Т. 24, № 3. С. 227–238.

28. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA Journal*. 1988. Т. 26. № 11. С. 1299–1310.

29. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA Journal*. 1994. Т. 32. № 8. С. 1598–1605.

30. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука 1974. 713 с.

31. Langtry R.B. A correlation-based transition model using local variables for unstructured parallelized CFD codes // *Universität Stuttgart*, 2006. 145 с.

*Учебное издание*

**Семи́н Михаил Александрович**

## **Компьютерное моделирование в гидрогазодинамике**

Учебное пособие

Редактор: *Н. И. Стрекаловская*  
Корректор: *А. В. Цветкова*  
Компьютерная верстка *М. А. Семин*

---

Объем данных 2,96 Мб  
Подписано к использованию 28.08.2023

---

Размещено в открытом доступе  
на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)  
в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета  
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15