ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Л. А. Балюкина, Н. В. Жекина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Часть 1

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. А. Балюкина, Н. В. Жекина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Часть 1

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов нематематических
факультетов, изучающих дисциплины «Математика»
и «Теория вероятностей и математической статистики»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2021

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я7
Б20

Балюкина Л. А.

Б20 Теория вероятностей и элементы математической статистики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. А. Балюкина, Н. В. Жекина ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – Ч. 1. – 2,45 Мб ; 160 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/balukina-zhekina-teoria-veroyatnostej-i-elementy-matematicheskoj-statistiki-ch1.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3602-0

Учебное пособие содержит основные разделы теории вероятностей и математической статистики. Каждая глава начинается с краткого изложения основных теоретических понятий и формул. Пособие снабжено большим количеством примеров расчетного характера, в которых применение излагаемых методов иллюстрируется на конкретном практическом материале. Для всех основных типов задач, которые можно решить на базе изложенного теоретического материала, приведены методики их решения, которые помогают читателю освоить основы решения различных вероятностных и статистических задач из области практической деятельности. Представлены задачи как подробно разобранные, так и предназначенные для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов второго курса очной и заочной формы обучения, изучающих раздел «Теория вероятностей и математическая статистика».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я7

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики ПНИПУ (зав. кафедрой – д-р физ.-мат. наук, профессор ***А. Р. Абдуллаев***);

доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь, канд. физ.-мат. наук ***М. В. Радионова***

ISBN 978-5-7944-3602-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные теоретические сведения

Испытание (или опыт) – это реализация некоторого комплекса условий, который мы можем повторить неограниченное число раз. При этом комплекс условий включает в себя случайные факторы, реализация которых в каждом испытании приводит к неоднозначности исхода испытания

Пример. Подбрасывание монетки или игрального кубика. В комплекс этих условий входят как контролируемые, так и случайные факторы.

Пример. Стрельба по мишени. При одних и тех же условиях можно выбить 10 очков, а можно только 4 очка.

Пример. Извержение вулкана не является испытанием, так как мы не сможем повторить это испытания необходимое число раз, комплекс условий будет каждый раз разный.

Событие – определенный результат испытания

Пример. Испытание – подбрасывание двух монет,
событие **–** выпадение двух «орлов»,
событие **–** выпадение «орла» и «решки»,
событие **–** выпадение хотя бы одной «решки».

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика,
событие **–** выпадение тройки,
событие **–** выпадение четного числа очков,
событие **–** выпадение числа кратного трем.

Достоверное событие (Ω) – это событие, которое всегда происходит в результате данного испытания

Невозможное событие ($\varnothing$) – это событие, которое заведомо не произойдет в результате испытания

Случайное событие – это событие, которое в результате испытания может как произойти, так и не произойти. Случайные события обозначаются заглавными латинскими буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$… или буквой с индексом $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$,…

Пример. Испытание – подбрасывание монеты,
событие Ω={на Земле подброшенная монета упадет вниз} – **достоверное** событие,
событие $\varnothing$={на Земле подброшенная монета зависнет в воздухе} – **невозможное** событие,
событие $\boldsymbol{A}$={при подбрасывании монеты выпадет «орел»} – **случайное** событие.

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика,
событие Ω={выпадет число от 1 до 6} – **достоверное**;
событие $\varnothing$={выпадет число 7} – **невозможное**;
событие $\boldsymbol{A}$={выпадет простое число очков} – **случайное**.

Элементарные события (исходы) ω («омега») – наиболее простые результаты испытания. Испытание заканчивается одним и только одним элементарным исходом. Эти исходы неразложимы и взаимно исключают друг друга. **Элементарность** события (исхода) означает, что такое событие «нельзя разложить на другие события»

Пространством элементарных исходов Ω («омега») называется множество всех элементарных исходов испытания

Пример. Описать пространство элементарных исходов при подбрасывании монеты.

Решение. Очевидно, что при подбрасывании монеты возможны два элементарных исхода:

ω_1 – появление «орла»;

ω_2 – появление «решки».

Таким образом, пространство элементарных исходов содержит два элемента $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Пример. Описать пространство элементарных исходов при подбрасывании игрального кубика.

Решение. Очевидно, что при подбрасывании игрального кубика элементарными исходами является число выпавших очков, т.е.

ω_i – выпало ровно $\boldsymbol{i}$ очков; $\boldsymbol{i} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Таким образом, пространство элементарных исходов содержит шесть элементов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Пример. Описать пространство элементарных исходов при подбрасывании двух монет.

Решение. Очевидно, что при подбрасывании двух монет возможны четыре элементарных исхода:

ω_1 – появление «орла» на первой монете и появление «орла» на второй монете;

ω_2 – появление «орла» на первой монете и появление «решки» на второй монете;

ω_3 – появление «решки» на первой монете и появление «орла» на второй монете;

ω_4 – появление «решки» на первой монете и появление «решки» на второй монете.

Таким образом, пространство элементарных исходов состоит из четырех элементов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

Событиями называют подмножества множества Ω. Говорят, что в результате испытания **произошло** событие $A \subseteq \Omega$, если в испытании произошел один из элементарных исходов, входящих в множество $\boldsymbol{A}$

Пример. Опыт состоит в подбрасывании игрального кубика, тогда элементарные исходы

ω_i = {на грани игрального кубика выпадет i очков}, $\boldsymbol{i} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Событие $\boldsymbol{C}$ = {выпадет четное число очков} не является элементарным, так как подразумевает выпадение 2, 4 или 6 очков на грани кубика, т.е. событие $\boldsymbol{C}$ состоит из трех элементарных исходов: $\boldsymbol{C} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Пример. Из колоды в 36 карт извлекают одну карту, тогда события

$\boldsymbol{D_1}$ = {извлечена карта трефовой масти},

$\boldsymbol{D_2}$ = {извлечена карта пиковой масти},

$\boldsymbol{D_3}$ = {извлечена карта бубновой масти},

$\boldsymbol{D_4}$ = {извлечена карта червовой масти}

не являются элементарными, так как каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов.

События называются **несовместными**, если наступление одного из событий **исключает** наступление других событий в одном и том же испытании.

События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого события

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика.

A = {в результате броска кубика выпадет 2 очка},

B = {в результате броска кубика выпадет 3 очка},

C = {в результате броска кубика выпадет четное число очков}.

События ***A*** и ***B*** являются несовместными, т.е. в одном и том же испытании не может выпасть сразу 2 и 3 очка одновременно.

События ***A*** и ***C*** являются совместными, так как в одном и том же испытании может выпасть 2 очка и четное число очков.

Пример. Испытание – из колоды в 36 карт извлекается одна карта.

$\boldsymbol{D_1}$ = {извлеченная карта трефовой масти},

$\boldsymbol{D_2}$ = {извлеченная карта пиковой масти},

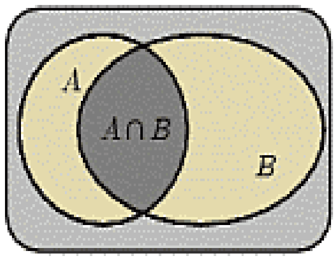
$\boldsymbol{D_3}$ = {извлеченная карта туз},

События $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$ являются несовместными, т.е. взятая карта не может быть одновременно трефовой и пиковой масти.

Событие $\boldsymbol{D_1}$ и $\boldsymbol{D_3}$ совместные, так как взятая карта может оказаться трефовой масти и тузом.

Операции над событиями

Произведением событий *A* и *B* называется событие ***A·B***, которое наступает тогда и только тогда, когда происходят оба события ***A*** и ***B***.



Аксиомы произведения:

$A \cdot A = A, \quad A \cdot \Omega = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing, \quad A \cdot B = B \cdot A$

Операцию умножения событий можно заменить логической связкой **И**

Пример. Четыре студента Паша, Маша, Даша и Клаша пошли на экзамен. Введем элементарные события:

$\boldsymbol{A}_1$ ={ Паша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_2$ ={ Маша сдаст экзамен},

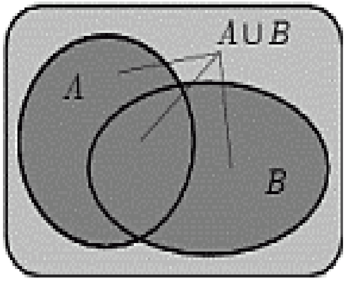
$\boldsymbol{A}_3$ ={ Даша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_4$ ={Клаша сдаст экзамен}.

Представим сложное событие $\boldsymbol{D}$ = {все пришедшие на экзамен студенты этот экзамен сдадут} в алгебре событий через элементарные события:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \boldsymbol{A}_4 \ .$$

Суммой событий *A* и *B* называется событие ***A*+*B***, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий (или ***A*,** или ***B***, или оба вместе).



Аксиомы суммы:

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} + \Omega = \Omega, \quad \boldsymbol{A} + \varnothing = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

Операцию сложения событий можно заменить логической связкой **ИЛИ.**

Пример. Четыре студента Паша, Маша, Даша и Клаша пошли на экзамен. Введем элементарные события:

$\boldsymbol{A}_1$ ={ Паша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_2$ ={ Маша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_3$ ={ Даша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_4$ ={Клаша сдаст экзамен}.

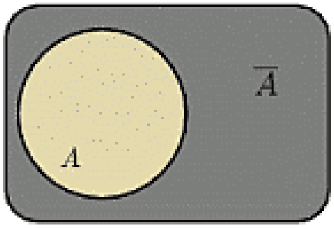
Представим сложное событие C = {кто-нибудь из пришедших на экзамен его сдаст} в алгебре событий через элементарные события:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4 \ .$$

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если будут выполнены некоторые условия:

1) события несовместны

2) в результате испытания одно из этих событий произойдет обязательно.



Свойства: $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}=\Omega, \quad \boldsymbol{A}\cdot\overline{\boldsymbol{A}}=\varnothing$

Пример. События $\boldsymbol{A}_1$ ={Паша сдаст экзамен} и $\overline{\boldsymbol{A}_1}$ ={Паша не сдаст экзамен} являются **противоположными,** так как они взаимоисключают появление друг друга, и в результате испытания одно из этих событий обязательно произойдет.

Пример. Четыре студента Паша, Маша, Даша и Клаша пошли на экзамен. Введем элементарные события:

$\boldsymbol{A}_1$ ={ Паша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_2$ ={ Маша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_3$ ={ Даша сдаст экзамен},

$\boldsymbol{A}_4$ ={Клаша сдаст экзамен}.

Представим сложное событие $\boldsymbol{L}$ = {только мальчик сдаст экзамен} в алгебре событий через элементарные события:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}_1\cdot\overline{\boldsymbol{A}_2}\cdot\overline{\boldsymbol{A}_3}\cdot\overline{\boldsymbol{A}_4}\ .$$

Представим сложное событие $\boldsymbol{K}$ = {только один студент сдаст экзамен} в алгебре событий через элементарные события:

$$K=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4.$$

РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример. Подбрасываются два игральных кубика. Описать пространство элементарных исходов. Описать события A ={сумма выпавших очков равна 8}; B ={по крайней мере на одном кубике выпадет шестерка}.

Решение: Будем считать пространством элементарных исходов $\Omega=\{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\}$ – множество пар чисел $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, где $\boldsymbol{i}$ – число очков, выпавшее на первом кубике ($\boldsymbol{i}=1,2,3,4,5,6$), $\boldsymbol{j}$ – число очков, выпавшее на втором кубике ($\boldsymbol{j}=1,2,3,4,5,6$).

Тогда пространство элементарных исходов будет таким:

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\\ &(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)\\ &(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\\ &(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)\\ &(5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\\ &(6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}.\end{aligned}$$

Событию A ={сумма выпавших очков равна 8} благоприятствуют пять исходов, т.е. A ={(2,6) (6,2) (5,3) (3,5) (4,4)}.

Событие B ={по крайней мере на одном кубике появится шестерка} = ={(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) (1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6)}.

Пример. Один раз подбрасывается игральный кубик. Рассмотрим события: A={на грани кубика выпадет шесть очков}, B = {на грани кубика выпадет четное число очков}, C ={на грани кубика выпадет число очков, кратное трем}, D={на грани кубика выпадет простое число}. Какие события являются попарно несовместными? Описать события $B\cdot\overline{D}$, $B+\overline{D}$, $C\cdot\overline{B}$, $C+\overline{A}$.

Решение. Испытание – подбрасывание кубика. События:

A = {6},

B = {2, 4, 6},

C = {3, 6},

D = {2, 3, 5}.

Два события A и B являются **несовместными,** если $A \cdot B = \varnothing$.

По определению произведения событий: $A \cdot B = \{6\}$, $A \cdot C = \{6\}$, $A \cdot D = \varnothing$, $B \cdot C = \{6\}$, $B \cdot D = \{2\}$, $C \cdot D = \{3\}$. Следовательно, только события A и D являются несовместными.

Опишем события $B \cdot \overline{D}$ и $B + \overline{D}$, используя определения произведения и суммы событий. Событие $\overline{D} = \{1, 4, 6\}$, следовательно,

$B \cdot \overline{D} = \{4, 6\}$ и

$B + \overline{D} = \{1, 2, 4, 6\}$.

Событие $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$. Следовательно, $C \cdot \overline{B} = \{3\}$.

Событие $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, тогда $C + \overline{A} = \Omega$.

Пример. Испытание – из колоды в 36 карт достают одну карту.

Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}$ = {достали карту пиковой масти},

$\boldsymbol{B}$ = {достали даму},

$\boldsymbol{C}$ = {достали туз}

$\boldsymbol{D}$ = {достали картинку}.

Описать события $\boldsymbol{A+B}$, $\boldsymbol{A \cdot B}$, $\boldsymbol{A \cdot D}$, $\boldsymbol{B \cdot C}$, $\boldsymbol{C \cdot D}$, $\boldsymbol{A \cdot \overline{C}}$, $\boldsymbol{\overline{A} \cdot C}$, $\boldsymbol{\overline{A} \cdot D}$, $\boldsymbol{A \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B}$.

Решение.

$\boldsymbol{A+B=}$ {достали либо карту пиковой масти, либо даму},

$\boldsymbol{A \cdot B =}$ {достали даму пиковой масти},

$\boldsymbol{A \cdot D =}$ {достали картинку пиковой масти},

$\boldsymbol{B \cdot C} = \varnothing$ (невозможное событие, так как карта не может оказаться одновременно дамой и тузом),

$\boldsymbol{C \cdot D =}$ {достали туз},

$\boldsymbol{\overline{C}}$ = {из колоды достали любую карту, но **не туза**},

$\boldsymbol{A \cdot \overline{C} =}$ {достали карту пиковой масти, но не туз},

$\boldsymbol{\overline{A}}$ = {из колоды достали карту **не пиковой** масти, т.е. либо бубновую, либо трефовую, либо червовую карту},

$\boldsymbol{\overline{A} \cdot C =}$ {достали туз, но не пиковый},

$\boldsymbol{\overline{A} \cdot D =}$ {достали картинку, но не пиковую},

$\overline{D}$={из колоды достали **не картинку**, т.е. цифру},

$A\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B$={достали либо пиковую цифру (6,7,8,9,10), либо даму не пиковой масти}.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

1.1. Бросают две игральные кости. Событие A={сумма выпавших очков нечетная}, B={хотя бы на одной кости выпала единица}. Описать события $A\cdot B$, $A+B$, $A\cdot\overline{B}$.

1.2. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Событие A={извлеченная карта – король}, B={извлеченная карта – червовой масти}, C={извлеченная карта – валет}. Что означают следующие события $A\cdot B$, $A+\overline{B}$, $A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}$, $A\cdot B\cdot C$.

1.3. Мишень состоит из 10 кругов радиусами r_k $(r_1<r_2<\ldots<r_{10})$. Событие A_k состоит в том, что попали в круг радиуса r_k. В чем состоят события $B=A_1+A_2+A_3+A_4$, $C=A_{10}\cdot A_9\cdot A_8\cdot A_7$?

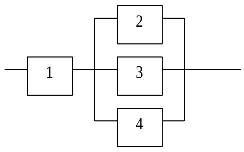
1.4. Из таблицы случайных чисел наугад взяли одно число. Событие A={выбранное число делится на 5}, B={выбранное число оканчивается на 0}. Что означают события $A\cdot B$, $A+B$, $A\cdot\overline{B}$, $\overline{A}\cdot B$?

1.5. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A={«орел» на первой монете}, B={«решка» на первой монете}, C={«орел» на второй монете}, D={«решка» на второй монете}, E={хотя бы один «орел»}, F={хотя бы одна «решка»}, G={один «орел» и одна «решка»}, H={ни одного «орла»}, K = {два «орла»}. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$, 2) $E\cdot F$, 3) $G+K$, 4) $B\cdot D$.

1.6. Из множества супружеских пар наугад выбирают одну. Событие A={мужу больше 30 лет}, B={муж старше жены}, C={жене больше 30 лет}. Выяснить смысл событий $A\cdot B\cdot C$, $A\cdot\overline{B}\cdot C$.

1.7. Электрическая цепь состоит из четырех элементов. Событие $\boldsymbol{B_k}$ состоит в

том, что сломался элемент с номером $\boldsymbol{k}$. Событие $\boldsymbol{C}$={электрическая цепь не работает}. Записать событие C через события $\boldsymbol{B_k}$.



1.8. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

$\boldsymbol{A}$ = {обнаружен один объект},

$\boldsymbol{B}$ = {обнаружен хотя бы один объект},

$\boldsymbol{C}$ = {обнаружено не менее двух объектов},

$\boldsymbol{D}$ = {обнаружено два объекта},

$\boldsymbol{E}$ = {обнаружено три объекта},

$\boldsymbol{F}$ = {обнаружены все четыре объекта},

$\boldsymbol{G}$ = {хотя бы один объект не обнаружен},

$\boldsymbol{H}$ = {не менее трех объектов не обнаружено},

K = {не обнаружено не более двух объектов},

$\boldsymbol{L}$ = {хотя бы два объекта не обнаружены}.

Указать, в чем состоят события: 1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$, 2) $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{L}$, 3) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{D}$, 4) $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$.

Выразить события $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$ в алгебре событий через элементарные (предварительно ввести эти события самостоятельно).

1.9. Подбрасываются три монеты. Описать пространство элементарных исходов. Описать события: A ={монеты упали одной и той же стороной}; B ={«орлов» выпало больше, чем «решек»}.

1.10. Из набора костяшек для домино наугад выбирается одна кость. События $\boldsymbol{A}$ = {значения на половинках кости домино совпадают} и $\boldsymbol{B}$ = {сумма цифр на половинках костяшки равна 8}, $\boldsymbol{C}$ = {сумма цифр на половинках кости домино равна 6}. Описать события $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Основные теоретические сведения

Вероятность – количественная мера возможности появления некоторого события. Для обозначения вероятности используют заглавную букву $\boldsymbol{P}$ (от английского «probability»). Например, вероятность события $\boldsymbol{A}$ обозначается $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$

Указание: При решении задач обязательно указывается, вероятность какого события находится, т.е. не следует писать P=0,2, правильнее записать $P(A)$=0,2.

Основные аксиомы вероятности

$$0 \leq \boldsymbol{P(A)} \leq 1$$

Вероятность любого события лежит в интервале от 0 до 1

$$\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$$

Вероятность достоверного события равна 1

Если события $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n$ являются несовместными, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_n)$$

Следствия из аксиом:

$$\boldsymbol{P}(\varnothing) = 0$$

Вероятность невозможного события равна 0

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$$

Формула для вычисления вероятности противоположного события

2.1. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Полная группа событий – это множество **несовместных** событий, одно из которых обязательно наступает в результате испытания

Пример. Испытание – подбрасывание игрального кубика.

B_1 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 1 очко};

B_2 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 2 очка};

B_3 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 3 очка};

B_4 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 4 очка};

B_5 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 5 очков};

B_6 = {при подбрасывании игрального кубика выпадет 6 очков}.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ **несовместны,** поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других **и образуют полную группу**, так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий.

Равновозможными называются события, имеющие одинаковые шансы, т.е. вероятности этих событий равны

Исходы ω_1, ω_2, … называется **благоприятствующими событию** A, если появление одного из исходов влечет за собой наступление события A

Если множество элементарных исходов конечно $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, и все исходы являются равновозможными и составляют полную группу событий, то вероятность появления события A равна отношению числа благоприятствующих событию A исходов к общему числу исходов:

$$\boxed{P(A) = \frac{m(A)}{n}},$$

где $m(A)$ – число исходов, благоприятствующих событию A,

n – общее число исходов проведенного испытания

Пример. Из колоды в **36** карт случайным образом отбирают **одну** карту. Определить вероятность события: $\boldsymbol{A}$ ={взятая карта – король}.

Испытание – выбор одной карты из колоды, содержащей 36 карт. Общее число исходов, т.е. способов взять одну карту из 36, определяется как $\boldsymbol{n} = 36$.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$: одного короля можно взять только из 4 королей четырьмя способами, следовательно, $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = 4$. Используя ***классическое определение вероятности***

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}1111\,.$$

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Правило суммы

Если объект *A* может быть выбран m_A способами, а объект *B* – другими m_B способами, то выбор «либо *A*, либо *B*» можно осуществить $m_A + m_B$ способами

Пример. В коробке 3 красных карандаша, 2 зеленых, 1 синий, 4 желтых и 5 простых карандашей. Сколькими способами можно взять один цветной карандаш?

Решение. Цветной карандаш можно взять 3+2+1+4=10 способами.

Правило произведения

Если объект *A* может быть выбран m_A способами и после каждого из таких выборов объект *B* в свою очередь может быть выбран m_B способами, то выбор «*A* и *B*» в указанном порядке можно осуществить $m_A \cdot m_B$ способами

Примеры.

- при подбрасывании трех монет возможно **2·2·2=8** различных исходов;
- бросая дважды игральную кость, получим **6·6=36** различных исходов;
- количество трехзначных чисел равно **9·10·10=900**;
- число способов расставить пять книг на полке **5·4·3·2·1=120**.

Факториал

$$\boldsymbol{n}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{n}.$$

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$

$0! = 1.$

Число размещений (выбор без возвращения, с учетом порядка)

Общее количество различных наборов при выборе $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ <u>*без возвращения и с учетом порядка*</u> называется ***числом размещений*** из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{k}$ элементов и вычисляется

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-1)\cdot\ldots\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+1)$$

Пример. Если из набора пронумерованных шариков ①, ②, ③ выбирать для образования комбинаций по два шарика, то комбинации, отличающиеся составом или порядком выбора элементов, будут иметь вид

①, ②;

②, ①;

①, ③;

③, ①;

②, ③;

③, ②.

С позиций комбинаторики число различных размещений из $\boldsymbol{n}=3$ по $\boldsymbol{k}=2$ элементов будет определяться соотношением $\boldsymbol{A}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3\cdot 2 = 6.$

Пример. В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?

Решение. Поскольку медали не равноценны, то количество способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали среди команд будет равно числу размещений из $\boldsymbol{n}=17$ элементов по $\boldsymbol{k}=3$, т.е. $\boldsymbol{A}_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 17\cdot 16\cdot 15 = 4080$.

Число сочетаний (выбор без возвращения и без учета порядка)

Общее количество различных наборов при выборе $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ *без возвращения и без учета порядка* называется ***числом сочетаний*** из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{k}$ элементов и равняется

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

Пример. Если из набора пронумерованных шариков ①, ②, ③ выбирать для образования комбинаций по два шарика, то комбинации, отличающиеся составом без учета порядка выбора элементов, будут иметь вид

①, ②;

①, ③;

②, ③.

Тогда число сочетаний из $\boldsymbol{n}=3$ по $\boldsymbol{k}=2$ элементам будет определяться соотношением

$$\boldsymbol{C}_3^2=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1}=3.$$

Пример. Из колоды в 36 карт без возвращения достают три карты. Сколько вариантов получится?

Решение. Так как карты не повторяются и не важен порядок извлечения карт, то для подсчета используем **число сочетаний** из $\boldsymbol{n}=36$ по $\boldsymbol{k}=3$:

$$\boldsymbol{C}_{36}^3=\frac{36!}{3!\cdot(36-3)!}=\frac{36!}{3!\cdot30!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot30\cdot31\cdot32\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36}{1\cdot2\cdot3\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot30)}=$$

$$=\frac{31\cdot32\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36}{1\cdot2\cdot3}=233\,735\,040.$$

Замечание

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = n$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = 1$$

Задача о безвозвратной выборке.

Частный случай

Пусть некоторое множество содержит N элементов, среди которых M элементов обладает некоторым свойством. Из этого множества извлекаем n элементов ($n < N$).

Требуется найти вероятность того, что в выборку попадет ровно m элементов, обладающих этим некоторым свойством:

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример. Для обслуживания рейса самолета требуются 2 стюардессы, которых выбирают по жребию из 5 девушек, претендующих на эти места; 3 из них – блондинки, а 2 – брюнетки. Найти вероятность того, что будут выбраны блондинки.

Решение. По условию количество претенденток $N = 5$, из них блондинок $M = 3$. Случайным образом выбирают $n = 2$ девушек. Тогда вероятность события A = {будут выбраны две блондинки} вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = \frac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!}}{\frac{5!}{2!\cdot 3!}} = \frac{3\cdot 1}{\frac{4\cdot 5}{2}} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Задача о безвозвратной выборке.

Общий случай

Пусть некоторое множество состоит из $\boldsymbol{N}$ элементов, среди которых

$\boldsymbol{M}_1$ – элементов обладают свойством $\boldsymbol{A}_1$

$\boldsymbol{M}_2$ – элементов обладают свойством $\boldsymbol{A}_2$

…

$\boldsymbol{M}_k$ – элементов обладают свойством $\boldsymbol{A}_k$,

причем $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{N}$.

Случайным образом из этого множества извлекают $\boldsymbol{n}$ элементов.

Вероятность того, что в эту выборку попадет

$\boldsymbol{m}_1$ – элементов со свойством $\boldsymbol{A}_1$

$\boldsymbol{m}_2$ – элементов со свойством $\boldsymbol{A}_2$

…

$\boldsymbol{m}_k$ – элементов со свойством $\boldsymbol{A}_k$,

причем $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{n}$,

находится по формуле

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{M}_1}^{\boldsymbol{m}_1} \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{M}_2}^{\boldsymbol{m}_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{M}_k}^{\boldsymbol{m}_k}}{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{n}}}$$

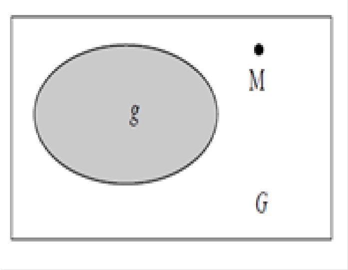
Пример. Из колоды в 52 карт наудачу достают три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

Решение. В этом примере всего карт $\boldsymbol{N} = 52$, $\boldsymbol{M}_1 = 4$ (количество троек), $\boldsymbol{M}_2 = 4$ (количество семерок), $\boldsymbol{M}_3 = 4$ (количество тузов), $\boldsymbol{M}_4 = 40$ (остальные карты). Взяли $\boldsymbol{n} = 3$, и $\boldsymbol{m}_1 = 1$, $\boldsymbol{m}_2 = 1$, $\boldsymbol{m}_3 = 1$ и $\boldsymbol{m}_4 = 0$.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{C}_4^1 \cdot \boldsymbol{C}_4^1 \cdot \boldsymbol{C}_4^1 \cdot \boldsymbol{C}_{40}^0}{\boldsymbol{C}_{52}^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1}{\frac{50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{64}{22100} = 0{,}0029.$$

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Множеству элементарных исходов Ω испытания поставим в соответствие некоторую геометрическую область $\boldsymbol{G}$, а случайному событию $\boldsymbol{A}$ – геометрическую область $\boldsymbol{g}$. Тогда, если все исходы испытания равновозможны и их бесконечное число, вероятность появления события A можно найти по формуле



$$\boxed{\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{мера(g)}}{\boldsymbol{мера(G)}},}$$

где в качестве меры области может быть длина, площадь или объем, в зависимости от вида геометрической области

Пример (*задача о встрече*). Два студента договорились о встрече между 12^{00} и 13^{00}. Первый пришедший ждет другого 10 минут и уходит. Определить вероятность того, что встреча студентов состоится.

Решение. Обозначим $\boldsymbol{x}$ – время прихода первого студента,

$\boldsymbol{y}$ – время прихода другого студента,

тогда все множество исходов можно описать как $\boldsymbol{G} = \begin{cases} 0 \le \boldsymbol{x} \le 1 \\ 0 \le \boldsymbol{y} \le 1. \end{cases}$

Событие $\boldsymbol{A} = \{$студенты встретились$\}$. Встреча студентов состоится, если разница между временем прихода первого и второго студента будет не больше 10 минут или $\frac{1}{6}$ часа, т.е. благоприятствующая область:

$$\boldsymbol{g} = \begin{cases} x - y \le \frac{1}{6} \\ y - x \le \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge x - \frac{1}{6} \\ y \le x + \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Построим в декартовой системе координат области $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$ (см. рис.2.1):

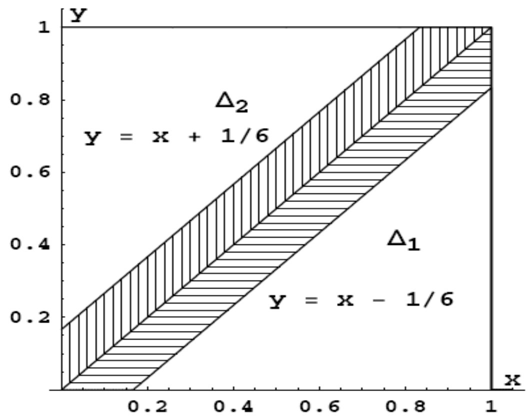


Рис. 2.1

Площадь области G: $S(G)=1\cdot 1=1$, а площадь g найдем следующим образом: из площади $S(G)$ вычтем площади двух прямоугольных треугольников Δ_1 и Δ_2:

$$S(g)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}.$$

Тогда вероятность события A по геометрическому определению вероятности равна

$$P(A)=\frac{S(g)}{S(G)}=\frac{\frac{11}{36}}{1}=\frac{11}{36}=0{,}3056.$$

2.4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть проведено $\boldsymbol{n}$ испытаний, в которых событие $\boldsymbol{A}$ появилось ровно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})$ раз, тогда **относительная частота** события $\boldsymbol{A}$ вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}}$$

Пример. Подбросим несколько раз монетку. При 10 бросаниях «орел» выпал 4 раза. Следовательно, относительная частота выпадения «орла»

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}) = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

При 20 бросаниях «орел» выпал 12 раз, т.е. относительная частота выпадения «орла» равна

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}) = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Видим, что относительная частота выпадения «орла» изменяется.

Многие ученые проводили подобный эксперимент. При многократном бросании монеты подсчитывалось число выпадений «орла». Результаты этих опытов показаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Фамилия	Количество бросков	Относительная частота выпадений «орла»
Ж.-Л.Л. де Бюффон	4040	0,5070
О. де Морган	4092	0,5050
В.Феллер	10000	0,4979
К. Пирсон	12000	0,5016
У.С.Джевонс	20480	0,5068
К. Пирсон	24000	0,5005
В.И.Романовский	80640	0,4993

Из таблицы видно, что относительная частота выпадения «орла» во всех случаях близка к 0,5.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. Один раз подбрасывается игральный кубик. Найти вероятность того, что на грани кубика $\boldsymbol{A}$ = {выпадет шесть очков}, $\boldsymbol{B}$ = {выпадет четное число очков}, $\boldsymbol{C}$ ={выпадет число очков кратное трем}, $\boldsymbol{D}$ ={выпадет простое число}. Являются ли события $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ равновозможными?

Решение. Испытание – подбрасывание кубика. В результате этого испытания возможны 6 исходов: выпадение граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6, которые равновозможны, единственно возможны и несовместны, т.е. $\boldsymbol{n} = 6$.

Появлению события $\boldsymbol{A}$ ={выпадет шесть очков}={6} благоприятствует 1 исход: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = 1$. Условия применимости ***формулы классической вероятности*** выполнены, воспользуемся ей для нахождения вероятности события $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{6}.$$

Благоприятствующих исходов для события B = {выпадет четное число очков}= {2, 4, 6}: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}) = 3$. Тогда вероятность события $\boldsymbol{B}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{n}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Появлению события $\boldsymbol{C}$ ={выпадет число очков кратное трем}={3, 6} благоприятствуют 2 исхода: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C}) = 2$. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{n}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

И вероятность события $\boldsymbol{D}$ ={выпадет простое число}={2, 3, 5} равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}{\boldsymbol{n}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

так как число благоприятствующих исходов равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = 3$.

Два события $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ являются **равновозможными**, если $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$.

Сравним вероятности предложенных событий. Видим, что вероятности этих событий равны $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, следовательно, события $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ являются равновозможными.

Пример. У мальчика в левом кармане находится 3 красных воздушных шарика и 2 желтых, а в правом кармане 4 красных и 6 желтых. Мальчик из правого кармана вынимает воздушный шарик. Найти вероятность того, что взятый шарик будет красного цвета.

Решение. Испытание – вынимание воздушного шарика из правого кармана. В правом кармане 10 шариков. Следовательно, способов взять один шарик из этого кармана будет 10, т. е. $\boldsymbol{n}=10$. Появлению события $\boldsymbol{A}$ = {взятый шарик будет красного цвета} благоприятствует 4 исхода, так как красных шариков в правом кармане 4: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})=4$. Условия применимости ***формулы классической вероятности*** выполнены, воспользуемся ею для решения задачи:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}}=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

Пример. У Вани в кармане лежит 3 конфеты «Мишка на севере» и 2 конфеты «Красная Шапочка». Ваня съел одну конфету «Красная Шапочка». Вычислить вероятность события $\boldsymbol{A}$ = {следующая взятая случайным образом из кармана конфета будет «Красная Шапочка»}.

Решение. Испытание – вынимание конфеты из кармана. Общее число исходов, т.е. число способов взять из кармана конфету, $\boldsymbol{n}=4$, так как одну конфету Ваня уже съел. Число исходов благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})=1$, так как конфета «Красная Шапочка» осталась в кармане одна. Тогда вероятность события $\boldsymbol{A}$ по ***формуле классической вероятности*** равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Пример. В магазине 4 футбольных, 2 волейбольных и 3 баскетбольных мяча. Детский сад закупил 3 мяча. Определить вероятности событий:

$\boldsymbol{A}$ = {купленные мячи – футбольные},

$\boldsymbol{B}$ = {купленные мячи – для игры в разные виды спорта},

$\boldsymbol{C}$ = {купленные мячи – для игры в один и тот же вид спорта},

$\boldsymbol{D}$ = {среди купленных мячей – один футбольный}.

Решение. Испытание – выбор 3 мячей из 9 мячей, имеющихся в магазине. Общее число исходов, т.е. способов взять 3 мяча из 9, определяется как $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$.

Для вычисления вероятностей событий будем использовать ***классическое определение вероятности***.

Число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$ = {купленные мячи – футбольные}, т.е. число способов, которыми можно выбрать 3 футбольных мяча из 4 имеющихся в магазине равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}_4^3 = 4$. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{C}_4^3}{\boldsymbol{C}_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} = 0{,}048 .$$

Событие $\boldsymbol{B}$ = {купленные мячи – для игры в разные виды спорта} может произойти, если среди купленных окажется 1 футбольный, 1 волейбольный и 1 баскетбольный мяч. По правилу произведения количество исходов, благоприятствующих событию *B*, равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}) = 4\cdot 2\cdot 3 = 24$. Итак,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{n}} = \frac{24}{84} = 0{,}286 .$$

Событие $\boldsymbol{C}$ = {купленные мячи – для игры в один и тот же вид спорта} происходит, если среди купленных окажется либо 3 футбольных, либо 3 баскетбольных, либо 3 волейбольных мяча. Число способов, которыми можно получить 3 футбольных мяча из 4 имеющихся в магазине, равно $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{C}_4^3 = 4$; 3 баскетбольных из 3 возможных – $\boldsymbol{m}_2 = 1$ и 3 волейбольных из 2 имеющихся в магазине – $\boldsymbol{m}_3 = 0$. Событию $\boldsymbol{C}$ по правилу суммы благоприятствует $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{C}_4^3 + \boldsymbol{C}_3^3 = 5$ исходов. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{n}} = \frac{5}{84} = 0{,}06 .$$

Событие $\boldsymbol{D}$ = {среди купленных мячей – один футбольный} происходит, если среди купленных окажется 1 футбольный мяч и 2 баскетбольных, либо 1 футбольный и 2 волейбольных мяча, либо 1 футбольный, 1 волейбольный и 1 баскетбольный мяч. Число благоприятствующих исходов по правилу суммы и произведения равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = 4 \cdot \boldsymbol{C}_3^2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$. Вероятность

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}{\boldsymbol{n}} = \frac{40}{84} = 0{,}476.$$

Число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{D}$, можно найти проще. Событие D = {среди купленных мячей – один футбольный} происходит, если среди купленных окажется 1 футбольный мяч и 2 любых мяча, но не футбольных. 1 футбольный мяч можно выбрать из футбольных 4 способами, а 2 любых, но не футбольных мяча можно выбрать из 5 (2 волейбольных и 3 баскетбольных) $\boldsymbol{C}_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$ способами. По правилу произведения $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = 4 \cdot \boldsymbol{C}_5^2 = 40$. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}{\boldsymbol{n}} = \frac{4 \cdot \boldsymbol{C}_5^2}{84} = \frac{4 \cdot 10}{84} = 0{,}476 .$$

Пример. Из колоды в **36** карт случайным образом отбирают **6** карт. Определить вероятность того, что среди взятых карт: ***A*** ={4 туза}, ***C***={все карты бубновой масти}, ***B***={все карты одной и той же масти}, ***D***={хотя бы 1 туз}, ***K***={король и дама}, ***M***={король червовой масти, дама червовой масти, 2 картинки черной масти}, ***L***={равное количество красных и черных карт}.

Решение. Испытание – выбор 6 карт из колоды, содержащей 36 карт. Общее число исходов, т.е. способов взять 6 карт из 36, определяется как $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}_{36}^6 = \frac{36!}{6! \cdot 30!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1947792$.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию ***A***: 4 тузов можно взять только из 4 тузов одним способом, и 2 оставшиеся карты могут быть взяты из 32 карт – $\boldsymbol{C}_{32}^{2}=496$ способами, следовательно, $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})=1\cdot\boldsymbol{C}_{32}^{2}=496$. Используя ***классическое определение вероятности***

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}}=\frac{1\cdot\boldsymbol{C}_{32}^{2}}{\boldsymbol{C}_{36}^{6}}=\frac{496}{1947792}=0{,}000255\ .$$

6 карт бубновой масти можно взять из 9 карт бубновой масти – $\boldsymbol{C}_{9}^{6}=84$ способами. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{C}_{9}^{6}}{\boldsymbol{C}_{36}^{6}}=\frac{84}{1947792}=0{,}000043\ .$$

Событие $\boldsymbol{B}$={все карты одной и той же масти} происходит, если среди взятых карт окажется либо 6 карт бубновой масти, либо 6 карт червовой масти, либо 6 карт пиковой масти, либо 6 карт крестовой масти. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{C}_{9}^{6}+\boldsymbol{C}_{9}^{6}+\boldsymbol{C}_{9}^{6}+\boldsymbol{C}_{9}^{6}}{\boldsymbol{C}_{36}^{6}}=\frac{84\cdot 4}{1947792}=0{,}000173\ .$$

Для нахождения вероятности события $\boldsymbol{D}$={хотя бы 1 туз}={из 6 карт взятых карт – или 1 туз, или 2 туза, или 3 туза, или 4 туза} воспользуемся равенством $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})=1-\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{D}})$, так как противоположное событие $\overline{\boldsymbol{D}}$={среди взятых карт нет тузов} проще. Число исходов, благоприятствующих $\overline{\boldsymbol{D}}$, равно $\boldsymbol{m}(\overline{\boldsymbol{D}})=\boldsymbol{C}_{32}^{6}=906192$ и тогда

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{D}})=\frac{\boldsymbol{C}_{32}^{6}}{\boldsymbol{C}_{36}^{6}}=\frac{906192}{1947792}=0{,}46524\,.$$

Итак,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})=1-\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{D}})=1-0{,}46524=0{,}53476\,.$$

Найдем $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{K})$. Короля можно выбрать из королей четырьмя способами, даму можно выбрать из дам четырьмя способами и 4 оставшиеся карты из 28 карт (из 36 карт надо убрать 4 королей и 4 дам) можно выбрать $\boldsymbol{C}_{28}^{4}=20475$ способами. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})=\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{K})}{\boldsymbol{n}}=\frac{4\cdot 4\cdot\boldsymbol{C}_{28}^{4}}{\boldsymbol{C}_{36}^{6}}=\frac{327600}{1947792}=0{,}16819\ .$$

Для события $\boldsymbol{M}$={король червовой масти, дама червовой масти, 2 картинки черной масти} число способов взять короля червовой масти – один, число способов взять даму червовой масти – один, число способов взять 2 картинки черной масти – $C_8^2 = 28$, так как картинок черной масти в колоде 8 и число способов взять 2 оставшиеся карты из 26 карт (так как из 36 карт надо убрать 1 короля червовой масти, 1 даму червовой масти и 8 картинок черной масти) – $C_{26}^2 = 325$. Тогда

$$P(M) = \frac{m(M)}{n} = \frac{1 \cdot 1 \cdot C_8^2 \cdot C_{26}^2}{C_{36}^6} = \frac{9100}{1947792} = 0{,}00467 .$$

Число благоприятствующих исходов для события L={равное количество красных и черных карт}={3 красные карты и 3 черные карты} равно $C_{18}^3 \cdot C_{18}^3 = 816 \cdot 816 = 665856$. Следовательно,

$$P(L) = \frac{m(L)}{n} = \frac{C_{18}^3 \cdot C_{18}^3}{C_{36}^6} = \frac{665856}{1947792} = 0{,}34185 .$$

Пример. В вазе с цветами 5 белых и 10 красных гвоздик. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки а) оба белые; б) разноцветные; г) одноцветные.

Решение: а) Пусть событие A ={оба вынутых из вазы цветка белые}. Количество возможных способов взять 2 цветка из 15 равно $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105,$ а количество благоприятствующих способов взять 2 белых цветка из 5 белых равно $m(A) = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10.$ Тогда по классическому определению вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{10}{105} = 0{,}095.$$

б) Пусть событие C ={из вазы вынуты разноцветные цветы т.е. один белый **и** один красный}. Общее число исходов $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105,$ а количество благоприятствующих способов взять 1 красный цветок из 10 красных **и** 1 белый цветок из 5 белых равно $m(C) = C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 10 \cdot 5 = 50.$ Тогда по классическому определению вероятность события C равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{C}_{10}^{1} \cdot \boldsymbol{C}_{5}^{1}}{\boldsymbol{C}_{15}^{2}} = \frac{50}{105} = 0{,}48 .$$

в) Пусть событие $\boldsymbol{D}$ ={из вазы вынуты одноцветные цветы т.е. **или** оба белые, **или** оба красные}. Общее число исходов $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}_{15}^{2} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105$. Количество благоприятствующих способов взять 2 белых цветка из 5 белых равно $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{C}_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10$, количество возможных способов взять 2 красных цветка из 10 красных равно $\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{C}_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45$, следовательно, число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{D}$, равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{C}_5^2 + \boldsymbol{C}_{10}^2 = 10 + 45 = 55$. Тогда интересующая нас вероятность равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}{\boldsymbol{n}} = \frac{55}{105} = 0{,}52.$$

Пример. В лифт девятиэтажного дома на 1-м этаже вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже, начиная со 2-го этажа. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на 6-м этаже, б) на одном и том же четном этаже, в) на разных этажах.

Решение. Испытанием в задаче является выбор четырьмя пассажирами одного из 8 этажей. Для каждого пассажира есть 8 возможностей выбора этажа со 2-го по 9-й. По правилу произведения общее число способов выбора этажа всеми пассажирами равно $\boldsymbol{n} = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4$. Все эти исходы равновозможные и несовместные, поэтому для решения задачи воспользуемся ***классическим определением вероятности***.

Выделим из общего числа исходов исходы, благоприятствующие событию $\boldsymbol{A}$={все пассажиры выйдут на шестом этаже}: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, так как существует всего 1 возможность, что все 4 человека выйдут на 6-м этаже. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{8^4} \approx 0{,}00024 .$$

Событию $\boldsymbol{B}$={все пассажиры выйдут на одном и том же четном этаже} будет благоприятствовать $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}) = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ исхода (т.е. у первого 4 способа выйти на четных этажах, а у остальных – по одному способу на одном и том же четном этаже с предыдущим). В результате

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{4}{8^4} = \frac{1}{2 \cdot 8^3} \approx 0{,}000977 \ .$$

Событию $\boldsymbol{C}$={все пассажиры выйдут на разных этажах} будет благоприятствовать $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C}) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ исходов, у первого пассажира 8 способов выйти, у второго уже 7 способов, у третьего и четвертого этих способов 6 и 5 соответственно. Итак,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{1680}{8^4} = \frac{210}{8^3} \approx 0{,}41016 \ .$$

Пример. Случайным образом задумано трехзначное число. Какова вероятность того, что а) цифры в числе одинаковые; б) цифры в числе разные; в) число кратно 5.

Решение. Общее число исходов, т.е. число трехзначных чисел, равно $\boldsymbol{n} = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Для вычисления вероятности события $\boldsymbol{A}$={цифры в числе одинаковые} воспользуемся ***классическим определением вероятности***. Число исходов, благоприятствующих событию A: $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{9}{900} = 0{,}01 \ .$$

Событию $\boldsymbol{B}$={цифры в числе разные} будет благоприятствовать $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ исходов. В результате

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{648}{900} = 0{,}72.$$

Число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{C}$={число кратно 5}, будет равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C}) = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$. Итак,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{180}{900} = 0{,}2.$$

Пример. Подбрасываются два кубика. Вычислить вероятности следующих событий:

$\boldsymbol{A}$={на кубиках выпало одинаковое число очков},

$\boldsymbol{B}$={на кубиках выпало разное число очков},

$\boldsymbol{D}$={произведение выпавших очков нечетное},

$\boldsymbol{C}$={сумма выпавших очков больше 8}.

Решение. Для каждого кубика число способов упасть равно 6. Используя декартово произведение, можно вычислить общее число исходов для двух кубиков: $\boldsymbol{n} = 6 \cdot 6 = 36$. Все исходы равновозможны и образуют полную группу. Условия применимости ***классического определения вероятности*** выполнены.

Число исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$={на кубиках выпало одинаковое число очков}, равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A}) = 6 \cdot 1 = 6$, так как на первом кубике может выпасть любое значение от 1 до 6, а на втором – то же самое число, что и на первом кубике. Тогда вероятность $\boldsymbol{A}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Событию $\boldsymbol{B}$={на кубиках выпало разное число очков} благоприятствуют $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}) = 6 \cdot 5 = 30$ исходов, так как на первом кубике может выпасть любое число от 1 до 6, а на втором – любое из пяти оставшихся чисел. Следовательно, вероятность $\boldsymbol{B}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{n}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Для подсчета числа исходов, благоприятствующих событию $\boldsymbol{D}$={произведение выпавших очков нечетное} используем следующий факт. Чтобы произведение чисел было нечетным, необходимо чтобы оба множителя были нечетными. Так, на первом кубике может выпасть {1,3,5} и на втором тоже {1,3,5}. Следовательно, $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = 3 \cdot 3 = 9$, т.е. вероятность $\boldsymbol{D}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}{\boldsymbol{n}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Для подсчета числа благоприятных исходов для события C={сумма выпавших очков больше 8}, можно воспользоваться табл. 2.2.

Таблица 2.2

Сумма выпавших очков на двух кубиках

Кубик № 1 / Кубик № 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Из табл. 2.2 видно, что число благоприятных исходов для события $\boldsymbol{C}$ равно $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C}) = 10$. Следовательно, вероятность $\boldsymbol{C}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{n}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Пример. Стержень длиной $\boldsymbol{K}$ разломали наугад на две части. Какова вероятность того, что длина меньшей части не превосходит $\frac{\boldsymbol{K}}{3}$?

Решение: Пусть $\boldsymbol{x} -$ координата точки разлома. Тогда всем возможным исходам испытания соответствует совокупность точек, заполняющих отрезок длиной $\boldsymbol{K}$, т.е. $\boldsymbol{G} = \{0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{K}\}$.

Для возникновения же при разломе стержня одного маленького и одного большого кусков точка разлома должна располагаться либо в начале этого стержня, либо в его конце, т.е. $\boldsymbol{g} = \left\{ \boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{K}}{3} \quad \boldsymbol{или} \quad \boldsymbol{x} > \frac{2\boldsymbol{K}}{3} \right\}$ (содержащие подобные точки участки отрезка $\boldsymbol{K}$ показаны на рис. 2.2 заштрихованными).

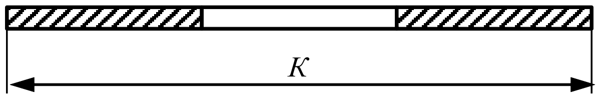


Рис. 2.2.

Исходы, отличающиеся друг от друга координатой точки разлома, равновероятны, а их число бесконечно, следовательно, для вычисления вероятности события $\boldsymbol{A}=$ {длина меньшей части не превосходит $\frac{\boldsymbol{K}}{3}$} будем использовать геометрическое определение вероятности.

Геометрическим местом размещения всех исходов испытания является отрезок длиной $\boldsymbol{K}$. Длина благоприятствующей области равна суммарной длине двух участков, содержащих точки, благоприятствующие наступлению события $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{l}=\frac{\boldsymbol{K}}{3}+\frac{\boldsymbol{K}}{3}=\frac{2\boldsymbol{K}}{3}.$$

Итак, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{L}}=\frac{\frac{2\boldsymbol{K}}{3}}{\boldsymbol{K}}=\frac{2}{3}$.

Пример. По радиоканалу в течение промежутка времени (0,1) передаются два сигнала длительностью τ. Каждый из них с одинаковой возможностью начинается в любой момент времени из интервала (0, $1-\tau$). Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, оба они искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений.

Решение: Обозначим $\boldsymbol{x}-$ момент начала первого из сигналов,

$\boldsymbol{y}-$ момент начала другого сигнала,

тогда все множество исходов можно описать как $\boldsymbol{G}=\begin{cases}0\le \boldsymbol{x}\le 1-\tau\\ 0\le \boldsymbol{y}\le 1-\tau.\end{cases}$

Для определения же геометрического места точек, соответствующих исходам, при которых сигналы будут приняты без искажений, учтем, что перекрытие сигналов невозможно, если моменты их начала отличаются более чем на τ. Отсюда,

$$\boldsymbol{g} = \begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > \tau \\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} > \tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} < \boldsymbol{x} - \tau \\ \boldsymbol{y} > \boldsymbol{x} + \tau. \end{cases}$$

Построим в декартовой системе координат области $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$ (рис. 2.3):

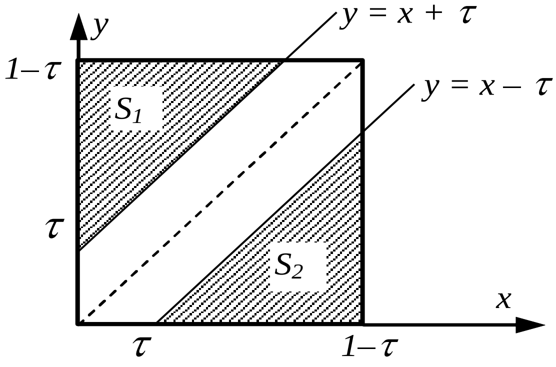


Рис. 2.3.

Благоприятными для приема сигналов являются случаи, когда точки – исходы испытания – попадают в верхнюю левую или нижнюю правую заштрихованные зоны.

Для нахождения вероятности события $\boldsymbol{A}$={сигналы будут приняты без искажений} воспользуемся геометрическим определением вероятности. Итак,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G}) = (1-\tau)\cdot(1-\tau) = (1-\tau)^2,$$

а площадь двух треугольников, образующих благоприятную зону, составит

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2}\cdot(1-2\tau)\cdot(1-2\tau) + \frac{1}{2}\cdot(1-2\tau)\cdot(1-2\tau) = (1-2\tau)^2.$$

Таким образом, искомая вероятность определяется выражением

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g})}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})} = \frac{(1-2\tau)^2}{(1-\tau)^2}.$$

Пример (***задача о встрече***). Два судна должны прибыть в порт назначения от 19.00 до 20.00 часов. В порту один причал для разгрузки. Продолжительность разгрузки судов 5 минут и 10 минут соответственно.

Найти вероятность того, что одному из них придется ожидать окончания разгрузки другого.

Решение. В данной задаче испытание – прибытие двух судов. Обозначим $\boldsymbol{x}-$ момент прибытия одного судна,

$\boldsymbol{y}-$ момент прибытия другого судна.

По условию $\boldsymbol{G}=\begin{cases}0\le \boldsymbol{x}\le 1\\ 0\le \boldsymbol{y}\le 1\end{cases}$

и благоприятствующая область

$$\boldsymbol{g}=\begin{cases}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\le \dfrac{1}{6}\\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\le \dfrac{1}{12}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\boldsymbol{y}\ge \boldsymbol{x}-\dfrac{1}{6}\\ \boldsymbol{y}\le \boldsymbol{x}+\dfrac{1}{12}.\end{cases}$$

Им соответствует изображение на рис. 2.4.

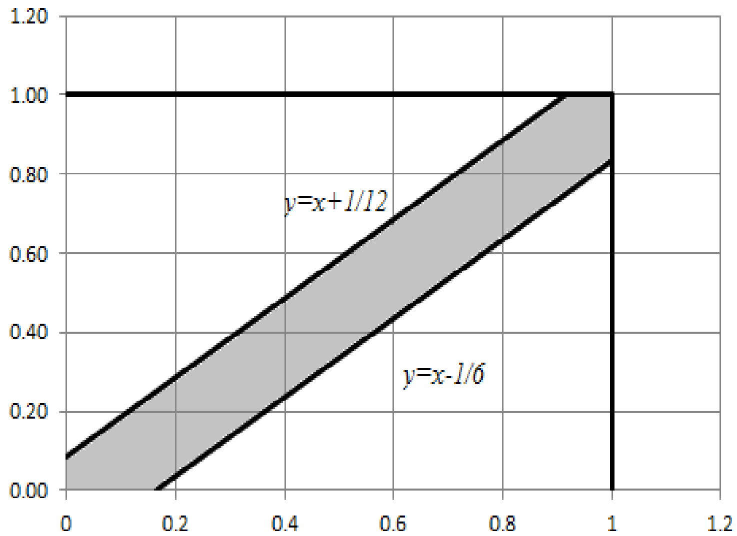


Рис.2.4

Поэтому вероятность события $\boldsymbol{A}=\{$одному из суден придется ожидать окончания разгрузки другого$\}$ равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g})}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})}=\frac{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{12}\cdot\dfrac{11}{12}}{1}=\frac{67}{288}=0{,}233.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

2.1. Из колоды в **36** карт отбирают **одну** карту. Определить вероятность того, что взятая карта будет: A ={тузом}, B={червовой масти}, K={картинкой}, M={королем червовой масти}.

2.2. Какова вероятность того, что наудачу встреченный человек родился A ={в среду}, B={под знаком зодиака «скорпион»}, K={8 марта}.

2.3. Ребенок играет карточками из разрезной азбуки, на которых написаны буквы **А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т**. Какова вероятность, что взятая карточка будет D ={с буквой **М**}, B={с буквой **А**}.

2.4. Подбрасываются 2 игральные кости. Найти вероятности указанных событий: A = {выпадет дубль}, C = {сумма очков четна}, D = {сумма очков больше двух}, E = {сумма очков равна пяти}, F = {хотя бы на одной кости появится цифра 6}, G = {произведение выпавших очков равно 6}, B={на кубиках выпадет одинаковое четное число очков}; K={на первом кубике число очков больше 3, а сумма очков на двух кубиках меньше 7}; L ={произведение выпавших очков нечетное}.

2.5. Из колоды в **36** карт случайным образом отбирают **6** карт. Найти вероятность того, что среди взятых карт будет: A ={2 туза}, K={хотя бы одна карта бубновой масти}, L={3 красные картинки}.

2.6. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}$={четыре последние цифры номера одинаковы}, $\boldsymbol{B}$={все цифры различны}, $\boldsymbol{C}$={номер начинается с цифры 5}, $\boldsymbol{D}$={цифры номера четные}, $\boldsymbol{E}$={все цифры одинаковые нечетные}, $\boldsymbol{F}$={номер заканчивается на цифру кратную 3}.

2.7. Чайный сервиз состоит из 6 чашек, 6 блюдец, чайника, сахарницы и молочника. Во время ссоры Клава запустила в своего друга Григория тремя первыми попавшимися под руку предметами из сервиза. Какова вероятность того, что $\boldsymbol{A}$ ={в Григория полетело блюдце}, $\boldsymbol{B}$={чашки не пострадали}, $\boldsymbol{C}$={ чайник участвовал «в ссоре»}?

2.8. Пустые горшочки с медом Винни-Пух ставит на полочку вместе с полными для того, чтобы вид уменьшающегося числа горшков не слишком портил ему настроение. В настоящий момент в Винни-Пуховом буфете вперемежку стоят 5 горшочков с медом и 6 абсолютно пустых. Какова вероятность того, что в двух взятых на ужин горшочках окажется мед?

2.9. Три человека вошли в лифт на первом этаже пятнадцатиэтажного дома. Считая, что любой вошедший в лифт может выйти из него, начиная с 3-го этажа, найти вероятности событий: B = {никто не выйдет на четном этаже}, D = {вошедшие выйдут на разных четных этажах}.

2.10. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности событий: A = {в состав нового алфавита входит буква a}, B = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.

2.11. В ящике комода лежат 8 носков белого цвета и 6 носков синего цвета. Наудачу вынимается 3 носка. Найти вероятность того, что образовалась пара.

2.12. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 5 человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности событий: A={будут выбраны одни третьекурсники}, B = {все первокурсники попадут на конференцию}, C={не будет выбрано ни одного второкурсника}, F={на конференцию попадут студенты с одного курса}, D ={хотя бы 2 второкурсника попадут на конференцию}.

2.13. Случайным образом задумано пятизначное число. Какова вероятность того, что а) цифры в числе четные; б) задуманное число четное; в) цифры в числе различные и нечетные; г) задуманное число больше 59 999.

2.14. Случайным образом выбираются четыре человека. Найти вероятность того, что их дни рождения: а) в один и тот же день недели, б) в воскресенье, в) придутся на разные дни недели, г) летом; д) в январе.

2.15. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.16. Какова вероятность угадать с первого раза пятизначный цифровой пароль, если известно, что цифры в пароле: а) повторяются; б) не повторяются?

2.17. В группе, состоящей из 5 девушек и 3 юношей, случайным образом разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность событий $\boldsymbol{A}$={среди обладателей билетов окажется одна девушка}, $\boldsymbol{B}$={билеты получат одинаковое число юношей и девушек} и $\boldsymbol{C}$={в театр пойдут только юноши}?

2.18. В ящике лежат 4 черных и 6 синих носков. Наудачу достают два носка. Найти вероятность следующих событий: A={достали носки черного цвета}, B={достали носки одного цвета}, C={достали носки разных цветов}.

2.19. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два наиболее сильных игрока будут играть в разных группах.

2.20. На отрезок **AB** длиной 12 см наугад ставят точку **M**. Найдите вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке **AM**, будет заключена между 36 см^2 и 81 см^2.

2.21. В квадрате со стороной 8 см наудачу берется точка. Найти вероятность того, что она будет отстоять от ближайшей стороны квадрата не более чем на 2 см.

2.22. В круг радиуса 5 см. Наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга будет больше 2 см?

2.23. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы?

2.24. Наудачу взяты два числа: первое из отрезка [-3; 2], второе из отрезка [-4; 3]. Найти вероятность того, что сумма этих чисел положительна.

2.25. На отрезке длины 10 см. Наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает 4 см.

2.26. Два парохода должны подойти к одному причалу. Появление пароходов – независимые события, равновозможные в течение суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

2.27. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный, затем снова одну минуту – зеленый и полминуты – красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

2.28. На пол, состоящий из квадратов со стороной 12 см, наудачу бросается монета радиусом 2 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну сторону ни одного квадрата.

2.29. Зритель собрался посмотреть по телевизору только один из двух намеченных фильмов, а именно тот который начнется транслироваться раньше. Как стало позднее известно, 2-й фильм начался в 10 часов, а 1-й в случайный момент времени между 9.30 и 10.15. Найти вероятность того, что зритель посмотрел 2-й фильм.

ОТВЕТЫ:

2.1. P(A) =1/9=0,1111; P(B) =1/4=0,25; P(C) =4/9=0,4444; P(M) =1/36=0,0278. **2.2.** P(A) =1/7=0,1429; P(B) =1/12=0,0833; P(K) = 1/365=0,0027. **2.3.** P(D) = 1/5=0,2; P(B) =3/10=0,3. **2.4.** P(A)=1/6=0,1667; P(C)=1/2=0,5; P(D)= 35/36=0,9722; P(E) =1/9= 0,1111; P(F) = 11/36=0,3056; P(G) = 1/9=0,1111; P(B)=1/12=0,0833; P(K)=1/12=0,0833; P(L)=1/4=0,25. **2.5.**

P(A)=13485/121737=0,1108; P(K) = 75081/88536=0,848; P(L) = 546/5797=0,0942. **2.6.** P(A) =9/10000=0,0009; P(B) =21/3125=0,0067; P(C) =1/9=0,1111; P(D)= 1/144=0,0069; P(E) =1/1800000= 0,00000056; P(F) = 3/10=0,3. **2.7.** P(A) = 216/455=0,4747; P(B)= 12/65=0,1846; P(C) = 1/5=0,2. **2.8.** P(A) = 2/11=0,1818. **2.9.** P(B) = 343/2197=0,1561; P(D) = 120/2197=0,0546. **2.10.** P(A) = 1/2=0,5; P(B) =1/42= 0,0238. **2.11.** 1 **2.12.** P(A) =1/143=0,0069; P(B) =2/91=0,0219; P(C) =12/143=0,0839; P(F) = 2/273=0,0073; P(D) = 243/429=0,5664. **2.13.** а) 1/36=0,0278; б) 1/2=0,5; в) 1/750=0,0013; г) 4/9=0,4444. **2.14.** а) 1/343=0,0029; б) 1/2401=0,0004; в) 120/343=0,3499; г) 1/256=0,0039; д) 1/3456=0,0003. **2.15.** **2.16.** а) 1/100000=0,00001; б) 1/3240=0,00003. **2.17.** P(A) =1/14=0,0714; P(B) =3/7=0,4286; P(C) =0. **2.18.** P(A)=2/15=0,1333; P(B)=7/15=0,4667; P(C)=8/15=0,5333. **2.19.** 10/19=0,5263. **2.20.** 1/4=0,25. **2.21.** 1/4=0,25. **2.22.** 21/25=0,84. **2.23.** 1/2=0,5. **2.24.** 5/14=0,3572. **2.25.** 16/25=0,64. **2.26.** 139/1152=0,1207. **2.27.** 2/3=0,6667. **2.28.** 4/9=0,4444. **2.29.** 1/3=0,3333.

3. ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

3.1. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные теоретические сведения

Условная вероятность $\boldsymbol{P(B \mid A)}$ события $\boldsymbol{B}$ при условии $\boldsymbol{A}$ – это вероятность события $\boldsymbol{B}$**,** вычисленная при условии (в предположении), что событие $\boldsymbol{A}$ уже произошло

Примечание: Если события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *несовместны*, то $\boldsymbol{P(B \mid A)} = 0$ и $\boldsymbol{P(A \mid B)} = 0$. Условная вероятность $\boldsymbol{P(B \mid B)} = 1$.

События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются **попарно независимыми**, если

$$\boldsymbol{P(B \mid A) = P(B)} \text{ или } \boldsymbol{P(A \mid B) = P(A)}$$

События: $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_n}$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого числа $m \le n$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_m)}$$

Утверждение: Из независимости событий в совокупности следует попарная независимость событий, обратное утверждение не всегда верно.

Теорема умножения для двух зависимых событий

$$\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)},$$

где $\boldsymbol{P(B \mid A)}$ – условная вероятность, т.е. вероятность события $\boldsymbol{B}$ при условии, что событие $\boldsymbol{A}$ уже произошло

Теорема умножения для двух независимых событий

$$\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Теорема умножения для k зависимых событий

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}),$$

где $P(A_2 \mid A_1)$ – условная вероятность, т.е. вероятность события A_2 при условии, что событие A_1 уже произошло и т.д.

Теорема умножения для k независимых событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

Теорема сложения для двух совместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Теорема сложения для двух несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Формула для вычисления условной вероятности события

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Формула для вычисления вероятности суммы противоположных событий

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. В кармане лежит три купюры по 500 рублей и две купюры по 1000 рублей. Достаем по одной купюры из кармана. Пусть события A_i ={i-ая купюра, взятая из кармана, – достоинством 500 рублей}. Вычислить $P(A_1),\ P(A_2 \mid A_1),\ P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2),\ P(A_3 \mid A_1 \cdot \overline{A_2})$.

Решение. Для вычисления вероятностей событий будем использовать ***классическое определение вероятности***. Так, $P(A_1) = \frac{3}{5}$.

Вычислим условную вероятность $P(A_2 \mid A_1)$. Так как событие A_1 уже произошло (первая взятая купюра была достоинством 500 рублей), общее число купюр в кармане стало четыре, из которых две купюры по 500 рублей и две купюры по 1000 рублей. Следовательно, $P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{4}$.

Для нахождения условной вероятности $P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2)$ рассуждаем аналогично. События A_1 и A_2 уже произошли, т.е. из кармана были взяты две купюры по 500 рублей. Значит, в кармане осталась одна купюра по 500 рублей и две купюры по 1000 рублей: $P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{3}$.

И $P(A_3 \mid A_1 \cdot \overline{A_2}) = \frac{2}{3}$, так как события A_1 и $\overline{A_2}$ уже произошли, т.е. из кармана были взяты две купюры, одна достоинством по 500 рублей, а другая – 1000 рублей. Следовательно, в кармане остались две купюры по 500 рублей и одна купюра по 1000 рублей. Общее число исходов $n = 3$, а число исходов, благоприятствующих событию A_3 равно $m = 2$.

Пример. Один раз подбрасывается игральный кубик. Найти вероятность того, что на грани кубика *A*={выпадет шесть очков}, *B*={выпадет четное число очков}, *C* ={выпадет число очков кратное трем}, *D*={выпадет простое число}. Являются ли независимыми события: *B* и *C*; *A* и *D*; *C* и *D*?

Решение. Испытание – подбрасывание кубика.

События A = {6}, B={2, 4, 6}, C ={3, 6}, D ={2, 3, 5}.

Проверим, являются события B и C независимыми. Для этого вычислим $P(B),\ P(C),\ P(B\cdot C)$ по ***классическому определению вероятности***:

$$P(B)=\frac{1}{2},$$

$$P(C)=\frac{1}{3},$$

$$P(B\cdot C)=\frac{1}{6}, \text{ т.к. } B\cdot C=\{6\}.$$

Подставим найденные вероятности в равенство $P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)$:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},$$

следовательно, события B и C являются независимыми событиями.

Аналогично проверим независимость событий A и D. Найдем $P(A),\ P(D),\ P(A\cdot D)$ и подставим значения вероятностей в равенство $P(A\cdot D)=P(A)\cdot P(D)$. Итак,

$$P(A)=\frac{1}{6},$$

$$P(D)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cdot D)=0, \text{ т.к. } A\cdot D=\varnothing.$$

События A и D являются зависимыми событиями, так как $0\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$.

Для независимости событий C и D должно выполняться равенство $P(C\cdot D)=P(C)\cdot P(D)$. Т.к. $C\cdot D=\{3\}$, следовательно,

$$P(C\cdot D)=\frac{1}{6},$$

$$P(C)=\frac{1}{3} \text{ и}$$

$$P(D)=\frac{1}{2}.$$

События C и D являются независимыми событиями, так как $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$.

Рассмотрим еще один способ проверки независимости событий.

Два события A и B являются **независимыми**, если $P(A|B)=P(A)$ или $P(B|A)=P(B)$.

Проверим, являются события A и B независимыми.

Найдем условную вероятность $\boldsymbol{P(A|B)}$ по ***классическому определению вероятности***. Так как событие B={2, 4, 6} уже произошло, то общее число исходов $\boldsymbol{n}$=3. Из них событию A благоприятствует $\boldsymbol{m}=1$ исход. Тогда $\boldsymbol{P(A|B)}=\frac{1}{3}$. Сравним условную вероятность события $\boldsymbol{P(A|B)}=\frac{1}{3}$ с безусловной вероятностью $\boldsymbol{P(A)}=\frac{1}{6}$. Очевидно, что $\boldsymbol{P(A|B)\neq P(A)}$, следовательно, события A и B являются зависимыми событиями.

Аналогично, условная вероятность события $\boldsymbol{P(B|A)}=1$ не совпадает с безусловной вероятностью $\boldsymbol{P(B)}=\frac{1}{2}$, следовательно, события A и B являются зависимыми событиями.

Проверим, являются события B и C независимыми.

Найдем условную вероятность $P(B|C)$ по ***классическому определению вероятности***. Так как событие C ={3, 6} уже произошло, то общее число исходов $\boldsymbol{n}=2$. Из них событию B благоприятствует $\boldsymbol{m}=1$ исход. Тогда $P(B|C)=\frac{1}{2}$. Сравнивая условную вероятность события $P(B|C)=\frac{1}{2}$ с безусловной вероятностью $P(B)=\frac{1}{2}$, делаем вывод, что события B и C являются независимыми событиями.

Условная вероятность события $P(C|B)=\frac{1}{3}$ совпадает с безусловной вероятностью $P(C)=\frac{1}{3}$, следовательно, события B и C являются независимыми событиями.

Пример. Из колоды, содержащей 36 карт, наугад вынули одну карту. Пусть A = {вынута карта красной масти}, B = {вынут король}. Являются ли эти события независимыми?

Решение. По формуле классической вероятности

$$P(A) = 18/36=1/2, \quad P(B) = 4/36=1/9.$$

Произведение событий $A \cdot B$ = {вынут король красной масти, т.е. червовый король и бубновый король}, вероятность события $A \cdot B$:

$$P(A \cdot B) = 2/36=1/18.$$

Проверим выполнение равенства $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$: 1/18 = 1/2$\cdot$ 1/9, так как равенство не нарушается, то события A и B являются независимыми.

Можно проверить независимость событий, сравнив условные и безусловные вероятности.

Вычислим условную вероятность:

$$P(B|A) = 2/18,$$

так как всего имеется 18 карт красной масти, и среди них ровно 2 короля.

Подставим найденные вероятности в равенство $P(B) = P(B|A)$: 1/9 = 1/9, события A и B являются независимыми.

Аналогично, $P(A|B)$=2/4. Так как $P(A) = P(A|B)$: 1/2 = 1/2, события A и B являются независимыми.

Пример. Из колоды в 36 карты наугад достают 1 карту. Пусть события A={извлеченная карта дама}, B={извлеченная карта пиковой масти}. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

Решение. Вычислим вероятность события A:

$$P(A) = 4/36=1/9$$

и условную вероятность этого события:

$$P(A|B)=1/9.$$

Очевидно, что $P(A) = P(A|B)$. Следовательно, события A и B независимые.

Пример. Пусть события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ независимы. Доказать, что независимыми являются пары событий $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$.

Решение. Применяя определение независимости событий $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$, и используя вероятность противоположного события, имеем

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{B}}),$$

т.е. $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{B}})$, следовательно, события $\boldsymbol{A}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$ являются независимыми.

Аналогично,

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}|\boldsymbol{B}) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}),$$

т.е. $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}|\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}})$, следовательно, события $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\boldsymbol{B}$ являются независимыми.

Пример Бернштейна. Имеется правильная пирамидка, 3 грани которой одноцветные и окрашены, соответственно, в красный, желтый и зеленый цвета, а четвертая грань – трехцветная, т.е. содержит все три цвета. В результате бросания правильной пирамидки может произойти одно из событий: A_1={выпадет грань, на которой есть красный цвет},

A_2={выпадет грань, на которой есть желтый цвет},

A_3={выпадет грань, на которой есть зеленый цвет}.

Являются ли события A_1, A_2, A_3 независимыми событиями в совокупности.

Решение. События A_1, A_2, A_3 называются **независимыми событиями в совокупности**, если

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2),$$

$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Вычислим вероятности:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2};$$

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{4}.$$

Проверим выполнение четырех равенств из определения независимости в совокупности:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Поскольку последнее равенство не выполнено, можно сделать вывод, что события A_1, A_2, A_3 **не являются** независимыми событиями в совокупности, хотя они попарно независимы. Этот пример позволяет нам сформулировать утверждение.

Утверждение. Из попарной независимости событий **не следует** независимость событий в совокупности.

Пример. В большой рекламной фирме 25% работников получают высокую заработную плату. Известно, что 40% работников фирмы – женщины, а 6% работников – это женщины, получающие высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение. Введем события:

$\boldsymbol{A}$ = {случайно выбранный работник имеет высокую заработную плату},

$\boldsymbol{B}$ = {случайно выбранный работник – женщина},

$\boldsymbol{AB}$ = {случайно выбранный работник – женщина, имеющая высокую заработную плату},

По условию $\boldsymbol{P(A)} = 0{,}25$, $\boldsymbol{P(B)} = 0{,}4$, $\boldsymbol{P(A \cdot B)} = 0{,}06$.

Для ответа на вопрос о дискриминации женщин в оплате труда, нужно сравнить $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ с $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$. Найдем $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \frac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15.$$

Поскольку $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 0{,}15$ меньше, чем $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = 0{,}25$, можно сделать вывод о том, что женщины, работающие в рекламной фирме, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Пример. Исследовать связь между цветом глаз отца и сына на основании следующих данных, полученных при переписи населения Англии и Уэльса в 1891 г. Темноглазые отцы и темноглазые сыновья составляли 5% среди всех обследованных, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья – 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья – 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья – 78, 2%.

Решение.

Обозначим событие $\boldsymbol{A}$={темноглазый отец} и $\boldsymbol{B}$={темноглазый сын}. По условию $P(A\cdot B) = 0,05$, $P(A\cdot\overline{B}) = 0,079$, $P(\overline{A}\cdot B) = 0,089$, $P(\overline{A}\cdot\overline{B}) = 0,782$.

Нужно исследовать связь между цветом глаз отца и сына, т.е. вычислить $P(B\,|\,A)$, $P(B\,|\,\overline{A})$, $P(\overline{B}\,|\,A)$, $P(\overline{B}\,|\,\overline{A})$.

Для нахождения $P(B\,|\,A)$ воспользуемся формулой

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\cdot B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0.$$

Но вероятность $P(A)$ нам не дана. Для ее нахождения используем следующие рассуждения. Представим интересующее нас событие A через сумму несовместных событий:

$$A = A\cdot\Omega = A\cdot(B+\overline{B}) = A\cdot B + A\cdot\overline{B}$$

и вычислим вероятность события A по теореме сложения для несовместных событий:

$$P(A) = P(A\cdot B + A\cdot\overline{B}) = 0,05 + 0,079 = 0,129.$$

Сейчас мы можем найти интересующую нас вероятность рождения темноглазого сына у темноглазого отца:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,129} = 0,3876.$$

Аналогично вычислим $P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(A)} = \frac{0,079}{0,129} = 0,6124.$

Для вычисления вероятности рождения светлоглазого сына у темноглазого отца можно было поступить следующим образом:

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - 0,3876 = 0,6124,$$

так как события B и $\overline{B}$ являются противоположными, а условия, при которых они происходят, одинаковые.

Вероятности рождения светлоглазого или темноглазого сына у светлоглазого отца найдем аналогично, предварительно представив событие $\overline{A}$ через сумму несовместных событий $\overline{A} \cdot B$ и $\overline{A} \cdot \overline{B}$ следующим образом

$$\overline{A} = \overline{A} \cdot \Omega = \overline{A} \cdot (B + \overline{B}) = \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Тогда

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) = 0,089 + 0,782 = 0,871.$$

И интересующие нас вероятности соответственно равны

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{0,089}{0,871} = 0,1022, \quad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 1 - 0,1022 = 0,8978.$$

Пример. Ребенок играет карточками из разрезной азбуки, на которых написаны буквы **А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т**. Он берет по одной карточке, кладет их в ряд в порядке вынимания и читает полученное слово. Найти вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он сможет прочитать слово «**МАМА»**.

Решение.

Пусть событие $\boldsymbol{B}$ = {ребенок сможет прочитать слово «**МАМА**»}. Для того чтобы получилось слово «**МАМА»** нужно, чтобы первая карточка была с буквой **М**, вторая карточка с буквой **А**, третья – с буквой **М** и четвертая карточка должна быть с буквой **А**.

Введем элементарные события:

A_1 ={первая карточка с буквой **М**},

A_2 ={вторая карточка с буквой **А**},

A_3 ={третья карточка с буквой **М**},

A_4 ={четвертая карточка с буквой **А**}.

Представим событие $\boldsymbol{B}$ через элементарные события: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \boldsymbol{A}_4$. Для вычисления вероятности этого события воспользуемся теоремой умножения для зависимых событий, так как первая карточка достается из 10, следующая из 9 и т.д. При вычислении вероятностей последующих событий надо учитывать, что предыдущие события уже произошли:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \boldsymbol{A}_4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{420} = 0{,}0024 .$$

Пример. Ребенок играет карточками из разрезной азбуки, на которых написаны буквы **А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т**. Он берет одну карточку, записывает взятую букву и возвращает карточку обратно. Найти вероятность, что он сможет прочитать слово «**МАМА**».

Решение. Пусть событие $\boldsymbol{B}$ = {ребенок сможет прочитать слово «**МАМА**»}.

Введем элементарные события:

A_1 ={первая карточка с буквой **М**},

A_2 ={вторая карточка с буквой **А**},

A_3 ={третья карточка с буквой **М**},

A_4 ={четвертая карточка с буквой **А**}.

Представим событие $\boldsymbol{B}$ через элементарные события: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \boldsymbol{A}_4$. Для вычисления вероятности этого события воспользуемся теоремой умножения для независимых событий, так как первая карточка достается из 10, следующая из 10 и т.д., т.е. предыдущие события не влияют на вероятность последующих:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \boldsymbol{A}_4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{2500} = 0{,}0036 .$$

Пример. Покупатель может приобрести акции трех компаний X, Y, Z. Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90%, второй – 70%, и надежность третьей компании оценивается ими на уровне 80%. Определить вероятности событий $B=${в течение года ни одна компания не обанкротится}, $D=${в течение года две компании обанкротятся}, $C=${в течение года не менее двух компаний не обанкротятся}.

Решение. Введем элементарные события:

$A_1=${в течение года компания X не обанкротилась},

$A_2=${в течение года компания Y не обанкротилась},

$A_3=${в течение года компания Z не обанкротилась}.

Выразим событие B в алгебре событий через элементарные события: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Вероятность события $P(B)$ найдем по теореме умножения для независимых событий:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}504.$$

Используем эти же элементарные события для события D:

$$D = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3.$$

Для нахождения вероятности $P(D)$ применим теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий:

$$P(D) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}092.$$

Событие C представим в алгебре событий:

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, найдем $P(C)$:

$$P(C) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}902.$$

Пример. На экзамен предложено 50 вопросов, из которых формируются билеты по три вопроса в каждом. Студент к экзамену выучил 40 вопросов. Оценку «отлично» на экзамене можно получить, ответив на три вопроса билета. При ответе на любые два вопроса из билета, студент получает «хорошо». «Удовлетворительно» за экзамен преподаватель ставит, если студент отвечает на один любой вопрос билета. Определить вероятности событий:

$\boldsymbol{A}$ ={студент на экзамене получит «отлично»},

$\boldsymbol{D}$={студент сдаст экзамен на «удовлетворительно»},

$\boldsymbol{C}$ ={студент получит положительную оценку},

$\boldsymbol{B}$ ={студент экзамен сдаст}.

Решение. Введем элементарные события:

$\boldsymbol{A}_1$={студент отвечает на первый вопрос билета},

$\boldsymbol{A}_2$={студент отвечает на второй вопрос билета},

$\boldsymbol{A}_3$={студент отвечает на третий вопрос билета}.

Выразим событие $\boldsymbol{A}$ в алгебре событий через элементарные события: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3$.

Вероятность события $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ найдем по теореме умножения для зависимых событий:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3) = \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} = 0{,}504.$$

Используем эти же элементарные события для события $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3 + \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3 + \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3.$$

Применим теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для зависимых событий для нахождения вероятности $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{A}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3 + \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3 + \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3) =$$
$$= \frac{40}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} + \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{9}{48} + \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{40}{48} = 0{,}09.$$

Выразим событие $\boldsymbol{C}$ в алгебре событий:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3 + \boldsymbol{A}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 + \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3.$$

Для вычисления $\boldsymbol{P(C)}$ используем теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для зависимых событий:

$$\boldsymbol{P(C) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =}$$
$$= \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{10}{48} + \frac{40}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{39}{48} + \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{39}{48} + \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} = 0{,}902.$$

Для вычисления вероятности $\boldsymbol{P(B)}$, событие можно представить в виде

$$\boldsymbol{B} = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

и использовать теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для зависимых событий: $\boldsymbol{P(B)} = 0{,}994$.

Событие $\boldsymbol{B}$ через элементарные события представимо в виде: $\boldsymbol{B = A_1 + A_2 + A_3}$. Но тогда для нахождения $\boldsymbol{P(B)}$ надо использовать теорему сложения для совместных событий и теорему умножения для зависимых событий.

Но самый простой способ вычислить $\boldsymbol{P(B)}$ – использовать тождество $\boldsymbol{P(B) + P(\overline{B})} = 1$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{P(B)} = 1 - \boldsymbol{P(\overline{B})}$.

Противоположное событие $\overline{\boldsymbol{B}}$ ={студент экзамен не сдаст}. Тогда $\boldsymbol{\overline{B} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3}$. Для вычисления $\boldsymbol{P(\overline{B})}$ используем теорему умножения для зависимых событий:

$$\boldsymbol{P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3)} = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0{,}006.$$

Итак, $\boldsymbol{P(B)} = 1 - \boldsymbol{P(\overline{B})} = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

Пример. Иван и Петр поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится орел. Иван бросает первым. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков, если игра идет до победы одного из игроков.

Решение. Пусть событие $\boldsymbol{A}$ = {выиграет Иван}. Для выигрыша Ивана необходимо, чтобы при подбрасывании монеты у него выпадал орел. Введем элементарные события:

A_1={ у Ивана выпадет орел при подбрасывании монеты},

A_2={ у Петра выпадет орел при подбрасывании монеты}.

Тогда $A = A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_1 + \ldots$.

Для вычисления $P(A)$ применим теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий:

$$P(A) = P(A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_1 + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots = \frac{2}{3}.$$

При нахождении вероятности воспользовались формулой вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где $b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4}$.

Выразим через элементарные события событие $\boldsymbol{B}$ = {выиграет Петр}:

$$B = \overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot A_2 + \ldots.$$

Тогда $P(B)$:

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot A_2 + \ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

При нахождении вероятности воспользовались формулой вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где $b_1 = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}$.

Но самый простой способ вычислить $P(B)-$ это воспользоваться следующим равенством: $P(B) = 1 - P(\overline{B})$.

Событие $\overline{B}$={Петр проиграет}. Это событие совпадает с событием $\boldsymbol{A}$={выиграет Иван}, вероятность которого мы вычисляли выше. Тогда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Пример. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и одну задачу. Согласно статистике, на экзамене правильно решают задачу примерно 60% студентов, на первый теоретический вопрос отвечают 70%

студентов, а на второй – 80%. Применяется следующая система оценки знаний: если студент решит задачу и ответит на оба теоретические вопроса, то он получит «отлично»; если решит задачу и ответит только на один любой теоретический вопрос, то получит «хорошо»; если не решит задачу, но ответит на оба теоретические вопроса, получит «удовлетворительно»; в остальных случаях он получит «неудовлетворительно». Найти вероятность того, что студент получит на экзамене «хорошо». Каков будет процент студентов, сдавших экзамен?

Решение. Обозначим $\boldsymbol{B}$={студент получит на экзамене «хорошо»}.

Введем элементарные события:

B_1 = {студент ответит на первый теоретический вопрос},

B_2 ={студент ответит на второй теоретический вопрос},

B_3= {студент решит задачу}.

Выразим событие $\boldsymbol{B}$ в алгебре событий через элементарные события:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3.$$

Для вычисления вероятности события $\boldsymbol{B}$ воспользуемся теоремой сложения для несовместных событий и теоремой произведения для независимых событий:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}228 .$$

Пусть $\boldsymbol{D}$ = {студент сдаст экзамен}, тогда

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_3} .$$

Для вычисления вероятности события $\boldsymbol{D}$ воспользуемся теоремой сложения для несовместных событий и теоремой произведения для независимых событий:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{B}_3}) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}788.$$

Следовательно, 78,8% студентов сдадут экзамен.

Пример. В связке пять ключей, из которых только один подходит к замку. Чтобы открыть замок, ключ выбирают наугад. Какова вероятность того, что ключ будет подобран с третьей попытки? Найти вероятность события $\boldsymbol{A}$={на открывание замка потребуется не более трех попыток}.

Решение. Обозначим $\boldsymbol{B}$ = {ключ подобран с третьей попытки}.

Введем элементарные события:

B_1 = {первый ключ подходит},

B_2 ={второй ключ подходит},

B_3 ={третий ключ подходит}.

Очевидно, что событие $\boldsymbol{B}$ можно представить в виде произведения через элементарные события:

$$\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3.$$

Чтобы вычислить вероятность $\boldsymbol{P(B)}$, воспользуемся теоремой произведения для зависимых событий:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3\right) = \boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{B}_1}\right) \cdot \boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{B}_2} \middle| \overline{\boldsymbol{B}_1}\right) \cdot \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{B}_3 \middle| \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Событие $\boldsymbol{A}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_1 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3.$$

Чтобы вычислить вероятность $\boldsymbol{P(A)}$, воспользуемся теоремой сложения для несовместных событий и теоремой произведения для зависимых событий:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}_1 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \boldsymbol{B}_2 + \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_2} \cdot \boldsymbol{B}_3) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Пример. Вероятность получения «счастливого» билета в транспорте равна 0,05. Найти вероятность того, что из двух купленных билетов хотя бы один окажется «счастливым», если: а) билеты куплены в разных видах транспорта, б) билеты куплены последовательно.

Решение. Пусть событие $\boldsymbol{A}$={первый купленный билет «счастливый»}, $\boldsymbol{B}$={второй купленный билет «счастливый»} и $\boldsymbol{C}$={хотя бы один билет окажется «счастливым»}. Тогда событие: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

а) если билеты были куплены в разных видах транспорта, то события A и B **совместные**, следовательно,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = 0{,}05+0{,}05-0{,}05\cdot 0{,}05 = 0{,}0975.$$

б) если билеты были куплены последовательно, то события A и B **несовместные**, следовательно,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = 0{,}05+0{,}05 = 0{,}1.$$

Пример. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа для первого станка не потребуется помощь рабочего равна 0,9, для второго – 0,8 и для третьего станка эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность события $\boldsymbol{C}$={по крайней мере для двух станков не потребуется помощь рабочего в течение часа}.

Решение: Введем элементарные события:

$\boldsymbol{A}_1$={в течение часа для первого станка не потребуется помощь рабочего},

$\boldsymbol{A}_2$={в течение часа для второго станка не потребуется помощь рабочего},

$\boldsymbol{A}_3$={в течение часа для третьего станка не потребуется помощь рабочего}.

Выразим событие $\boldsymbol{C}$ в алгебре событий через элементарные события:

$$\boldsymbol{C} = \overline{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{A}}_3 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3.$$

Применяя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, найдем вероятность этого события:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{A}}_3 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3) =$$
$$= (1-0{,}9)\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}9\cdot(1-0{,}8)\cdot 0{,}7 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}7) + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}902.$$

Пример. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,5 и 0,8. Найти вероятности следующих событий:

$\boldsymbol{B}$={при залпе все три снаряда попадут в цель},

C={при залпе только один снаряд попадет в цель}.

Решение: Введем элементарные события:

A_1={из первого орудия попали в цель},

A_2={из второго орудия попали в цель},

A_3={из третьего орудия попали в цель}.

Выразим событие B в алгебре событий через элементарные события:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

Применяя теорему умножения для независимых событий, вычислим

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}36.$$

Событие C можно выразить через события A_1, A_2 и A_3 следующим образом:

$$C = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 .$$

Для вычисления вероятности события C воспользуемся теоремой сложения для несовместных событий и теоремой произведения для независимых событий:

$$P(C) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot (1-0{,}5) \cdot (1-0{,}8) + (1-0{,}9) \cdot 0{,}5 \cdot (1-0{,}8) + (1-0{,}9) \cdot (1-0{,}5\cdot) \cdot 0{,}8 = 0{,}14.$$

3.2. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Основные теоретические сведения

Известно, что событие $\boldsymbol{A}$ может произойти совместно только с одним из событий (**гипотез**) $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{n}}$, которые образуют полную группу событий.

Тогда, если до проведения испытания известны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})$ – *априорные вероятности* гипотез $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}$ и условные вероятности $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})$, то вероятность события $\boldsymbol{A}$ можно найти по **формуле полной вероятности**:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})}$$

Примечание: Гипотезы $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{n}}$ образуют полную группу событий, следовательно, удовлетворяют свойствам:

1) они попарно несовместны

2) $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}) = 1$.

Формула Байеса

Известно, что событие $\boldsymbol{A}$ может произойти совместно только с одним из событий (**гипотез**) $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{n}}$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})$ – *априорные вероятности* гипотез $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}$ и условные вероятности $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})$.

В описанных выше условиях стало известно, что событие A **уже произошло**, тогда вероятности гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ можно **переоценить**, т.е. найти $P(H_j|A)$ – <u>*апостериорные вероятности*</u> по **формуле Байеса**:

$$\boxed{P(H_j|A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)}}$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. У мальчика в левом кармане находится 3 красных воздушных шарика и 2 желтых, а в правом кармане 4 красных и 6 желтых. Мальчик из кармана достал воздушный шарик. Найти вероятность того, что шарик будет красного цвета.

Решение. Нужно найти вероятность события $\boldsymbol{A}$ = {взятый шарик будет красного цвета}. Вычислить вероятность этого события сразу мы не можем, так как неизвестно, из какого кармана мальчик достал воздушный шарик. Выскажем гипотезы о том, что неизвестно:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$левый карман$\}$,

$\boldsymbol{H}_2 = \{$правый карман$\}$

Вычислим вероятности гипотез: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Гипотезы должны составлять полную группу событий. Проверим это: они несовместны и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = 1$.

Вычислим условные вероятности: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_2) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Тогда вероятность события $\boldsymbol{A}$ по ***формуле полной вероятности*** будет равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}5.$$

Пример. В студенческой группе 4 отличника, 5 хорошистов, 2 – удовлетворительно успевающих и 1 студент подготовлен плохо. К экзамену предложено 20 вопросов. Отличники знают ответы на 18 вопросов, хорошисты – на 15, удовлетворительно подготовленные учат половину из предложенных вопросов и плохо подготовленный студент знает 5 вопросов. Найти вероятность того, что студент из этой группы ответит на вопрос, заданный экзаменатором.

Решение. Обозначим событие $\boldsymbol{A}$ ={студент из этой группы ответит на вопрос, заданный экзаменатором}. По условию задачи неизвестно, о каком студенте идет речь. Выскажем об этом гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$студент отличник$\}$,

$\boldsymbol{H}_2 = \{$хорошист$\}$,

$\boldsymbol{H}_3 = \{$удовлетворительно успевающий студент$\}$,

$\boldsymbol{H}_4 = \{$студент плохо подготовленный$\}$.

Вероятности гипотез: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{4}{12}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{5}{12}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3) = \frac{2}{12}$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_4) = \frac{1}{12}$. Гипотезы составляют полную группу событий: они несовместны и $\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_i) = 1$.

Условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ равны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_1) = \frac{18}{20} = 0{,}9$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_2) = \frac{15}{20} = 0{,}75$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_3) = \frac{10}{20} = 0{,}5$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_4) = \frac{5}{20} = 0{,}25$.

Вероятность события $\boldsymbol{A}$ вычислим по ***формуле полной вероятности***:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{18}{20} + \frac{5}{12} \cdot \frac{15}{20} + \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{20} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{20} = 0{,}72 .$$

Пример. В студенческой группе 4 отличника, 5 хорошистов, 2 – удовлетворительно успевающих и 1 студент подготовлен плохо. К экзамену предложено 20 вопросов. Отличники знают ответы на 18 вопросов, хорошисты – на 15, удовлетворительно подготовленные учат половину из предложенных вопросов и плохо подготовленный студент знает 5 вопросов. Студент из этой группы ответил на вопрос, заданный экзаменатором. Найти вероятность того, что это хорошист.

Решение. Обозначим событие $\boldsymbol{A}$ ={студент из этой группы ответил на вопрос, заданный экзаменатором}. Это событие уже произошло, но неизвестно о каком студенте идет речь. Выскажем гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$студент отличник$\}$,

$\boldsymbol{H}_2 = \{\text{хорошист}\}$,

$\boldsymbol{H}_3 = \{\text{удовлетворительно успевающий студент}\}$,

$\boldsymbol{H}_4 = \{\text{студент плохо подготовленный}\}$.

Вероятности гипотез: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{4}{12}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{5}{12}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3) = \frac{2}{12}$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_4) = \frac{1}{12}$. Гипотезы составляют полную группу событий: они несовместны и $\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_i) = 1$.

Условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ равны

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_1) = \frac{18}{20} = 0{,}9$,

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_2) = \frac{15}{20} = 0{,}75$,

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_3) = \frac{10}{20} = 0{,}5$ и

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_4) = \frac{5}{20} = 0{,}25$.

Вероятность события $\boldsymbol{A}$ вычислим по ***формуле полной вероятности***:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{18}{20} + \frac{5}{12} \cdot \frac{15}{20} + \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{20} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{20} = 0{,}72.$$

По условию задачи надо переоценить вероятность гипотезы $\boldsymbol{H}_2$ при условии, что событие $\boldsymbol{A}$ уже произошло. Искомую вероятность $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2 | \boldsymbol{A})$ вычислим по ***формуле Байеса***:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2 | \boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} | \boldsymbol{H}_2)}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{15}{20}}{0{,}72} = 0{,}43.$$

Пример. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98, 88 и 92% случаев. Поступивший в торговую фирму телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность, что он поступил от первого поставщика.

Решение. Событие $\boldsymbol{A}$={телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока}. Это событие уже произошло, но неизвестен поставщик этого телевизора. Введем гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1$ = {телевизор поступил в торговую фирму от 1-го поставщика};

$\boldsymbol{H}_2$ = {телевизор поступил в торговую фирму от 2-го поставщика};

$\boldsymbol{H}_3$ = {телевизор поступил в торговую фирму от 3-го поставщика}.

Определим вероятности каждой гипотезы. По условию задачи, так как телевизоры от трех поставщиков поступают в фирму в отношении 1:4:5, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3) = \frac{5}{10} = 0{,}5$. Свойство гипотез выполняется: $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{3} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1.$

Вероятности события $\boldsymbol{A}$ при условии наступления каждой из гипотез H_1, H_2, H_3 по условию задачи равны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_1) = 0{,}98$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_2) = 0{,}88$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_3) = 0{,}92$.

По ***формуле полной вероятности*** найдем вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91.$$

По условию задачи событие $\boldsymbol{A}$ уже произошло, и требуется переоценить вероятность гипотезы $\boldsymbol{H}_1$. По ***формуле Байеса*** искомая вероятность равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1 | \boldsymbol{A}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}98}{0{,}91} = 0{,}108.$$

Пример. В первой коробке содержится 20 тетрадей, из них 18 в клетку; во второй коробке – 10 тетрадей, из них 9 в клетку. Из второй коробки переложили в первую одну тетрадь. Затем из первой коробки взяли одну тетрадь. Найти вероятность того, эта тетрадь будет в клетку.

Решение. Обозначим событие $\boldsymbol{A}$={из первой коробки извлечена тетрадь в клетку}. Определить вероятность этого события сразу мы не можем, так как неизвестно, какую тетрадь до этого мы положили в первую коробку. Введем гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$из второй коробки переложили в первую тетрадь в клетку$\}$;

$\boldsymbol{H}_2 = \{$из второй коробки переложили в первую тетрадь не в клетку$\}$.

Определим вероятности каждой гипотезы H_1, H_2 и условные вероятности события $\boldsymbol{A}$. По условию задачи, так как во второй коробке содержится 9 тетрадей в клетку из 10, то вероятность первой гипотезы равна $P(H_1) = \frac{9}{10}$, а вероятность второй гипотезы – $P(H_2) = \frac{1}{10}$.

В первой коробке было 18 тетрадей в клетку из 20. Вероятность извлечения из нее тетради в клетку после того, как в нее из второй коробки добавили одну тетрадь в клетку, равна $P(A \mid H_1) = \frac{19}{21}$.

Если же в первую коробку была переложена одна тетрадь не в клетку, то вероятность извлечения из нее тетради в клетку равна $P(A \mid H_2) = \frac{18}{21}$.

Искомая вероятность события $\boldsymbol{A}$ по ***формуле полной вероятности*** равна

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9.$$

Пример. В больницу поступают больные с заболеваниями $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{K}$, причем с заболеванием $\boldsymbol{M}$ поступает 30% больных; с заболеванием $\boldsymbol{N}$ – 20% и с $\boldsymbol{K}$ – 50% больных. Вероятность полного излечения больных с заболеванием $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{K}$ равна 0,6, 0,7 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что случайно выбранный больной выпишется здоровым.

Решение. Сначала больной заболевает одной из трех болезней $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{K}$. Это гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$больной с заболеванием $\boldsymbol{M}\}$,

$\boldsymbol{H}_2 = \{$больной с заболеванием $\boldsymbol{N}\}$,

$\boldsymbol{H}_3 = \{$больной с заболеванием $\boldsymbol{K}\}$.

Вероятности гипотез

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1)=\frac{30\%}{100\%}=0{,}3,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2)=\frac{20\%}{100\%}=0{,}2,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3)=\frac{50\%}{100\%}=0{,}5.$$

Проверка $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{3}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})=0{,}3+0{,}2+0{,}5=1.$

Затем может произойти событие $\boldsymbol{A}$={больной выпишется здоровым}.

Условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ при каждой гипотезе соответственно равны

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_1)=0{,}6,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_2)=0{,}7,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_3)=0{,}9.$$

Искомая вероятность события $\boldsymbol{A}$ по ***формуле полной вероятности*** равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=0{,}3\cdot0{,}6+0{,}2\cdot0{,}7+0{,}5\cdot0{,}9=0{,}18+0{,}14+0{,}45=0{,}77.$$

Пример. В больницу поступают больные с заболеваниями ***M***, ***N*** и ***K***, причем с заболеванием ***M*** поступает 30% больных; с заболеванием ***N*** – 20% и с ***K*** – 50% больных. Вероятность полного излечения больных с заболеванием ***M***, ***N*** и ***K*** равна 0,6, 0,7 и 0,9 соответственно. Случайно выбранный больной был выписан здоровым. Что вероятнее: больной страдал заболеванием ***M***, ***N*** или ***K***?

Решение. Сначала больной заболевает одной из трех болезней ***M***, ***N*** и ***K***. Это гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1$ = {больной с заболеванием ***M***},

$\boldsymbol{H}_2$ = {больной с заболеванием ***N***},

$\boldsymbol{H}_3$ = {больной с заболеванием ***K***}.

Вероятности гипотез

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1)=\frac{30\%}{100\%}=0{,}3,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2)=\frac{20\%}{100\%}=0{,}2,\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3)=\frac{50\%}{100\%}=0{,}5.$$

Проверка $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{3}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}})=0{,}3+0{,}2+0{,}5=1.$

Затем может произойти событие $\boldsymbol{A}$={больной был выписан здоровым}.

Условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ при каждой гипотезе соответственно равны

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_1) = 0{,}6, \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_2) = 0{,}7, \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{H}_3) = 0{,}9.$$

В итоге получаем

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}18 + 0{,}14 + 0{,}45 = 0{,}77.$$

Для ответа на вопрос переоценим вероятности гипотез по ***формуле Байеса***:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1 \mid \boldsymbol{A}) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}77} = \frac{18}{77} \approx 0{,}234;$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2 \mid \boldsymbol{A}) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}77} = \frac{14}{77} \approx 0{,}182;$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3 \mid \boldsymbol{A}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}77} = \frac{45}{77} \approx 0{,}584.$$

Условная вероятность третьей гипотезы наибольшая, следовательно, вероятнее всего больной страдал заболеванием ***К***.

Пример. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может создавать помехи. Если объект не создает помехи, то за один цикл осмотра станция обнаруживает его с вероятностью 0,9, если объект создает помехи, то эта вероятность равна 0,6. Вероятность того, что во время цикла осмотра объектом будут созданы помехи, равна 0,2. Найти вероятность обнаружения радиолокационной станцией объекта за один цикл осмотра.

Решение: Пусть событие $\boldsymbol{A}$={обнаружение радиолокационной станцией объекта за один цикл осмотра}.

Выскажем гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1 = \{$объект не создает помехи$\}$,

$\boldsymbol{H}_2 = \{$объект создает помехи$\}$.

Вычислим вероятности гипотез: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = 0{,}8$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = 0{,}2$. Гипотезы несовместны и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = 1$.

Найдем условные вероятности $P(A \mid H_1)=0{,}9$ и $P(A \mid H_2)=0{,}6$.

Искомая вероятность события A по ***формуле полной вероятности*** равна

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)=0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}84.$$

Пример. В ящик, где 10 деталей первого сорта и 3 детали второго сорта, токарь положил одну изготовленную деталь. После чего сборщик взял наудачу из ящика одну деталь, которая оказалась первого сорта. Найти вероятность того, что вложенная токарем деталь была второго сорта, если он изготавливает детали только перового и второго сортов с вероятностями 0,95 и 0,05 соответственно.

Решение: Обозначим событие $A=\{$сборщиком из ящика извлечена деталь первого сорта$\}$.

Токарь положил в ящик одну изготовленную деталь. Введем гипотезы:

$H_1=\{$вложенная токарем деталь была первого сорта$\}$;

$H_2=\{$вложенная токарем деталь была второго сорта$\}$.

По условию вероятность первой гипотезы равна $P(H_1)=0{,}95$, а вероятность второй гипотезы – $P(H_2)=0{,}05$.

Если токарь вложил первосортную деталь, то $P(A \mid H_1)=\frac{11}{14}$, так как деталей в ящике стало 14, а первосортных – 11. Если токарь положил в ящик второсортную деталь, то $P(A \mid H_2)=\frac{10}{14}$, так как число первосортных деталей не изменилось, а общее число деталей стало 14.

По условию задачи событие A уже произошло, а надо переоценить вероятность гипотезы H_2. Искомую вероятность $P(H_2|A)$ вычислим по ***формуле Байеса***:

$$P(H_2 \mid A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)}{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)}=\frac{0{,}05\cdot\frac{10}{14}}{0{,}95\cdot\frac{11}{14}+0{,}05\cdot\frac{10}{14}}=0{,}046.$$

Пример. Среди 30 экзаменационных билетов: 25 «хороших» и 5 «плохих». Какова вероятность, отвечая вторым, взять «хороший» билет?

Решение. Пусть событие $\boldsymbol{A}=\{$второй отвечающий взял «хороший» билет$\}$. Введем следующие гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1=\{$первый отвечающий взял «хороший» билет$\}$;

$\boldsymbol{H}_2=\{$первый отвечающий взял «плохой» билет$\}$.

Очевидно, что

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6},\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Условные вероятности соответственно равны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_1)=\frac{24}{29},\quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_2)=\frac{25}{29}.$

По формуле ***полной вероятности***, получим:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_1)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{H}_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29}+\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29}=\frac{5}{6}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

3.1. Пусть эксперимент состоит в выборе одного из четырех шаров. Пусть три из них занумерованы цифрами 1, 2, 3, а на четвертом шаре имеются все эти цифры. Обозначим через $\boldsymbol{A}_i=\{$на выбранном шаре имеется цифра $\boldsymbol{i}\}, (\boldsymbol{i}=1,2,3)$. Являются ли события $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3$ независимыми в совокупности?

3.2. Из набора костяшек для домино наугад выбирается одна кость. Являются ли события $\boldsymbol{A}=\{$значения на половинках кости домино совпадают$\}$ и $\boldsymbol{B}=\{$сумма цифр на половинках костяшки равна 8$\}$ несовместными? Найти $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$.

3.3. Из набора костяшек для домино наугад выбирается одна кость. Являются ли события $\boldsymbol{A}=\{$значения на половинках костяшки совпадают$\}$ и $\boldsymbol{C}=\{$сумма цифр на половинках кости домино равна 6$\}$ равновозможными и независимыми?

3.4. Подбрасываются два кубика. Введем события: $\boldsymbol{A}$ = {хотя бы на одном кубике появится 5}, $\boldsymbol{B}$ = {сумма выпавших очков равна 8}, $\boldsymbol{C}$ = {произведение выпавших очков равно 12}. Установить являются ли независимыми события: $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$. Какие их этих событий попарно несовместны? Есть ли среди этих событий равновозможные события? Найти $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{B})$.

3.5. Вероятность успешной сдачи экзамена по ТВ и МС равна 0,7, а при каждой следующей попытке она увеличивается на 0,1. Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен, если у него имеется только 3 попытки.

3.6. Вероятность разорения в течение года для первого банка равна 0,2, для второго банка – 0,3, третий банк может разориться с вероятностью 0,1. Прошел год. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}$ = {ни один банк не разорился}, $\boldsymbol{B}$={разорилось не более двух банков}, $\boldsymbol{K}$ = {разорился один из банков}, $\boldsymbol{C}$={разорился хотя бы один из банков}.

3.7. Инвестор вкладывает средства в три предприятия под 150% годовых. Вероятность банкротства одного предприятия в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что инвестор, по крайней мере, вернет вложенные средства.

3.8. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся выучил 30 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого нужно ответить на два вопроса билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос из другого билета.

3.9. Ребенок играет карточками из разрезной азбуки, на которых написаны буквы **А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т**. Он берет по одной карточке, кладет их в ряд в порядке вынимания и читает полученное слово. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он сможет прочитать слово а) «**МАТЕМАТИКА**», б) «**ТЕМА**», в) «**МАША**»?

3.10. Маша, Даша и Паша бросают игральный кубик поочередно. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет грань с шестью очками. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков, если начинает Маша, второй подкидывает кубик Даша, и Паша вступает в игру третьим по счету.

3.11. Студенту в сессию предстоит сдать один зачет и два экзамена. Вероятность того, что он сдаст зачет, равна 0,7, для первого экзамена эта вероятность равна 0,9, а второй экзамен может сдать с вероятностью 0,8. Найти вероятности событий: ***B*** ={по окончании сессии у студента останется два долга}, ***A***={по окончании сессии у студента останется не более двух долгов}, ***C*** ={студент сдаст сессию без долгов}, ***D*** ={студент сдаст только один экзамен}.

3.12. В автопробеге участвуют 3 автомобиля: первый автомобиль может сойти с маршрута с вероятностью 0,15; второй – с вероятностью 0,05; третий – с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что к финишу приедут: а) только один автомобиль; б) два автомобиля; в) по крайней мере два автомобиля.

3.13. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 25 дней без дождя. Какова вероятность того, что 1-го и 2-го сентября дождя не будет?

3.14. У мальчика в левом кармане находится 5 красных воздушных шариков и 2 желтых, а в правом кармане 4 красных и 3 желтых. Мальчик из кармана достал красный воздушный шарик. Найти вероятность того, что он достал его из левого кармана.

3.15. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: I класс (мало рискует), II класс (рискует средне), класс III (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% водителей принадлежат к классу I, 50% – к классу II и 20 % – к классу III. Вероятность того, что в течение года водитель класса I попадет в аварию, равна 0,01, для водителей класса II эта вероятность равна 0,02, а для водителя класса III – 0,08. Какова вероятность того, что водитель, застраховавший свой автомобиль в агентстве, в течение года попадет в аварию?

3.16. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы. Если он закидывает удочку на первом месте, то рыба клюет с вероятностью 0,9, на втором месте вероятность клева – 0,7, и с вероятностью 0,8 рыба клюет на третьем месте. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку, и рыба не клюнула. На каком из излюбленных мест находился в этот раз рыбак?

3.17. В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый и черный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

3.18. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает 5% брака, второй – 7%. Для контроля отобрано 20 деталей из первого цеха и 30 из второго. Эти детали смешаны в одну партию, и из нее наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

3.19. В продажу поступают телевизоры с трех заводов в отношении 3:2:5. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10% и третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?

3.20. Студент выучил 20 билетов из 30. На экзамене студенты случайным образом выбирают один билет. Обратно билеты не возвращаются. В каком случае вероятность сдать экзамен больше, если он пойдет сдавать первым, вторым или третьим по счету?

3.21. Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин – дальтоники. Наудачу выбранный человек – дальтоник. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).

3.22. По самолету производится 3 выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором – 0,6, при третьем – 0,8. При одном попадании самолет сбивается с вероятностью 0,3, при двух – с вероятностью 0,6 и при трех – сбивается наверняка. Найти вероятность того, что самолет сбит.

3.23. В сосуд, содержащий 3 одинаковых по форме шара, брошен белый шар. После этого наудачу достают один шар. Какова вероятность того, что шар окажется белым, если равновозможны любые предположения о первоначальном составе шаров по цвету. (Шары могут быть либо белые, либо черные).

3.24. В трех одинаковых вазочках лежат конфеты. В первой вазочке – 5 шоколадных конфет и 3 карамельных, во второй – 2 шоколадных и 5 карамельных, в третьей – 3 шоколадных и 1 карамельная конфета. Из вазочки взяли две конфеты. Найти вероятность того, что они будут шоколадными.

3.25. Число грузовых машин, проходящих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин как 4:5. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,2. Для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

3.26. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы крови; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

3.27. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна 0,95. Вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. Обследуемый был признан больным. Найти вероятность того, что он на самом деле здоров.

3.28. В группе № 1 учится 12 девушек и 8 юношей, в группе № 2 – 6 девушек и 14 юношей. Студенческий профком выделил одну бесплатную путевку. Кто вероятнее будет счастливым обладателем бесплатной путевки: девушка или юноша, если студенты договорились действовать так. Бросают игральный кубик. Если выпадет количество очков, кратное 3, то наугад выбирают студента из группы № 1. Если выпадет любое другое количество очков, то наудачу выбирают студента из группы № 2.

ОТВЕТЫ:

3.1. События $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3$ не являются независимыми в совокупности. **3.2.** События совместны; $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = 1/7 = 0{,}1429$; $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 1/3 = 0{,}3333$. **3.3.** События неравновозможны и независимы. **3.4.** События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются зависимыми; $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ – зависимые события; $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ – зависимые события. События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются совместными; $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ – несовместные события; $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ – совместные события. События $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ не являются равновозможными. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = 2/11 = 0{,}1818$; $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{B}) = 2/5 = 0{,}4$. **3.5.** 0,994. **3.6.** P(A) =0,504; P(B)=0,994; P(K) =0,398; P(C) =0,496. **3.7.** 0,896. **3.8.** 0,8512. **3.9.** а) 1/151200=0,0000066; б) 1/420=0,0024; в) 0. **3.10.** Вероятности выигрыша Маши, Даши и Паши соответственно равны 0,3956; 0,3297 и 0,2747. **3.11.** P(B) =0,092; P(A) =0,994; P(C) =0,504; P(D) =0,078. **3.12.** а) 0,02525; б) 0,24725; в) 0,974. **3.13.** 0,6944. **3.14.** 5/9=0,5556. **3.15.** 0, 029. **3.16.** На втором месте. **3.17.** 2/3=0,6667. **3.18.** 0,062. **3.19.** 0,895. **3.20.** Вероятности сдачи экзамена одинаковые. **3.21.** 20/21=0,9524. **3.22.** 0,594. **3.23.** 0,625. **3.24.** 9/63=0,3016. **3.25.** 8/23=0,3478. **3.26.** 0,574. **3.27.** 0,9132. **3.28.** Вероятнее, что счастливым обладателем бесплатной путевки будет юноша.

4. НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

До сих пор мы рассматривали случайное событие как возможный исход однократно проведенного испытания. Однако в некоторых практических ситуациях выполняют не одно, а целую серию однотипных повторных испытаний, т.е. одно и то же испытание повторяют несколько раз подряд, и при этом каждый раз проверяют, наступило ли событие A.

Математическая модель, описывающая в теории вероятностей серию однотипных повторных испытаний, называется *схемой Бернулли*. Схему Бернулли можно применить только к таким сериям испытаний, которые удовлетворяют следующим трем требованиям:

- допустимость любого числа испытаний (т.е. теоретически испытания можно повторять сколь угодно раз);
- независимость испытаний (т.е. результат очередного испытания не должен влиять на исход последующих испытаний);
- сохранение условий эксперимента (т.е. условия проведения испытаний и вероятность события A не должны меняться от начала до окончания всей серии испытаний).

Серия испытаний называется независимой – если результаты любого испытания не зависят от результатов остальных испытаний и не зависят от того, каким по счету было проведено данное испытание. Например, вероятность выпадения «орла» не зависит от того, сколько раз будет подброшена монета

Пусть проводится $\boldsymbol{n}$ независимых повторных испытаний (НПИ). Исходом каждого из НПИ может быть одно из противоположных событий A и $\overline{A}$, которые называют «успех» и «неуспех». При этом в любом испытании $P(A) = p$ постоянна, $P(\overline{A}) = q, \quad q = 1 - p$

Требуется вычислить $P_n(m)$ – вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ независимых повторных испытаниях будет ровно $\boldsymbol{m}$ испытаний, в которых наступил успех.

Либо вычислить вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$, что в $\boldsymbol{n}$ независимых повторных испытаниях число успехов будет находиться в заданном интервале от $\boldsymbol{m_1}$ до $\boldsymbol{m_2}$.

Вероятность $P_n(m)$ называют **биномиальной** вероятностью.

Формула Бернулли

$$\boldsymbol{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$

$$\boldsymbol{P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \ldots + P_n(m_2)}$$

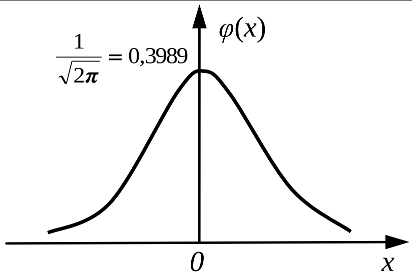
Асимптотические (приближенные) формулы
для вычисления биномиальных вероятностей.

Локальная формула Муавра–Лапласа

При достаточно большом числе независимых повторных испытаний ($n \to \infty$ и $0 < p < 1$) биномиальная вероятность может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)},$$

где $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$ – функция плотности стандартного нормального распределения.



Примечание: Эта формула дает хорошие приближения при следующих условиях: $\boxed{n > 30,\ n \cdot p > 10\ \ (n \cdot p \cdot q > 10)}$

Значения функции $\varphi(x)$ можно найти в Приложении табл. 1

Свойства $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

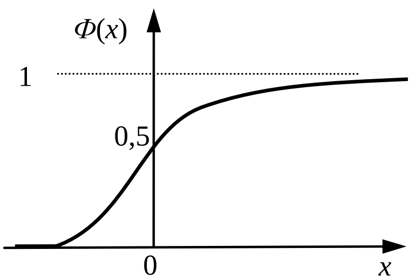
2. Если $x > 4$, то $\varphi(x) \approx 0$.

Интегральная формула Муавра–Лапласа

При достаточно большом числе независимых повторных испытаний ($n \to \infty$ и $0 < p < 1$) вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ может быть вычислена по формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$ функция распределения стандартного нормального закона.



Примечание: Эта формула дает хорошие приближения при следующих условиях: $\boxed{n > 30,\ n \cdot p > 10\ \ (n \cdot p \cdot q > 10)}$

Значения функции $\Phi(x)$ можно найти в Приложении табл. 2

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$;

2. Если $x>4$, то $\Phi(x)\approx 1$.

Схема редких событий. Формула Пуассона

Пусть проводится достаточно большое число независимых повторных испытаний ($n\to\infty$), а «успех» наступает крайне редко, то есть вероятность p стремиться к нулю ($p\to 0$) так, что $n\cdot p\to\lambda=const$, тогда

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$

Значение функции $e^{-\lambda}$ можно найти в Приложении табл. 3

Наивероятнейшее число появления успеха

В некоторых задач требуется найти наивероятнейшее число появления успеха, т.е. такого числа m^*, вероятность $P_n(m^*)$ которого наибольшая среди всех вероятностей $P_n(0), P_n(1),\ldots, P_n(n)$

Формула для вычисления наивероятнейшего числа появления успеха m^*

$$n\cdot p-q\le m^*\le n\cdot p+p$$

Очевидно, что наивероятнейшее число появления успеха m^* является целым числом.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. Известно, что 5% студентов носят очки. Определить вероятность того, что в случайно выбранной группе из 8 студентов: а) 50% студентов носят очки; б) хотя бы один студент носит очки, в) не более 25% студентов носят очки.

Решение. Испытание – осмотр студента,

$\boldsymbol{n} = 8$,

успех – студент носит очки, $\boldsymbol{p} = 0{,}05$, $\boldsymbol{q} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Тогда согласно ***формуле Бернулли***, так как число испытаний мало, интересующая нас вероятность:

а) $\boldsymbol{P}_8(4) = \boldsymbol{C}_8^4 \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^4 = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^4 = 0{,}000356$;

б) $\boldsymbol{P}_8(\boldsymbol{m} \geq 1) = 1 - \boldsymbol{P}_8(\boldsymbol{m} < 1) = 1 - \boldsymbol{P}_8(0) = 1 - \boldsymbol{C}_8^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^8 = 1 - 0{,}95^8 = 0{,}33658$;

в) $\boldsymbol{P}_8(\boldsymbol{m} \leq 2) = \boldsymbol{P}_8(2) + \boldsymbol{P}_8(1) + \boldsymbol{P}_8(0) = \boldsymbol{C}_8^2 \cdot 0{,}05^2 0{,}95^6 + \boldsymbol{C}_8^1 \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^7 + \boldsymbol{C}_8^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^8 =$

$= 0{,}05146 + 0{,}27934 + 0{,}66342 = 0{,}99422$.

Пример. В некоторой фирме работает 7305 человек. Найти вероятность того, что в фирме а) найдутся три человека, рожденные 29 февраля, б) не более двух человек с датой рождения 29 февраля.

Решение. Испытание – опрос работника фирма,

$\boldsymbol{n} = 7305$,

успех – дата рождения 29 февраля,

$\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{1461}$, так как 29 февраля бывает ровно один раз в четыре года, $\boldsymbol{q} = 1 - \dfrac{1}{1461} = \dfrac{1460}{1461}$.

Для вычисления воспользуемся ***формулой Пуассона,*** так как $\boldsymbol{n} \to \infty$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 7305 \cdot \dfrac{1}{1461} = 5 \leq 10$, $\lambda = 5$.

а) $\boldsymbol{P}_{7305}(3) \approx \frac{5^3}{3!} \cdot \boldsymbol{e}^{-5} \approx \frac{125}{6} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx \frac{125}{6} \cdot 0{,}00674 \approx 0{,}1404$;

б) $\boldsymbol{P}_{7305}(\boldsymbol{m} \le 2) = \boldsymbol{P}_{7305}(0) + \boldsymbol{P}_{7305}(1) + \boldsymbol{P}_{7305}(2) \approx \frac{5^0}{0!} \cdot \boldsymbol{e}^{-5} + \frac{5^1}{1!} \cdot \boldsymbol{e}^{-5} + \frac{5^2}{2!} \cdot \boldsymbol{e}^{-5} \approx$

$$\approx 1 \cdot \boldsymbol{e}^{-5} + 5 \cdot \boldsymbol{e}^{-5} + 12{,}5 \cdot \boldsymbol{e}^{-5} \approx 18{,}5 \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx 18{,}5 \cdot 0{,}00674 \approx 0{,}1247.$$

Пример. Анализ итогов года показал, что лишь 20% держателей страховых полисов потребовали возмещения страховых сумм. Найти вероятность того, что из 90 клиентов, вновь заключивших договор страхования, 20 потребуют возмещения страховых сумм.

Решение. Испытание – страхование клиента,

$\boldsymbol{n}$ = 90,

успех – требование возмещения страховых сумм,

$\boldsymbol{p}$ = 0,2, $\boldsymbol{q}$ = 0,8.

Так как число испытаний велико, а произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 90 \cdot 0{,}2 = 18 > 10$, (произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 90 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 14{,}4 > 10$) используем ***локальную формулу Муавра–Лапласа***:

$$\boldsymbol{P}_{90}(\boldsymbol{m} = 20) \approx \frac{1}{\sqrt{90 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi\left(\frac{20 - 90 \cdot 0{,}2}{\sqrt{90 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{14{,}4}} \cdot \varphi\left(\frac{20 - 18}{\sqrt{14{,}4}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{3{,}7947} \cdot \varphi\left(\frac{2}{3{,}7947}\right) \approx \frac{1}{3{,}7947} \cdot \varphi(0{,}53) \approx \frac{1}{3{,}7947} \cdot 0{,}3467 \approx 0{,}0914.$$

Пример. В районе проживают 1000 человек. Каждый из них независимо друг от друга с вероятностью 0,002 посещает аптеку. Найти вероятности: а) в аптеку обратятся 3 человека; б) в аптеку обратятся менее трех человек; в) не менее трех человек обратятся в аптеку.

Решение. Испытание – проживание отдельного человека в районе,

$\boldsymbol{n}$ =1000,

успех – обращение гражданина в аптеку,

$\boldsymbol{p}$ = 0,002, $\boldsymbol{q}$ = 0,998.

Для вычисления воспользуемся ***формулой Пуассона,*** так как $\boldsymbol{n} \to \infty$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 1000 \cdot 0{,}002 = 2 \le 10$, $\lambda = 2$.

а) $\boldsymbol{P}_{1000}(3) \approx \dfrac{2^3}{3!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx \dfrac{8}{6} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx \dfrac{4}{3} \cdot 0{,}13534 \approx 0{,}6767$;

б) $\boldsymbol{P}_{1000}(\boldsymbol{m} < 3) = \boldsymbol{P}_{1000}(0) + \boldsymbol{P}_{1000}(1) + \boldsymbol{P}_{1000}(2) \approx \dfrac{2^0}{0!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + \dfrac{2^1}{1!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + \dfrac{2^2}{2!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx$

$\approx 1 \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + 2 \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + 2 \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx 5 \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx 5 \cdot 0{,}13534 \approx 0{,}6767$;

в) $\boldsymbol{P}_{1000}(\boldsymbol{m} \ge 3) = 1 - \boldsymbol{P}_{1000}(\boldsymbol{m} < 3) = 1 - (\boldsymbol{P}_{1000}(0) + \boldsymbol{P}_{1000}(1) + \boldsymbol{P}_{1000}(2)) \approx$

$\approx 1 - \left(\dfrac{2^0}{0!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + \dfrac{2^1}{1!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} + \dfrac{2^2}{2!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \right) \approx 1 - 0{,}6767 \approx 0{,}3233$.

Пример. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,005. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 1,2 \$ страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 100 \$. Какова вероятность того, что к концу года: а) компания окажется в убытке; б) чистый доход компании будет не менее 5000 \$.

Решение. Испытание – страхование автомобиля,

$\boldsymbol{n}$ =10000,

успех – поломка автомобиля в результате аварии,

$\boldsymbol{p}$ = 0,005, $\boldsymbol{q}$ = 0,995,

Для вычисления используем ***интегральную формулу Муавра–Лапласа***, так как число испытаний велико, а произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 10000 \cdot 0{,}005 = 50 > 10$ (произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 49{,}75 > 10$):

а) $\boldsymbol{P}_{10000}(\boldsymbol{m} > 120) = \boldsymbol{P}_{10000}(120 \le \boldsymbol{m} \le 10000) \approx \Phi\left(\dfrac{10000 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \right) - \Phi\left(\dfrac{121 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \right) \approx$

$\approx \Phi\left(\dfrac{9950}{\sqrt{49{,}75}} \right) - \Phi\left(\dfrac{71}{\sqrt{49{,}75}} \right) \approx \Phi(1411{,}35) - \Phi(10{,}07) \approx 1 - 1 \approx 0;$

б) $\boldsymbol{P}_{10000}(\boldsymbol{m} \le 70) = \boldsymbol{P}_{10000}(0 \le \boldsymbol{m} \le 70) \approx \varPhi\left(\frac{70 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) - \varPhi\left(\frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) \approx$

$$\approx \varPhi\left(\frac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) - \varPhi\left(\frac{-50}{\sqrt{49{,}75}}\right) \approx \varPhi(2{,}84) - \varPhi(-7{,}09) \approx \boldsymbol{\varPhi}(2{,}84) - (1 - \boldsymbol{\varPhi}(7{,}09)) \approx 0{,}9977 - (1-1) \approx 0{,}9977.$$

Пример. Опрос показал, что 80% студентов совмещают учебу и работу. Случайным образом были отобраны три студента. Найти вероятность того, что среди отобранных совмещают учебу и работу: а) два студента; б) не менее двух студентов; в) хотя бы один студент; г) больше пяти студентов.

Решение. Испытание – отбор студента,

$n = 3$,

успех – студент, совмещающий учебу и работу,

$\boldsymbol{p} = 0{,}8$, $\boldsymbol{q} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Так как число испытаний мало, используем ***формулу Бернулли***:

а) $\boldsymbol{P}_3(2) = \boldsymbol{C}_3^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^1 = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$;

б) $\boldsymbol{P}_3(2 \le \boldsymbol{m} \le 3) = \boldsymbol{P}_3(3) + \boldsymbol{P}_3(2) = \boldsymbol{C}_3^3 \cdot 0{,}8^3 0{,}2^0 + \boldsymbol{C}_3^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}896$;

в) $\boldsymbol{P}_3(1 \le \boldsymbol{m} \le 3) = \boldsymbol{P}_3(1) + \boldsymbol{P}_3(2) + \boldsymbol{P}_3(3) = 1 - \boldsymbol{P}_3(0) = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992$;

г) $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{m} > 5) = 0$.

Пример. После месяца работы было установлено, что у каждого сотого автомобиля при покраске возникает «пузырьковый» дефект. Наудачу отбирают 300 покрашенных автомобилей. Найти вероятность того, что «пузырьковый» дефект будет обнаружен: а) у одного автомобиля; б) не менее чем у одного автомобиля.

Решение. Испытание – отбор покрашенного автомобиля,

$\boldsymbol{n} = 300$,

успех – «пузырьковый» дефект при покраске автомобиля,

$\boldsymbol{p} = 0{,}01$, $\boldsymbol{q} = 0{,}99$.

Для вычисления воспользуемся ***формулой Пуассона,*** так как $\boldsymbol{n}$ – велико, а произведение $\boldsymbol{np} = 300 \cdot 0{,}1 = 3 \le 10$:

а) $\boldsymbol{P}_{300}(1) \approx \dfrac{3^1}{1!} \cdot \boldsymbol{e}^{-3} \approx 3 \cdot 0{,}04979 \approx 0{,}14937$;

б) $\boldsymbol{P}_{300}(\boldsymbol{m} \ge 1) = 1 - \boldsymbol{P}_{300}(\boldsymbol{m} < 1) = 1 - \boldsymbol{P}_{300}(0) \approx 1 - \dfrac{3^0}{0!} \cdot \boldsymbol{e}^{-3} \approx 1 - \boldsymbol{e}^{-3} \approx 1 - 0{,}04979 \approx 0{,}95021$.

Пример. Найти наивероятнейшее число появления тройки при подбрасывании игрального кубика, если число бросаний: а) 100; б) 95.

Решение. Испытание – подбрасывание игрального кубика,

успех – выпадение тройки на кубике, $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{6}$, $\boldsymbol{q} = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Найдем наивероятнейшее число появления успеха $\boldsymbol{m}^*$:

а) $\boldsymbol{n} = 100$

$$100 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le \boldsymbol{m}^* \le 100 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{95}{6} \le \boldsymbol{m}^* \le \frac{101}{6} \quad \Rightarrow \quad 15{,}83 \le \boldsymbol{m}^* \le 16{,}83.$$

Следовательно, $\boldsymbol{m}^* = 16$.

б) $\boldsymbol{n} = 95$

$$95 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le \boldsymbol{m}^* \le 95 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{90}{6} \le \boldsymbol{m}^* \le \frac{96}{6} \quad \Rightarrow \quad 15 \le \boldsymbol{m}^* \le 16.$$

Следовательно, $\boldsymbol{m}^* = 15$ и $\boldsymbol{m}^* = 16$.

Пример. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 20 новорожденных будет 11 мальчиков.

Решение: Испытание – рождение ребенка,

$\boldsymbol{n} = 20$,

успех – рождение мальчика,

$\boldsymbol{p} = 0{,}515$, $\boldsymbol{q} = 0{,}485$

Так как число испытаний мало, используем ***формулу Бернулли***:

$$\boldsymbol{P}_{20}(\boldsymbol{m} = 11) = \boldsymbol{C}_{20}^{11} \cdot (0{,}515)^{11} \cdot (0{,}485)^9 = 0{,}1686 .$$

Пример. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 900 приборов окажется от 755 до 855 приборов точной сборки. Найти наивероятнейшее число приборов точной сборки и вероятность этого числа приборов.

Решение: Испытание – сборка прибора,

$\boldsymbol{n} = 900$,

успех – прибор точной сборки,

$\boldsymbol{p} = 0{,}9, \quad \boldsymbol{q} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Для вычисления используем ***интегральную формулу Муавра–Лапласа***, так как число испытаний велико, а произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 900 \cdot 0{,}9 = 810 > 10$ (произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 81 > 10$):

$$\boldsymbol{P}_{900}(755 \le \boldsymbol{m} \le 855) \approx \Phi\left(\frac{855 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) - \Phi\left(\frac{755 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(5) - \Phi(-6{,}11) \approx \Phi(5) - (1 - \Phi(6{,}11)) \approx 1 - (1 - 1) \approx 1.$$

Найдем наивероятнейшее число приборов точной сборки $\boldsymbol{m}^*$:

$$900 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le \boldsymbol{m}^* \le 900 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 809{,}9 \le \boldsymbol{m}^* \le 810{,}1,$$

следовательно, $\boldsymbol{m}^* = 810$.

Для нахождения вероятности используем ***локальную формулу Муавра–Лапласа***, так как число испытаний велико, а произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 900 \cdot 0{,}9 = 810 > 10$ (произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 81 > 10$):

$$\boldsymbol{P}_{900}(\boldsymbol{m} = 810) \approx \frac{1}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \cdot \varphi\left(\frac{810 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \approx \frac{1}{9} \cdot \varphi(0) \approx \frac{1}{9} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}0432.$$

Пример. На тренировке стрелок из 100 выстрелов по мишени попал 60 раз. На соревнованиях стрелок делает 10 выстрелов по мишени. Какова вероятность того, что на соревнованиях он попадет а) 7 раз по мишени; б) не более 8 раз.

Решение. Испытание – выстрел по мишени,

$\boldsymbol{n} = 10$,

успех – попадание в мишень, p = 0,6, q = 0,4.

Тогда согласно ***формуле Бернулли***, так как число испытаний мало, интересующая нас вероятность

а) $P_{10}(7) = C_{10}^{7} \cdot 0{,}6^{7} \cdot 0{,}4^{3} = 120 \cdot 0{,}028 \cdot 0{,}064 = 0{,}215$.

б) $P_{10}(m \le 8) = 1 - P_{10}(m > 8) = 1 - \left(P_{10}(m = 9) + P_{3}(m = 10)\right) =$

$= 1 - \left(C_{10}^{9} \cdot 0{,}6^{9} \cdot 0{,}4^{1} + C_{10}^{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^{0}\right) = 1 - 0{,}0463 = 0{,}9537$.

Пример. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что хотя бы одно малое предприятие региона из трех предприятий имеет нарушение финансовой дисциплины с вероятностью 0,271. Найти вероятность того, что из 10 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: 1) менее двух малых предприятий; 2) 20% малых предприятий.

Решение. Испытание – отбор малого предприятия,

n =10,

успех – нарушение финансовой дисциплины.

Вероятность успеха p неизвестна, но ее можно найти из условия задачи $P_{3}(m \ge 1) = 0{,}271$.

Для вычисления вероятности применим ***формулу Бернулли***:

$$P_{3}(m \ge 1) = 1 - P_{3}(m < 1) = 1 - P_{3}(m = 0) = 1 - C_{3}^{0} \cdot p^{0} \cdot q^{3} = 1 - q^{3}.$$

Приравняем $1 - q^{3} = 0{,}271 \quad \Rightarrow \quad q^{3} = 0{,}729 \quad \Rightarrow \quad q = 0{,}9$.

Тогда вероятность успеха $p = 1 - q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Сейчас можно найти интересующие нас вероятности:

1) $P_{10}(m < 2) = P_{10}(m = 1) + P_{10}(m = 0) = C_{10}^{1} \cdot 0{,}1^{1} \cdot 0{,}9^{9} + C_{10}^{0} \cdot 0{,}1^{0} \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}7361$;

2) $P_{10}(m = 2) = C_{10}^{2} \cdot 0{,}1^{2} \cdot 0{,}9^{8} = 0{,}1937$.

Пример. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен):

а) три партии из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми.

Решение. Так как противники равносильны и ничейный исход партии исключен, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша трех партий из четырех равна:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},$$

а вероятность выигрыша пяти партий из восьми равна:

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}.$$

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выигрыша не менее трех партий из четырех равна:

$$P_4(\geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выигрыша не менее пяти партий из восьми равна:

$$P_8(\geq 5) = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$$

$$= \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8!}{7! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8!}{8! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Пример. Команда состоит из 10 отличных и 15 хороших стрелков. Каждый стрелок производит по своей мишени 5 независимых выстрелов. Отличный стрелок при каждом выстреле попадает в цель с вероятностью 0,9, хороший – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что общее число попаданий будет не менее 110.

Решение. Испытание – осуществление выстрела,

Заметим, что общее число выстрелов

$$\boldsymbol{n} = 10 \cdot 5 + 15 \cdot 5 = 125,$$

так как команда состоит из 25 стрелков, а каждый стрелок производит 5 выстрелов

успех – попадание в мишень при одном выстреле произвольным стрелком.

Вероятность успеха $\boldsymbol{p}$ неизвестна, но ее можно найти. Для этого воспользуемся ***формулой полной вероятности***.

Пусть искомое событие $\boldsymbol{A}$={мишень поражена одним стрелком}. Введем следующие гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1$={стреляет отличный стрелок};

$\boldsymbol{H}_2$ ={стреляет хороший стрелок}.

Очевидно, что

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{10}{10+15} = \frac{2}{5}, \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{15}{10+15} = \frac{3}{5},$$

свойства гипотез выполняются: они несовместные и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

Условные вероятности соответственно равны $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1) = 0{,}9$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1) = 0{,}8$.

Итак, вероятность успеха $\boldsymbol{p}$ по ***формуле полной вероятности*** равна

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}84,$$

тогда $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$.

Теперь найдем интересующую нас вероятность $\boldsymbol{P}_{125}(\boldsymbol{m} \geq 110)$. Для этого применим ***интегральную формулу Муавра–Лапласа***, так как $\boldsymbol{n}$ – велико, а произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 125 \cdot 0{,}84 = 105 > 10$ (произведение $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 125 \cdot 0{,}84 \cdot 0{,}16 = 16{,}8 > 10$):

$$\boldsymbol{P}_{125}(\boldsymbol{m} \geq 110) = \boldsymbol{P}_{125}(110 \leq \boldsymbol{m} \leq 125) \approx \Phi\left(\frac{125-105}{\sqrt{16{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{110-105}{\sqrt{16{,}8}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(4{,}88) - \Phi(1{,}22) \approx 1 - 0{,}8888 \approx 0{,}1112.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

4.1. В отделении «Анестезиология и реаниматология» лежат 100 больных. Вероятность тяжелого осложнения у произвольного больного составляет 0,3. Лечение в таком случае обойдется больнице в 150 у. е. Найдите вероятность того, что на дополнительное лечение больных, находящихся в этом отделении, будет затрачена сумма: а) 4500 у. е.; б) превышающая 4050 у. е.

4.2. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Найти вероятность того, что из восьми малых предприятий в течение года прекратят свою деятельность: а) не менее 75% предприятий; б) четыре предприятия.

4.3. В лотерее каждый десятый билет выигрывает 5 у.е. Продано 300 билетов этой лотереи. Какова вероятность того, что суммарный выигрыш по билетам лотереи а) составит 150 у.е.; б) будет лежать в пределах от 225 у.е. до 755 у.е.

4.4. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что каждое двадцатое малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 100 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 4 малых предприятия; б) не менее двух малых предприятий.

4.5. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листовки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из тысячи следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 4000 рекламных листков число заказов будет: а) равно трем; б) менее трех.

4.6. К электросети подключено 5 приборов, каждый мощностью 2 киловатта и потребляет в данный момент энергию с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность окажется а) 6 киловатт, б) больше 6 киловатт.

4.7. Вероятность попадания в мишень хотя бы один раз при двух выстрелах для данного стрелка равна 0,99. Найти вероятность попадания в мишень для данного стрелка при одном выстреле.

4.8. Известно, что в среднем левши составляют 1%. Какое минимальное число людей должно быть в компании, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одного левшу была равна 0,95?

4.9. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных девочек окажется больше, чем мальчиков? Найти наивероятнейшее число мальчиков.

4.10. Экзаменационный билет содержит пять вопросов. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос билета, равна 0,9. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить, хотя бы на 4 вопроса билета.

4.11. Каждый вопрос в тесте имеет 5 ответов. Какова вероятность того, что студент правильно ответит на 7 из 10 вопросов, если он выбирает ответы наугад?

4.12. Известно, что вероятность попадания в мишень для данного стрелка при одном выстреле больше вероятности промаха. Стрелок, делая 2 выстрела по мишени, с вероятностью 0,32 попадает в мишень только один раз. Какова вероятность, что он попадет в мишень ровно 5 раз, делая 10 выстрелов? Каково наиболее вероятное число попаданий в мишень при 10 выстрелах?

4.13. Два спортсмена – перворазрядник и второразрядник – играют в шахматы. Спортсмен I разряда побеждает своего соперника в среднем в 6 партиях из девяти. Что для него более вероятно: выиграть 2 партии из трех или 4 партии из шести?

4.14. Тех студентов, кто на входном контроле по математике справился с работой, обычно в три раза больше, чем тех, кто не смог этого сделать. Найти вероятность того, что из 300 студентов справятся с работой: а) 240 студентов; б) не более 240 студентов; в) хотя бы 210 студентов.

4.15. Студент выполняет тестовую работу, состоящую из трех задач. Для получения положительной отметки достаточно решить две. Для каждой задачи предлагается 4 варианта ответа, из которых только один правильный. Студент плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность, что он получит положительную оценку?

4.16. Известно, что для данной породы кур вероятность того, что хотя бы одно яйцо из двух будет с двумя желтками, равна 0,91. Найти вероятность того, что из 100 снесенных яиц будет не менее 80 яиц с двумя желтками. Найти наивероятнейшее число яиц с двумя желтками. Вычислить вероятность получения этого числа яиц.

4.17. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти а) вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три «орла», б) наивероятнейшее число выпадений трех «орлов», в) вероятность того, что три «орла» появятся наивероятнейшее число раз.

4.18. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, для того чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть случаи: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

4.19. Шестигранный кубик подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что тройка появится: а) 2 раза; б) не менее 2, но не более 4 раз; в) хотя бы один раз.

4.20. Старинная семейная фирма решила начать продажу своих акций на бирже. Известно, что 2% брокеров советуют своим клиентам купить эти акции. Наугад отобраны 50 брокеров. Найти вероятность того, что из них предложили своим клиентам купить акции фирмы: а) двое; б) по крайней мере двое.

4.21. Известно, что 5% студентов не приходят на лекцию, начинающуюся в 8.00. Какова вероятность, что в студенческой группе из 8 студентов не придут на лекцию, начинающуюся в 8.00 а) 4 студента; б) более 25% студентов группы.

4.22. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

4.23. Монету подбрасывают 500 раз. Вычислить вероятность того, что число появлений «орла» будет не менее 200 и не более 300 раз. Найти наивероятнейшее число появлений «орла» и вероятность получения этого значения.

4.24. Известно, что при передаче сообщения на расстояние из 100 знаков искажается один. Какова вероятность того, что при передаче сообщения из 300 знаков будет а) 2 искажения; б) ни одного искажения; в) не более двух искажений.

4.25. Для данного стрелка вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. За каждое попадание в мишень ему начисляется 5 у.е. Стрелок произвел 100 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что а) ему начислят 400 у.е.; б) суммы в 400 у.е. организаторам хватит для начисления; в) стрелок получит 450 у.е.

4.26. Найти вероятность того, что из пяти студентов, пришедших на экзамен, сдадут четверо, если известно, что хотя бы один студент из трех сдает с вероятностью 0,992.

4.27. Пара игральных костей бросается 4 раза. Какова вероятность событий: а) сумма очков, равная 9, выпадет два раза; б) сумма очков, равная 9, выпадет по крайней мере один раз.

4.28. Каждый четвертый клиент обращается в банк за возвратом депозита. Найти вероятность того, что из пяти клиентов, обратившихся в банк: а) один клиент за возвратом депозита; б) два клиента обратятся за возвратом депозита, в) хотя бы один клиент обратится за возвратом депозита, г) не менее трех клиентов обратятся за возвратом депозита.

4.29. *Задача Джона Смита* (1693 год). Одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо получить хотя бы одну «шестерку» при шести бросаниях игрального кубика; второму – не менее двух «шестерок» при двенадцати бросаниях игрального кубика; третьему – по крайней мере три «шестерки» при восемнадцати бросаниях игрального кубика?

ОТВЕТЫ:

4.1. а) $\varphi(0)/4{,}5826 \approx 0{,}3989/4{,}5826 \approx 0{,}087$; б) $\boldsymbol{\Phi}(0{,}44) \approx 0{,}67$. **4.2.** а) 0,000023; б) 0,0046. **4.3.** а) $\varphi(0)/5{,}1962 \approx 0{,}3989/5{,}1963 \approx 0{,}0768$; б) $1-\boldsymbol{\Phi}(2{,}89) \approx 0{,}0019$. **4.4.** а) $26{,}0417 \cdot \boldsymbol{e}^{-5} \approx 0{,}1755$; б) $1-6\cdot \boldsymbol{e}^{-5} \approx 0{,}9596$. **4.5.** а) $10{,}6667 \cdot \boldsymbol{e}^{-4} \approx 0{,}1954$; б) $13\cdot \boldsymbol{e}^{-4} \approx 0{,}2382$. **4.6.** а) 0,0512; б) 0,0067. **4.7.** 0,9. **4.8.** 297. **4.9.** $1-\boldsymbol{\Phi}(3{,}02) \approx 0{,}0013$. Наивероятнейшее число мальчиков равно 5150. **4.10.** 0,9185. **4.11.** 0,0008. **4.12.** 0,0264. Наиболее вероятное число попаданий в мишень равно 8. **4.13.** Более вероятно выиграть 2 партии из трех, так как эта вероятность равна 0,4444, против вероятности выиграть 4 партии из шести, которая равна 0,3292. **4.14.** а) $\varphi(2)/7{,}5 \approx 0{,}054/7{,}5 \approx 0{,}0072$; б) $\boldsymbol{\Phi}(2) \approx 0{,}9772$; в) $\boldsymbol{\Phi}(2) \approx 0{,}9772$. **4.15.** 5/32=0,15625. **4.16.** $1-\boldsymbol{\Phi}(2{,}18) \approx 0{,}0146$. Наивероятнейшее число яиц с двумя желтками равно 70. $\varphi(0)/4{,}5826 \approx 0{,}3989/4{,}5826 \approx 0{,}087$. **4.17.** а) 0,9308; б) 2; в) 0,2684. **4.18.** а) 552; б) 535. **4.19.** а) 1250/7776=0,1608;

б) 1525/7776=0,1961; в) 4651/7776=0,5981. **4.20.** а) $0{,}5 \cdot e^{-1} \approx 0{,}1839$; б) $1 - 2 \cdot e^{-1} \approx 0{,}2642$. **4.21.** а) 0,00036; б) 0,0058. **4.22.** 17. **4.23.** $2 \cdot \Phi(3{,}58) - 1 \approx 0{,}9996$. Наивероятнейшее число появлений «орла» равно 250. $\varphi(0)/11{,}1803 \approx 0{,}3989/11{,}1803 \approx 0{,}0357$. **4.24.** а) $4{,}5 \cdot e^{-3} \approx 0{,}2241$; б) $e^{-3} \approx 0{,}04979$; в) $8{,}5 \cdot e^{-3} \approx 0{,}4232$. **4.25.** а) $\varphi(3{,}33)/3 \approx 0{,}0016/3 \approx 0{,}0005$; б) $1 - \Phi(3{,}33) \approx 0{,}0004$; в) $\varphi(0)/3 \approx 0{,}3989/3 \approx 0{,}1329$. **4.26.** 0,4096. **4.27.** а) 0,0585; б) 0,3757. **4.28.** а) 0,3955; б) 0,2637; в) 0,7627; г) 0,1035. **4.29.** Шансы на успех разные, так как вероятности у первого, второго и третьего человека соответственно равны 0,6651, 0,6187 и 0,5973.

5. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайной величиной (СВ) называется измеримая функция, отображающая пространство элементарных событий в пространство действительных чисел $\Omega \xrightarrow{X} \boldsymbol{R}^n$. Обычно случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ (или буквой с индексом $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$…), а возможные значения случайной величины строчными буквами $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots}$(или $\boldsymbol{y_1, y_2, y_3, \ldots}$)

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называется случайная величина, принимающая конечное или счетное число значений. Это множество может быть как конечным, так и бесконечным

Пример. $\boldsymbol{X}$ – число мальчиков в семье из четырех детей – это дискретная случайная величина, у которой множество значений представляет собой набор из пяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4.

Пример. $\boldsymbol{X}$ – число выпадений орла при пятикратном подбрасывании монеты – это дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Пример. $\boldsymbol{X}$ – число студентов группы, сдавших экзамен. В группе – 10 студентов. Множество значений $\boldsymbol{X}$ представляет собой набор чисел 0, 1, 2, 3, …, 9, 10.

Пример. $\boldsymbol{X}$ – число заданных студенту вопросов, если преподаватель задает студенту вопросы до тех пор, пока студент отвечает. Множество значений $\boldsymbol{X}$ представляет собой набор чисел 1, 2, 3, … .

Закон распределения (ЗР) случайной величины – любое соотношение, ставящее в соответствие возможные значения случайной величины и их вероятности

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

Функция распределения случайной величины X

Функцией распределения случайной величины X называется функция, которая при каждом вещественном x равна вероятности того, что случайная величина X примет значения меньше наперед заданного x:

$$\boxed{F_X(x) = P(X < x)}$$

Свойства функции распределения

1) $0 \le F_X(x) \le 1$;

2) $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$; $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$;

3) $F_X(x)-$ неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F_X(x_2) \ge F_X(x_1)$;

4) вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[x_1,\ x_2)$ равна $P(x_1 \le X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

5) функция непрерывна слева;

6) функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой функцией с точками разрыва $x_1, \dots, x_n$. Между соседними точками разрыва функция распределения сохраняет свое значение.

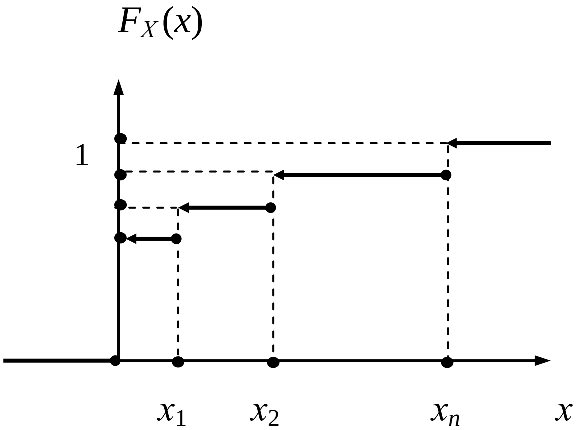


Таблица распределения (ряд распределения) случайной величины X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

где x_i – возможные значения случайной величины X, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, а p_i – вероятности того, что X принимает эти значения, т.е. $p_i = P(X = x_i)$.

Свойство таблицы распределения $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание случайной величины X вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, определяющее центр распределения. В экономических приложениях математическое ожидание используется в качестве меры эффективности совершаемой экономической операции.

Свойства математического ожидания случайной величины X

1. $-\infty \le M[X] \le +\infty$;
2. $M[C] = C$, где C – произвольная константа;
3. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$;
4. $M[C \cdot X + B] = C \cdot M[X] + B$, где C и B – произвольные константы

Дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле

$$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 \cdot p_i$$

Удобная формула для вычисления дисперсии на практике

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2, \quad \text{где} \quad M\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$$

Дисперсия характеризует рассеяние (разброс) значений случайной величины относительно математического ожидания. В экономических приложениях дисперсия используется в качестве меры риска совершаемой экономической операции.

Свойства дисперсии случайной величины X

1. $D[X] \geq 0$;
2. $D[C] = 0$, где C – произвольная константа;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$;
4. $D[C \cdot X + B] = C^2 \cdot D[X]$, где C и B – произвольные константы

Среднее квадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Имеет то же назначение, что и дисперсия. Преимущество по сравнению с дисперсией – имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Начальный момент *k*-го порядка случайной величины

$$m_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i$$

Центральный момент *k*-го порядка случайной величины

$$\mu_k = M\left[(X - M[X])^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^k \cdot p_i$$

Коэффициент асимметрии

$$k_{as} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{M\left[(X - M[X])^3\right]}{\left(\sqrt{D[X]}\right)^3}$$

характеризует симметричность распределения случайной величины X относительно ее математического ожидания

Коэффициент эксцесса

$$k_{ex} = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M\left[(X - M[X])^4\right]}{\left(\sqrt{D[X]}\right)^4} - 3$$

характеризует островершинность распределения случайной величины X

Мода распределения x_{mod}

значение случайной величины X, при котором вероятность достигает максимального значения

Квантиль порядка p: x_p

$$P(X < x_p) = p$$

Медиана x_{med}

$$P(X < x_{med}) = 0{,}5$$

ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Биномиальное распределение случайной величины X:

$$X \sim Bin(n;\, p).$$

Говорят, что случайная величина X имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и p, если случайная величина X принимает значения $0, 1, 2, ..., n$, а вероятности того, что X принимает эти значения, вычисляются по формуле Бернулли

$$\boxed{P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$

X	0	1	$\dots$	m	$\dots$	n
P	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$\dots$	$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	$\dots$	p^n

В общей форме биномиальный закон описывает осуществление признака в n независимых повторных испытаниях с постоянной вероятностью успеха p, а случайная величина X – число успехов в этой серии испытаний – подчинена биномиальному закону распределения.

Числовые характеристики определяются выражениями:

$$\boxed{M[X] = n \cdot p, \qquad D[X] = n \cdot p \cdot q.}$$

Закон распределения Пуассона или пуассоновское распределение случайной величины X: $X \sim \Pi(\lambda)$

Говорят, что случайная величина X имеет *пуассоновское распределение* с параметром λ, если X принимает значения 0, 1, 2, …, а вероятности того, что X принимает эти значения, вычисляются по формуле

$$\boxed{P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}}$$

X	0	1	…	m	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$	…

Числовые характеристики определяются выражениями:

$$\boxed{M[X] = \lambda, \qquad D[X] = \lambda.}$$

Характерной особенностью распределения Пуассона является совпадение значений математического ожидания и дисперсии.

Иногда говорят, что случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона с параметрами n, p ($X \sim \Pi(n, p)$), если вероятности вычисляются по формуле

$$\boxed{P(X = m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}}$$

а числовые характеристики $\boxed{M[X] = D[X] = n \cdot p.}$

Геометрическое распределение случайной величины X:

$$X \sim Geom(p)$$

Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p, если случайная величина X принимает значения 1, 2, 3, …, а вероятности того, что X принимает эти значения, вычисляются по формуле

$$\boxed{P(X = m) = q^{m-1} \cdot p}$$

X	1	2	3	…	m	…
P	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…	$q^{m-1} \cdot p$	…

Числовые характеристики определяются выражениями:

$$\boxed{M[X] = \frac{1}{p}, \qquad D[X] = \frac{q}{p^2}}$$

Гипергеометрическое распределение случайной величины X:

$$X \sim H(N; M; n)$$

Говорят, что случайная величина X имеет *гипергеометрическое распределение* с параметрами N, M, n, если случайная величина X принимает значения $\max\{0, n - N + M\}, \ldots, \min\{n, M\}$, а вероятности того, что X принимает эти значения, вычисляются по формуле

$$\boxed{P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}}$$

Из множества, содержащего N элементов, среди которых M обладают некоторым свойством *A*, извлекают наугад n элементов. Тогда случайная величина X, описывающая число элементов, обладающих некоторым свойством *A* и попавших в выборку, будет подчиняться гипергеометрическому закону.

Основные числовые характеристики гипергеометрического закона:

$$\boxed{M[X] = n \cdot \frac{M}{N}, \qquad D[X] = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,6, со второй – 0,7, с третьей – 0,8. Составить закон распределения числа использованных попыток. Вычислить вероятность того, что новый работник использует не более двух попыток.

Решение.

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число использованных попыток –принимает значения 1, 2, 3. Это случайная величина дискретного типа. Законом распределения может служить таблица:

$\boldsymbol{X}$	1	2	3
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$

Введем события $\boldsymbol{A_i}$ ={работнику удастся проявить свои способности с $\boldsymbol{i}$-й попытки}. Тогда

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=1) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1) = 0{,}6;$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=2) = \boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}_1}\cdot \boldsymbol{A}_2\right) = 0{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}28;$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=3) = \boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}_1}\cdot \overline{\boldsymbol{A}_2}\cdot \boldsymbol{A}_3 + \overline{\boldsymbol{A}_1}\cdot \overline{\boldsymbol{A}_2}\cdot \overline{\boldsymbol{A}_3}\right) = 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}12.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ отражен в таблице:

$\boldsymbol{X}$	1	2	3
$\boldsymbol{P}$	0,6	0,28	0,12

Свойство таблицы – $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_i} = 1$ – выполняется.

В условии задачи требовалось найти вероятность того, что новый работник использует не более двух попыток. Очевидно, искомая вероятность равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}\le 2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=2) = 0{,}6 + 0{,}28 = 0{,}88.$$

Пример. Экзаменационный билет содержит две задачи. Студент может решить первую задачу с вероятностью 0,6, а для второй задачи вероятность решения равна 0,5. Составить закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа верно решенных студентом задач. Найти $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$.

Решение:

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число верно решенных студентом задач принимает значения 0, 1, 2. Это случайная величина дискретного типа. Законом распределения может служить таблица:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$

Обозначим A_i={студент верно решает *i*-ую задачу}, тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=0)=\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}_1}\cdot\overline{\boldsymbol{A}_2}\right)=0.4\cdot 0{,}5=0{,}2;$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=1)=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}_1\cdot\overline{\boldsymbol{A}_2}+\overline{\boldsymbol{A}_1}\cdot\boldsymbol{A}_2\right)=0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}5;$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=2)=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2\right)=0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}3.$$

Итак,

$\boldsymbol{X}$	0	1	2
$\boldsymbol{P}$	0,2	0,5	0,3

Свойство таблицы – $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}=1$ – выполняется.

Найдем математическое ожидание числа верно решенных студентом задач:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]==\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3=1{,}1.$$

Вычислим дисперсию числа верно решенных студентом задач:

$$\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]==\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^2\cdot\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}-\left(\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]\right)^2=0^2\cdot 0{,}2+1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}3-(1{,}1)^2=0{,}49.$$

Пример. Стрелок, имея в начале стрельбы 5 патронов, стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет или не израсходует все патроны. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число израсходованных патронов задана таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,5	0,2	0,15	p_4	0,05

Найти p_4, $M[X]$, $D[X]$. Вычислить вероятность того, что по окончании стрельбы у него останутся патроны.

Решение.

Для нахождения значения p_4 воспользуемся ***свойством таблицы*** $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$: 0,5 + 0,2 + 0,15 + p_4 + 0,05 = 1. Следовательно, $p_4 = 0{,}1$.

Таблица распределения примет вид:

X	1	2	3	4	5
P	0,5	0,2	0,15	0,1	0,05

Вычислим $M[X]$ по формуле:

$$M[X] = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}15 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}05 = 2\,,$$

т.е. среднее число израсходованных патронов равно 2 (*шт*).

Для нахождения $D[X]$ будем использовать формулу:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2.$$

Сначала вычислим $M[X^2]$:

$$M[X^2] = 1^2\cdot 0{,}5 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}15 + 4^2\cdot 0{,}1 + 5\ \ \cdot 0{,}05 = 5{,}5.$$

Итак, $D[X] = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2 = 5{,}5 - (2)^2 = 1{,}5$ (*шт*^{2}).

Найдем вероятность того, что по окончании стрельбы у стрелка останутся патроны. Очевидно, искомая вероятность равна

$$P(X<5) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}95\,.$$

Пример. Среди 1000 лотерейных билетов один билет выигрывает 1000 руб., десять билетов – по 500 руб., сто билетов – по 50 руб. Пусть X – это величина выигрыша, соответствующая одному купленному билету. Необходимо: 1) составить таблицу распределения для X; 2) найти средний выигрыш, который приходится на один лотерейный билет; 3) найти дисперсию величины выигрыша, который приходится на один лотерейный билет; 4) найти функцию распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$; 5) пусть стоимость одного лотерейного билета составляет 25 руб. Требуется найти среднюю выручку организаторов лотереи от продажи одного билета и дисперсию выручки.

Решение.

1) Составить таблицу распределения для $\boldsymbol{X}$. Очевидно, что $\boldsymbol{X}$ – величина выигрыша, соответствующая одному купленному билету, это дискретная случайная величина с множеством значений $x_1 = 0$ (билет без выигрыша), $x_2 = 50$, $x_3 = 500$ и $x_4 = 1000$. Вероятности того, что $\boldsymbol{X}$ принимает эти значения, вычислим по ***классическому определению***:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{889}{1000} = 0{,}889\,;$$

$$p_2 = P(X = 50) = \frac{100}{1000} = 0{,}1\,;$$

$$p_3 = P(X = 500) = \frac{10}{1000} = 0{,}01\,;$$

$$p_4 = P(X = 1000) = \frac{1}{1000} = 0{,}001\,.$$

Таблица распределения величины выигрыша имеет вид

$\boldsymbol{X}$	0	50	500	1000
$\boldsymbol{P}$	0,889	0,1	0,01	0,001

Свойство таблицы распределения $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ выполняется.

2) Найти средний выигрыш, который приходится на один лотерейный билет, т.е. вычислить $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$ по (12):

$$M[X] = 0 \cdot 0{,}889 + 50 \cdot 0{,}1 + 500 \cdot 0{,}01 + 1000 \cdot 0{,}001 = 11\,,$$

т.е. средний выигрыш по одному билету равен 11 руб.

3) Найти дисперсию величины выигрыша. Сначала вычислим $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}^2]$:

$$M[X^2] = 0^2 \cdot 0{,}889 + 50^2 \cdot 0{,}1 + 500^2 \cdot 0{,}01 + 1000^2 \cdot 0{,}001 = 3750.$$

Дисперсию величины выигрыша найдем по формуле:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2 = 3750 - (11)^2 = 3629\ (руб^2).$$

4) Согласно определению функции $F_X(x)$, ее значение в конкретной точке x равно вероятности того, что значение случайной величины $\boldsymbol{X}$ окажется строго меньше, чем x. А поскольку при всех $\boldsymbol{x} \in (-\infty; 0]$ событие «значение случайной величины $\boldsymbol{X}$ окажется строго меньше, чем x» – невозможное, то $F_X(x) = 0$ при всех $\boldsymbol{x} \in (-\infty; 0]$. Далее при всех $\boldsymbol{x} \in (0; 50]$ событие «$\boldsymbol{X} < x$» равносильно тому, что величина выигрыша строго меньше 50 руб. Но такое событие наступает только в том случае, когда купленный билет без выигрыша, т.е. в 889 случаях из 1000. Значит, $P(\boldsymbol{X} < x) = 0,889$ при всех $\boldsymbol{x} \in (0; 50]$. Поэтому для всех $\boldsymbol{x} \in (0; 50]$ справедливо равенство $F_X(x) = 0,889$. Заметим, что в точке $x = 0$ функция $F_X(x)$ делает скачок с нуля до 0,889 (см. рис. 5.1). Аналогично можно показать, что в каждой точке x_i, которая является значением случайной величины $\boldsymbol{X}$, ее функция распределения $F_X(x)$ делает скачок вверх ровно на величину вероятности p_i. Кроме того, между любыми двумя соседними значениями x_{i-1} и x_i функция $F_X(x)$ непрерывна и не меняется. При всех $\boldsymbol{x} \in (50; 500]$ событие «$\boldsymbol{X} < x$» равносильно тому, что величина выигрыша строго меньше 500 руб. Но такое событие наступает только в том случае, когда купленный билет без выигрыша или билет выигрывает 50 руб., т.е. в 889 или 100 случаях из 1000. Значит, $P(\boldsymbol{X} < x) = 0,989$ при всех $\boldsymbol{x} \in (50; 500]$. Поэтому для всех $\boldsymbol{x} \in (50; 500]$ справедливо равенство $F_X(x)$=0,989. Аналогично находим следующие значения функции распределения. Таким образом, функцию распределения $F_X(x)$ в данном случае можно задать следующим образом:

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} 0, & -\infty < \boldsymbol{x} \le 0; \\ 0,889, & 0 < \boldsymbol{x} \le 50; \\ 0,989, & 50 < \boldsymbol{x} \le 500; \\ 0,999, & 500 < \boldsymbol{x} \le 1000; \\ 1, & 1000 < \boldsymbol{x} < +\infty \end{cases}$$

и изобразить графически:

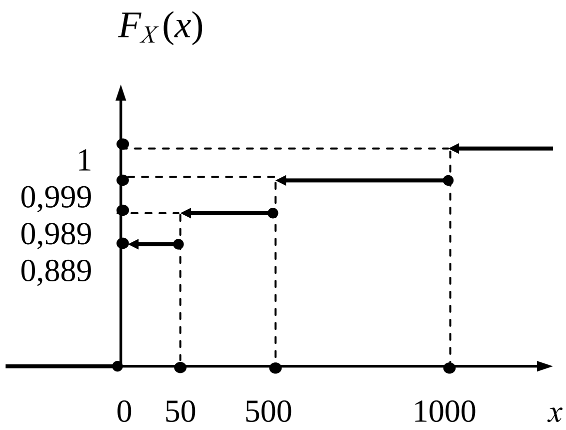


Рис. 5.1

5) Пусть стоимость одного лотерейного билета составляет 25 руб. Требуется найти среднюю выручку организаторов лотереи от продажи одного билета и дисперсию выручки.

Обозначим через $\boldsymbol{Y}$ дискретную случайную величину, равную выручке организаторов лотереи от продажи одного билета. Согласно условию задачи требуется найти $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]$ и $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}]$.

Заметим, что случайная величина $\boldsymbol{X}$ – величина выигрыша, соответствующая одному купленному билету, связана с величиной $\boldsymbol{Y}$ равенством $\boldsymbol{Y} = 25 - \boldsymbol{X}$, причем ранее мы установили, что $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = 11$ *руб.* и $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = 3629$ (*руб*^{2}). Следовательно, в силу ***свойства* 4 *математического ожидания***

$$M[Y] = M[25 - X] = 25 - M[X] = 25 - 11 = 14 \ (\textit{руб}).$$

Полученный результат означает, что средняя выручка организаторов лотереи от продажи одного билета составляет 14 рублей.

По ***свойству* 4 *дисперсии***

$$D[Y] = D[25 - X] = (-1)^2 D[X] = D[X] = 3629 \ (\textit{руб}^2).$$

Пример. Первый магазин откроется в течение месяца с вероятностью 0,4; второй магазин – с вероятностью 0,3. Пусть открытие магазинов – независимые события. Обозначим $\boldsymbol{X}$ – число магазинов, открывшихся за указанный период. Составить таблицу распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$.

Решение. Покажем, что таблица распределения имеет вид

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0,12

Пусть события $A_i = \{ i$ -й магазин откроется в течение месяца$\}$. Тогда

$p_1 = P(X=0) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$;

$p_2 = P(X=1) = P(\overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}46$;

$p_3 = P(X=2) = P(A_1 \cdot A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Свойство таблицы – $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ – выполняется.

Пример. Монетку подбрасывают дважды. Составить закон распределения числа выпавших «орлов». Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X – число выпавших «орлов» при двух подбрасываниях монеты принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями:

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad P(X=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Закон распределения можно представить в виде таблицы распределения:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Найдем функцию распределения. На интервале $x \in (-\infty; 0]$ $F_X(x) = P(X < 0) = 0$, на интервале $x \in (0; 1]$ $F_X(x) = P(X < 1) = \frac{1}{4}$, на интервале $x \in (1; 2]$ $F_X(x) = P(X < 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, на интервале $x \in (2; +\infty)$ $F_X(x) = P(X < 10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Таким образом, функция распределения примет вид:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{4}, & 0<x\le 1\\ \frac{3}{4}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Пример. Случайная величина X задана таблицей распределения

X	–2	1	2	3
P	0,3	0,2	0,2	0,1

Найти начальный и центральный моменты третьего порядка.

Решение: Начальный момент третьего порядка находится по формуле:

$$m_3 = M\left[X^3\right] == \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot p_i \, .$$

Итак, $m_3 = (-2)^3 \cdot 0{,}3 + 1^3 \cdot 0{,}2 + 2^3 \cdot 0{,}4 + 3^3 \cdot 0{,}1 = 3{,}7$.

Для нахождения центрального момента третьего порядка используем формулу

$$\mu_3 = M\left[(X - M[X])^3\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^3 \cdot p_i .$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X] == \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = (-2)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0.1 = 0{,}7 \, .$$

Тогда

$$\mu_3 = (-2-0{,}7)^3 \cdot 0{,}3 + (1-0{,}7)^3 \cdot 0{,}2 + (2-0{,}7)^3 \cdot 0{,}4 + (3-0{,}7)^3 \cdot 0{,}1 = -3{,}804 \, .$$

Пример. Случайная величина X задана с помощью таблицы

X	x_1	–1	0	1	2
P	A	0,3	$2\cdot A$	0,1	$3\cdot A$

Найти значение A, первое значение случайной величины X, если математическое ожидание случайной величины X равно $0{,}1$. Вычислить $M[Y]$, $D[Y]$, если случайная величина $Y = |X| - X$.

Решение. Для нахождения значения A воспользуемся ***свойством таблицы*** $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

$A + 0{,}3 + 2 \cdot A + 0{,}1 + 3 \cdot A = 1 \Rightarrow 6 \cdot A + 0{,}4 = 1 \Rightarrow 6 \cdot A = 0{,}6 \Rightarrow A = 0{,}1.$

Таблица распределения примет вид:

X	x_1	–1	0	1	2
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Найдем математическое ожидание случайной величины X по таблице:

$$M[X] = x_1 \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 = x_1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4.$$

По условию $M[X] = 0{,}1$.

Таким образом, получили уравнение для нахождения x_1:

$$x_1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}1, \Rightarrow \quad x_1 \cdot 0{,}1 = -0{,}3, \Rightarrow \quad x_1 = -3.$$

Итак, таблица распределения случайной величины X выглядит следующим образом:

X	–3	–1	0	1	2
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Для нахождения $M[Y]$ и $D[Y]$ построим таблицу для случайной величины $Y = |X| - X$. Для этого найдем значения этой случайной величины и вероятности, с которыми она принимает эти значения.

Если случайная величина X принимает значения –3, –1, 0, 1, 2, то $Y = |X| - X$ принимает значения 6, 2, 0, 0, 0. В таблицу для случайной величины Y запишем только различные значения в порядке возрастания:

Y	0	2	6
P	p_1	p_2	p_3

Определим вероятности этих значений:

$p_1 = P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}6;$

$p_2 = P(Y = 2) = P(X = -1) = 0{,}3;$

$p_3 = P(Y = 6) = P(X = -3) = 0{,}1.$

Таким образом, таблица для случайной величины Y примет вид:

Y	0	2	6
P	0,6	0,3	0,1

Свойство таблицы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ выполняется.

Найдем $M[Y] = 0 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}1 = 1{,}2.$

Для нахождения дисперсии вычислим

$$M[Y^2] = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}9,$$

и тогда

$$D[Y] = M\left[Y^2\right] - \left(M[Y]\right)^2 = 3{,}9 - (1{,}2)^2 = 2{,}46.$$

Пример. Пусть случайная величина X – число продаваемых в автосалоне автомобилей за месяц задана функцией

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}4, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}7, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}9, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

Решение. Функция распределения $F_X(x)$ разрывная и ступенчатая функция (см. рис. 5.2). Следовательно, случайная величина X – число продаваемых в автосалоне автомобилей за месяц является случайной величиной дискретного типа. Для нахождения числовых характеристик $M[X]$ и $D[X]$ построим таблицу распределения:

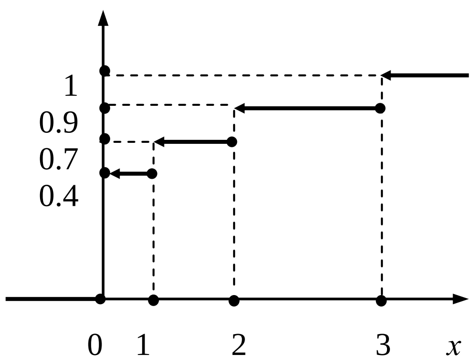


Рис. 5.2

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Тогда

$$M[X] == \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 1,$$

т.е. в среднем за месяц в автосалоне продают 1 автомобиль.

Найдем дисперсию числа продаваемых в автосалоне автомобилей за месяц

$$D[X] == \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i \; - \; \left(M[X]\right)^2 = 0^2 \cdot 0{,}4 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}1 - (1)^2 = 1\,(\boldsymbol{авт}^2).$$

Пример. Из набора костяшек для домино случайным образом выбирается одна кость. Случайная величина X – абсолютная величина разности значений на разных половинках этой кости. Построить ряд распределения случайной величины X.

Решение: Наименьшее значение случайной величины X равно 0, наблюдаемое при выборе «дубля». В набор входит 7 дублей, поэтому вероятность подобного выбора среди 28 костяшек набора составляет

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{7}{28}.$$

Ровно на единицу отличаются значения на костяшках «0–1», «1–2», «2–3», «3–4», «4–5» и «5–6», таким образом, второе значение случайной величины X равно 1 с вероятностью

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{6}{28}.$$

Отличие на два наблюдается для 5 костяшек, на три – для 4-х, на четыре – для 3-х, на пять – для 2 костяшек домино, следовательно,

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{5}{28};$$

$$p_4 = P(X = 3) = \frac{4}{28};$$

$$p_5 = P(X = 4) = \frac{3}{28};$$

$$p_6 = P(X = 5) = \frac{2}{28}.$$

Наконец, наибольшая разница, порождающая значение X, равно шести, соответствует выбору костяшки «0–6» и наблюдается с вероятностью

$$p_7 = P(X = 6) = \frac{1}{28}.$$

Итак, ряд распределения можно записать таблицей вида

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

Суммируя вероятности, нетрудно заметить, что свойство нормировки выполняется.

Пример. За смену магазин мужской одежды продает **10** мужских сорочек. Большим спросом пользуются сорочки 40-го размера воротничка с вероятностью **0,8**. Пусть X – число проданных за смену сорочек 40-го размера воротничка. Найти значение выражения $D\left[2-5\cdot X\right] - M\left[4\cdot X-2\right]$.

Решение. Случайная величина X – число проданных за смену сорочек 40-го размера воротничка является случайной величиной дискретного типа, и принимает значения 0, 1, 2, 3, . . . , 10. Для вычисления числовых характеристик, построим таблицу распределения:

X	0	1	2	. . .	10
P	p_1	p_2	p_3	. . .	p_{11}

Испытание – продажа мужских сорочек,

$n = 10$,

успех – продажа сорочки 40-го размера воротничка, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

Итак,

$p_1 = P(X = 0) = C_{10}^{0} \cdot 0{,}8^{0} \cdot 0{,}2^{10}$,

$p_2 = P(X = 1) = C_{10}^{1} \cdot 0{,}8^{1} \cdot 0{,}2^{9}$ и т.д.

Так как для вычисления вероятностей используется ***формула Бернулли***, можно утверждать, что X – число проданных за смену сорочек 40-го размера воротничка имеет типовой закон распределения биномиальный: $X \sim Bin(10; 0{,}8)$.

Следовательно, ***числовые характеристики*** можно найти:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 10 \cdot 0{,}8 = 8, \qquad \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6.$$

Для нахождения значения выражения $D\left[\,2-5\cdot X\,\right] - M\left[\,4\cdot X-2\right]$ воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии.

Так по ***свойству 4 математического ожидания***:

$$M\left[\,4\cdot X-2\right] = 4\cdot M[X]-2 = 4\cdot 8-2 = 30\,.$$

По ***свойству 4 дисперсии***: $D\left[\,2-5\cdot X\,\right] = (-5)^2\cdot D[X] = 25\cdot 1{,}6 = 40\,.$

Следовательно, значение выражения $D\left[\,2-5\cdot X\,\right] - M\left[\,4\cdot X-2\right] = 40-30 = 10\,.$

Пример. На факультете насчитывается 730 студентов. Описать закон распределения числа студентов, родившихся 1 сентября. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа студентов, родившихся 1 сентября? Найти вероятность того, что на факультете не более одного студента, родившегося 1 сентября.

Решение. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число студентов, родившихся 1 сентября, является случайной величиной дискретного типа, и принимает значения 0, 1, 2, 3, . . . , 730. Для вычисления числовых характеристик, построим таблицу распределения:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	. . .	730
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	. . .	$\boldsymbol{p}_{731}$

Испытание – опрос студента,

n = 730,

успех – студент, родившийся 1 сентября, $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{365}$, $\boldsymbol{q} = \dfrac{364}{365}$.

Для подсчета вероятностей будем использовать ***формулу Пуассона***, так как $\boldsymbol{n} \to \infty$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 2 < 10$:

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) = \frac{2^0}{0!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2},$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 1) = \frac{2^1}{1!} \cdot \boldsymbol{e}^{-2} \text{ и т.д.}$$

Следовательно, можно утверждать, что $\boldsymbol{X}$ – число студентов, родившихся 1 сентября, имеет типовой закон распределения пуассоновский: $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{\Pi}(2)$.

Тогда, ***числовые характеристики*** можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \lambda = 2, \qquad \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \lambda = 2.$$

Найдем $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \le 1)$ по таблице распределения:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \le 1) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 1) = \frac{2^0}{0!}\cdot \boldsymbol{e}^{-2} + \frac{2^1}{1!}\cdot \boldsymbol{e}^{-2} = \boldsymbol{e}^{-2} + 2\cdot \boldsymbol{e}^{-2} = 3\cdot \boldsymbol{e}^{-2} \approx 3\cdot 0{,}13534 \approx 0{,}41.$$

Пример. Из колоды в 36 карт наугад извлекают 4 карты. Пусть $\boldsymbol{X}$ – число карт бубновой масти среди извлеченных карт. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\boldsymbol{X}$.

Решение.

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число карт бубновой масти среди извлеченных карт является случайной величиной дискретного типа, и принимает значения 0, 1, 2, 3, 4. Для вычисления числовых характеристик, построим таблицу распределения:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_5$

Найдем вероятности

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 0) = \frac{\boldsymbol{C}_9^0 \cdot \boldsymbol{C}_{27}^4}{\boldsymbol{C}_{36}^4};$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 1) = \frac{\boldsymbol{C}_9^1 \cdot \boldsymbol{C}_{27}^3}{\boldsymbol{C}_{36}^4} \text{ и т.д.}$$

На основании формулы, используемой для вычисления вероятностей, делаем вывод, что $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{H}(36;\, 9;\, 4)$.

Тогда, ***числовые характеристики***:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{N}} = 4\cdot\frac{9}{36} = 1, \qquad \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{N}}\cdot\left(1-\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{N}}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{N}-\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}-1}\right) = 4\cdot\frac{9}{36}\cdot\frac{27}{36}\cdot\frac{32}{35} = 0{,}69$$

Пример. Два шахматиста – перворазрядник и второразрядник – договорились провести матч по следующему правилу: как только второразрядник выигрывает партию, матч считается завершенным. Известно, что шансы перворазрядника выиграть партию у второразрядника оцениваются как «четыре из пяти». Сколько партий в среднем приходилось бы на один такой матч, если бы он проводился многократно? Какова вероятность, что в матче будет сыграно не менее трех партий?

Решение. Случайная величина X – число сыгранных в матче партий принимает значения 1, 2, 3, ... , . Для вычисления математического ожидания, построим таблицу распределения:

X	1	2	3	. . .
P	p_1	p_2	p_3	. . .

Введем события $A_i = \{$выигрыш второразрядником i-й партии$\}$. Тогда

$$p_1 = P(X=1) = P(A_1) = 0{,}2$$

$$p_2 = P(X=2) = P\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

$$p_3 = P(X=3) = P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3\right) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128 \text{ и т.д.}$$

Для подсчета вероятностей использовалась формула $P(X=m) = q^{m-1} \cdot p$, следовательно, $X \sim Geom(0{,}2)$.

Математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$

Вычислим $P(X \geq 3)$ по таблице распределения:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X=1) + P(X=2)) = 1 - (0{,}2 + 0{,}16) = 0{,}64.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

5.1. Известно, что в среднем каждый третий студент носит очки. Студенческая группа состоит из 9 студентов. Найти среднее значение и дисперсию числа студентов группы, которые носят очки. Найти значение выражения $\boldsymbol{D}[5-10\boldsymbol{X}]$ – $\boldsymbol{M}[-5\boldsymbol{X}-4]$.

5.2. Известно, что при наборе сообщения из 100 знаков искажается один. Найти среднее значение и дисперсию числа искаженных знаков в сообщении, содержащем 300 знаков. Пусть случайная величина $\boldsymbol{Y}=2\boldsymbol{X}-4$. Найти $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}]$.

5.3. На факультете обучается 60 студентов. Найти среднее значение и дисперсию числа студентов факультета, родившихся под знаком зодиака «скорпион». Найти вероятность того, что на факультете найдется хотя бы один студент, рожденный под знаком зодиака «скорпион».

5.4. По статистике 10% молодых семей, живущих с родителями, разводятся в течение первых трех лет совместной жизни. Найти сумму среднего значения и дисперсии числа разводов в 20 молодых семьях, живущих с родителями.

5.5. Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет «орел». Найти среднее значение и дисперсию числа проведенных испытаний (подбрасываний). Найти значение выражения $\boldsymbol{D}[3-2\boldsymbol{X}]$ – $\boldsymbol{M}[-3\boldsymbol{X}-1]$.

5.6. Среди кандидатов в студсовет факультета 3 первокурсника, 3 второкурсников и 4 студента с третьего курса. В состав студсовета наудачу выбирают 5 студентов. Найти среднее значение и дисперсию числа студентов с третьего курса среди выбранных.

5.7. В магазине 10 плюшевых игрушек, из них 1 медвежонок, 4 жирафа и 5 собачек. Детский сад закупил для детей 5 игрушек. Найти математическое ожидание и дисперсию числа жирафов среди купленных плюшевых игрушек. Пусть случайная величина $\boldsymbol{Y}=3\boldsymbol{X}-1$. Найти $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}]$.

5.8. Экзаменатор задает студенту вопросы до тех пор, пока тот правильно отвечает. Как только студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию числа заданных студенту вопросов. Найти вероятность того, что студенту зададут не менее трех вопросов.

5.9. Один автомеханик в течение смены ремонтирует 2, 3, 4 или 6 автомобилей соответственно с вероятностями 0,1, 0,2, 0,5 и 0,2. Пусть $\boldsymbol{X}$ – число ремонтируемых в течение суток автомехаником автомобилей. Найти $\boldsymbol{M}[X]$, $\boldsymbol{D}[X]$, вероятность того, что в течение смены автомеханик отремонтирует не менее четырех автомобилей.

5.10. Пусть случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число продаваемых в автосалоне автомобилей за месяц задана

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}$	$4A$	$3A$	$2A$	A

Найти неизвестную константу A, среднее значение и стандартное отклонение случайной величины $\boldsymbol{Y}$ – дохода за месяц, если $\boldsymbol{Y} = 100 \cdot \boldsymbol{X} - 40$.

5.11. Два банка независимо друг от друга могут разориться в течение года. Вероятность разорения для первого банка равна 0,1, для второго – 0,2. Описать закон распределения числа разорившихся в течение года банков. Найти: а) $\boldsymbol{M}[X]$; б) $\boldsymbol{D}[X]$; в) вероятность того, что по крайней мере один банк разорится; г) функцию распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$.

5.12. Один раз брошены три игральные кости. Игрок получит доход, равный 10 у.е., если хотя бы на двух игральных костях выпадет цифра 6; ничего не получит, если шестерка выпадет на грани одной из костей; проиграет 10 у.е. – в остальных случаях. Описать закон распределения величины выигрыша, вычислить функцию распределения, математическое ожидание и моду распределения.

5.13. В кармане 3 купюры по 500 рублей и 2 купюры достоинством 100 рублей. Из кармана по одной достают купюры до тех пор, пока не появится купюра достоинством 500 рублей. Составить таблицу распределения числа проведенных испытаний. Найти функцию распределения $F_X(x)$, математическое ожидание и дисперсию числа проведенных испытаний, вероятность того, что проведено не менее двух испытаний.

5.14. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – цена на товар задана с помощью функции следующего вида:

$$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \le 1 \\ 0{,}2, & 1 < \boldsymbol{x} \le 4 \\ 0{,}5, & 4 < \boldsymbol{x} \le 6 \\ 0{,}9, & 6 < \boldsymbol{x} \le 8 \\ 1, & \boldsymbol{x} > 8. \end{cases}$$

Покупательский спрос на товар $\boldsymbol{Y}$ определяется формулой $\boldsymbol{Y} = 42 - 5\boldsymbol{X}$. Найти среднее ожидаемое значение и дисперсию покупательского спроса на товар.

5.15. Охотник, имеющий 3 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует патроны). Найти закон распределения числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти: а) вероятность того, что число израсходованных охотником патронов будет не менее двух; б) закон распределения случайной величины $\boldsymbol{Y}$, если $\boldsymbol{Y} = 3\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^2$; в) $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]$; г) $\boldsymbol{F_Y}(\boldsymbol{y})$.

5.16. Пусть случайная величина $\boldsymbol{X}$ задана таблицей

$\boldsymbol{X}$	4	6	$\boldsymbol{x}_3$
$\boldsymbol{P}$	0,5	0,3	$\boldsymbol{p}_3$

Найти $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{p}_3$, если $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = 6$. Вычислить $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > 8)$.

5.17. В экзаменационном билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй задачи – 0,8, третьей задачи – 0,7. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число правильно решенных задач. Найти моду, $\boldsymbol{F_X}(2)$.

5.18. Стрелок делает 3 выстрела по мишени с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а за каждый промах у него забирают 2 очка. Составить закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа очков, заработанных стрелком.

5.19. В первой коробке 6 белых и 4 черных шара, во второй коробке 3 белых и 7 черных шаров. Из первой коробки во вторую перекладывают наугад один шар. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число белых шаров во второй коробке после перекладывания. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$.

5.20. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 40-го размера, равна 0,4. В обувной отдел вошли 5 покупателей. Описать закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа покупателей, которым потребуется обувь 40-го размера. Найти значение выражения $\boldsymbol{M}[8+10\cdot \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]-5\cdot \boldsymbol{X}]$ и вероятность того, что хотя бы одному покупателю потребуется обувь 40-го размера.

5.21. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет больше 4 очков. Пусть случайной величины X – число подбрасываний кости. Найти $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > 2)$.

5.22. Из 25 студентов группы положительную оценку за контрольную работу получили 20 человек. Случайным образом были выбраны 5 студентов. Найти математическое ожидание и дисперсию числа студентов, справившихся с контрольной работой среди взятых студентов.

5.23. Случайная величина X задана с помощью таблицы

X	x_1	-1	0	1	2
P	A	0,3	$2\cdot A$	0,1	$3\cdot A$

Найти A, первое значение случайной величины X, если ее математическое ожидание равно 0,1.

5.24. Кубик подбрасывается 12 раз. За выпадение грани с цифрой 6 начисляется 10 у.е. Найти среднее значение и дисперсию начисленных у.е.

5.25. Известно, что каждый сотый пассажир опаздывает на поезд. Найти среднее число опоздавших на поезд среди 500 человек, купивших билеты.

5.26. Функция распределения случайной величины X имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{F}_X(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \le 2; \\ 0{,}3, & 2 < \boldsymbol{x} \le 3; \\ 0{,}5, & 3 < \boldsymbol{x} \le 4; \\ 1, & \boldsymbol{x} > 4. \end{cases}$$

Вычислить $P(X \le 3{,}5)$ и $P(|X| < 2{,}5)$. Описать закон распределение случайной величины X, найти $M[X]$ и $D[X]$. Вычислить $M[Y]$ и $D[Y]$ случайной величины $Y = 3 - 10 \cdot X$.

5.27. По статистическим данным в среднем 25% граждан открывают счета в банках, расположенных в районах их проживания. Наудачу отобраны 16 человек. Найти дисперсию числа граждан, откроющих счета в банках, расположенных в районах их проживания.

5.28. Монету подбрасывают **8** раз. Найти среднее значение и дисперсию числа выпавших «орлов».

5.29. Производятся независимые последовательные испытания 3 приборов на надежность. Надежность каждого из приборов равна 0,9. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, когда предыдущий прибор оказался надежным. Описать закон распределения числа испытанных в эксперименте приборов. Найти $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(3)$.

5.30. Случайная величина X задана

X	-3	-1	1	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти функцию распределения случайной величины X, $M[X]$, $D[X]$, $P(X > 0)$, моду, распределение случайной величины $Y = |X|$, $P(Y < M[Y])$.

5.31. Из колоды карт наугад извлекают сразу 4 карты. Пусть X – число картинок среди извлеченных карт. По какому закону распределена случайная величина X?

5.32. На факультете обучается 72 студента. Описать закон распределения числа студентов, родившихся в январе. Чему равны математическое ожидание и дисперсия X? Найти $P(X > 1)$.

5.33. Радист трижды вызывает корреспондента. Следующий вызов производится, если предыдущий вызов не принят. Вероятность принятия первого вызова равна 0,3 , второго – 0,4 , третьего – 0,8. Составить закон распределения числа вызовов. Найти дисперсию случайной величины X. Для случайной величины $Y = |X - 2|$ вычислить $P(Y < M[Y])$ и найти функцию распределения случайной величины Y.

5.34. На экзамен предложено 5 билетов. Студент выучил билеты только с нечетными номерами. Преподаватель разрешил студенту тянуть билеты до тех пор, пока тот не возьмет выученный билет. Составить закон распределения числа использованных студентом попыток. Вычислить $D[9-2X]-M[4X+3]$.

5.35. Производится один опыт, в результате которого событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть X – *индикаторная случайная величина* – принимает значение 1, если событие A произошло, и значение 0, если событие A не произошло. Описать закон распределения случайной величины X. Найти $M[X]$, $D[X]$, $P(X < 1)$, начальный момент 3-го порядка, центральный момент 3-го порядка. Построить график функции распределения. Определить значение p, при котором дисперсия максимальна.

5.36. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет биномиальное распределение. Известно, что $\dfrac{\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]}{\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]} = 0{,}1.$ Найти вероятность того, что $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > 2)$, если проводится четыре независимые повторные испытания.

5.37. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число мальчиков в студенческой группе – имеет биномиальное распределение с $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = 4$. Найти: а) количество студентов в этой группе; б) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = 7)$; в) $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(2)$.

ОТВЕТЫ:

5.1. 219. **5.2.** $M[Y] = 2$; $D[Y] = 12$. **5.3.** $M[X] = 5$; $D[X] = 5$; 0,99326. **5.4.** 3,8. **5.5.** 15. **5.6.** $M[X] = 2$; $D[X] = 2/3$. **5.7.** $M[Y] = 5$; $D[Y] = 6$. **5.8.** $M[X] = 5$; $D[X] = 20$; 0,64. **5.9.** $M[X] = 4$; $D[X] = 1{,}4$; 0,7. **5.10.** $A = 0{,}1$; $M[Y] = 60$; $D[Y] = 10000$. **5.11. а)** $M[X] = 0{,}3$; б) $D[X] = 0{,}25$; в) 0,28. **5.12.** $M[X] = –5{,}05$; $x_{\text{mod}} = –10$. **5.13.** $M[X] = 1{,}5$; $D[X] = 0{,}45$; 0,4. **5.14.** $M[Y] = 19$; $D[Y] = 116$. **5.15.** а) 0,8; в) $M[Y] = 0{,}72$. **5.16.** $p_3 = 0{,}2$; $x_3 = 11$; $D[X] = 7$; 0,2. **5.17.** $x_{\text{mod}} = 3$; 0,098. **5.19.** $M[X] = 3{,}6$; $D[X] = 0{,}24$. **5.20.** 10; 0,92224. **5.21.** $M[X] = 3$; $D[X] = 6$; 4/9=0,4444. **5.22.** $M[X] = 4$; $D[X] = 2/3$. **5.23.** $A = 0{,}1$; $x_1 = -3$. **5.24.** 20 и 500/3=166,67. **5.25.** 5. **5.26.** 0,5 и 0,3; $M[X] = 3{,}2$; $D[X] = 0{,}76$; $M[Y] = –29$; $D[Y] = 76$. **5.27.** 3. **5.28.** 4 и 2. **5.29.** 0,19. **5.30.** $M[X] = 0{,}4$; $D[X] = 3{,}24$; 0,6; $x_{\text{mod}} = 1$; $M[Y] = 1{,}6$; 0,7. **5.31.** $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{H}(36; 16; 4)$. **5.32.** $M[X] = 6$; $D[X] = = 6$; 0,98264. **5.33.** $D[X] = 0{,}7056$; $M[Y] = 0{,}72$; 0,28. **5.34.** – 7,2. **5.35.** $M[X] = p$; $D[X] = p \cdot q$; $P(X < 1) = q$; $m_3 = p$; $\mu_3 = qp(q–p)$; $p = 0{,}5$. **5.36.** 0,0037. **5.37.** 1/32=0,03125; 9/256.

6. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется случайная величина, значения которой сплошь покрывают некоторый интервал (a, b), полуось или всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно

Пример. $\boldsymbol{X}$ – срок службы телевизора – непрерывная случайная величина, которая принимает значения из некоторого интервала $(\mathbf{0}, \boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T}$ – максимальный срок службы.

Пример. $\boldsymbol{X}$ – годовой доход (тыс. руб.) наудачу выбранного лица, облагаемый налогом – непрерывная случайная величина, которая принимает значения из интервала $(\boldsymbol{A}; +\infty)$, где $\boldsymbol{A}$ – минимальная сумма дохода, установленная государством.

Пример. Непрерывная случайная величина $\boldsymbol{X}$ – дальность полета снаряда, принимающая значения из интервала $(\mathbf{0}, \boldsymbol{L})$, где $\boldsymbol{L}$ – максимальная дальность полета.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НСВ

Функция распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$

Функцией распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ называется функция, которая при каждом вещественном x равна вероятности того, что случайная величина $\boldsymbol{X}$ примет значения меньше наперед заданного x:

$$\boxed{\boldsymbol{F_X(x) = P(X < x)}}$$

Свойства функции распределения

1) $0 \le F_X(x) \le 1$;

2) $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$; $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$;

3) $F_X(x) -$ неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F_X(x_2) \ge F_X(x_1)$;

4) вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[x_1, x_2)$ равна $P(x_1 \le X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Специфические свойства функции распределения НСВ:

5) функция непрерывна всюду;

6) $P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2)$.

Плотность распределения случайной величины X

Плотностью распределения случайной величины X называется первая производная от функции распределения: $f_X(x) = F'_X(x)$.

Свойства плотности распределения

1) Для любого x функция плотности $f_X(x) \ge 0$.

2) Свойство нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

3) $F_X(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$.

4) $P(x_1 \le X \le x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание случайной величины X вычисляется по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, определяющее центр распределения. В экономических приложениях математическое ожидание используется в качестве меры эффективности совершаемой экономической операции.

Свойства математического ожидания случайной величины X

1. $-\infty \le M[X] \le +\infty$;
2. $M[C] = C$, где C – произвольная константа;
3. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$;
4. $M[C \cdot X + B] = C \cdot M[X] + B$, где C и B – произвольные константы

Дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле

$$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \cdot f_X(x)dx.$$

Удобная формула вычисления дисперсии на практике

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2,$$

где $M\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx$

Дисперсия характеризует рассеяние (разброс) значений случайной величины относительно математического ожидания. В экономических приложениях дисперсия используется в качестве меры риска совершаемой экономической операции.

Свойства дисперсии случайной величины X.

1. $D[X] \geq 0$;

2. $D[C] = 0$, где C – произвольная константа;

3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$;

4. $D[C \cdot X + B] = C^2 \cdot D[X]$, где C и B – произвольные константы.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Имеет то же назначение, что и дисперсия. Преимущество по сравнению с дисперсией – имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Начальный момент *k*-го порядка случайной величины

$$m_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)dx$$

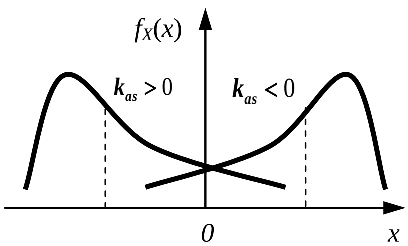
Центральный момент *k*-го порядка случайной величины

$$\mu_k = M\left[(X - M[X])^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k \cdot f_X(x)dx$$

Коэффициент асимметрии

$$k_{as} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{M\left[(X - M[X])^3\right]}{\left(\sqrt{D[X]}\right)^3}$$

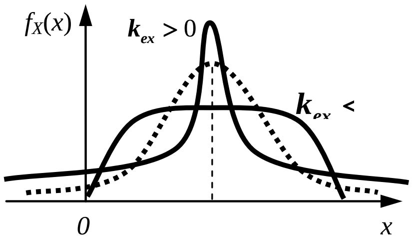
характеризует симметричность распределения случайной величины X относительно ее математического ожидания



Коэффициент эксцесса

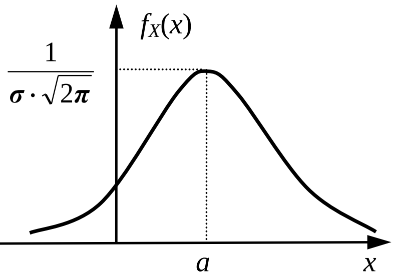
$$k_{ex} = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M\left[(X - M[X])^4\right]}{\left(\sqrt{D[X]}\right)^4} - 3$$

характеризует островершинность распределения случайной величины X



Мода распределения x_{mod}

значение случайной величины, при котором плотность распределения достигает максимального значения



$$x_{\text{mod}} = a$$

Квантиль порядка p: x_p

значение случайной величины, являющееся решением уравнения $P(X < x_p) = p$ или $F_X(x_p) = p$

Геометрический смысл квантили уровня p состоит в следующем: если через точку с абсциссой x_p на оси *OX* провести вертикальную прямую, то она разобьет фигуру, ограниченную снизу координатной осью, а сверху графиком функции $f_X(x)$, на две половины так, что левая половина будет иметь площадь, равную p.

Медиана (квантиль порядка 0,5) x_{med}

значение случайной величины, являющееся серединой распределения

$$P(X < x_{med}) = 0{,}5 \qquad \text{или} \qquad F_X(x_{med}) = 0{,}5$$

Медиана указывает такую точку на числовой оси, что вероятность попадания случайной величины левее и правее этой точки одинакова и равна 0,5.

ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Равномерный закон распределения случайной величины X:

$$X \sim R[a;b]$$

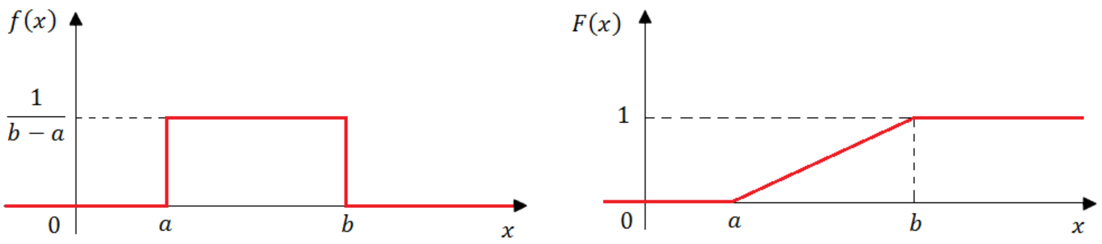
Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения $f_X(x)$ постоянна на данном отрезке и задается функцией вида

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Функция распределения $F_X(x)$ определяется формулой

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики функций $f_X(x)$ и $F_X(x)$ равномерного закона представлены на рис. 6.1:



а) б)

Рис. 6.1.

Числовые характеристики соответственно равны:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения случайной величины *X*: $X \sim E(\lambda)$

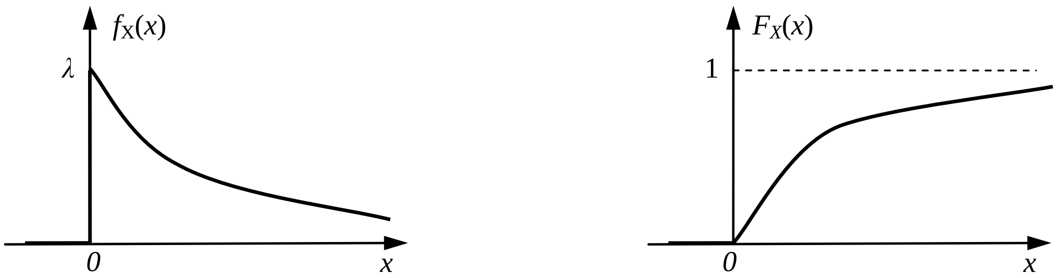
Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *экспоненциальное распределение* с параметром λ, если плотность распределения $f_X(x)$ задается функцией вида

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения $F_X(x)$ определяется формулой

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Графики функций $f_X(x)$ и $F_X(x)$ экспоненциального распределения представлены на рис. 6.2:



а) б)

Рис. 6.2.

Числовые характеристики соответственно равны:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальный закон распределения случайной величины X:

$$X \sim N(a;\sigma^2)$$

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение* с параметрами a и σ^2, если плотность распределения $f_X(x)$ задается функцией вида

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция распределения $F_X(x)$ определяется формулой

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Графики функций $f_X(x)$ и $F_X(x)$ представлены на рис. 6.3:

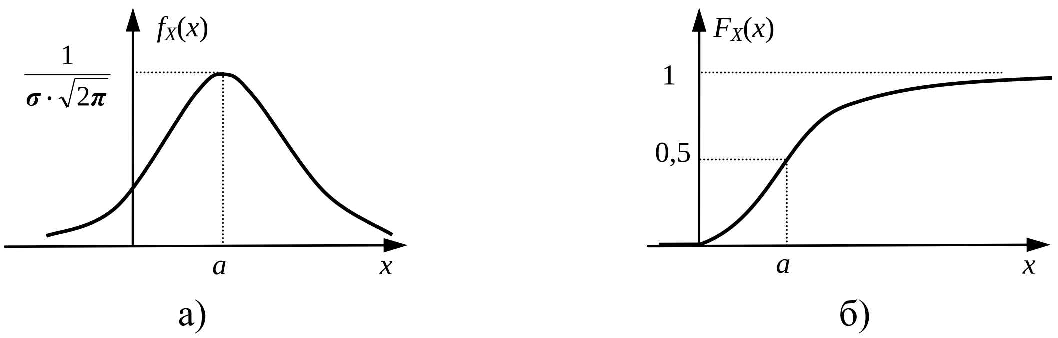


Рис. 6.3.

Числовые характеристики соответственно равны: $M[X]=a$, $D[X]=\sigma^2$.

Функция плотности распределения $f_X(x)$ достигает максимума в точке с координатами

$$\left(a;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)=\left(a;\ \frac{0,4}{\sigma}\right)$$

и имеет две точки перегиба: $\left(a-\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(a-\sigma;\ \frac{0,24}{\sigma}\right)$ и

$\left(a+\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(a+\sigma;\ \frac{0,24}{\sigma}\right)$.

График плотности нормального распределения симметричен относительно точки $x=a$.

Для нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{x}_{\mathrm{mod}} = \boldsymbol{x}_{med} = \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{k}_{as} = \boldsymbol{k}_{ex} = 0.$$

Стандартный нормальный закон распределения
случайной величины X: $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(0; 1)$

Стандартным нормальным законом распределения называют нормальный закон с параметрами $\boldsymbol{a} = 0$ и $\sigma = 1$, если плотность распределения задается функцией вида

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}} = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

Функция распределения определяется формулой

$$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}} \cdot \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}).$$

Графики функций $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ представлены на рис. 6.4:

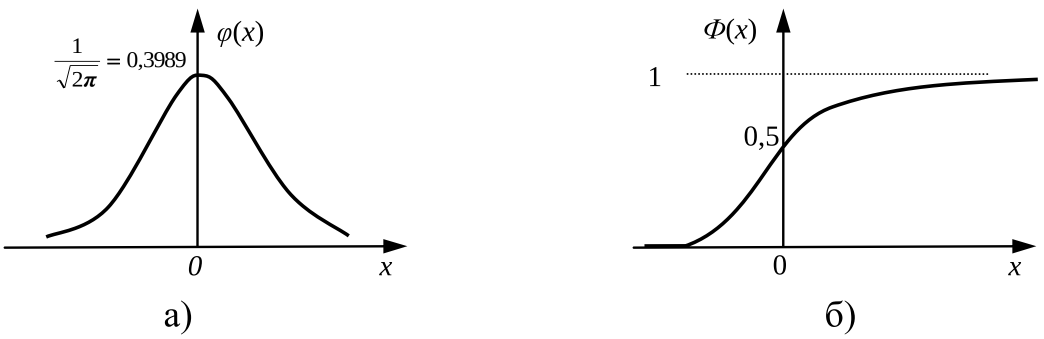


Рис. 6.4.

Значения функций $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ можно найти в приложении табл.1 и табл.2.

Используя этот факт, можно записать плотность и функцию распределения нормального закона с помощью табличных функций:

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}} = \varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\sigma}\right)$$

$$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}} \cdot \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$

Пусть $X \sim N(a; \sigma^2)$, тогда вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ определяется формулой

$$\boxed{P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)}$$

Если интервал симметричен относительно $M[X] = a$, то для вычисления вероятности используют формулу

$$\boxed{P\left(|X - a| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1}$$

В качестве ε часто используют произведение $k\sigma$, где $k = 1, 2, 3$. Тогда формула примет вид

$$P\left(|X - a| < k\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{k\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(k) - 1.$$

При $k = 1$: $P\left(|X - a| < \sigma\right) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$.

При $k = 2$: $P\left(|X - a| < 2\sigma\right) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$.

При $k = 3$: $P\left(|X - a| < 3\sigma\right) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}99865 - 1 = 0{,}9973$.

Последний результат называют **правилом трех сигм**: практически все значения случайной величины $X \sim N(a; \sigma^2)$ находятся в интервале $(a - 3\sigma\,; a + 3\sigma)$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример. Каждый день цена акции поднимается или опускается на несколько пунктов. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – изменение курса акций за определенный день задана функцией

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \boldsymbol{x} < 0, \\ \boldsymbol{Cx} & , \quad 0 \le \boldsymbol{x} \le 2, \\ 0 & , \quad \boldsymbol{x} > 2. \end{cases}$$

Найти константу *C*, $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x})$, вероятность того, что изменение курса акций за определенный день будет больше $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$. Пусть $\boldsymbol{Y}$ – доходность инвестиционного портфеля. Найти математическое ожидание и дисперсию доходности инвестиционного портфеля, если $\boldsymbol{Y} = 3\boldsymbol{X} + 1$.

Решение. Константу *C* найдем из ***условия нормировки*** (**свойство 2** плотности распределения $\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = 1.$$

$$\int_0^2 \boldsymbol{Cxdx} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C} \cdot \int_0^2 \boldsymbol{xdx} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C} \cdot \frac{\boldsymbol{x}^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C} \cdot \frac{2^2}{2} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \boldsymbol{C} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что область интегрирования $(-\infty, +\infty)$ мы заменили отрезком [0, 2], так как вне этого отрезка функция $\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = 0$.

Итак,

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \boldsymbol{x} < 0, \\ \dfrac{1}{2} \cdot \boldsymbol{x} & , \quad 0 \le \boldsymbol{x} \le 2, \\ 0 & , \quad \boldsymbol{x} > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_0^2 \boldsymbol{x}\frac{1}{2}\boldsymbol{xdx} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{x}^3}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} \approx 1{,}33.$$

Для нахождения дисперсии, сначала вычислим $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}^2]$:

$$\boldsymbol{M}\left[\boldsymbol{X}^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x}^2 \cdot \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_0^2 \boldsymbol{x}^2\frac{1}{2}\boldsymbol{xdx} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \boldsymbol{x}^3\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{x}^4}{8}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{8} = 2.$$

Тогда $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\approx 0{,}22$.

С помощью ***свойства* 3** плотности распределения $f_X(x)$ найдем $F_X(x)$. Учитывая формулу, задающую функцию $f_X(x)$, рассмотрим отдельно каждый из трех случаев $-\infty<x\le 0$, $0<x\le 2$ и $2<x<+\infty$.

1. Пусть $-\infty<x\le 0$.

Тогда $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$, поскольку при $-\infty<x\le 0$ функция $f_X(x)=0$.

2. Пусть $0<x\le 2$.

В этом случае $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}xdx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^x=\frac{x^2}{4}$.

3. Пусть $2<x<+\infty$.

Тогда $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{2}xdx+\int\limits_{2}^{x}0dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2=1$.

Объединяя все три случая, окончательно получаем

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} & \textit{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \textit{при } x>2.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что полученная функция $F_X(x)$ непрерывна и обладает всеми свойствами функции распределения случайной величины. Используя ***свойство* 4** функции распределения $F_X(x)$, находим искомую вероятность:

$$P(X>M[X])=P(1{,}33<X<+\infty)=F_X(+\infty)-F(1{,}33)=1-\frac{1{,}33^2}{4}\approx 0{,}56.$$

Пусть Y – доходность инвестиционного портфеля равна $Y=3X+1$. Для нахождения математического ожидания и дисперсии доходности инвестиционного портфеля воспользуемся свойствами числовых характеристик.

Согласно ***свойству* 4 *математического ожидания***:

$$M[Y] = M[3X+1] = 3 \cdot M[X] + 1 = 3 \cdot \frac{4}{3} + 1 = 5.$$

По ***свойству* 4 *дисперсии***:

$$D[Y] = D[3X+1] = 3^2 \cdot D[X] = 9 \cdot \frac{2}{9} = 2.$$

Пример. Пусть X – непрерывная случайная величина задана плотностью распределения $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ Cx, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$.

Найти константу C и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Согласно свойству нормировки плотности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

$$\int\limits_1^2 Cxdx = C\int\limits_1^2 xdx = \left.\frac{Cx^2}{2}\right|_1^2 = \frac{C}{2}(4-1) = \frac{3}{2}C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}.$$

Итак,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{2}{3}x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения случайной величины X:

$$x \le 1: F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

$$1 < x \le 2: F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^x \frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^x = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

$$x > 2: F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^2 \frac{2}{3}xdx + \int\limits_2^x 0dx = 1.$$

Тогда

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Пример. Случайная величина X задана функцией

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ A \cdot (x^3 + 1) & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: константу A, значение выражения $M[7 + 10 \cdot D[X] - 5 \cdot X]$ и $P(X > M[X])$.

Решение.

Константу A найдем из ***условия нормировки*** (**свойство 2** плотности распределения $f_X(x)$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Для этого сначала найдем плотность распределения $f_X(x) = F'_X(x)$.

Рассмотрим отдельно каждый из трех случаев $-\infty < x \le -1$, $-1 < x \le 1$ и $1 < x < +\infty$.

1) При $-\infty < x \le -1$: $f_X(x) = F'_X(x) = (0)' = 0.$

2) При $-1 < x \le 1$: $f_X(x) = F'_X(x) = A(x^3 + 1)' = 3Ax^2.$

3) При $1 < x < +\infty$: $f_X(x) = F'_X(x) = (1)' = 0.$

Итак,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ 3Ax^2 & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдем константу A:

$$\int_{-1}^{1} 3Ax^2 dx = 1 \Rightarrow 3A \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = 1 \Rightarrow 3A \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow A \cdot (1 + 1) = 1 \Rightarrow 2 \cdot A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Окончательно имеем

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \frac{3}{2}x^2 & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x\frac{3}{2}x^2dx=\frac{3}{2}\cdot\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{3x^4}{8}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=0.$$

Для нахождения дисперсии, сначала вычислим $M[X^2]$:

$$M\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\frac{3}{2}x^2dx=\frac{3}{2}\cdot\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{3x^5}{10}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

И тогда $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=0{,}6-(0)^2=0{,}6$.

Значение выражения $M\left[7+10\cdot D[X]-5\cdot X\right]$ найдем, используя ***свойство 4 математического ожидания***:

$$M\left[7+10\cdot D[X]-5\cdot X\right]=M\left[7+10\cdot 0{,}6-5\cdot X\right]=M\left[13-5\cdot X\right]=13-5\cdot M[X]=13.$$

Используя ***свойство* 4** функции распределения

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \textbf{\textit{при}}\ x\le -1,\\ \frac{1}{2}\cdot(x^3+1) & \textbf{\textit{при}}\ -1<x\le 1,\\ 1 & \textbf{\textit{при}}\ x>1\end{cases}$$

найдем $P\left(X>M[X]\right)$:

$$P(X>M[X])=P(X>0)=P(0<X<+\infty)=F_X(+\infty)-F(0)=1-\frac{0^3+1}{2}=0{,}5.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения:

$$F_X(x)=\begin{cases}0\ \textbf{\textit{при}}\ x\le 0,\\ x+c\cdot x^2\ \textbf{\textit{при}}\ 0<x\le 2,\\ 1\ \textbf{\textit{при}}\ x>2.\end{cases}$$

Требуется найти константу c.

Решение. Поскольку функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна в каждой точке, то при $x=2$ должно выполняться равенство

$$F_X(2)=1.$$

Следовательно, для нахождения константы с получаем уравнение

$$2+4\cdot c=1,$$

откуда $c = -0{,}25$.

Итак, $F_X(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0, \\ x - 0{,}25 \cdot x^2 \ \textit{при} \ 0 < x \le 2, \\ 1 \ \textit{при} \ x > 2. \end{cases}$

Пример. Автобусы некоторого маршрута ходят с интервалом в 6 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно в указанном интервале, найти среднее время ожидания автобуса. Вычислить вероятность того, что время ожидания автобуса а) превысит 2 минуты; б) будет меньше значения дисперсии времени ожидания автобуса.

Решение. По условию задачи $X \sim R[0, 6]$. Функции $f_X(x)$ и $F_X(x)$, характеризующие распределение случайной величины X, имеют вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \ \textit{при} \ 0 \le x \le 6, \\ 0 \ \textit{иначе}, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0, \\ \frac{x}{6} \ \textit{при} \ 0 < x \le 6, \\ 1 \ \textit{при} \ x > 6. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X: $M[X] = \frac{0+6}{2} = 3(\textit{мин}).$

Вычислим вероятность $P(X > 2)$, используя ***свойство* 4** функции распределения $F_X(x)$:

а) $P(X > 2) = P(2 < X < +\infty) = F_X(+\infty) - F_X(2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67.$

Аналогично найдем $P(X < D[X])$, предварительно вычислив дисперсию $D[X] = \frac{(6-0)^2}{12} = 3(\textit{мин}^2).$

б) $P(X < D[X]) = P(-\infty < X < 3) = F_X(3) - F_X(-\infty) = \frac{3}{6} - 0 = 0{,}5.$

При вычислении вероятностей также использовали ***свойство 2*** функции распределения $F_X(x)$.

Пример. Пусть радиус круга – непрерывная случайная величина $\boldsymbol{X}$ – задан с помощью функции следующего вида:

$$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 \ \ \boldsymbol{при} \ \ \boldsymbol{x} \le 1, \\ 0{,}2 \cdot (\boldsymbol{x} - 1) \ \ \boldsymbol{при} \ \ 1 < \boldsymbol{x} \le 6, \\ 1 \ \ \boldsymbol{при} \ \ \boldsymbol{x} > 6. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию длины окружности радиуса $\boldsymbol{X}$.

Решение.

По виду функции распределения $\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x})$ можно сделать вывод, что $\boldsymbol{X}$ – радиус круга, имеет равномерное распределение на [1, 6]. Поэтому числовые характеристики соответственно равны: $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \frac{1+6}{2} = 3{,}5$ и $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \frac{(6-1)^2}{12} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$.

Пусть $\boldsymbol{Y}$ – длина окружности радиуса $\boldsymbol{X}$. Очевидно, что случайная величина $\boldsymbol{Y}$ связана со случайной величиной $\boldsymbol{X}$ соотношением $\boldsymbol{Y} = 2\pi \cdot \boldsymbol{X}$. Для нахождения математического ожидания случайной величины $\boldsymbol{Y}$ воспользуемся ***свойством* 3 *математического ожидания***:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{M}[2\pi \cdot \boldsymbol{X}] = 2\pi \cdot \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = 2\pi \cdot 3{,}5 = 7\pi.$$

По ***свойству* 3 *дисперсии***:

$$\boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{D}[2\pi \cdot \boldsymbol{X}] = 4\pi^2 \cdot \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = 4\pi^2 \cdot 2{,}08 = 8{,}32\pi^2.$$

Пример. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, имеет экспоненциальное распределение с параметром 0,25. Вычислить среднее значение и дисперсию времени, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика. Найти долю телезрителей, способных вспомнить содержание рекламного ролика, спустя: а) 4 дня; б) 8 дней.

Решение. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, имеет экспоненциальное распределение с параметром распределения $\lambda = 0{,}25$. Следовательно, функция распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-0{,}25 \cdot x}, & x > 0 \end{cases},$$

плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25 \cdot x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики экспоненциального закона равны:

$$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}25} = 4, \quad \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0{,}25^2} = 16.$$

Для нахождения доли телезрителей, способных вспомнить содержание коммерческого рекламного ролика спустя 4 дня, вычислим вероятность, используя ***свойство* 4** функции распределения $\boldsymbol{F_X(x)}$.

а) $P(X \ge 4) = P(4 \le X < +\infty) = F_X(+\infty) - F_X(4) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}25 \cdot 4}\right) = e^{-1} \approx 0{,}36788.$

Найденная вероятность показывает, что примерно 36 телезрителей из 100 способны вспомнить содержание коммерческого рекламного ролика спустя 4 дня.

б) $P(X \ge 8) = P(8 \le X < +\infty) = F_X(+\infty) - F_X(8) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}25 \cdot 8}\right) = e^{-2} \approx 0{,}13534.$

Спустя 8 дней только 13 телезрителей из 100 способны вспомнить содержание коммерческого рекламного ролика.

Пример. Заказы на обслуживание поступают в фирму в случайные моменты времени. Между двумя последовательными заказами проходит в среднем 2 минуты. Время ожидания очередного заказа имеет экспоненциальное распределение. Определить вероятность того, что время ожидания очередного заказа будет: а) не менее 4 минут, б) не больше величины среднеквадратического ожидания. Написать выражение для плотности распределения, функции распределения.

Решение.

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – время ожидания очередного заказа имеет экспоненциальное распределение. По условию задачи, если среднее время ожидания очередного заказа составляет 2 минуты, т.е. $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}] = \frac{1}{\lambda} = 2$, то параметр распределения $\lambda = 0{,}5$. Следовательно, функция распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,5\cdot x} & при \;\; x > 0, \\ 0 \;\; иначе. \end{cases}$$

А плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ задается функцией вида

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot e^{-0,5\cdot x} & при \;\; x \geq 0, \\ 0 \;\; иначе. \end{cases}$$

Найдем вероятность

а) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \geq 4) = \boldsymbol{P}(4 \leq \boldsymbol{X} < +\infty) = \boldsymbol{F}_X(+\infty) - \boldsymbol{F}_X(4) = 1 - (1 - \boldsymbol{e}^{-2}) \approx 0{,}13534$.

Найденная вероятность показывает, что примерно в 13,5% случаев время ожидания очередного заказа – не менее 4 минут.

Найдем $\sigma_X = \sqrt{D[X]}$. Известно, что $D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = 4$. Следовательно, $\sigma_X = 2$. Тогда

б) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \leq \sigma_X) = \boldsymbol{P}(-\infty < \boldsymbol{X} \leq 2) = \boldsymbol{F}_X(2) - \boldsymbol{F}_X(-\infty) = 1 - \boldsymbol{e}^{-1} \approx 1 - 0{,}36788 \approx 0{,}63212$..

Найденная вероятность показывает, что примерно в 63,2% случаев время ожидания очередного заказа – не больше 2 минут.

Пример. Продолжительность лечения болезни, вызванной вирусом, на любой стадии заболевания имеет одно и то же показательное распределение. Средняя продолжительность лечения – 48 часов. По истечении первых суток с начала лечения болезни выяснилось, что больному выздороветь не удалось. Найти вероятность, что больной проболеет еще не более суток.

Решение.

Случайная величина X – продолжительность лечения имеет показательное распределение. По условию задачи, если средняя продолжительность лечения равна 48 часов, т.е. $M[X] = \frac{1}{\lambda} = 48$, то параметр распределения $\lambda = \frac{1}{48}$. Следовательно, функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{48}}, & x > 0. \end{cases}$$

Интересующая нас вероятность $P(X \le 48 | X \ge 24)$ равна

$$P(X \le 48 \mid X \ge 24) = \frac{P(24 \le X \le 48)}{P(X \ge 24)} = \frac{F_X(48) - F_X(24)}{F_X(+\infty) - F_X(24)} =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-\frac{48}{48}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{24}{48}}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\frac{24}{48}}\right)} = \frac{e^{-0,5} - e^{-1}}{e^{-0,5}} = \frac{0,60653 - 0,36788}{0,60653} = 0,39347.$$

Пример. Дальность полета снаряда имеет нормальный закон распределения со средней дальностью 1500 м и среднеквадратическим отклонением 100 м. Написать выражение плотности распределения дальности полета снаряда. Какой процент снарядов долетает до цели, если цель расположена на расстоянии 1650 м от орудия?

Решение.

Пусть случайная величина X – дальность полета снаряда. По условию $M[X] = 1500$, $\sigma_X = 100$. Параметры нормального распределения совпадают с его числовыми характеристиками: $M[X] = a$, $D[X] = \sigma^2$. Следовательно, $a = 1500$, $\sigma^2 = 10000$. Итак, $X \sim N(1500; 10000)$ и плотность распределения имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1500)^2}{20000}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Для нахождения процента снарядов, долетающих до цели, достаточно вычислить вероятность $P(X \geq 1650)$ по формуле:

$$P(X \geq 1650) = P(1650 \leq X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 1500}{100}\right) - \Phi\left(\frac{1650-1500}{100}\right) =$$
$$= \Phi(+\infty) - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668.$$

Итак, примерно 7% снарядов долетает до цели.

Пример. Продолжительность поездки в городском транспорте – случайная величина ***X***, имеющая нормальное распределение со средним временем 20 минут. Известно, что 95% поездок длятся менее 30 минут. Найти процент тех поездок, которые длятся более 15 минут.

Решение.

Итак, $X \sim N(20; \sigma^2)$. По условию задачи $P(X < 30) = 0,95$. Вероятность $P(X < 30)$ вычислим по формуле:

$$P(-\infty < X < 30) = \Phi\left(\frac{30-20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 20}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0 = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

Таким образом, получили уравнение для нахождения σ: $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,95.$

По табл. 2 Приложения: $\Phi(1,64) = 0,95.$ Следовательно, $\frac{10}{\sigma} = 1,64 \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 6,1.$

Для нахождения процента тех поездок, которые длятся более 15 минут, достаточно вычислить вероятность $P(X > 15)$ по формуле:

$$P(X > 15) = P(15 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 20}{6,1}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{6,1}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(-0,82) =$$
$$= 1 - (1 - \Phi(0,82)) = \Phi(0,82) = 0,7939.$$

Полученный результат означает, что примерно 79% поездок длятся более 15 минут.

Пример. Величина зарплаты (у.е.) работника на некотором предприятии задана функцией

$$f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{32}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти вероятность того, что величина зарплаты случайного выбранного работника этого предприятия а) превысит 28 у.е.; б) будет отличаться от средней зарплаты не более чем на 4 у.е.

Решение.

По виду функции плотности $\boldsymbol{f_X(x)}$ можно сделать вывод, что $\boldsymbol{X}$ – величина зарплаты случайного выбранного работника, имеет нормальное распределение с параметрами $a = 20,\ \ \sigma^2 = 16$: $X \sim N(20;16)$. Числовые характеристики у нормально распределенной случайной величины совпадают с параметрами распределения, следовательно, $M[X] = 20\,(у.е.)$ и $D[X] = 16\,(у.е.^2)$

а) Для нахождения вероятности $\boldsymbol{P(X > 28)}$ воспользуемся формулой:

$$P(X > 28) = P(28 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{28-20}{4}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

б) Средняя зарплата работника – это $M[X] = 20\,(у.е.)$. Нас интересует вероятность

$$P(16 \le X \le 24) = \Phi\left(\frac{24-20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{16-20}{4}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$$
$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

6.1. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что масса коробок нормально распределена, и 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 грамм. Написать выражение для плотности распределения этой случайной величины и нарисовать график плотности распределения.

6.2. Размер мужских сорочек задан функцией следующего вида:

$$f_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-39)^2}{18}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?

6.3. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – нормально распределенная случайная величина с дисперсией 0,04 кг^2. Агрономы знают, что 65% фруктов весят меньше, чем 0,5 кг. Найти ожидаемый средний вес случайно выбранного грейпфрута. Найти процент фруктов, вес которых превышает 700 граммов.

6.4. Разливочный автомат вливает в каждую бутылку 500 см^3 кефира. Погрешности в работе автомата таковы, что среднее квадратическое отклонение объема кефира в бутылке равно 2 см^3. Известно, что объем кефира в бутылке имеет нормальное распределение. Найти вероятность того, что объем кефира в случайно выбранной бутылке будет между 497 см^3 и 503 см^3. Написать выражение для плотности распределения этой случайной величины и нарисовать график плотности распределения.

6.5. Каждый день цена акции поднимается или опускается на несколько пунктов. Случайная величина X – изменение курса акций за определенный день имеет равномерное распределение на [–2;4]. Вычислить среднее значение и дисперсию изменения курса акций за определенный день. Найти вероятность того, что изменение курса акций за определенный день превысит 2 пункта.

6.6. Сторона квадрата измерена приближенно и имеет равномерное распределение на [0;6]. Вычислить среднее значение и дисперсию периметра этого квадрата.

6.7. Длина прямоугольника равна 10 см, а ширина прямоугольника задана с помощью функции следующего вида:

$$\boldsymbol{f}_X(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0,25 & \boldsymbol{\textit{при}} \ \ 0 \le \boldsymbol{x} \le 4, \\ 0 & \boldsymbol{\textit{иначе}}. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию периметра прямоугольника.

6.8. Время безотказной работы радиоаппаратуры является случайной величиной X, распределенной по экспоненциальному закону с параметром 0,5. Вычислить среднее значение и дисперсию времени безотказной работы радиоаппаратуры. Найти вероятность того, что радиоаппаратура не выйдет из строя в течение времени $t = M\left[X\right]$.

6.9. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной $\boldsymbol{X}$, распределенной по экспоненциальному закону со средним временем ожидания, равным 2 мин. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{\sigma_X \le \boldsymbol{X} \le 2\sigma_X\}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{X} \ge \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]\}$.

6.10. Срок службы батареек для слуховых аппаратов задан с помощью функции вида

$$\boldsymbol{F}_X(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \le 0, \\ 1 - \boldsymbol{e}^{-0,125\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{x} > 0. \end{cases}$$

Определить вероятность того, что случайно выбранная батарейка проработает больше 20 месяцев. Найти средний срок службы батареек для слуховых аппаратов.

6.11. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – цена товара (у.е.) задана с помощью функции следующего вида:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ Cx^2 & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: нормирующий множитель *C*, $F_X(x)$, вероятность того, что цена товара не превысит 1,5 у.е. Пусть Y − покупательский спрос на товар в момент времени t. Найти среднее ожидаемое значение покупательского спроса на товар в момент времени $t = 2$, если $Y = 25 \cdot t - 28 \cdot X$.

6.12. Радиус круга X (см) задан функцией вида

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 5 \cdot e^{-5 \cdot x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти а) вероятность того, что радиус круга не превысит величины среднеквадратичного отклонения σ_X; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y – длины окружности.

6.13. В некоторых капиталистических странах действует закон о налогообложении, распространяемый на тех частных предпринимателей, годовой доход которых превосходит некоторый установленный законом уровень. Считая, что годовой доход (тыс. у.е.) наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, является случайной величиной X с функцией плотности распределения

$$f_X(x) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-0{,}125 \cdot (x-12)^2}.$$

Найти *C*, вероятности событий: $A = \{X > 13\}$ и $B = \{|X - M[X]| < 2 \cdot \sigma_X\}$.

6.14. Каждый день курс некоторой валюты поднимается или опускается на несколько пунктов. Случайная величина X − изменение курса некоторой валюты за определенный день задана

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -0{,}5 \\ 10 \cdot x + 5 & , \quad -0{,}5 \le x \le -0{,}4 \\ 1 & , \quad x > -0{,}4 \end{cases}$$

Найти $P(X \ge M[X])$ и значение выражения $M[100 \cdot X + 50]$.

6.15. Случайная величина X задана функцией плотности распределения:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+b & при\ 1\le x\le 2,\\ 0 & иначе.\end{cases}$$

Найти константу b, $F_X(x)$, $M[X]$, медиану и вероятность $P(X<1{,}5)$.

6.16. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le -2,\\ a\cdot x+b, & при\ -2<x\le 2,\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти параметры a и b, моду, медиану, $M[X]$, $D[X]$ и вероятность события $P(X\le 1)$.

6.17. Пусть X – доход работающего человека – нормально распределенная случайная величина со средним значением 100 ден. ед. Известно, что 10% людей имеет доход менее 80 ден. ед. Найти процент тех людей, чей доход отклоняется от среднего дохода не более чем на 45 ден. ед.

6.18. Время ожидания X (в минутах) пассажиром автобуса описывается законом распределения, задаваемым функцией

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ C\cdot\left(15\cdot x^2-\dfrac{x^3}{3}\right), & 0<x\le 30,\\ 1, & x>30.\end{cases}$$

Найти: C, $M[X]$, $D[X]$, вероятность того, что пассажир будет ждать автобус не более 5 минут.

6.19. Каждый день цена акции поднимается или опускается на несколько пунктов. Случайная величина X − изменение курса акций за определенный день задана

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<-1\\ Cx^4, & -1\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент C; б) $M[X]$; в) $D[X]$; г) функцию распределения случайной величины X; д) вероятность того, что изменение курса акций за определенный день будет меньше $M[X]$; е) медиану распределения; ж) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y – доходности инвестиционного портфеля, если $\boldsymbol{Y} = 1 + 7 \cdot \boldsymbol{X}$.

6.20. Считая, что годовой доход наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, является случайной величиной $\boldsymbol{X}$ (у.е.), задаваемой функцией

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^5}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases},$$

найти: C, $M[X]$, $D[X]$, вероятность того, что доход наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, превысит $M[X]$.

6.21. Автобусы идут с интервалом в 5 минут. Считая, что случайная величина $\boldsymbol{X}$ – время ожидания автобуса на остановке – распределена в указанном интервале, найти среднее время ожидания, вычислить вероятность того, что время ожидания превысит 3 минуты.

6.22. Время проверки контрольной работы имеет равномерное распределение со средним временем 10 минут и дисперсией 12 минут^2. Найти вероятность того, что время проверки контрольной работы не превысит 15 минут.

6.23. Известно, что 15% рабочих получают зарплату меньше 12 у.е. и 40% больше 16,2 у.е. Полагая, что величина зарплаты нормально распределенная случайная величина, найти среднее значение и стандартное отклонение этой случайной величины.

6.24. Процент протеина в пакете с сухим кормом для собак – нормально распределенная случайная величина со средним содержанием протеина 11,2% и квадратическим отклонением 0,6%. Найти вероятность того, что пакет с сухим кормом для собак удовлетворяет стандарту, если для этого необходимо, чтобы процент протеина в нем отклонялся от среднего значения не более чем на 1%.

6.25. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением 560 штук. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12439 штук. Найти среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

6.26. Предположим, что в течение года цены на акции некоторой компании подчинялись нормальному закону распределения со средним значением 48 у.е. и дисперсией 36 у.е.^{2}. Чему равна вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию была: а) выше 40 у.е. за акцию; б) ниже 60 у.е. за акцию; в) отклонялась от средней цены не более чем на 3 у.е. Написать выражение для плотности распределения этой случайной величины и нарисовать ее график.

ОТВЕТЫ:

6.1. σ_X =0,04; 99,87%. **6.2.** 43,12%. **6.3.** $M[X]$ =0,424 кг; 8,38%. **6.4.** 0,8664. **6.5.** $M[X]$ =1; $D[X]$ =3; 1/3=0,3333. **6.6.** 12 и 48. **6.7.** 24 и 16/3=5,3333. **6.8.** $M[X]$ =2; $D[X]$ =4; 0,36788. **6.9.** 0,23254; 0,36788. **6.10.** 0,08208; $M[X]$ =8. **6.11.** C = 3/7; $(x^3-1)/7$; 19/5600,3393; $M[Y]$ =5. **6.12.** а) 0,63212; б) $0,4\cdot\pi$ и $0,16\cdot\pi^2$. **6.13.** $\sqrt{2}/4$; $P(A)$=0,3085; $P(B)$=0,9544. **6.14.** 0,5 и 5. **6.15.** 1/2; $(x^2+x-2)/2$; $M[X]$=7/4=1,75; $x_{\text{med}}=(-1+\sqrt{13})/2$=1,3028; 7/8=0,875. **6.16.** a=1/4; b=1/2; моды нет; x_{med} =0; $M[X]$ =0; $D[X]$ =4/3=1,3333; 3/4=0,75. **6.17.** σ_X =15,625; 99,6%. **6.18.** C = 1/4500; $M[X]$ = 15; $D[X]$ = 45; 2/27=0,0741. **6.19.** а) C =5/2; б) $M[X]$ =0; в) $D[X]$ =5/7=0,7143; г) $(x^5+1)/2$; д) 0,5; е) 0; ж) $M[Y]$ =1, $D[Y]$ =35. **6.20.** C = 4; $M[X]$ =4/3=1,3333; $D[X]$ =2/9=0,2222; 81/256= 0,3164. **6.21.** $M[X]$ =2,5; 0,4. **6.22.** 11/12=0,9167. **6.23.** $M[X]$=15,38 и σ_X =3,28. **6.24.** 0,9050. **6.25.** 13156. **6.26.** а) 0,9082; б) 0,9772; в) 0,3830.

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс. Серия Бакалавр. М.: Юрайт, 2018. 479 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Базовый курс. Серия Бакалавр. М.: Юрайт, 2018. 405 с.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник 12-е изд., стер. М.: Юстиция, 2018. 658 с.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и примеры по теории вероятностей: учеб. пособие для втузов М.: издат. центр «Академия», 2010. 439 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Функция плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Свойства функции $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

2. при $x > 4$, то $\varphi(x) \approx 0$.

Таблица 2

Функция распределения стандартного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

2. при $x > 4$, то $\Phi(x) \approx 1$.

Таблица 3

Значения функции $e^{-\lambda}$

λ	$e^{-\lambda}$
0	1,00000
0,1	0,90484
0,2	0,81873
0,3	0,74082
0,4	0,67032
0,5	0,60653
0,6	0,54881
0,7	0,49659
0,8	0,44933
0,9	0,40657
1	0,36788
1,1	0,33287
1,2	0,30119
1,3	0,27253
1,4	0,24660
1,5	0,22313
1,6	0,20190
1,7	0,18268
1,8	0,16530
1,9	0,14957
2	0,13534
2,5	0,08208
3	0,04979
3,5	0,03020
4	0,01832
4,5	0,01111
5	0,00674
5,5	0,00409
6	0,00248
6,5	0,00150
7	0,00091
7,5	0,00055
8	0,00034
9	0,00012
10	0,00005
11	0,00002
12	0,00001

Учебное издание

Балюкина Людмила Анатольевна
Жекина Наталья Валерьевна

Теория вероятностей и элементы математической статистики. Часть 1

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Шумилова*
Корректор *В. Е. Пирожкова*
Компьютерная верстка и дизайн: *Л. А. Балюкина, Н. В. Жекина*

Объем данных 2,45 Мб
Подписано к использованию 27.01.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15