МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Механика и математическое моделирование»

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2
Л863

Лутманов С. В., Остапенко Е. Н.

Л863 Теоретическая и прикладная механика. Кинематика: учеб. пособие / С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 1 Мб; 114 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teoreticheskaya-i-prikladnaya-mekhanika.pdf. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3312-8

В пособии изложен раздел «Кинематика», включающий кинематику точки, общие основания кинематики системы точек, кинематику абсолютно твердого тела и кинематику сложного движения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Механика и математическое моделирование», а также будет полезно для студентов других физико-математических направлений и специальностей, изучающих курсы «Теоретической и прикладной механики», «Теоретической механики».

Отзывы и замечания можно направлять по адресу mpu@psu.ru.

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент ***В. В. Аюпов***);

доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент ***М. А. Осипенко***

ISBN 978-5-7944-3312-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Кинематикой называют раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение, рассматриваемое без учета сил, приложенных к движущимся объектам. В отличие от геометрии в кинематике изучаются изменения, происходящие в положении тел в пространстве с течением времени. Знакомство с кинематикой начнем с уточнения понятий времени и пространства, принятых в механике Ньютона.

Время абсолютно, непрерывно, меняется от прошлого к будущему, однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материальных тел. В системе СИ единицей времени служит секунда [*сек*]. Обозначение: t, T, t .

Пространство абсолютно, однородно, трехмерно и евклидово, его свойства не зависят от времени. В системе СИ единицей расстояния служит метр [*м*]. Степени линейных размеров:

– вторая степень $\left[м^2 \right]$– служит для измерения площадей,

– третья степень $\left[м^3 \right]$ – служит для измерения объемов,

– нулевая $\left[м^0 \right] = \left[рад \right]$ – служит для измерения углов.

Движение всегда относительно: одно тело движется относительно другого. Для удобства одно из тел принимается за неподвижное. С ним связывают систему отсчета. Движение остальных тел относительно этого тела называют абсолютным. В качестве неподвижного тела обычно выбирают такое тело, которое содержит не менее четырех точек, не лежащих на одной плоскости.

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Задать движение точки означает задать способ определения положения точки относительно системы отсчета в любой момент времени.

1.1. Естественный способ задания движения

Важной характеристикой движения точки является ее траектория.

Определение 1. ***Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее траекторией.***

Пусть задана пространственная кривая (траектория), по которой движется точка M. Для определения положения точки M выберем какую-либо точку O на кривой, примем ее за начало и зададим положительное направление отсчета вдоль кривой (**рис. 1**).

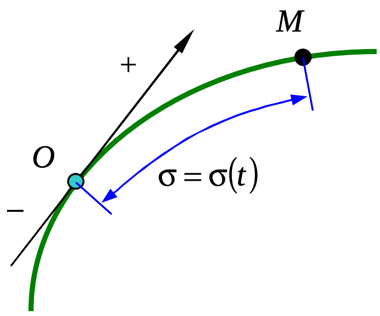


Рис. 1

Каждому положению точки M поставим в соответствие дуговую координату σ. В случае когда известна функция $\sigma = \sigma(t)$, $t \in [t_0, T]$, движение точки M можно считать заданным на промежутке времени $[t_0, T]$. Такой способ задания движения будем называть ***естественным.***

Заметим, что следует отличать понятие пути, пройденного точкой, от ее дуговой координаты. Первое понятие представляет собой положительную, монотонно возрастающую функцию. Дуговая же координата может принимать любой знак, а также возрастать и убывать в течение времени.

1.2. Векторный способ задания движения точки

Пусть задана система отсчета с началом в точке O и репером $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (см. **рис. 2**).

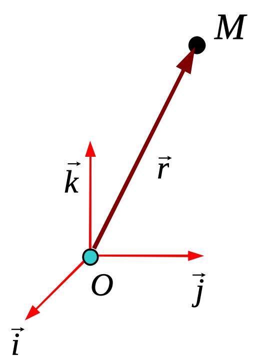


Рис. 2

Определение 2. ***Радиус-вектором точки*** M ***будем называть вектор*** $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Радиус-вектор точки не является свободным вектором. Его начало всегда совпадает с точкой O. Он однозначно определяет положение точки в пространстве. В дальнейшем длину вектора будем обозначать одним из следующих символов: r, $\|\vec{r}\|$, $|\vec{r}|$.

Для описания движения точки на отрезке времени $[t_0, T]$ требуется задать вектор-функцию

$$\vec{r} : [t_0, T] \to R^3, \tag{1}$$

которая каждому моменту времени $t \in [t_0, T]$ ставит в соответствие радиус-вектор точки $\vec{r}(t)$ (**рис. 3**).

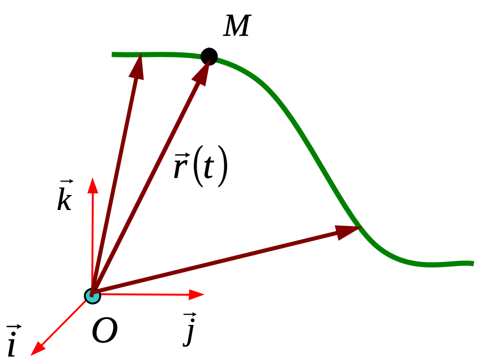


Рис. 3

В механике зависимость (1) является достаточно гладкой, так как все физические тела обладают свойством инертности, которое исключает негладкие перемещения материальных точек. Обычно она принимается дважды непрерывно дифференцируемой.

При движении точки M ее радиус-вектор изменяется, причем его начало всегда находится в неподвижной точке O (см. **рис. 3**), а конец скользит по траектории.

Определение 3. ***Всякая линия, описываемая концом переменного вектора, выраженного функцией времени и выходящего из одной точки, называется годографом этого вектора.***

Таким образом, траектория точки — это годограф ее радиус-вектора.

Пример 1. Движение точки задано радиус-вектором $\vec{r} = \vec{e} + t^2 \vec{b}$, где $\vec{e}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы. Определить траекторию точки.

Решение. Для построения траектории выберем центр O. Найдем величины радиус-вектора при разных значениях $t \geq 0$:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \vec{e},$$
$$\vec{r}_1 = \vec{r}(1) = \vec{e} + \vec{b},$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}(2) = \vec{e} + 4\vec{b},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из выбранного центра O отложим векторы $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2, \dots$ (**рис. 4**).

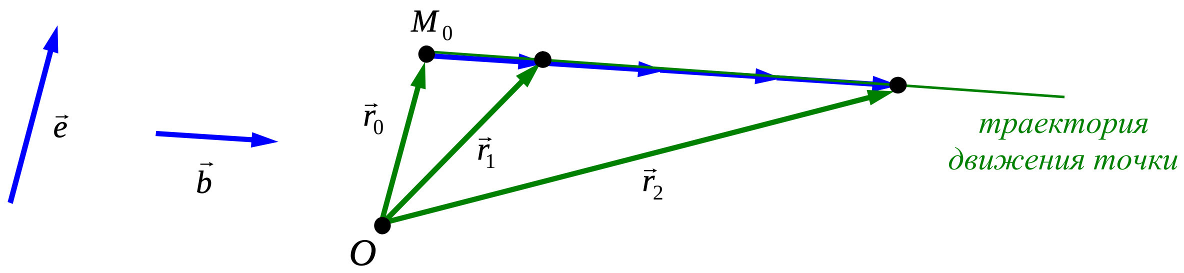


Рис. 4

Траекторией движения будет полупрямая, проходящая через начальную точку $M_0(\vec{e})$ параллельно вектору $\vec{b}$. u

1.3. Координатный способ задания движения точки

С репером $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ свяжем систему координат $Oxyz$ (**рис. 5**). Ось Ox направим вдоль орта $\vec{i}$, ось Oy направим вдоль орта $\vec{j}$, а ось Oz направим вдоль орта $\vec{k}$. Построенные оси называют координатными осями, а полученную систему координат – декартовой. В случае когда координатные оси взаимно ортогональны, система координат называется прямоугольной. В дальнейшем в настоящем пособии декартовы координаты будем всегда считать прямоугольными.

Положение какой-либо точки M определяется ее тремя проекциями: P, Q, R (**рис. 6**).

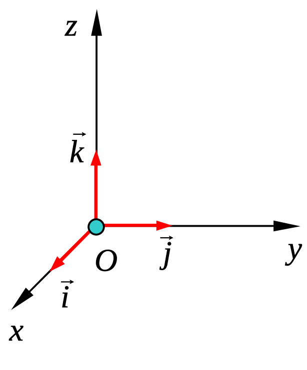


Рис. 5

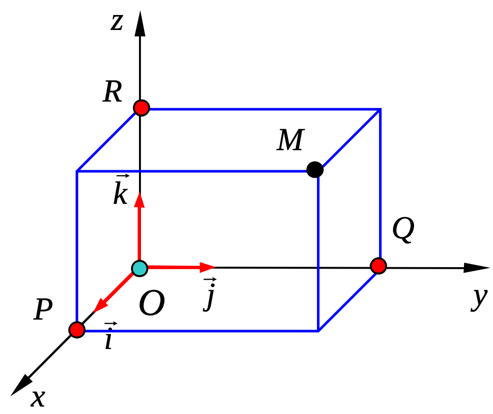


Рис. 6

Пусть

$$OP = x, \quad OQ = y, \quad OR = z.$$

Тогда (x, y, z) – декартовы координаты точки M в системе $Oxyz$. При этом

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1}$$

Пусть точка M движется относительно осей $Oxyz$, тогда ее проекции P, Q, R перемещаются по осям и координаты x, y, z точки меняются. Для определения движения точки на отрезке времени $[t_0, T]$ надо задать ее координаты как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Определение 4. ***Уравнения (2) называются кинематическими уравнениями движения (законами движения) точки в системе координат*** $Oxyz$**.**

Закон движения (2), как правило, реализуется в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций. Кинематические уравнения движения точки можно рассматривать как уравнение ее траектории в параметрической форме, а время t – как независимый параметр. В случае когда требуется получить уравнение траектории в явном виде, параметр t исключают.

Пример 2. В механизме, изображенном на **рис. 7**, $OC = BC = AC = \frac{l}{2}$, точка M является серединой AC, а угол $\angle COA$ меняется по закону $\varphi = \pi t$. Определить закон движения и уравнение траектории точки M.

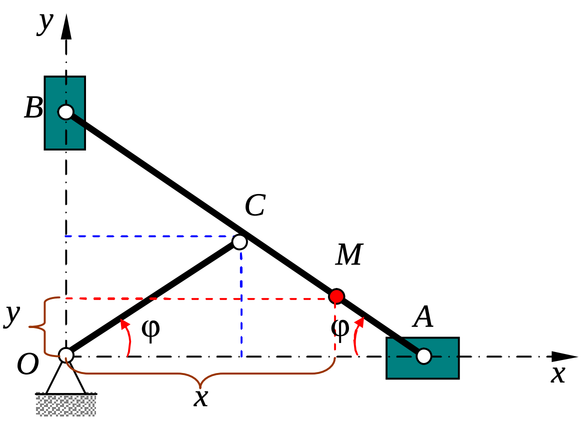


Рис. 7

Решение. Вычисляем

$$x = OC\cos\varphi + CM\cos\varphi = \frac{l}{2}\cos\pi t + \frac{l}{4}\cos\pi t = \frac{3l}{4}\cos\pi t,$$

$$y = AM\sin\varphi = \frac{l}{4}\sin\pi t.$$

Таким образом, $\begin{cases} x = \dfrac{3l}{4}\cos\pi t, \\ y = \dfrac{l}{4}\sin\pi t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\cos\pi t = \dfrac{4}{3}x, \\ l\sin\pi t = 4y. \end{cases}$

Запишем уравнение траектории точки M в явном виде:

$$\left(\frac{4x}{3}\right)^2 + (4y)^2 = (l\cos\pi t)^2 + (l\sin\pi t)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4x}{3}\right)^2 + (4y)^2 = l^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3l}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = l^2.$$

Траекторией точки M является эллипс. Механизм, изображенный на **рис. 7**, называется эллипсографом. u

1.4. Криволинейные координаты

Положение точки в пространстве можно определять не только ее декартовыми координатами x, y, z, а любой тройкой чисел q_1, q_2, q_3, взаимно-однозначно определяющих декартовые координаты точки. Для этого должны быть заданы соотношения

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \tag{1}$$

Функции в правых частях формул (1) предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, а условие взаимной однозначности математически описывается так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Из равенств (2.1) и (1) можно определить радиус-вектор точки

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k}$$

как функцию переменных q_1, q_2, q_3.

Определение 5. ***Величины*** q_1, q_2, q_3 ***называются криволинейными координатами точки.***

Для задания закона движения точки в криволинейных координатах на отрезке времени $[t_0, T]$ требуется задать ее криволинейные координаты в функциях времени

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t), \quad t \in [t_0, T],$$

которые также принимаются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Из соотношений (1) в силу условия (2) можно получить зависимости

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z).$$

Определение 6. ***Поверхность, определяемая уравнением*** $q_i = q_i(x, y, z) = c_i\,(= const)$, ***называется координатной поверхностью, отвечающей*** i***-й,*** $i = 1, 2, 3$, ***криволинейной координате.***

Пересечение двух координатных поверхностей образует координатную линию. Вдоль этой линии меняется только одна координата. Например, уравнения

$$\begin{cases} q_1(x, y, z) = c_1, \\ q_3 = q_3(x, y, z) = c_3, \end{cases}$$

определяют координатную линию, отвечающую второй координате q_2. На пересечении координатных линий находится точка M.

Касательные к координатным линиям, проведенные в этой точке в направлении возрастания величин q_i, $i = 1, 2, 3$, образуют оси криволинейных координат (**рис. 8**).

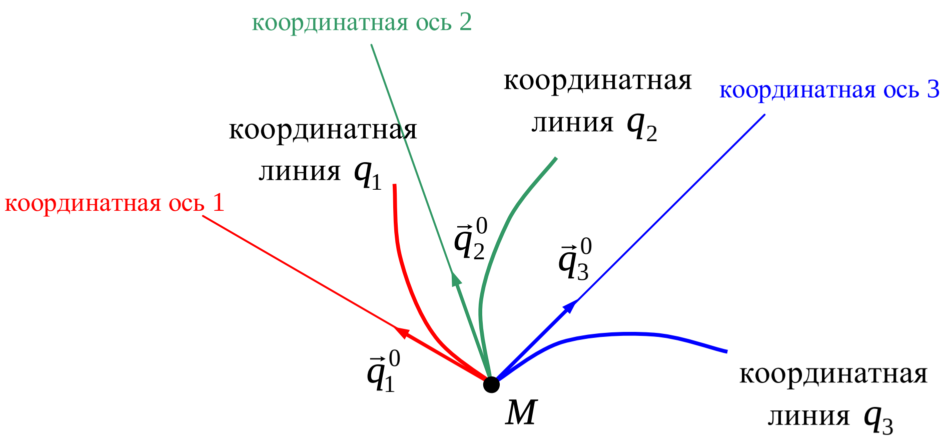


Рис. 8

Направление вдоль i-й координатной оси определяется вектором

$$\bar{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\bar{r} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_i}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\bar{k}, i = 1, 2, 3.$$

Единичный вектор этого направления вычисляется по формуле

$$\bar{q}_i^{\,0} = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}}{\left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right\|} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где величина

$$H_i = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

называется ***коэффициентом Ламе.***

Запишем условия ортогональности направлений координатных осей:

$$0=\bar{q}_i^0\cdot\bar{q}_j^0=\frac{1}{H_iH_j}\left[\frac{\partial x}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_j}\right]=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,3.$$

1.5. Примеры криволинейных координат

Цилиндрические координаты. Цилиндрическими координатами точки служат величины ρ,φ,z (**рис. 9**). Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами формулами

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$$

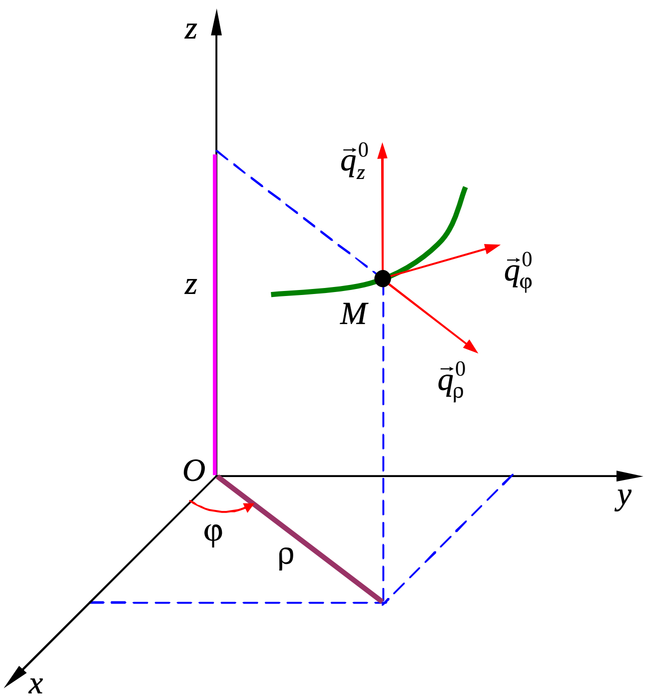


Рис. 9

Проверим, что величины ρ,φ,z являются криволинейными координатами. Действительно,

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi,\quad\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi,\quad\frac{\partial x}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\varphi,\quad\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi,\quad\frac{\partial y}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial\rho}=0,\quad\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial z}{\partial z}=1.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho \neq 0, \text{ если } (x,\ y) \neq 0.$$

Выпишем обратную зависимость

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases} \tag{1}$$

Вычислим коэффициенты Ламе для цилиндрических координат:

$$H_\rho = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 + (0)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 + (0)^2} = \rho,$$

$$H_z = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial z}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1.$$

Проверим попарно ортогональности криволинейных осей:

$$\bar{\rho}^0 \cdot \bar{\varphi}^0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos\varphi\cdot(-\rho\sin\varphi) + \sin\varphi\cdot\rho\cos\varphi + 0\cdot 0 = 0,$$

$$\bar{\rho}^0 \cdot \bar{z}^0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} = \cos\varphi\cdot 0 + \sin\varphi\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0,$$

$$\bar{\varphi}^0 \cdot \bar{z}^0 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} = (-\rho\sin\varphi)\cdot 0 + \rho\cos\varphi\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Ортогональность осей имеет место.

Замечание. В случае когда точка движется в плоскости $z = const$, ее цилиндрические координаты называют ***полярными координатами.***

Сферические координаты. Сферическими координатами точки служат величины $r,\ \varphi,\ \vartheta$ (см. **рис. 10**).

Сферические координаты точки связаны с декартовыми координатами формулами

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z = r\cos\vartheta. \end{cases}$$

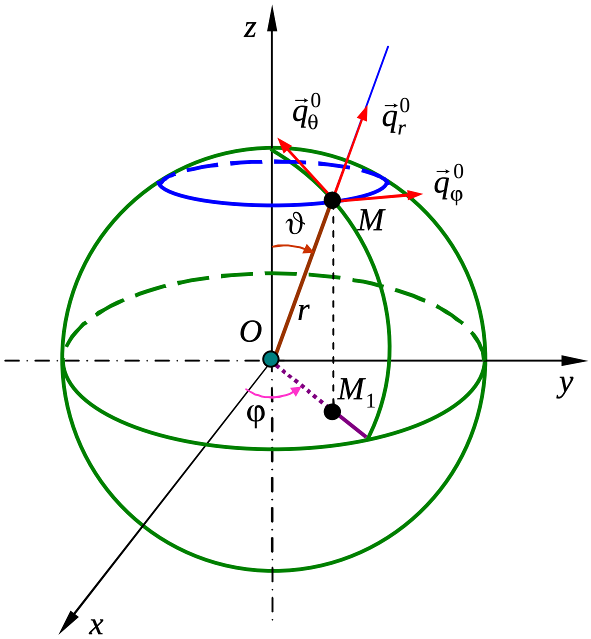


Рис. 10

Проверим, что величины r, φ, ϑ являются криволинейными координатами. Действительно,

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\vartheta}=r\cos\vartheta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta}=r\cos\vartheta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\vartheta,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial\vartheta}=-r\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$=-r^2\left[\sin^3\vartheta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta+\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta+\sin^3\vartheta\sin^2\varphi\right]=$$

$$=-r^2\left[\sin^3\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\vartheta\sin\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right]=$$

$$=-r^2\left[\sin^3\vartheta+\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right]=-r^2\sin\vartheta\left[\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right]=-r^2\sin\vartheta\neq 0,$$

$$\text{если }\ r\neq 0,\ \ \vartheta\neq 0,\pi\Leftrightarrow (x,y)\neq 0.$$

Выпишем обратную зависимость

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ \vartheta = arctg\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Вычислим коэффициенты Ламе для сферических координат:

$$H_r = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial r}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+\cos^2\vartheta}=\sqrt{\sin^2\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\vartheta}=1;$$

$$H_\varphi = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+0^2}=r\sin\vartheta;$$

$$H_\vartheta = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\vartheta}=\sqrt{r^2\cos^2\vartheta+r^2\sin^2\vartheta}=r.$$

Проверим попарно ортогональности криволинейных осей:

$$\bar{r}^0\cdot\bar{\varphi}^0=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=$$

$$=-\sin\vartheta\cos\varphi\cdot r\sin\vartheta\sin\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi\cdot r\sin\vartheta\cos\varphi-0\cdot\cos\vartheta=0,$$

$$\bar{\vartheta}^0\cdot\bar{\varphi}^0=\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=$$

$$=-r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot r\cos\vartheta\cos\varphi+r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot r\cos\vartheta\sin\varphi-0\cdot r\cos\vartheta=0,$$

$$=r\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot\cos^2\varphi+r\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\sin^2\varphi-r\sin\vartheta\cos\vartheta=0.$$

Ортогональность осей имеет место.

Пример 3. Точка движется по винтовой линии

$$.\, x=a\cos(kt),\quad y=a\sin(kt),\quad z=bt,\quad a=const>0,\quad k=const>0. \tag{3}$$

Определить траекторию и закон движения точки в цилиндрических координатах.

Решение. По формулам (1) в силу равенств (3) находим

$$\rho(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{a^2\cos^2(kt)+a^2\sin^2(kt)}=a,$$

$$\varphi(t)=arctg\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)=arctg\left(\frac{a\sin(kt)}{a\cos(kt)}\right)=arctg\left(tg(kt)\right)=kt,$$

$$z(t)=bt.$$

Таким образом,

$$\rho(t)=a,\quad \varphi(t)=kt,\quad z(t)=bt.$$

Траектория движения точки изображена на **рис. 11**. u

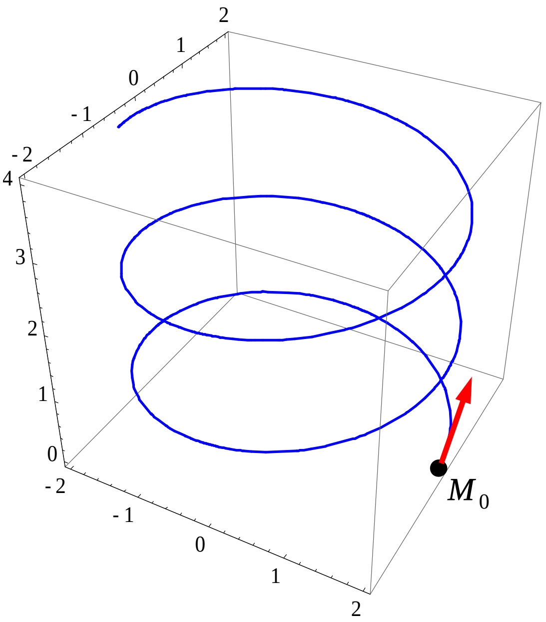


Рис. 11. Траектория движения точки (при $a=2,\ k=4,\ b=1$**)**

Пример 4. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x=R\cos^2\frac{kt}{2},\ y=\frac{R}{2}\sin kt,\ z=R\sin\frac{kt}{2},\qquad R=const>0,\quad k=const>0, \tag{4}$$

определить траекторию и закон движения точки в сферических координатах.

Решение. По формулам (2) в силу равенств (4) находим

$$r(t)=R\sqrt{\cos^4\frac{kt}{2}+\frac{1}{4}\sin^2 kt+\sin^2\frac{kt}{2}}=R\sqrt{\cos^2\frac{kt}{2}\cdot\cos^2\frac{kt}{2}+\sin^2\frac{kt}{2}\cdot\cos^2\frac{kt}{2}+\sin^2\frac{kt}{2}}=$$

$$=R\sqrt{\cos^2\frac{kt}{2}+\sin^2\frac{kt}{2}}=R,$$

$$j\,(t)=arctg\left(\frac{\frac{R}{2}\sin kt}{R\cos^2\frac{kt}{2}}\right)=arctg\left(\frac{\sin kt}{2\cos^2\frac{kt}{2}}\right)=arctg\left(tg\frac{kt}{2}\right)=\frac{kt}{2},$$

$$J\,(t)=arctg\left[\frac{\sqrt{\left(R\cos^2\frac{kt}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{2}\sin kt\right)^2}}{R\sin\frac{kt}{2}}\right]=arctg\left[\frac{\sqrt{R^2\cos^2\frac{kt}{2}\cdot\cos^2\frac{kt}{2}+R^2\sin^2\frac{kt}{2}\cdot\cos^2\frac{kt}{2}}}{R\sin\frac{kt}{2}}\right]=$$

$$=arctg\left[\frac{\sqrt{\cos^2\frac{kt}{2}\left(\cos^2\frac{kt}{2}+\sin^2\frac{kt}{2}\right)}}{\sin\frac{kt}{2}}\right]=arctg\left[ctg\frac{kt}{2}\right]=\frac{p}{2}-\frac{kt}{2}.$$

Таким образом, $r(t)=R,\quad \varphi(t)=\frac{k\,t}{2},\quad \vartheta(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{k\,t}{2}.$

Траектория движения точки изображена на **рис. 12**. u

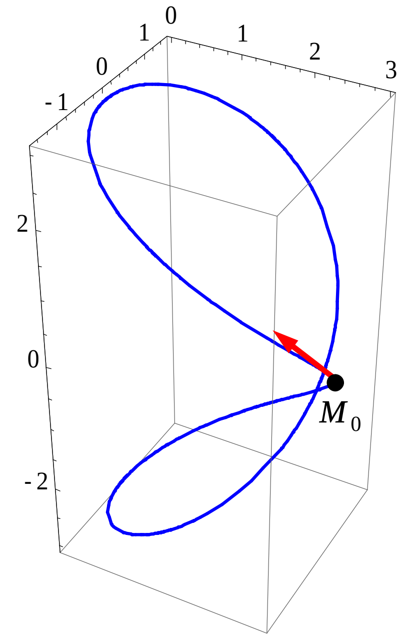


Рис. 12. Траектория движения точки (при $r=3,\ k=\pi$)

2. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Кинематической мерой движения, характеризующей изменение положения точки в данный момент времени, является скорость точки.

Понятие скорости не сразу получило современное определение. Формула $v=\frac{s}{t}$ предполагает деление друг на друга разновеликих (длину на время) величин. Указанная формула для скорости впервые была введена Эйлером. Размерность скорости $[v]=\frac{[L]}{[T]}$. В системе СИ это $\frac{м}{сек}$. Скорость точки является величиной векторной, т.е. она характеризуется и величиной, и направлением. Вектор скорости естественно считать приложенным к самой точке, поэтому он считается несвободным.

2.1. Скорость точки при векторном способе задания движения

Вычислим вектор перемещения точки за время Δt (**рис. 1**).

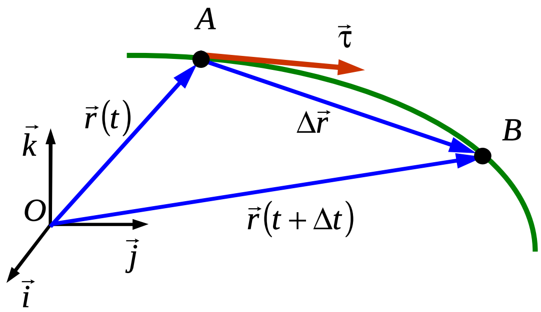


Рис. 1

Имеем

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}\left(t+\Delta t\right) - \bar{r}\left(t\right).$$

Определение 1. ***Скоростью точки в данный момент времени называется вектор***

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.$$

Заметим, что предел в данном определении существует в силу принятых выше предположений относительно гладкости функции $\bar{r} = \bar{r}\left(t\right)$.

С точностью до малых высшего порядка относительно Δt справедливо равенство $\left|\Delta\bar{r}\right| = \Delta s$, где Δs – длина дуги, пройденной точкой при перемещении ее из положения A в положение B (см. **рис. 1**).

Тогда

$$v = \left|\bar{v}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\bar{r}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{1}$$

Заметим, что в общем случае $v \neq \dfrac{d\left|\bar{r}\right|}{dt}$. Вектор средней скорости параллелен секущей AB. Предельное положение секущей при $\Delta t \to 0$ совпадает с касательной к траектории. Отсюда вектор скорости направлен вдоль касательной к траектории. Таким образом, $\bar{v} = v\bar{t}^{0}$, где вектор $\bar{t}^{0}$ – единичный вектор касательной, направленный в сторону движения точки, а величина v вычисляется по формуле (1).

2.2. Скорость точки при координатном способе задания движения (случай прямоугольных декартовых координат)

Пусть в декартовых координатах задан кинематический закон движения точки на отрезке времени $\left[t_0, T\right]$. Тогда в любой момент времени $t \in \left[t_0, T\right]$ справедливо равенство

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \tag{1}$$

Определим проекции вектора скорости в этой же системе координат. С одной стороны,

$$\bar{v}(t) = v_x(t)\bar{i} + v_y(t)\bar{j} + v_z(t)\bar{k}, \tag{2}$$

а с другой стороны, дифференцируя равенство (1) по времени, получим

$$\bar{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\bar{i} + \frac{dy}{dt}(t)\bar{j} + \frac{dz}{dt}(t)\bar{k}. \tag{3}$$

В механике операция дифференцирования по времени часто обозначается точкой над символом дифференцируемой функции. Равенство (3) перепишем в виде

$$\bar{v}(t) = \dot{x}(t)\bar{i} + \dot{y}(t)\bar{j} + \dot{z}(t)\bar{k}. \tag{4}$$

Из равенств (2) и (4) находим

$$v_x(t) = \dot{x}(t), v_y(t) = \dot{y}(t), v_z(t) = \dot{z}(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Модуль скорости вычисляется по формуле

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}, \quad t \in [t_0, T].$$

Заметим, что

$$\frac{d|\bar{r}|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\cdot\dot{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\cdot\dot{y} + + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\cdot\dot{z} =$$

$$= \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \neq \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = v\,.$$

Направление вектора скорости определяется его направляющими косинусами (**рис. 2**):

$$\cos a = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \quad \cos b = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},$$

$$\cos g = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

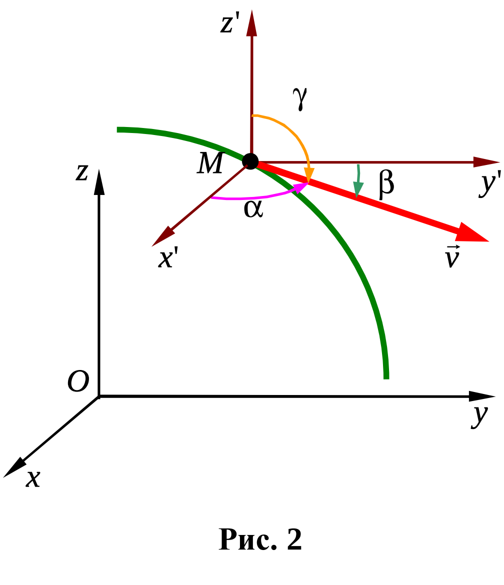


Рис. 2

Пример 1. Дан механизм, изображенный на **рис. 3**, где $AMC = l,\ AE = b,\ AM = x_A$, $v_M = v = const$. Определить $v_C = v_C(x_A)$.

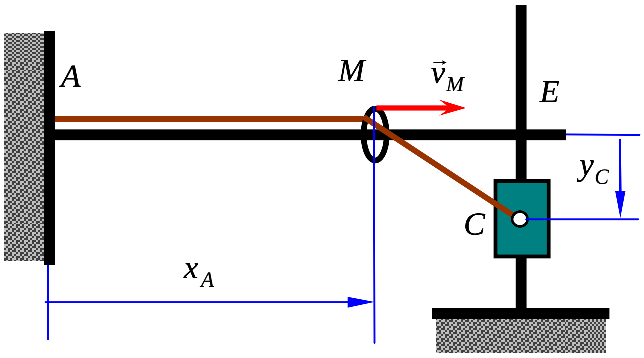


Рис. 3

Решение. По теореме Пифагора имеем

$$(l - x_A)^2 = (b - x_A)^2 + y_C^2. \tag{5}$$

Равенство (5) выполняется тождественно за все время движения. Продифференцируем его по времени. В результате получим

$$-(l - x_A)\dot{x}_A = -(b - x_A)\dot{x}_A + y_C \dot{y}_C \ \Rightarrow$$

$$\dot{y}_C = \frac{\dot{x}_A}{y_C}(-l + x_A + b - x_A) = -(l - b)\frac{\dot{x}_A}{y_C}. \tag{6}$$

Определим величину y_C. Имеем

$$y_C = \sqrt{(l - x_A)^2 - (b - x_A)^2} = \sqrt{MC^2 - ME^2} =$$

$$= \sqrt{l^2 - 2lx_A + x_A^2 - b^2 + 2bx_A - x_A^2} = \sqrt{l^2 - b^2 - 2x_A(l - b)}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$v_C(x_A) = \dot{y}_C = -\frac{l - b}{\sqrt{l^2 - b^2 - 2x_A(l - b)}} \overbrace{\dot{x}_A}^{v_M = v} = -\frac{l - b}{\sqrt{l^2 - b^2 - 2x_A(l - b)}} v. \text{ u}$$

2.3. Скорость точки в криволинейных координатах

Пусть задана зависимость

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3),$$

где $q_1, q_2, q_3 -$ криволинейные координаты. Тогда, с одной стороны,

$$\bar{v} = v_{q_1}\bar{q}_1^0 + v_{q_2}\bar{q}_2^0 + v_{q_3}\bar{q}_3^0, \tag{1}$$

а с другой –

$$\bar v = \frac{d\bar r\left(q_1,q_2,q_3\right)}{dt} = \frac{\partial \bar r}{\partial q_1}\dot q_1 + \frac{\partial \bar r}{\partial q_2}\dot q_2 + \frac{\partial \bar r}{\partial q_3}\dot q_3 =$$

$$= \left|\frac{\partial \bar r}{\partial q_1}\right|\dot q_1 \bar q_1^0 + \left|\frac{\partial \bar r}{\partial q_2}\right|\dot q_2 \bar q_2^0 + \left|\frac{\partial \bar r}{\partial q_3}\right|\dot q_3 \bar q_3^0 = H_1\dot q_1 \bar q_1^0 + H_2\dot q_2 \bar q_2^0 + H_3\dot q_3 \bar q_3^0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$v_{q_i} = H_i\dot q_i,\ \ i = 1,2,3. \qquad (3)$$

Пример 2. Определить проекции вектора скорости на оси цилиндрических координат.
Решение. По формуле (3) с учетом $H_r = 1,\ H_j = r\sin J,\ H_J = r$ находим

$$v_r = \dot r\,,\, v_j = r\dot j\,,\, v_z = \dot z. \qquad (4)$$

Из ортогональности осей цилиндрических координат следует равенство

$$v^2 = \dot r^{\,2} + r^{\,2}\dot j^{\,2} + \dot z^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dot r^{\,2} + r^{\,2}\dot j^{\,2} + \dot z^2}.\ \ \text{u}$$

Определение 3. ***Проекции скорости*** v_r ***и*** v_j ***называются радиальной и трансверсальной составляющими скорости.***

Пример 3. Определить проекции вектора скорости на оси сферических координат.
Решение. По формуле (3) с учетом $H_r = 1,\ H_j = r\sin J,\ H_J = r$ находим

$$v_r = \dot r,\, v_j = r\dot j\,\sin J,\, v_J = r\dot J. \qquad (5)$$

В силу ортогональности осей сферических координат имеет место равенство

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot j^{\,2}\sin^2 J + r^2\dot J^{\,2}.\ \ \text{u}$$

Пример 4. Движение точки в плоскости задается в полярной системе координат компонентами скорости $v_r = \dfrac{1}{r^2}, v_j = \dfrac{1}{ar}$, $\ a = const \neq 0$. Найти уравнение траектории точки $r = r\left(j\right)$, если в начальный момент $r\left(0\right) = r_0,\ j\left(0\right) = j_0$.

Решение. По условию задачи в силу (4) находим

$$\dot r = \frac{1}{r^2},\quad r\dot j = \frac{1}{ar}\quad \Rightarrow\quad \dot j = \frac{1}{ar^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} = \dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dj}\cdot\frac{dj}{dt} = \frac{dr}{dj}\overbrace{\dot j}^{\frac{1}{ar^2}} = \frac{dr}{dj}\cdot\frac{1}{ar^2}\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{r^2} = \frac{dr}{dj}\cdot\frac{1}{ar^2}\quad\Rightarrow\quad \frac{dr}{dj} = a.$$

Интегрируя, находим

$$\rho\left(\varphi\right) = a\varphi + c.$$

Из начальных условий определяем константу интегрирования

$$r_0 = aj_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = r_0 - aj_0 \Rightarrow r(j) = r_0 + a(j - j_0).$$

Ниже на **рис. 4** изображена траектория точки на плоскости. u

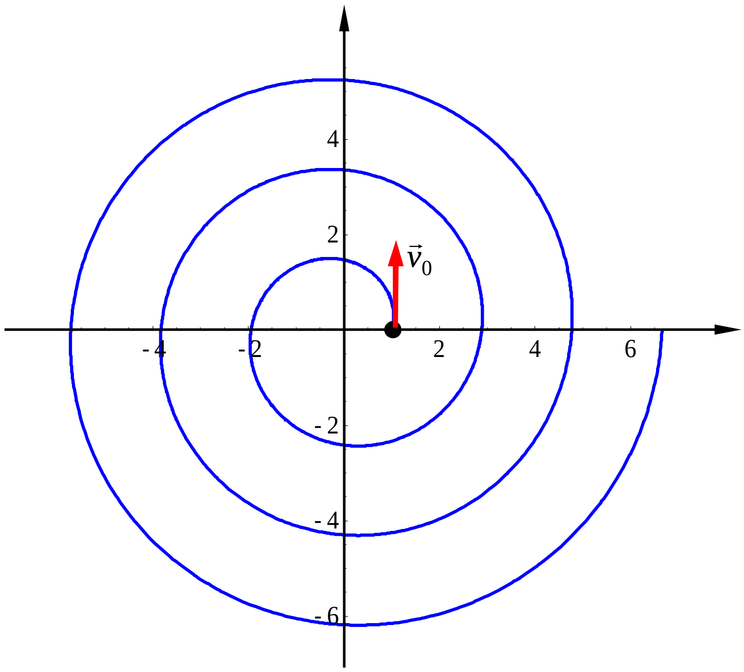


Рис. 4. Траектория точки (при $\rho_0 = 1,\ a = 0.3,\ \varphi_0 = 0$**)**

2.4. Скорость точки при естественном способе задания движения

При естественном способе задания движения скорость однозначно определяется алгебраической величиной $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$, где σ – дуговая координата точки (см. **рис. 5**).

Эта величина положительна, если в данный момент времени вектор направлен в сторону возрастания дуговой координаты, и отрицательна – в противном случае. При этом

$$\left| \frac{d\sigma}{dt} \right| = v.$$

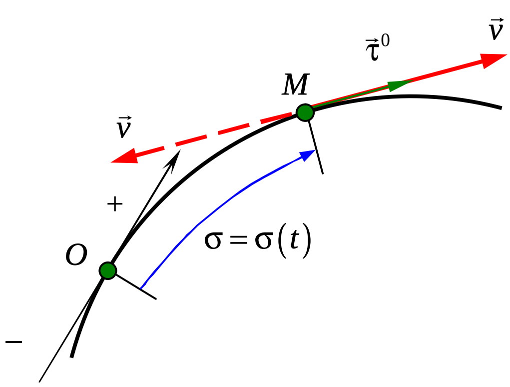


Рис. 5

Пример 5. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону

$$\sigma = OM = \frac{\pi R}{6}\left(t^2 - 2t\right) \text{ м.}$$

Определить скорость точки в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}$ с и $t_2 = 3$ с.

Решение. Движение точки задано естественным способом. Примем за начало отсчета точку O, считая направление движения по часовой стрелке положительным (**рис. 6**).

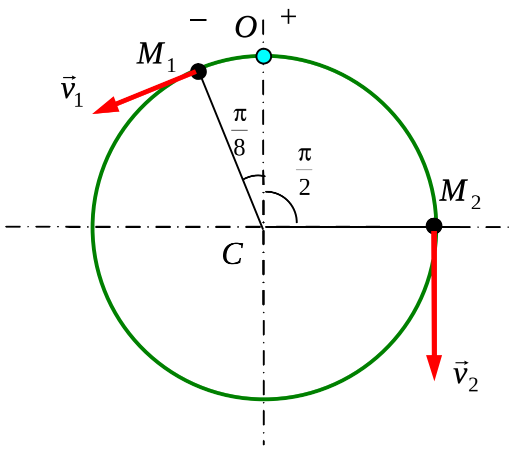


Рис. 6

Находим дуговые координаты точки в заданные моменты времени:

$$\sigma_1 = \overset{\cup}{OM}_1 = \frac{\pi R}{6}\left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\pi R}{24} = -\frac{\pi R}{8}\ (м),$$

$$\sigma_2 = \overset{\cup}{OM}_2 = \frac{\pi R}{6}\left(3^2 - 2\cdot 3\right) = \frac{\pi R}{2}\ (м).$$

Положение точек M_1 и M_2 на траектории определим с помощью углов:

$$\angle OCM_1 = \frac{\overset{\cup}{OM}_1}{R} = -\frac{\pi}{8}\ (рад),$$

$$\angle OCM_2 = \frac{\overset{\cup}{OM}_2}{R} = \frac{\pi}{2}\ (рад).$$

Находим величины скорости в заданные моменты времени:

$$\dot{\sigma} = \frac{\pi R}{6}(2t - 2) \quad\Rightarrow\quad v = \left|\frac{\pi R}{6}(2t - 2)\right|,$$

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{\pi R}{6}\left(2\cdot\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{\pi R}{6} \quad\Rightarrow\quad v_1 = \frac{\pi R}{6},$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{\pi R}{6}(2\cdot 3 - 2) = \frac{2\pi R}{3} \quad\Rightarrow\quad v_2 = \frac{2\pi R}{3}(м/с).$$

Так как $\dot{\sigma}_1 < 0$, то вектор скорости v_1 направлен в сторону убывания σ по касательной к траектории, а поскольку $\dot{\sigma}_2 > 0$, то вектор скорости v_2 направлен в сторону возрастания σ по касательной к траектории (см. **рис. 6**). u

2.5. Секторная скорость

Пусть $\overline{r}$ – радиус-вектор точки относительно некоторого центра O и $\overline{v}$ – ее вектор скорости (**рис. 7**).

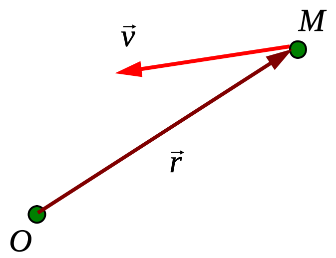


Рис. 7

Определение 3. ***Векторная величина***

$$\overline{v}_\sigma = \frac{1}{2}\overline{r}\times\overline{v}$$

называется секторной скоростью точки относительно центра O**.**

Замечание. Вектор секторной скорости некоторой точки имеет эту точку своим началом. Из определения секторной скорости следует, что ее значение зависит от центра O, чего нет для обычной скорости.

Дадим геометрическую иллюстрацию понятию секторной скорости. Радиус-вектор точки, перемещаясь в пространстве, описывает конус, направляющей которого служит траектория точки.

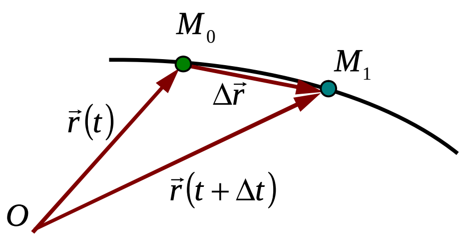


Рис. 8

Из **рис. 8** видно, что для малых значений Δt площадь поверхности OM_0M_1 приближенно равна площади треугольника ΔOM_0M_1. Тогда

$$S_{OM_0M_1} = S_{\Delta OM_0M_1} = \frac{1}{2}\left|\overline{r}(t)\times\Delta\overline{r}\right|. \qquad (1)$$

Разделим обе части равенства (1) на Δt и устремим его к нулю. Имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S_{OM_0M_1}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{r}\,(t)\times\Delta\overline{r}\right|}{\Delta t}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{r}\,(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{r}\,(t)\times\overline{v}\right|=\left|\overline{v}_\sigma\right|.$$

Модуль секторной скорости совпадает со скоростью изменения площади сектора конуса, зачерченного радиус-вектором.

Определим проекции вектора секторной скорости точки относительно начала декартовых координат на оси этой системы, декартовых координат на оси этой системы, закон движения точки, т.е. известны функции

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\quad t\in[t_0,T].$$

По определению секторной скорости имеем

$$\overline{v}_s=\frac{1}{2}\overline{r}\times\overline{v}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(y\dot{z}-\dot{y}z)\cdot\overline{i}+\frac{1}{2}(z\dot{x}-\dot{z}x)\,\overline{j}+\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)\cdot\overline{k}\ .$$

Из последнего равенства находим, что

$$\begin{cases} v_{\sigma x}=\frac{1}{2}(y\dot{z}-\dot{y}z),\\ v_{\sigma y}=\frac{1}{2}(z\dot{x}-\dot{z}x),\\ v_{\sigma z}=\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y).\end{cases}$$

3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Мерой, характеризующей изменение скорости точки в данное мгновение, является ее ускорение. Размерность ускорения $[w]=\dfrac{[L]}{[T^2]}$. В системе СИ это $\dfrac{м}{сек^2}$.

3.1. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии

Пусть M, M_1, M_2 – три точки некоторой пространственной кривой (траектории). Через эти точки можно провести плоскость π, причем единственным образом.

Определение 1. ***Предельное положение плоскости π, когда $M_2\to M_1\to M$, называется соприкасающейся плоскостью к кривой (траектории) в точке M.***

Заметим, что если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость к ней в любой ее точке совпадает с плоскостью кривой (траектории).

Для пространственной кривой в каждой ее точке можно построить целую плоскость нормалей (совокупность линий, ортогональных касательной).

Определение 2. ***Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью, а нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, – бинормалью.***

Пусть M, M_1 – две точки на кривой (траектории) (**рис. 1**), Δs – длина дуги между точками M, M_1; $\bar{t}^0$, $\bar{t}_1^0$ – единичные векторы касательной в точках M и M_1 соответственно; $\Delta\theta = \theta_1 - \theta$ – угол между векторами $\bar{t}^0$, $\bar{t}_1^0$ (в радианах).

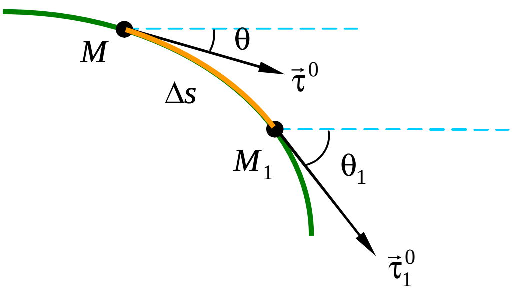


Рис. 1

Определение 3. ***Величина***

$$k_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

называется средней кривизной кривой на дуге MM_1**.**

Величина

$$k = \lim_{M_1 \to M} k_{cp} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

– кривизной кривой, а величина

$$r = \frac{1}{k}$$

– радиусом кривизны кривой в точке M **.**

Пример 1. Пусть кривая – окружность (**рис. 2**).

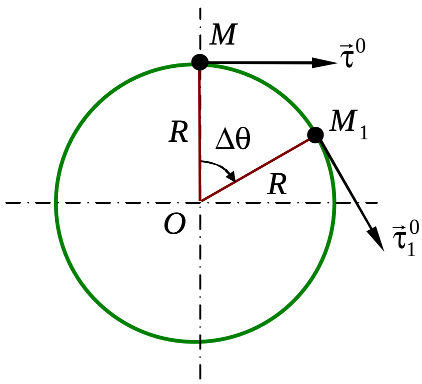


Рис. 2

Тогда $\Delta s = R\Delta q$, где $R-$ радиус окружности, и

$$k_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{\Delta q}{R\Delta J} = \frac{1}{R} = const \quad \Rightarrow \quad r = R. \text{ u}$$

Пример 2. В случае прямой находим

$$\Delta q = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta s} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \lim_{M_1 \to M} \frac{1}{k_{cp}} = \infty.$$

Радиус кривизны прямой в любой ее точке равен бесконечности. u

Дадим геометрическую интерпретацию понятия радиуса кривизны кривой в точке. Пусть $M, M_1, M_2 -$три точки на кривой. Проведем через них окружность и устремим точки M_1, M_2 к M . В предельном положении окружность будет принадлежать соприкасающейся плоскости, а ее радиус – равен радиусу кривизны кривой в точке M . Центр предельной окружности называют центром кривизны кривой в точке M .

Заметим, что если кривая – окружность, то ее центр кривизны совпадает с центром окружности. В случае когда кривая является прямой линией, ее центр кривизны уходит на бесконечность, соответственно, ее радиус кривизны равен бесконечности.

3.2. Определение ускорения точки при векторном задании движения

Пусть задан закон изменения радиус-вектора точки $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Рассмотрим два близких момента времени t и t_1. Обозначим

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}(t_1) - \bar{v}(t), \; \Delta t = t_1 - t.$$

Определение 4. ***Величина***

$$\bar{w}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

называется средним ускорением точки на промежутке времени Δt**.**

Определение 5. ***Величина***

$$\bar{w}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{w}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

называется ускорением точки в момент времени t**.**

Из определения ускорения следует, что

$$\bar{w}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t) = \ddot{\bar{r}}(t).$$

Ускорение точки является вектором. Естественно считать, что начало вектора ускорения точки совпадает с самой точкой.

На **рис. 3** изображена траектория точки и вектора ее скорости $\overline{v}, \overline{v}_1$ в положениях M и M_1 соответственно. Вектор $\Delta\overline{v}$, параллельный вектору $\overline{w}_{cp}$, направлен в сторону вогнутости траектории. Вектор ускорения $\overline{w}$ занимает предельное положение вектора $\overline{w}_{cp}$, когда $M_1 \to M$, и поэтому направлен в сторону вогнутости траектории.

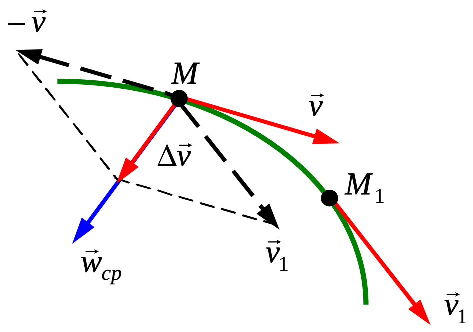


Рис. 3

Пусть M, M_1, M_2 – три положения точки на траектории в моменты времени t, t_1, t_2 соответственно, причем $t_2 - t_1 = t_1 - t = \Delta t$ (**рис. 4**).

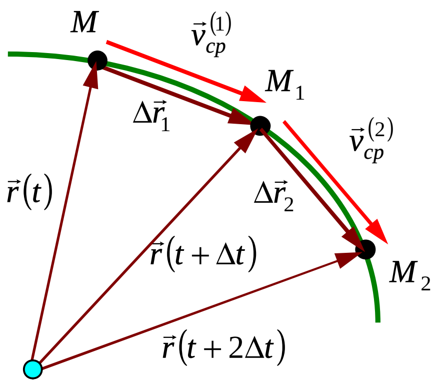


Рис. 4

Полагаем

$$\Delta\overline{r}_1 = \overline{r}(t_1) - \overline{r}(t), \quad \Delta\overline{r}_2 = \overline{r}(t_2) - \overline{r}(t_1),$$

$$\overline{v}_{cp}^{(1)} = \frac{\Delta\overline{r}_1}{\Delta t}, \quad \overline{v}_{cp}^{(2)} = \frac{\Delta\overline{r}_2}{\Delta t}.$$

С точностью до малых высшего порядка малости, чем Δt, имеем

$$\overline{w}_{cp} = \frac{\overline{v}_{cp}^{(2)} - \overline{v}_{cp}^{(1)}}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\overline{r}_2}{\Delta t} - \frac{\Delta\overline{r}_1}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overline{r}_2 - \Delta\overline{r}_1}{(\Delta t)^2}.$$

Векторы $\Delta\overline{r}_2, \Delta\overline{r}$, а следовательно, и вектор $\overline{w}_{cp}$, лежат в плоскости, проходящей через точки M, M_1, M_2. Когда $\Delta t \to 0$ точки M_1, M_2 стремятся к точке M, вектор $\overline{w}_{cp}$ стремится к вектору $\overline{w}(t)$, а плоскость, проходящая через точки M, M_1, M_2 и содержащая вектор $\overline{w}_{cp}$, стремится к соприкасающейся в точке M плоскости.

Таким образом, вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.

3.3. Разложение вектора ускорения точки на нормальную и касательную составляющие

Пусть $\overline{t}^{\,0}$ – единичный вектор касательной к траектории в точке M, направленный в сторону движения. Тогда

$$\overline{v} = v\,\overline{\tau}^0 \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = \frac{d\left(v\,\overline{\tau}^0\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau}^0 + v\frac{d\left(\overline{\tau}^0\right)}{dt}.$$

Определение 6. ***Вектор***

$$\overline{w}^{\tau} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau}^0$$

называется касательным ускорением точки.

Из определения следует, что вектор касательного ускорения направлен параллельно касательной к траектории в сторону вектора скорости, если она растет по величине, и в противоположную сторону, если скорость убывает. При этом в первом случае $\dfrac{dv}{dt} > 0$ и движение называют ускоренным, а во втором случае $\dfrac{dv}{dt} < 0$ и движение замедленное. В случае когда $\dfrac{dv}{dt} = 0$, говорят, что движение равномерное. Заметим, что равномерное движение не обязано быть прямолинейным. В случае равномерного движения

$$\overline{w}^t = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_0 = const \quad \Rightarrow \quad s(t) = v_0 t + s_0.$$

Вектор касательного ускорения $\overline{w}^t$ направлен по касательной к траектории и, следовательно, лежит в ее соприкасающейся плоскости.

Определение 7. ***Вектор***

$$\overline{w}^n = v\frac{d\overline{t}^{\,0}}{dt}$$

называется нормальным ускорением точки.

В силу $\left|\overline{t}^{\,0}\right| = 1 = const$ из равенства

$$\left|\overline{\tau}^0\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\tau}^0 \cdot \overline{\tau}^0 = 1 = const$$

выводим

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{\tau}^0 \cdot \overline{\tau}^0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\overline{\tau}^0 \cdot \frac{d}{dt}\overline{\tau}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\tau}^0 \perp \frac{d\overline{\tau}^0}{dt}.$$

Отсюда следует, что вектор $\bar{w}^n$ лежит в нормальной плоскости к кривой. Из равенства

$$\bar{w} = \bar{w}^n + \bar{w}^\tau$$

и установленного факта принадлежности векторов $\bar{w}, \bar{w}^t$ соприкасающейся плоскости следует, что этой плоскости принадлежит и вектор $\bar{w}^n$.

Таким образом, вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к траектории и, как это вытекает из предыдущих рассуждений, в сторону вогнутости траектории.

Определим модуль нормального ускорения. Пусть $\bar{t}^0(t+\Delta t), \bar{t}^0(t)$ – единичные векторы касательной в моменты времени $t+\Delta t, t$ соответственно, Δq – угол между ними (**рис. 5**).

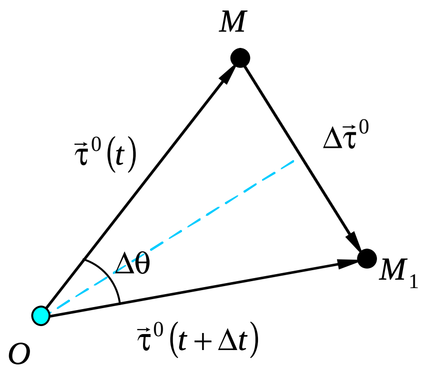


Рис. 5

Вычисляем

$$\left|\frac{d\bar{t}^0}{dt}\right| = \frac{\left|d\bar{t}^0\right|}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\bar{t}^0\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta q}{2}\right)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\cdot\frac{\Delta q}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\Delta q}{2}\right)}{\Delta t\cdot\Delta s\cdot\frac{\Delta q}{2}\cdot} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\cdot\Delta q\cdot\sin\left(\frac{\Delta q}{2}\right)}{\Delta t\cdot\Delta s\cdot\frac{\Delta q}{2}\cdot} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\cdot\Delta q\cdot\sin\left(\frac{\Delta q}{2}\right)}{\Delta t\cdot\Delta s\cdot\frac{\Delta q}{2}\cdot} =$$

$$= \overbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}}^{v}\cdot\overbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta s}}^{k}\cdot\overbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta q}{2}\right)}{\frac{\Delta q}{2}}}^{1} = v\cdot\overset{\frac{1}{r}}{k} = \frac{v}{r}.$$

Таким образом,

$$\left|\bar{w}^n\right| = v\overbrace{\left|\frac{d\bar{t}^0}{dt}\right|}^{\frac{v}{r}} = \frac{v^2}{r}.$$

3.4. Ускорение точки при естественном способе задания движения

С каждой точкой траектории можно связать систему координат, оси которой определяются следующими единичными векторами: $\bar{t}^0$ – единичный вектор касательной; $\bar{n}^0$ – единичный вектор главной нормали, направленный в сторону вогнутости траектории; $\bar{b}^0$ – единичный вектор, замыкающий два предыдущих направления до правой тройки. Последнее направление будем называть направлением бинормали. Очевидно, что бинормаль ортогональна соприкасающейся плоскости.

Определение 8. ***Репер, образованный векторами*** $\bar{t}^0, \bar{n}^0, \bar{b}^0$***, называется естественным (или сопровождающим) трехгранником.***

Для любой точки траектории справедливо разложение

$$\bar{w} = \bar{w}^\tau + \bar{w}^n + \bar{w}^b = w_\tau \bar{\tau}^0 + w_n \bar{n}^0 + w_b \bar{b}^0, \tag{1}$$

где

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0 \tag{2}$$

– суть проекции вектора ускорения на соответствующие направления. Проекция w_n вектора ускорения на главную нормаль всегда положительна. В то же время справедливо

$$w_\tau = \begin{cases} \geq 0 - \textit{движение ускоренное}, \\ \leq 0 - \textit{движение замедленное}. \end{cases}$$

Из равенства

$$\bar{w} = \overbrace{w_t}^{\frac{dv}{dt}} \bar{t}^0 + \overbrace{w_n}^{\frac{v^2}{r}} \bar{n}^0 + \overbrace{w_b}^{0} \bar{b}^0$$

следует, что

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2 + w_b^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \tag{3}$$

Пример 3. Используя условие примера 5 п.2.4, определить нормальное, касательное и полное ускорения точки.

Решение. Применяя формулы (2), получаем

$$w_\tau = \dot{v} = \frac{\pi R}{6} \cdot 2 = \frac{\pi R}{3} \left(м/c^2 \right),$$

$$w_n = \frac{v^2}{R} \left(м/c^2 \right).$$

Касательное ускорение получилось постоянной величиной.

Тогда для заданных моментов времени находим нормальные и по формулам (3) – полные ускорения точки:

$$w_{1n} = \frac{v_1^2}{R} = \left(\frac{\pi R}{6}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{\pi R}{36} \left(м/с^2\right) \;\Rightarrow\; w_1 = \sqrt{\left(\frac{\pi R}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi R}{36}\right)^2} = \frac{\pi R}{36}\sqrt{145} \left(м/с^2\right),$$

и

$$w_{2n} = \frac{v_2^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{3}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{4\pi R}{9} \left(м/с^2\right) \;\Rightarrow\; w_2 = \sqrt{\left(\frac{4\pi R}{9}\right)^2 + \left(\frac{\pi R}{36}\right)^2} = \frac{\pi R}{36}\sqrt{257} \left(м/с^2\right).$$

3.5. Определение ускорения при координатном способе задания. Случай прямоугольных декартовых координат

Пусть задан кинематический закон движения точки в декартовых координатах на отрезке времени $[t_0, T]$. Тогда в любой момент времени $t \in [t_0, T]$ справедливо равенство

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \qquad (1)$$

Определим проекции вектора ускорения в этой же системе координат. С одной стороны,

$$\bar{w}(t) = w_x(t)\bar{i} + w_y(t)\bar{j} + w_z(t)\bar{k}, \qquad (2)$$

а с другой стороны, дифференцируя равенство (1) по времени два раза, получим

$$\bar{w}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\bar{k} = \ddot{x}(t)\bar{i} + \ddot{y}(t)\bar{j} + \ddot{z}(t)\bar{k}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) находим

$$w_x(t) = \ddot{x}(t), \quad w_y(t) = \ddot{y}(t), \quad w_z(t) = \ddot{z}(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Модуль ускорения и косинусы его направляющих углов определяются соответственно по формулам

$$w(t) = \sqrt{w_x^2(t) + w_y^2(t) + w_z^2(t)} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}, \quad t \in [t_0, T],$$

$$\begin{cases} \cos\alpha(t) = \dfrac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}}, \\ \cos\beta(t) = \dfrac{\ddot{y}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}}, \\ \cos\gamma(t) = \dfrac{\ddot{z}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}}, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

Вычислим величину касательного ускорения.

$$w_n(t) = \overset{\|\bar{\tau}^0\|}{1} \cdot w \overbrace{\cos\left(\bar{w}, \bar{n}^0\right)}^{\sin\left(\bar{w}, \bar{\tau}^0\right)} = w \cdot \left\|\bar{\tau}^0\right\| \cdot \sin\left(\bar{w}, \bar{\tau}^0\right) = \left|\bar{w} \times \overbrace{\bar{\tau}^0}^{\frac{\bar{v}}{v}}\right| = \left|\bar{w} \times \frac{\bar{v}}{v}\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{v}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{v}\cdot\left|\left[\ddot{y}(t)\dot{z}(t)-\ddot{z}(t)\dot{y}(t)\right]\cdot\bar{i}+\left[\ddot{x}(t)\dot{z}(t)-\dot{x}(t)\ddot{z}(t)\right]\cdot\bar{j}+\left[\dot{y}(t)\ddot{x}(t)-\ddot{y}(t)\dot{x}(t)\right]\cdot\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\ddot{z}(t)\dot{y}(t)-\ddot{y}(t)\dot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{x}(t)\dot{z}(t)-\dot{x}(t)\ddot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)\right)^2}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

Радиус кривизны траектории

$$w_n=\frac{v^2}{\rho}\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac{v^2}{w_n}=$$

$$=\frac{\overbrace{\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)\right)}^{v^2}\cdot\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\ddot{z}(t)\ \ \dot{y}(t)-\ddot{y}(t)\ \ \dot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{x}(t)\ \ \dot{z}(t)-\dot{x}(t)\ \ \ddot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{y}(t)\ \ \dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ \ \ddot{x}(t)\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\ddot{z}(t)\ \ \dot{y}(t)-\ddot{y}(t)\ \ \dot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{x}(t)\ \ \dot{z}(t)-\dot{x}(t)\ \ \ddot{z}(t)\right)^2+\left(\ddot{y}(t)\ \ \dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ \ \ddot{x}(t)\right)^2}}.$$

Пример 4. Найти скорость, ускорение точки в любой момент времени, используя условие примера 3 п. 1.5. Определить также радиус кривизны траектории в момент времени $t_1=\dfrac{\pi}{k}$ c.

Решение. Находим величину скорости точки:

$$\begin{cases}v_x=-a\,k\sin(k\,t),\\ v_y=a\,k\cos(k\,t),\\ v_z=b,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{a^2k^2\sin^2(k\,t)+a^2k^2\cos^2(k\,t)+b^2t^2}=\sqrt{a^2k^2+b^2},$$

Получили, что точка движется с постоянной по модулю скоростью.

Определяем косинусы направляющих углов вектора скорости:

$$\begin{cases}\cos\alpha_1(t)=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{-ak\sin(k\,t)}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\\ \cos\beta_1(t)=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{ak\cos(k\,t)}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\\ \cos\gamma_1(t)=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}.\end{cases}$$

Находим величину ускорения точки:

$$\begin{cases}w_x=-a\,k^2\cos(k\,t),\\ w_y=-a\,k^2\sin(k\,t),\\ w_z=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad w=\sqrt{a^2k^4\cos^2(k\,t)+a^2k^4\sin^2(k\,t)+0}=a\,k^2.$$

Получили, что точка движется с постоянным по модулю ускорением. Вектор ускорения лежит в плоскости Oxy.

Определяем косинусы направляющих углов вектора ускорения:

$$\begin{cases} \cos\alpha_2(t) = \dfrac{w_x}{w} = \dfrac{-ak^2\cos(kt)}{ak^2} = -\cos(kt), \\ \cos\beta_2(t) = \dfrac{w_y}{w} = \dfrac{-ak^2\sin(kt)}{ak^2} = -\sin(kt), \\ \cos\gamma_2(t) = \dfrac{w_z}{w} = \dfrac{0}{ak^2} = 0. \end{cases}$$

Находим проекции векторов скорости и ускорения в момент времени $t_1 = \dfrac{\pi}{k}$:

$$\begin{cases} v_x\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = -ak\sin(\pi) = 0, \\ v_y\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = ak\cos(\pi) = -ak, \\ v_z = b, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_x\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = -ak^2\cos(\pi) = ak^2, \\ w_y\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = -ak^2\sin(\pi) = 0, \\ w_z = 0, \end{cases}$$

Вычисляем радиус кривизны траектории:

$$\rho\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\left(a^2k^2+b^2\right)^{3/2}}{\sqrt{(0-0)^2+\left(ak^2b-0\right)^2+\left(0+a^2k^3\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left(a^2k^2+b^2\right)^{3/2}}{\sqrt{a^2k^4b^2+a^4k^6}} = \frac{\left(a^2k^2+b^2\right)^{3/2}}{ak^2\sqrt{b^2+a^2k^2}} = \frac{a^2k^2+b^2}{ak^2}. \text{ u}$$

3.6. Определение ускорения при координатном способе задания движения. Случай криволинейных координат

Пусть задан кинематический закон движения точки в криволинейных координатах

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1,2,3.$$

Разложим вектор ускорения по осям криволинейных координат

$$\bar{w}(t) = \sum_{i=1}^{3} w_i \bar{q}_i^0$$

и вычислим его проекции w_1, w_2, w_3 на эти оси:

$$w_i = \overset{\frac{d\bar{v}}{dt}}{\bar{w}} \cdot \overset{\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}}{\bar{q}_i^0} = \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i}\cdot\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right), \quad i = 1,2,3. \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{d\bar{v}}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}+\bar{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)-\bar{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right). \tag{2}$$

Подставим (2) в (1). В результате получим

$$w_i=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)-\bar{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{3}$$

Лемма 1. ***Справедливы равенства***

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}_i},\quad i=1,2,3, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{\partial\bar{v}}{\partial q_i},\quad i=1,2,3. \tag{5}$$

Доказательство. Равенство (4) получается путем дифференцирования по $\dot{q}_i$ левой и правой частей соотношения

$$\bar{v}=\frac{d}{dt}\bar{r}(q_1,q_2,q_3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i.$$

Для доказательства равенства (5) последовательно вычисляем его левую и правую части:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}(q_1,q_2,q_3)\right)=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial q_i\partial q_s}\dot{q}_s,$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_s}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_s\right)=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial q_i\partial q_s}\dot{q}_s.$$

Очевидно, что они совпадают. Лемма доказана. ¢

Подставим равенства (4) и (5) в (3). В результате получим

$$w_i=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\overbrace{\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}}^{(4)}\right)-\bar{v}\overbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)}^{(5)}\right]=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial q_i}\right],\quad i=1,2,3. \tag{6}$$

Полагаем

$$\vartheta=\frac{1}{2}\bar{v}\cdot\bar{v}=\frac{1}{2}v^2.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot{q}_i}=\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}_i},\quad\frac{\partial\vartheta}{\partial q_i}=\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial q_i},\quad i=1,2,3. \tag{7}$$

Из (6) и (7) окончательно получаем

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\overset{\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot q_i}}{\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\dot q_i}}\right) - \overset{\frac{\partial\vartheta}{\partial q_i}}{\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial q_i}}\right] = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial\vartheta}{\partial q_i}\right], \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Пример 5. Вычислить проекции вектора ускорения на оси цилиндрических координат.
Решение. Справедливы равенства

$$H_r = 1, \quad H_j = r, \quad H_z = 1, \quad v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi, \quad v_z = \dot z \quad \Rightarrow$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right).$$

По формуле (8) находим

$$w_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\right] = \frac{1}{2}\left[2\frac{d}{dt}\dot\rho - 2\rho\dot\varphi^2\right] = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right] = \frac{1}{2\rho}\left[2\frac{d}{dt}\rho^2\dot\varphi\right] = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi,$$

$$w_z = \frac{1}{H_z}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot z} - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right] = \frac{1}{2}\left[2\frac{d}{dt}\dot z\right] = \ddot z. \text{ u}$$

Пример 6. Вычислить проекции вектора ускорения на оси сферических координат.
Решение. Справедливы равенства

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r\sin\vartheta, \quad H_\vartheta = r, \quad v_r = \dot r, \quad v_\varphi = r\dot\varphi\sin\vartheta, \quad v_\vartheta = r\dot\vartheta \quad \Rightarrow$$

$$\vartheta\left(r, \varphi, \vartheta, \dot r, \dot\varphi, \dot\vartheta\right) = \frac{1}{2}\left(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\vartheta^2\right) = \frac{1}{2}\left[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + r^2\dot\vartheta^2\right].$$

По формуле (8) находим

$$w_r = \frac{1}{H_r}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot r} - \frac{\partial\theta}{\partial r}\right] = \ddot r - r\dot\varphi^2\sin^2\vartheta - r\dot\vartheta^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right] = \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{dt}\left[r^2\dot\varphi\sin^2\vartheta\right] =$$

$$= \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\left[2r\dot r\dot\varphi\sin^2\vartheta + r^2\ddot\varphi\sin^2\vartheta + 2r^2\dot\varphi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\right] = 2\dot r\dot\varphi\sin\vartheta + r\ddot\varphi\sin\vartheta + 2r\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta,$$

$$w_\vartheta = \frac{1}{H_\vartheta}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot\vartheta} - \frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}\right] = \frac{1}{r}\cdot\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\vartheta\right) - r^2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\left[r^2\ddot\vartheta + 2r\dot r\dot\vartheta - r^2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right] = r\ddot\vartheta + 2\dot r\dot\vartheta - r\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

4.1. Прямолинейное движение точки

Дадим определение прямолинейного движения точки.

Определение 1. ***Движение точки называется прямолинейным, если в выбранной системе отсчета траектория ее движения является прямой линией.***

Направим координатную ось Ox вдоль траектории движения (**рис. 1**).

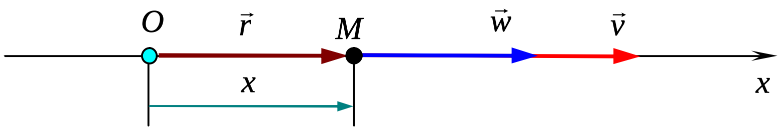


Рис. 1

Закон движения в общем случае прямолинейного движения имеет вид

$$x = x(t), \quad t \in [t_0, T].$$

При прямолинейном движении точки ее радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения в любой момент времени направлены вдоль траектории точки. Заметим, что вектор ускорения тогда имеет только касательную составляющую. К этому выводу можно прийти и из анализа нормальной составляющей ускорения $w^n = \dfrac{v^2}{r}$, поскольку для прямой линии справедливо равенство $r = \infty$.

Заметим, что

$$r_x = x, \quad v_x = \dot{x}, \quad w_x = \ddot{x}.$$

Проекции r_x, v_x, w_x суть величины алгебраические, т.е. могут принимать любой знак. На **рис. 2** изображен случай, когда $r_x < 0, v_x > 0, w_x > 0$. Следует отличать эти величины от величин r, v, w, являющихся длинами соответствующих векторов.

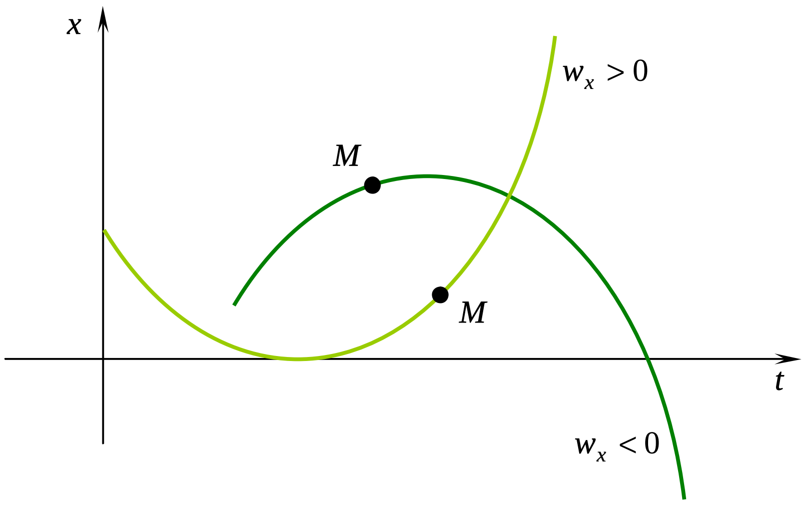


Рис. 2

В случае прямолинейного движения выполняются равенства

$$r = |x|, \quad v = |\dot{x}|, \quad w = |\ddot{x}|.$$

Закон движения $x = x(t)$ часто бывает удобно показывать графически, т. е. в виде графика функции $x : [t_0, T] \to R^1$.

Пример 1. ***Равнопеременное движение.*** Закон равнопеременного движения имеет вид

$$x(t) = \tfrac{1}{2} w_x t^2 + v_{x0} t + x_0, \quad w_x = const \neq 0,$$

где $v_{x0} = v_x(0), \quad x_0 = x(0)$. В зависимости от соотношения знаков величин w_x, v_{x0} движение будет ускоренное (знаки одинаковые) или замедленное (знаки противоположны). Графическое представление закона движения приведено на **рис. 2**.

Пример 2. ***Гармонические колебания.*** Закон гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = a \sin \omega t,$$

где $a > 0$ – амплитуда колебаний, $w > 0$ – круговая частота колебаний. Точка $x = 0$ (см. **рис. 3**) на траектории точки называется центром колебаний.

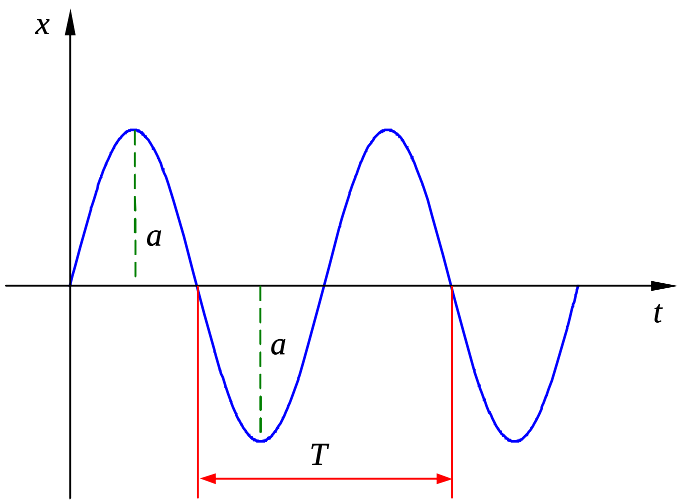


Рис. 3

Физический смысл амплитуды – наибольшее отклонение точки от центра колебаний. Закон гармонического колебания $x(t) = a \sin wt$ является периодической функцией с периодом $T = \dfrac{2p}{w}$. Величина $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{w}{2p}$ называется частотой колебаний.

Пример 3. Пусть $a = w = 1$. Тогда при $t = \frac{5}{4}p$ имеем

$$x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad v_x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad w_x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На **рис. 4** изображены радиус-вектор точки, векторы ее скорости и ускорения в этот момент времени.

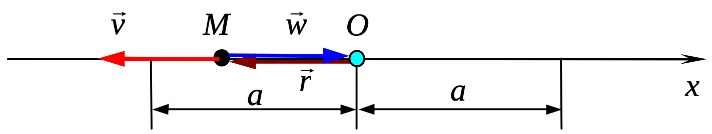


Рис. 4

Для гармонического колебания можно определить закон изменения проекции скорости v_x и ускорения w_x в функции x. Действительно,

$$v_x = \dot{x} = \omega a \overbrace{\cos(\omega t)}^{\sqrt{1-\sin^2(\omega t)}} = \pm\omega a\sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \pm\omega a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$w_x = \ddot{x} = -\omega^2 \overbrace{a\sin(\omega t)}^{x} = -\omega^2 x.$$

Таким образом, ускорение всегда направлено к центру колебаний.

В общем случае закон гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = a\sin(\omega t + \alpha),$$

где a – начальная фаза колебаний. В частности, при $a = 0$ получаем закон (1), а при $a = \frac{p}{2}$ получим $x(t) = a\cos\omega t$.

4.2. Плоское движение точки

Определение 2. ***Движение точки называется плоским, если в выбранной системе отсчета траектория ее движения является плоской.***

При плоском движении точки ее радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения в любой момент времени лежат в плоскости траектории. Главная нормаль плоской кривой всегда лежит в плоскости этой кривой, а бинормаль ей перпендикулярна. Центр кривизны для любой точки плоской кривой лежит в ее плоскости.

В случае плоской траектории систему координат можно выбрать так, что будет выполняться

$$z = 0 = const$$

за все время движения. Тогда можно ограничиться только осями координат, лежащими в плоскости траектории точки. Закон плоского движения точки имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Основные формулы кинематики точки для плоского движения упрощаются.

Радиус-вектор, скорость и ускорение точки –

$$\bar{r}(t)=x(t)\,\bar{i}+y(t)\,\bar{j},\quad \bar{v}(t)=\dot{x}(t)\,\bar{i}+\dot{y}(t)\,\bar{j},\quad \bar{w}(t)=\ddot{x}(t)\,\bar{i}+\ddot{y}(t)\,\bar{j},\quad t\in[t_0,T],$$

их модули –

$$r(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)},\quad v(t)=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)},\quad w(t)=\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)},\quad t\in[t_0,T]\ ,$$

косинусы направляющих углов –

$$\begin{cases}\cos\angle\left(Ox,\bar{r}(t)\right)=\dfrac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}},\\ \cos\angle\left(Oy,\bar{r}(t)\right)=\dfrac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}},\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\angle\left(Ox,\bar{v}(t)\right)=\dfrac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\\ \cos\angle\left(Oy,\bar{v}(t)\right)=\dfrac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\angle\left(Ox,\bar{w}(t)\right)=\dfrac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)}},\\ \cos\angle\left(Oy,\bar{w}(t)\right)=\dfrac{\ddot{y}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)}},\end{cases}$$

величина касательного ускорения –

$$w_\tau(t)=\frac{\ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)+\ddot{y}(t)\,\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\quad t\in[t_0,T],$$

величина нормального ускорения –

$$w_n(t)=\frac{\left|\ddot{y}(t)\quad \dot{x}(t)-\dot{y}\quad (t)\,\ddot{x}(t)\right|}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\quad t\in[t_0,T],$$

радиус кривизны –

$$\rho(t)=\frac{\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\ddot{y}(t)\quad \dot{x}(t)-\dot{y}(t)\quad \ddot{x}(t)\right|},\quad t\in[t_0,T].$$

Пример 4. Пусть траекторией точки является окружность. Направление положительного отсчета угла j принято таким, как это показано на **рис. 5.**

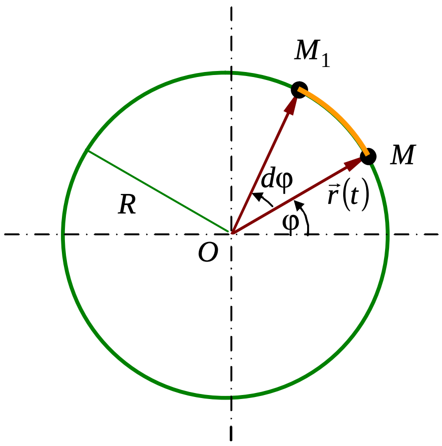


Рис. 5

Вычислим величину скорости

$$v = \frac{ds}{dt} = \left|\frac{Rd\varphi}{dt}\right| = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = R|\dot{\varphi}|$$

и нормального ускорения

$$w^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R} = R\dot{\varphi}^2.$$

Проекция вектора ускорения на касательную вычисляется по формуле

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R|\dot{\varphi}|\right) = \begin{cases} R|\ddot{\varphi}|, & \textit{движение ускоренное,} \\ -R|\ddot{\varphi}| & \textit{движение замедленное.} \end{cases}$$

Величины $\dot{j}, \ddot{j}$ называются угловой скоростью и угловым ускорением вращения радиус-вектора точки в круговом движении. Единицами измерения этих величин в системе СИ будут $\left[\frac{рад}{сек}\right]$, $\left[\frac{рад}{сек^2}\right]$ соответственно.

Для описания плоского движения в криволинейных координатах достаточно двух параметров. В частности, параметры r, j, взятые из цилиндрических координат, называют полярными координатами точки.

Определение 3. ***Проекции вектора скорости на оси полярных координат***

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$

называются соответственно радиальной и трансверсальной проекциями вектора скорости. При этом имеет место равенство

$$v^2 = \left(v_\rho\right)^2 + \left(v_\varphi\right)^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Определение 4. ***Проекции вектора ускорения на оси полярных координат***

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

называются соответственно радиальной и трансверсальной проекциями вектора ускорения. При этом имеет место равенство

$$w^2 = \left(w_\rho\right)^2 + \left(w_\varphi\right)^2 = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)^2.$$

Опишем круговое движение точки в полярных координатах. В качестве полярной оси выберем ось Ox (см. **рис. 6**):
Тогда для скорости точки имеем

$$\rho = R = const, \quad \varphi = \varphi \quad \Rightarrow \quad v_\rho = \dot{\rho} = 0,$$

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \begin{cases} v & - \textit{ движение в сторону увеличения полярного угла,} \\ -v & - \textit{ движение в сторону уменьшения полярного угла.} \end{cases}$$

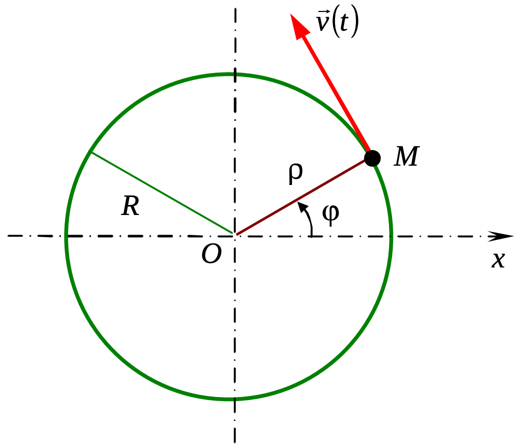


Рис. 6

Для ускорения точки имеем (**рис. 7**)

$$w_\varphi = \overbrace{\rho}^{R}\ddot{\varphi} = R\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad w^\tau = \left|w_\varphi\right|,$$

$$w_\rho = \overbrace{\ddot{\rho}}^{0} - \overbrace{\rho}^{R}\dot{\varphi}^2 = -R\dot{\varphi}^2 = -w_n\,.$$

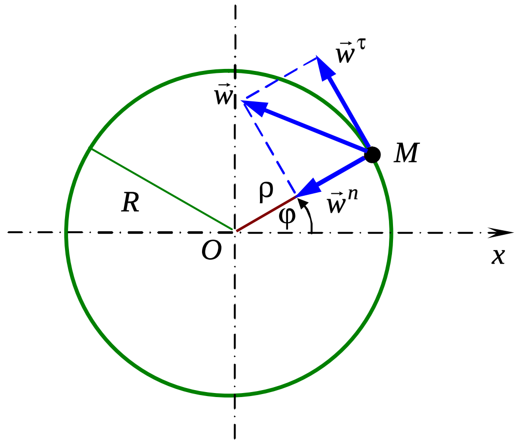


Рис. 7

В круговом движении величина скорости, касательного и нормального ускорения точки совпадает с модулем, соответственно, трансверсальной проекции скорости, трансверсальной и радиальной проекции ускорения, причем последняя всегда отрицательна.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает кинематика?
2. Какие задачи решает кинематика?
3. Что называется траекторией точки?
4. Какие кинематические способы задания движения точки существуют и в чем состоит каждый из этих способов?

5. Как определить траекторию при векторном способе задания движения?

6. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

7. Как определить скорость точки при разных способах задания движения? Какое направление имеет вектор скорости?

8. Как определить ускорение при векторном и координатном способах задания движения?

9. Как определить ускорение при естественном способе задания движения?

10. В какой плоскости расположен вектор ускорения точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?

11. Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?

12. Как классифицируются движения точки по ускорениям?

13. Какие составляющие ускорения имеет точка, двигаясь равномерно по криволинейной траектории?

14. Какие составляющие ускорения имеет точка при неравномерном и прямолинейном движении?

15. Какие составляющие ускорения имеет точка при криволинейном и неравномерном движении?

ГЛАВА 2
ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

1. СВЯЗИ

1.1. Свободные и не свободные системы

Рассмотрим движение системы материальных точек M_i, $i = 1, 2, \cdots, N$. Набор векторов $\overline{r}_i$, $\overline{v}_i$, $i = 1, \cdots, N$, где $\overline{r}_i$, $\overline{v}_i$ – радиус-вектор и вектор скорости i-й точки (**рис. 1**), описывает положение системы точек. В частности, при $N = 1$ система вырождается в точку.

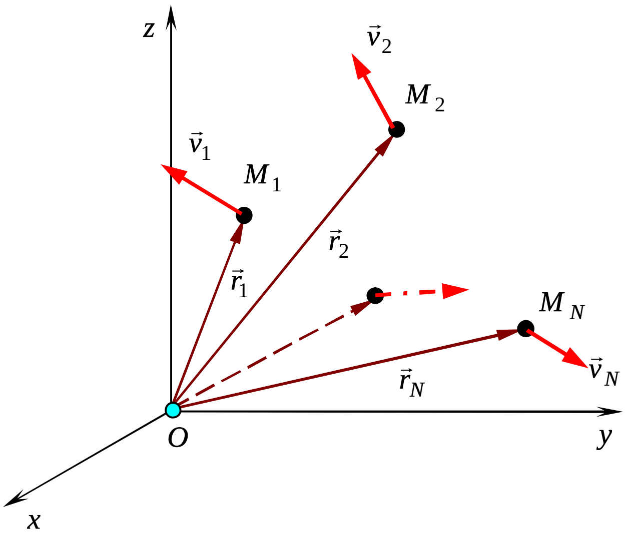


Рис. 1

Определение 1. ***Ограничения, налагаемые на векторы*** $\overline{r}_i, \overline{v}_i, i = 1, \cdots, N$, ***называются связями.***

В случае отсутствия связей говорят, что система свободна. При наличии связей – не свободна.

1.2. Примеры связей

Пример 1. Материальная точка M может двигаться только в фиксированной плоскости p (см. **рис. 2**).

Тогда связь выражается условием $z = 0$. u

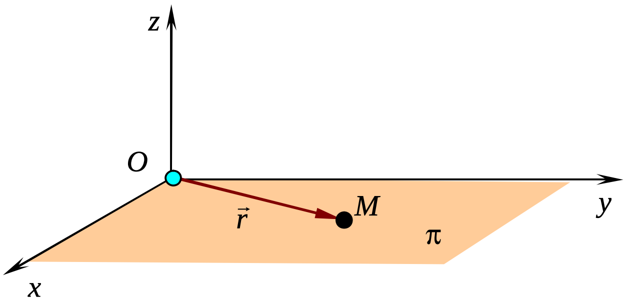


Рис. 2

Пример 2. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ (**рис. 3**).

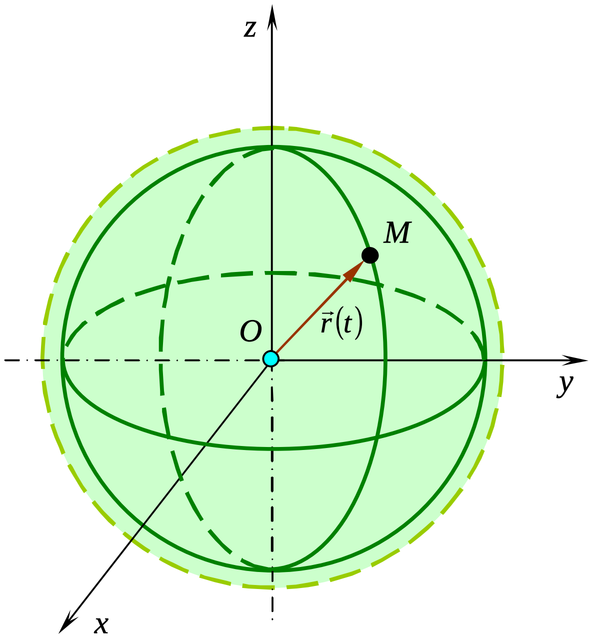


Рис. 3

Математическое выражение для связи здесь имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0. \text{ u}$$

Пример 3. Две материальные точки M_1, M_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l (**рис. 4**).

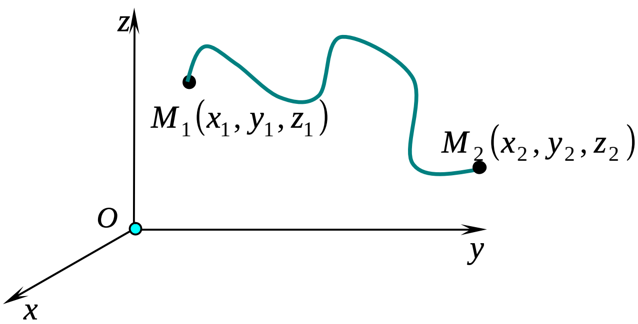


Рис. 4

Математическая запись данной связи приведена ниже:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \le l^2. \text{ u}$$

Пример 4. Конек движется по льду. Скорость его центра все время параллельна лезвию (**рис. 5**).

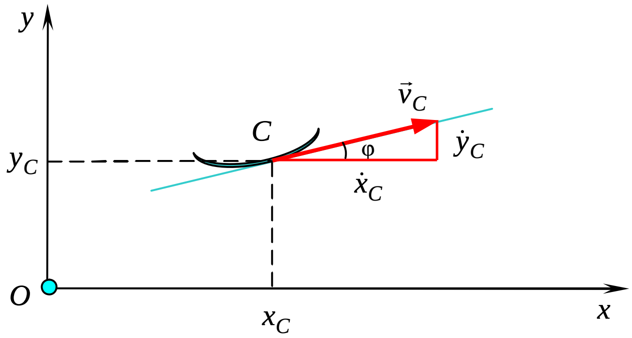


Рис. 5

Обозначим через j угол, который лезвие конька образует с осью Ox. Тогда математическое выражение для этого условия имеет вид

$$\dot{y}_C = \dot{x}_C \, tg j. \text{ u}$$

1.3. Классификация связей

В общем случае математическое выражение для связи имеет вид

$$f\left(t, \bar{r}_1, \cdots, \bar{r}_N, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_N\right) \le 0. \tag{1}$$

Определение 2. ***Связь называется удерживающей (неосвобождающей),*** **если** ***в соотношении (1) имеет место только знак равенства. В противном случае связь называется неудерживающей (освобождающей).***

Примеры 1, 2, 4 служат примерами удерживающих связей, а пример 3 – неудерживающей.

Определение 3. ***Связь называется стационарной или склерономной, если левая часть равенства (1) не зависит явно от времени*** t***. В противном случае связь называется нестационарной (реономной).***

Связи из примеров 1 и 3 являются стационарными, а из примера 2 – нестационарной. Связь из примера 4 $\left(\dot{y} = \dot{x} \, tg j\right)$ будет стационарной, если $j = const$, и нестационарной, если $j = j\left(t\right) \ne const$.

Определение 4. ***Связь называется геометрической (конечной), если левая часть равенства (1) не содержит скоростей точек. В противном случае эта связь называется дифференциальной.***

Примеры 1, 2, 3 служат примерами геометрических связей, а пример 4 – дифференциальной связи.

Определение 5. ***Дифференциальная связь называется интегрируемой, если ее можно заменить эквивалентной геометрической (путем интегрирования).***

Определение 6. ***Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называются голономными, а неинтегрируемые дифференциальные – неголономными связями.***

Связь, приведенная в примере 4 $\left(\dot{y} = \dot{x}\,tg j\right)$, будет голономной, если $j = const$, и неголономной, если этот угол переменный. В первом случае эта связь приводится к виду

$$y = x \cdot tg j + const,$$

т.е. к геометрическому виду.

Определение 7. ***Система материальных точек называется голономной системой, если на нее наложены только голономные связи. В противном случае она называется неголономной.***

Таким образом, в примере 1 связь голономная, стационарная и удерживающая, в примере 2 – голономная, нестационарная и удерживающая. В примере 3 – голономная, стационарная неудерживающая, в примере 4 $\left(\dot{y} = \dot{x}\,tg j\right)$ в случае $j = const$ – голономная, стационарная и удерживающая, а в случае $j = j\left(t\right) \neq const$ – неголономная, нестационарная и удерживающая.

В дальнейшем будем изучать только голономные механические системы. Пусть на систему, состоящую из N точек, наложено r голономных связей.

Определение 8. ***Величина $n = 3N - r$ называется числом степеней свободы данной системы материальных точек.***

Для того чтобы система могла двигаться, требуется $n > 0$.

2. ОГРАНИЧЕНИЯ, НАЛАГАЕМЫЕ СВЯЗЯМИ

2.1. Возможные положения, скорости и ускорения

Пусть на систему наложены голономные связи:

$$f_a\left(t, \overline{r}_1, \cdots, \overline{r}_N\right) = 0, \quad a = 1, \cdots, r. \tag{1}$$

Определение 1. ***Набор векторов $\overline{r}_i^{\,*}, i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяющих уравнениям (1) при $t = t^*$, назовем возможным положением системы в момент времени t^*.***

Продифференцируем (1) по времени. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i} \cdot \overline{v}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r. \tag{2}$$

Определение 2. ***Совокупность векторов $\overline{v}_i^{\,*}, i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяющих уравнениям (2), в момент времени t^* и при $\overline{r}_i = \overline{r}_i^{\,*}, i = 1, 2, \ldots, N$, назовем возможными скоростями системы в момент времени t^* в возможном положении $\overline{r}_i = \overline{r}_i^{\,*}, i = 1, 2, \ldots, N$.***

Продифференцируем равенства (2) по времени. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i} \cdot \overline{w}_i + F_\alpha\left(t, \overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_N\right) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r. \tag{3}$$

Определение 3. ***Совокупность векторов*** $\overline{w}_i^*, i = 1, 2, \ldots, N$, ***удовлетворяющих уравнениям (3) в момент времени*** t^* ***и при*** $\overline{r}_i = \overline{r}_i^*, \overline{v}_i = \overline{v}_i^*$, назовем ***возможными ускорениями системы в момент времени*** t^* ***в возможном положении*** $\overline{r}_i = \overline{r}_i^*, i = 1, 2, \ldots, N$, ***для возможных скоростей*** $\overline{v}_i = \overline{v}_i^*, i = 1, 2, \ldots, N$.

Аналогичным образом можно определить «возможные» производные высших порядков радиус-векторов точек системы в фиксированный момент времени.

2.2. Возможные и действительные перемещения

Рассмотрим два близких момента времени t^* и $t_1^* = t^* + \Delta t$. Пусть $\vec{r}_i^*$, $\vec{r}_{i1}^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) – возможные положения системы в эти моменты времени.

Определение 4. ***Набор векторов*** $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i1}^* - \vec{r}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) ***будем называть возможным перемещением системы.***

Возможное перемещение системы можно получить, полагая

$$\Delta\overline{r}_i = \overline{v}_i^* \Delta t + \frac{1}{2} \overline{w}_i^* \Delta t^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{1}$$

Здесь $\vec{v}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) – возможные скорости для возможного положения $\vec{r}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) в момент времени t^*, $\vec{w}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) – возможные ускорения для допустимого положения $\vec{r}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) и возможных скоростей $\vec{v}_i^*$ ($i = 1, 2, ..., N$) в момент времени t^* и т. д. Перебирая все «возможные» скорости, ускорения и производные радиус-векторов высших порядков ее точек, из формулы (1) получим всю совокупность «возможных» перемещений системы из начального возможного положения.

Действительное положение системы, действительные скорости, ускорения, а также производные радиус-векторов ее точек высших порядков принадлежат числу возможных. Тогда, как видно из (1), действительное перемещение системы принадлежит числу возможных перемещений. Действительные перемещения будем обозначать символом $d\overline{r}_i,\ i = 1, 2, \cdots, N$, а приращение времени – dt.

Выведем условия, которым должны удовлетворять возможные перемещения системы. Ограничиваясь в разложении (1) только членами первого порядка, придем к равенствам

$$\Delta\overline{r}_i = \overline{v}_i^* \Delta t, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{2}$$

В равенствах (2) п.2.1 полагаем $t = t^*$, $\vec{r}_i = \vec{r}_i^*$, $\vec{v}_i = \vec{v}_i^*$, $i = 1, ..., N$, и умножаем их на Δt. В результате получим искомые условия

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar r_i}\right)^{*}\cdot\overbrace{\bar v_i\Delta t}^{\Delta \bar r_i}+\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^{*}\Delta t=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar r_i}\right)^{*}\cdot\Delta \bar r_i+\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^{*}\Delta t=0,\quad a=1,\cdots,r. \tag{3}$$

Символ «*» в обозначении функции означает, что ее аргументом является набор $t^*,\bar r_1^{\,*},\cdots,\bar r_N^{\,*}$.

2.3. Виртуальные перемещения

Пусть $\bar r_1^{\,*},\cdots,\bar r_N^{\,*}$ – возможное положение системы в момент времени t^*.

Определение 5. ***Виртуальным перемещением системы называется совокупность величин*** $d\,\bar r_i, i=1,\cdots,N$ ***, удовлетворяющая условиям***

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar r_i}\right)^{*}\cdot d\,\bar r_i=0,\quad a=1,\cdots,r. \tag{1}$$

Виртуальных перемещений бесконечно много. Виртуальные перемещения, вообще говоря, не являются возможными и совпадают с ними тогда и только тогда, когда связи стационарны. В последнем случае к виртуальным перемещениям принадлежат и действительные перемещения. Геометрический смысл виртуальных перемещений состоит в том, что система перемещается в соответствии со связями, замороженными во времени (**рис. 1**).

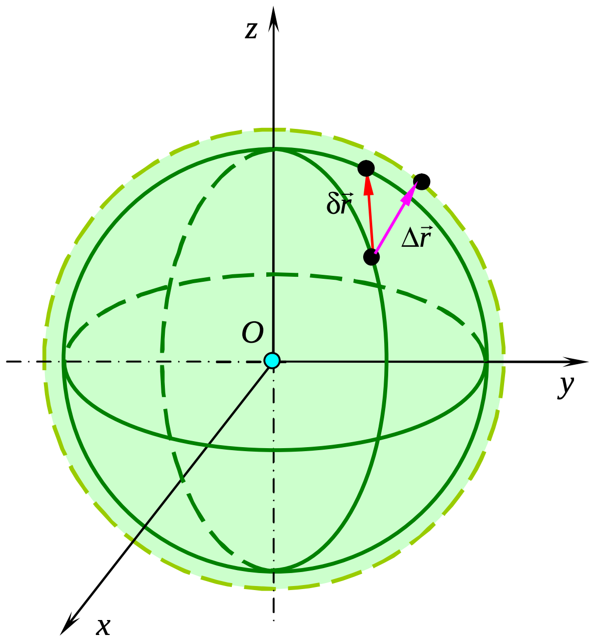


Рис. 1

Виртуальные перемещения еще называют ***синхронными вариациями,*** т.е. вариациями при фиксированном времени. Векторному виртуальному перемещению соответствует $d\bar r_i$ – тройка скалярных виртуальных перемещений $d\,x_i, d\,y_i, d\,z_i$.

2.4. Варьирование по Журдену и Гауссу

Пусть $t^*, \bar{r}_1^*, \cdots, \bar{r}_N^*$ – возможное положение системы. Рассмотрим две совокупности возможных перемещений:

$$\Delta\bar{r}_i = \bar{v}_i^*\Delta t + \frac{1}{2}\bar{w}_i^*\Delta t^2 + \cdots, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{1}$$

$$\Delta_1\bar{r}_i = \bar{v}_{1i}^*\Delta t + \frac{1}{2}\bar{w}_{1i}^*\Delta t^2 + \cdots, \quad i = 1, \cdots, N\,. \tag{2}$$

Вычтем из равенства (2) равенство (1). В результате получим

$$\Delta_1\bar{r}_i - \Delta\bar{r}_i = \left(\bar{v}_{1i}^* - \bar{v}_i^*\right)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\bar{w}_{1i}^* - \bar{w}_i^*\right)\Delta t^2 + \cdots, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{3}$$

Обозначим

$$d\,\bar{r}_i = \Delta_1\bar{r}_i - \Delta\bar{r}_i, \quad d\,\bar{v}_i^* = \bar{v}_{1i}^* - \bar{v}_i^*, \quad d\,\bar{w}_i^* = \bar{w}_{1i}^* - \bar{w}_i^*, \cdots, \qquad i = 1, \ldots, N\,, \tag{4}$$

и перепишем равенство (3) в виде

$$d\,\bar{r}_i = d\bar{v}_i^*\Delta t + \frac{1}{2}d\,\bar{w}_i^*\Delta t^2 + \cdots, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{5}$$

Пусть $d\,\bar{v}_i^* \neq 0, i = 1, \cdots, N$. Величины $d\,\bar{r}_i, n = 1, \cdots, N$ из (5) в этом случае будем называть ***вариациями по Журдену***. Покажем, что вариации по Журдену являются синхронными вариациями, т.е. удовлетворяют (1) п. 2.3. Действительно, из (5) приближенно выводим

$$d\,\bar{r}_i = d\,\bar{v}_i^*\Delta t \quad \Rightarrow \quad d\,\bar{v}_i^* = \frac{d\,\bar{r}_i}{\Delta t}, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{6}$$

В силу определения допустимых скоростей (2) п. 2.1 справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar{r}_i}\right)^* \cdot \bar{v}_i^* + \left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^* = 0, \quad a = 1, \cdots, r, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar{r}_i}\right)^* \cdot \bar{v}_{1i}^* + \left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^* = 0, \quad a = 1, \cdots, r. \tag{8}$$

Из равенства (8) вычитаем равенство (7). С учетом $d\,\bar{v}_i^* = \bar{v}_{1i}^* - \bar{v}_i^*$ получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar{r}_i}\right)^* \cdot \overbrace{d\,\bar{v}_i^*}^{(6)\Rightarrow\frac{d\,\bar{r}_i}{\Delta t}} = 0, \quad a = 1, \cdots, r. \tag{9}$$

В силу (6) из (9) следует искомое (1) п. 2.3.

Пусть теперь

$$d\,\bar{v}_i^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_i^* = \bar{v}_{1i}^*, \quad d\,\bar{w}_i^* = \bar{w}_{1i}^* - \bar{w}_i^* \neq 0, \quad i = 1, \cdots, N.$$

Величины $d\,\overline{r}_i,\, i=1,\cdots,N$, в силу (5) принимают вид

$$d\,\overline{r}_i = \frac{1}{2} d\,w_i^* \Delta t^2 + \cdots, \quad i=1,\cdots,N.$$

Будем называть их ***вариациями по Гауссу***. Покажем, что вариации по Гауссу являются синхронными вариациями. Действительно, для вариаций по Гауссу приблизительно выполняется

$$d\,\overline{r}_i = \frac{1}{2} d\,\overline{w}_i^* \Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad d\,\overline{w}_i^* = \frac{2d\,\overline{r}}{\Delta t^2}, \quad i=1,\cdots,N. \tag{10}$$

Из определения допустимых ускорений (3) п. 2.1 следует

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \overline{r}_i}\right)^* \cdot \overline{w}_{i1}^* + \left(F_a\right)^* = 0, \quad a=1,\cdots,r, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \overline{r}_i}\right)^* \cdot \overline{w}_i^* + \left(F_a\right)^* = 0, \quad a=1,\cdots,r. \tag{12}$$

Из равенства (11) вычтем равенство (12). С учетом $d\,\overline{w}_i^* = \overline{w}_{1i}^* - \overline{w}_i^*$ получим

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \overline{r}_i}\right)^* \cdot \overbrace{d\,\overline{w}_i^*}^{(10)\Rightarrow \frac{2d\,\overline{r}_i}{\Delta t^2}} = 0, \quad a=1,\cdots,r. \tag{13}$$

В силу (10) из (13) следует искомое (1) п. 2.3.

3. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

3.1. Обобщенные координаты

Рассмотрим несвободную систему с r голономными связями. Будем предполагать, что указанные связи независимы, т. е. что ни одна из них не является линейной комбинацией остальных.

Определение 1. ***Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называется числом независимых обобщенных координат системы.***

Очевидно, что для голономных систем число независимых обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы $n = 3N - r$.

Пусть для набора параметров $\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \in Q \subset R^n$ выполнены следующие условия.

1) В любой момент времени t определена однозначная зависимость

$$\overline{r}_i^* = \overline{r}_i\left(t, q_1, q_2, \cdots, q_n\right), \quad i=1,\cdots,N, \tag{1}$$

где $\overline{r}_i^*,\, i=1,\cdots,N$, – допустимое положение системы в момент времени t.

2) Зависимость (1) дважды непрерывно дифференцируемая.

3) Справедливо равенство

$$rang\left.\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}}^{n}\right\}^{3N} = n. \qquad (2)$$

Определение 2. ***Набор параметров, удовлетворяющих свойствам 1)–3), называется обобщенными координатами системы.***

В общем случае от выполнения равенства (2) для всех допустимых положений системы можно отказаться. Достаточно ввести локальные обобщенные координаты. Это означает, что для различных совокупностей возможных положений системы вводятся различные системы обобщенных координат. При этом для каждой локальной области условие 3) выполняется.

Заметим, что если система склерономна, то обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы в зависимости (1) не присутствовало время, т. е. имело место

$$\bar{r}_i^* = \bar{r}_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right), \quad i = 1, \cdots, N .$$

3.2. Координатное пространство

Определение 3. Множество $Q \subset R^n$ называют ***координатным пространством параметров*** $q_1, \cdots, q_n$ ***некоторой механической системы, если каждому возможному положению системы соответствует изображающая точка из этого множества.***

В силу непрерывной зависимости (1) п. 3.1 из близости возможных положений системы следует близость их изображающих точек.

Пример 1. ***Точка на плоскости.*** Координатное пространство – сама плоскость

$$\left(q_1, q_2\right) \in Q = R^2.$$ u

Пример 2. ***Система из*** N ***свободных точек.*** Координатное пространство $3N$-мерное пространство

$$\left(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}\right) \in Q = R^{3N}.$$ u

Пример 3. ***Математический маятник*** **(рис. 1)** [1].

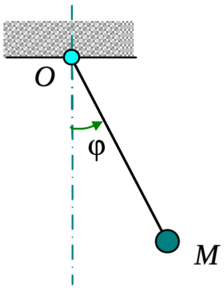


Рис. 1

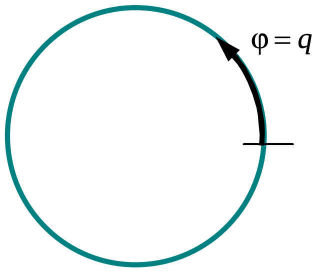


Рис. 2

Поставим каждому положению маятника точку на числовой оси, имеющую координату j . Такое соответствие между положением маятника и точками числовой оси не будет взаимно однозначным, т. к. разным точкам оси j и $j + 2p\,k,\ k = \pm 1, \pm 2, \cdots$ соответствует одно и тоже положение маятника. Однозначности можно добиться, выделив на числовой оси полуоткрытый интервал $\left[0, 2p\right)$. Однако при этом нарушается непрерывность соответствия, т. к. два близких положения маятника, для которых $j = 0$ и $j = 2p - e$ не будут соответствовать близким точкам на выделенном полуинтервале. Для восстановления непрерывности, нужно считать $j = 0$ и $j = 2p$ тождественными. Наглядно это можно сделать, склеив точки $j = 0$ и $j = 2p$. Полученный геометрический образ – окружность и будет координатным пространством маятника (**рис. 2**). u

Пример 4. ***Двойной математический маятник*** **(рис. 3)** [1].

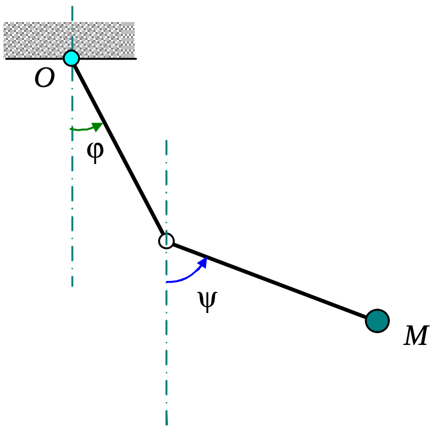


Рис. 3

За обобщенные координаты возьмем углы j и y , образуемые стержнями с вертикалью. Каждому положению маятника ставятся в соответствие значения углов j и y , определенных с точностью до чисел, кратных $2p$. Тогда квадрат в плоскости j, y со стороной $2p$, в котором отождествлены противоположные стороны, может служить координатным пространством двойного математического маятника. После «склеивания» одной пары противоположных сторон получится цилиндр, а после «склеивания» второй пары сторон – тор (см. **рис. 4**). Он и будет служить координатным пространством двойного математического маятника. u

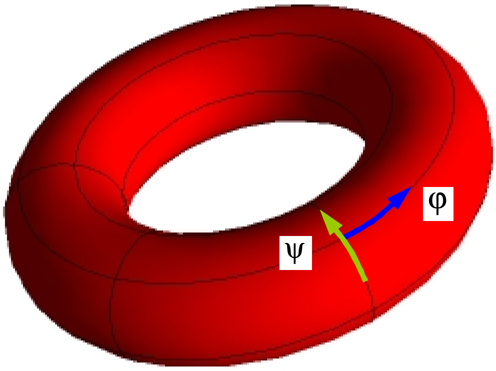


Рис. 4

3.3. Обобщенные скорости и ускорения

В процессе движения системы ее обобщенные координаты меняются во времени.

Определение 4. ***Величины*** $\dot{q}_s, \ddot{q}_s,\ s = 1, 2, \cdots, n$, ***называются обобщенными скоростями и обобщенными ускорениями соответственно.***

Выразим скорости и ускорения точек системы через обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения. Последовательно вычисляем

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right), \quad i = 1, \cdots, N, \tag{1}$$

$$\overline{v}_i = \dot{\overline{r}}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overline{r}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \overline{r}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)}{\partial t}, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{2}$$

$$\overline{w}_i = \ddot{\overline{r}}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right) = \frac{d}{dt}\dot{\overline{r}}_i = \frac{d}{dt}\left[\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overline{r}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \overline{r}_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_s \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_k\right)\dot{q}_s + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s\right] + \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial t^2} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial t \partial q_s}\dot{q}_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{k,s=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_k\,\dot{q}_s + 2\cdot\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial t \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{3}$$

Связи, наложенные на систему, также могут быть записаны в терминах обобщенных координат и их скоростей. Из голономной связи $f_a\left(t, \overline{r}_1, \cdots, \overline{r}_N\right) = 0$ в силу (1) находим

$$f_a\left(t, \overline{r}_1\left(t, q_1, \cdots, q_n\right), \cdots, \overline{r}_N\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_a\left(t, q_1, \cdots, q_n\right) = 0, \quad a = 1, \cdots, r.$$

Для голономных систем обобщенные координаты и их скорости независимы, поэтому вариациями обобщенных координат $d\,q_s, i = 1, \cdots, n$, могут служить любые наборы чисел. Из равенства (1) находим $\quad d\,\overline{r}_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_s} d\,q_s, \quad i = 1, \cdots, N.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью? Приведите примеры связей.
2. Какая классификация связей существует?
3. Что такое возможные положения, скорости и ускорения?
4. Как определяются возможные, действительные и виртуальные перемещения? Чем они различаются?
5. В чем заключается варьирования по Журдену?
6. В чем заключается варьирование по Гауссу?
7. Что такое обобщенные координаты?
8. Что такое координатное пространство? Приведите примеры.
9. Как определяются обобщенные скорости?
10. Как определяются обобщенные ускорения?

ГЛАВА 3. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ПОНЯТИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Абсолютно твердое тело как голономная связь

На интуитивном уровне понятие абсолютно твердого тела достаточно прозрачно. Приведем формальное определение абсолютно твердого тела.

Определение 1. ***Система материальных точек, взаимные расстояния между которыми остаются неизменными в процессе движения, называется абсолютно твердым телом.***

Таким образом, понятие абсолютно твердого тела выражает собой голономную стационарную связь.

Теорема 1. ***Свободное абсолютно твердое тело, содержащее не менее трех точек, не лежащих на одной прямой, имеет 6 (шесть) степеней свободы.***

Доказательство. Для описания движения точки P_1 требуется три параметра. Например, три ее декартовые координаты: (x_1, y_1, z_1). Для второй точки P_2 – тоже три параметра (x_2, y_2, z_2). Из указанных шести параметров независимыми являются только 5, так как по определению абсолютно твердого тела в любой момент времени должно выполняться равенство

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = const. \tag{1}$$

Для описания движения точки P_3 требуется еще три параметра (x_3, y_3, z_3). Пусть точка P_3 не лежит на прямой P_1P_2. Тогда независимых координат у нее будет только одна, поскольку в любой момент времени имеют место равенства

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = const, \tag{2}$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = const. \tag{3}$$

Положение остальных точек определяется точками P_1, P_2, P_3 однозначно и для этого не требуется дополнительных параметров. Таким образом, независимых параметров получилось $9 - 1 - 2 = 6$. Теорема доказана. ¢

В случае когда точка P_3 лежит на прямой P_1P_2, к условиям (2), (3) добавляется условие принадлежности точки P_3 прямой P_1P_2, состоящее в том, что ее координатами являются линейные комбинации координат точек P_1 и P_2, поэтому среди них нет независимых. Отсюда следует, что если абсолютно твердое тело – стержень, т. е. все его точки находятся на одной прямой, то оно имеет 5 (пять) степеней свободы.

Тело, в процессе движения которого ровно одна его точка остается неподвижной, имеет три степени свободы. Действительно, положение неподвижной точки $O \div \left(x_O,\ y_O,\ z_O\right)$ определяется тремя условиями:

$$x_O = const,\ y_O = const,\ z_0 = const,$$

поэтому число степеней свободы тела будет $6-3=3$.

Пусть теперь в процессе движения две точки $O_1 \div \left(x_{O_1},\ y_{O_1},\ z_{O_1}\right)$ и $O_2 \div \left(x_{O_2},\ y_{O_2},\ z_{O_2}\right)$ остаются неподвижными. Тогда должны иметь место равенства

$$\begin{gathered} x_{O_1} = const, \quad y_{O_1} = const, \quad z_{O_1} = const, \\ x_{O_2} = const, \quad y_{O_2} = const, \quad z_{O_2} = const. \end{gathered} \tag{4}$$

В силу условия

$$\left(x_{O_1} - x_{O_2}\right)^2 + \left(y_{O_1} - y_{O_2}\right)^2 + \left(z_{O_1} - z_{O_2}\right)^2 = const$$

только пять равенств в (4) являются независимыми. Число степеней свободы для твердого тела с двумя неподвижными точками определяется по формуле $6-5=1$.

1.2. Мгновенное распределение скоростей и ускорений точек твердого тела

Пусть в момент времени t_1 тело находилось в некотором положении A, а в момент времени t_2 – в положении B (**рис. 1**).

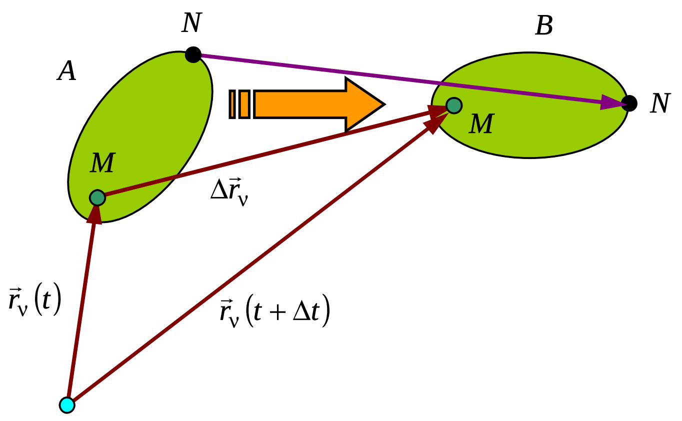


Рис. 1

Будем говорить тогда, что тело совершило перемещение из положения A в положение B за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Перемещение рассматривается в отвлечении от промежуточных положений тела. В общем случае различные точки тела совершают различные перемещения. В силу равенств

$$\overline{v}_n\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}_n\left(t+\Delta t\right) - \overline{r}_n\left(t\right)}{\Delta t}, \quad \overline{w}_n\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{v}_n\left(t+\Delta t\right) - \overline{v}_n\left(t\right)}{\Delta t}$$

различные точки тела будут иметь различные скорости и ускорения. Основной задачей кинематики абсолютно твердого тела является определение мгновенного распределения скоростей и ускорений его точек в любой момент времени. Степень сложности решения этой задачи зависит от характера движения тела.

2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Перемещение твердого тела при поступательном движении

Поступательное движение является наиболее простым видом движения твердого тела.

Определение 1. ***Перемещение твердого тела на некотором промежутке времени назовем поступательным, если перемещения любых его точек на том же промежутке времени геометрически (векторно) попарно равны между собой.***

Теорема 1. ***При поступательном перемещении тела любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.***

Доказательство. Выберем две точки A и B произвольной прямой, связанной с телом. Из **рис. 1** видно, что перемещением точки A является вектор $\overline{AA'}$, а перемещением точки B – вектор $\overline{BB'}$. По определению поступательного перемещения эти вектора равны между собой. Тогда четырехугольник $ABB'A'$ является параллелограммом и выбранная прямая сместилась параллельно самой себе. Теорема доказана. ¢

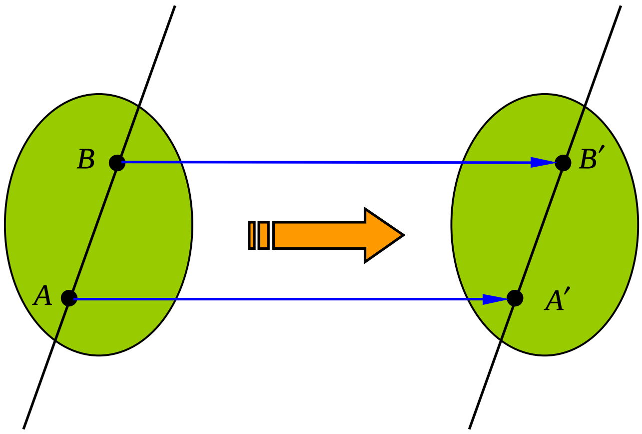


Рис. 1

Определение 2. ***Движение будем называть поступательным, если его перемещения за любой промежуток времени поступательны.***

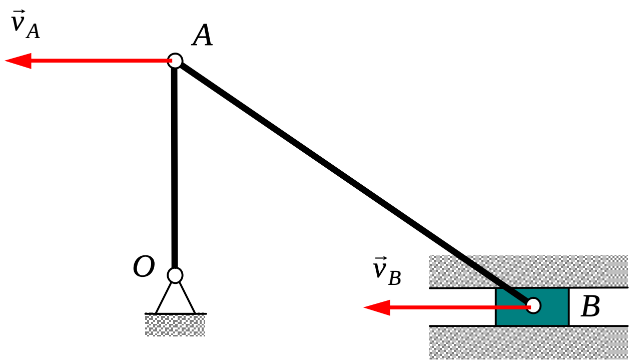
2.2. Поступательное и мгновенно поступательное движение твердого тела

Из **определения 2** следует, что все точки абсолютно твердого тела при поступательном движении очерчивают конгруэнтные траектории (заметим, что траектории при этом не обязаны быть прямыми линиями) и в любой момент времени имеют равные скорости и ускорения.

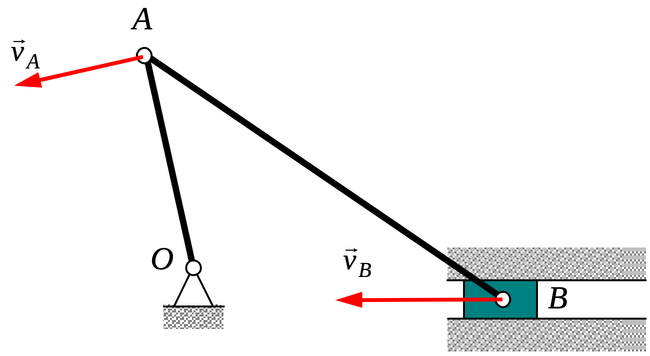
Определение 3. ***Будем говорить, что в данный момент времени тело движется мгновенно поступательно, если в этот момент времени скорости всех точек тела попарно равны между собой.***

Заметим, что если тело движется поступательно, то оно в любой момент времени движется мгновенно поступательно. Однако если в некоторый момент времени тело движется мгновенно поступательно, то это еще не означает, что оно движется поступательно. Например, шатун AB в данный момент движется мгновенно поступательно (**рис. 2, *а***), а в соседний момент времени не поступательно (**рис. 2, *б***).

При мгновенно поступательном движении ускорения точек не обязаны быть попарно равными, а траектории конгруэнтными.



***а*)**



***б*)**

Рис. 2

3. ВРАЩЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

3.1. Неподвижная ось вращения

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. ***Пусть при перемещении твердого тела две его точки остаются неподвижными. Тогда все точки, лежащие на прямой линии, их соединяющей, тоже остаются неподвижными.***

Доказательство. Пусть A и B – неподвижные точки и точка C принадлежит прямой, проходящей через эти точки. Траектория точки C должна одновременно принадлежать и сфере с центром в A, и сфере с центром в B (см. **рис. 1**), что невозможно. Отсюда следует, что точка C неподвижна. ¢

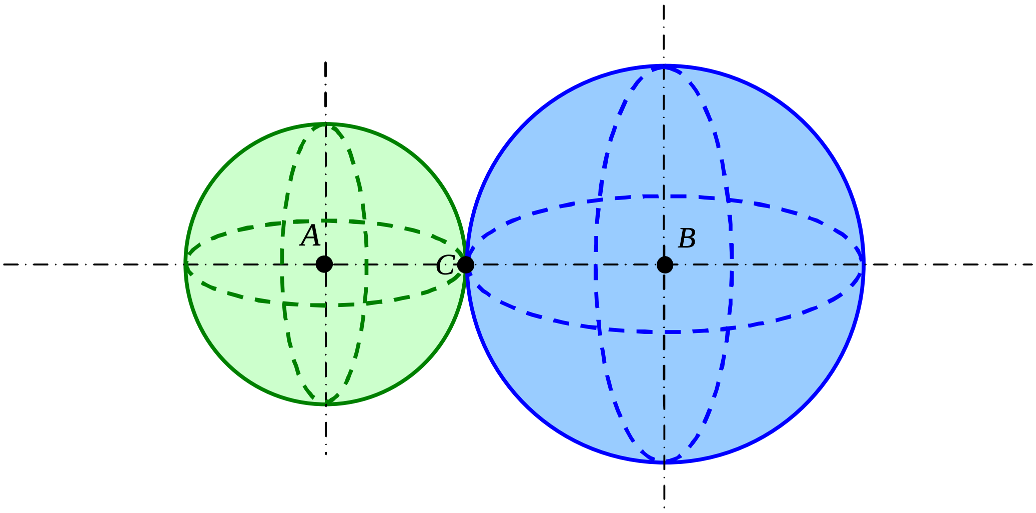


Рис. 1

Определение 1. ***Прямую, проходящую через неподвижные точки, назовем неподвижной осью вращения тела, а само перемещение – поворотом тела относительно неподвижной оси.***

В случае поворота тела относительно неподвижной оси траекторией любой точки тела будет окружность (рис. 2), плоскость которой перпендикулярна оси вращения, ее центр совпадает с точкой пересечения этой плоскости с неподвижной осью вращения, а радиус – с расстоянием точки до оси вращения.

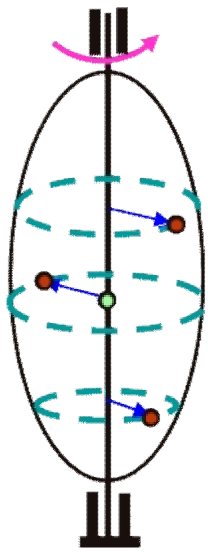


Рис. 2

3.2. Перемещение произвольной точки твердого тела при повороте его относительно неподвижной оси

В процессе поворота за время Δt радиус, соединяющий точку с центром ее траектории, повернется на один и тот же угол Δj для всех точек тела. Это обстоятельство позволяет реализовать следующий способ описания перемещения произвольной точки тела. Введем абсолютную систему отсчета Ωxhz . Начало отсчета Ω поместим на ось вращения, ось Ωz направим вдоль оси вращения, причем так, чтобы вращение тела происходило против хода часовой стрелки, если смотреть на него с острия орта этой оси. С телом свяжем подвижную систему отсчета Ωxyz (**рис. 2**). При этом ось Ωz направим вдоль оси вращения. В начальный момент t оси Ωx и Ωy совпадают с осями Ωx и Ωh соответственно.

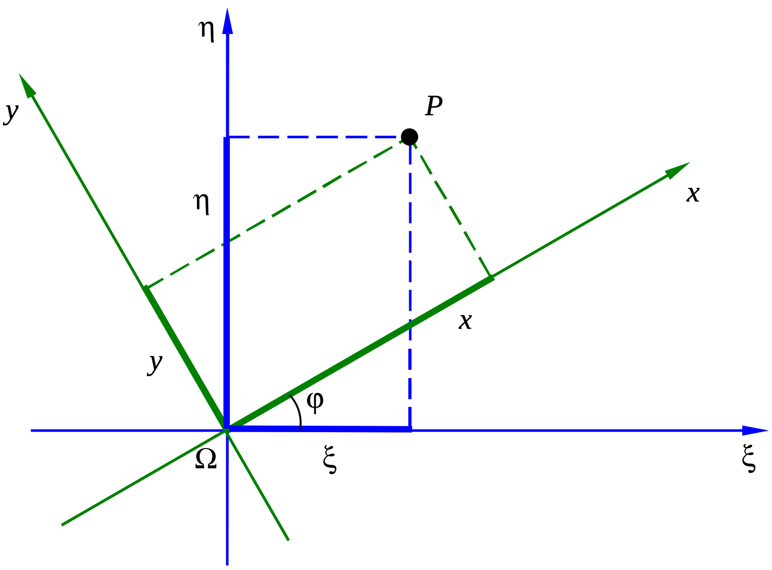


Рис. 2

Пусть P – произвольная точка тела и x, y, z – ее координаты в подвижной системе отсчета. Очевидно, что в процессе перемещения они не меняются. Абсолютные же координаты x, h точки будут изменяться. Заметим, что $z = z = const$. В начальный момент имеют место равенства

$$x(t) = x, \quad h(t) = y, \quad z(t) = z. \tag{1}$$

После перемещения тела координаты точки P в неподвижной системе имеют вид

$$x(t+\Delta t) = x\cos\Delta j - y\sin\Delta j + 0\cdot z,$$

$$h(t+\Delta t) = x\sin\Delta j + y\cos\Delta j + 0\cdot z,$$

$$z(t+\Delta t) = 0\cdot x + 0\cdot y + z.$$

Отсюда в силу (1) выводим

$$x(t+\Delta t) = x(t)\cos\Delta j - h(t)\sin\Delta j + 0\cdot z(t),$$

$$h(t+\Delta t) = x(t)\sin\Delta j + h(t)\cos\Delta j + 0\cdot z(t),$$

$$z\,(t+\Delta t)=0\cdot x\,(t)+0\cdot h\,(t)+z\,(t).$$

Или

$$\begin{pmatrix}\xi(t+\Delta t)\\ \eta(t+\Delta t)\\ \zeta(t+\Delta t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\\ \zeta(t)\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обозначим

$$\bar r\,(t+\Delta t)=\begin{pmatrix}x\,(t+\Delta t)\\ h\,(t+\Delta t)\\ z\,(t+\Delta t)\end{pmatrix},\quad \bar r\,(t)=\begin{pmatrix}x\,(t)\\ h\,(t)\\ z\,(t)\end{pmatrix},\quad A(\Delta j\,)=\begin{pmatrix}\cos\Delta j & -\sin\Delta j & 0\\ \sin\Delta j & \cos\Delta j & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда (2) перепишем в виде

$$\bar r\,(t+\Delta t)=A(\Delta\varphi)\bar r\,(t).$$

Непосредственно проверяется, что

$$A(0)=E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}(\Delta j\,)=A'(\Delta j\,),\quad Det\big[A(\Delta j\,)\big]=1,\quad \Delta j\in[0,2p\,].$$

Таким образом, в проекциях на неподвижную систему для перемещения произвольной точки тела имеем

$$\Delta\bar r\,(t)=\overbrace{\bar r\,(t+\Delta t)}^{A(\Delta j\,)\cdot\bar r(t)}-\bar r\,(t)=\overbrace{A(\Delta j\,)}^{\begin{pmatrix}\cos\Delta j & -\sin\Delta j & 0\\ \sin\Delta j & \cos\Delta j & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\cdot\bar r\,(t)-\overbrace{E}^{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\cdot\bar r\,(t)=$$

$$=\big[A(\Delta\varphi)-E\big]\cdot\bar r\,(t)=\begin{pmatrix}(\cos\Delta\varphi)-1 & -\sin\Delta\varphi & 0\\ \sin\Delta\varphi & (\cos\Delta\varphi)-1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\bar r\,(t). \tag{3}$$

3.3. Скорость произвольной точки тела при вращении его относительно неподвижной оси

По определению скорости точки из (2.3) выводим

$$\bar v\,(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r}{\Delta t}=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(\Delta\varphi)-E}{\Delta t}\right]\cdot\bar r\,(t). \tag{1}$$

С точностью до малых высшего порядка имеем

$$A(\Delta j\,)-E=\begin{pmatrix}(\cos\Delta j\,)-1 & -\sin\Delta j & 0\\ \sin\Delta j & (\cos\Delta j\,)-1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\Delta j & 0\\ \Delta j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (4). В результате получим

$$\bar{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot\begin{pmatrix}0 & -\Delta\varphi & 0\\ \Delta\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\bar{r}(t)=\begin{pmatrix}0 & -\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} & 0\\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\\ \zeta(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -\dot{j} & 0\\ \dot{j} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x(t)\\ h(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h(t)\dot{j}\\ x(t)\dot{j}\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{j}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x(t)\\ h(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \dot{j}\\ x(t) & h(t) & z(t)\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-h(t)\dot{j}\\ x(t)\dot{j}\\ 0\end{pmatrix}\overset{(3)}{\overbrace{=}}\bar{v}(t). \qquad (4)$$

Введем обозначение

$$\bar{w}(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{j}\end{pmatrix}.$$

Определение 2. ***Вектор*** $\bar{w}$ ***называется угловой скоростью вращения тела относительно неподвижной оси.***

Из определения вектора угловой скорости следует, что он направлен вдоль оси вращения тела, причем так, что вращение тела видится с его конца происходящим против хода часовой стрелки (**рис. 3**).

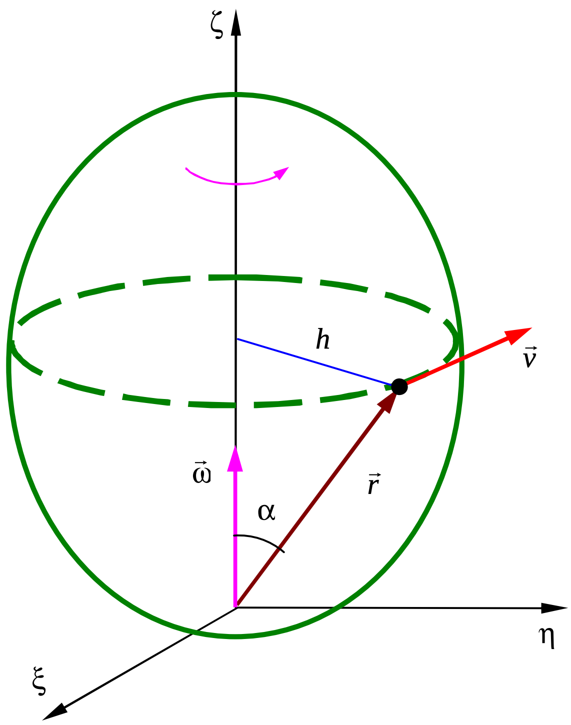


Рис. 3

По величине он равен $\bar{j}$. Из (4) выводим

$$\bar{v}(t) = \bar{w}(t) \times \bar{r}(t). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что

$$v = \left|\bar{\omega}(t) \times \bar{r}(t)\right| = \omega \cdot r(t) \sin\alpha = h\omega, \tag{6}$$

где $h-$ расстояние от точки до оси вращения. Направлен вектор скорости по касательной к траектории.

Пример 1. Точка A шкива, лежащая на его ободе, имеет скорость $v_A = 40$ см/с, а некоторая точка B, взятая на одном радиусе с точкой A, движется со скоростью 10 см/с (**рис. 4**). Определить угловую скорость и радиус шкива, если расстояние $AB = 15$ см.

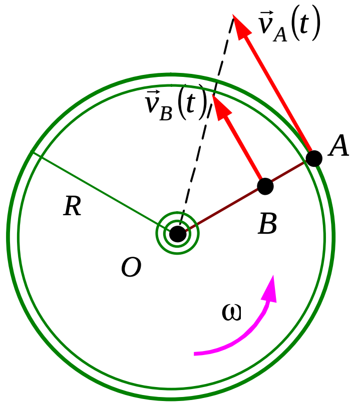


Рис. 4

Решение. Применим формулу (6):

$$\begin{cases} v_A = \omega \cdot OA, \\ v_B = \omega \cdot OB, \end{cases}$$

где $OA = R,\ OB = R - AB$.

Тогда

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{v_B}{R - AB}.$$

Откуда находим

$$v_A(R - AB) = v_B R,$$

$$v_A R - v_B R = v_A AB,$$

$$R = \frac{v_A AB}{v_A - v_B} = \frac{40 \cdot 15}{40 - 10} = 20\,(см),$$

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{40}{20} = 2\ (рад/с).$$

Направление вектора угловой скорости, определенное по формуле (5), схематично изображено на **рис. 4.** ►

3.4. Ускорение произвольной точки тела при вращении его относительно неподвижной оси

По определению ускорения точки находим

$$\bar{w}(t)=\frac{d}{dt}\overbrace{\bar{v}(t)}^{\bar{\varpi}(t)\times\bar{r}(t)}=\frac{d}{dt}\left[\bar{\varpi}(t)\times\bar{r}(t)\right]=\overbrace{\left(\frac{d}{dt}\bar{\varpi}(t)\right)}^{\bar{\varepsilon}(t)}\times\bar{r}(t)+\bar{\varpi}(t)\times\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{r}(t)}^{\bar{v}(t)}=$$

$$=\bar{e}(t)\times\bar{r}(t)+\bar{w}(t)\times\bar{v}(t). \qquad (1)$$

Здесь обозначено

$$\bar{e}(t)=\frac{d}{dt}\bar{w}(t).$$

Определение 3. ***Вектор $\bar{e}$ называется угловым ускорением вращения тела относительно неподвижной оси.***

Заметим, что

$$\bar{e}(t)=\frac{d}{dt}\bar{w}(t)=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{j}\end{pmatrix}.$$

Вектор углового ускорения $\bar{e}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{j}\end{pmatrix}$ направлен вдоль неподвижной оси вращения. Из формулы (1) следует, что вектор ускорения точки можно представить в виде векторной суммы двух слагаемых: $\bar{e}\times\bar{r}$ и $\bar{w}\times\bar{v}$. Рассмотрим подробнее каждое из них.

Определение 4. ***Вектор $\bar{w}^{вр}=\bar{e}\times\bar{r}$ называется вращательным ускорением точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси.***

Вектор вращательного ускорения направлен по касательной к траектории точки (см. **рис. 5**), а по величине равен

$$w^{вр}=\left|\bar{e}\times\bar{r}\right|=e\,r\sin a=\ddot{j}\,h,$$

где h – расстояние от точки до оси вращения.

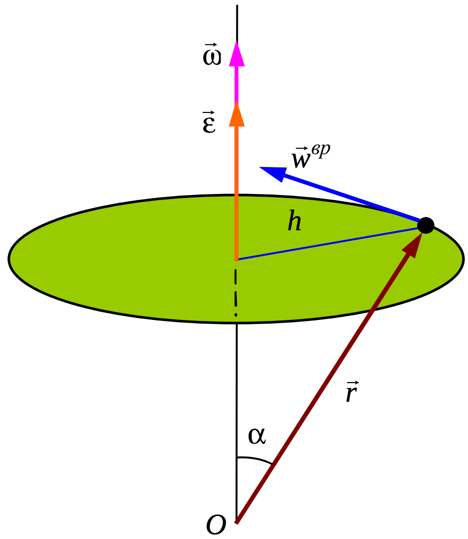


Рис. 5

Преобразуем второе слагаемое в (1) по формуле

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\overline{b}\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)-\overline{c}\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right).$$

Имеем

$$\overline{w}\times\overbrace{\overline{v}}^{\overline{w}\times\overline{r}} = \overbrace{\overline{w}}^{\overline{a}}\times\left(\overbrace{\overline{w}}^{\overline{b}}\times\overbrace{\overline{r}}^{\overline{c}}\right) = \overbrace{\overline{b}}^{\overline{w}}\left(\overbrace{\overline{a}}^{\overline{w}}\cdot\overbrace{\overline{c}}^{\overline{r}}\right) - \overbrace{\overline{c}}^{\overline{r}}\left(\overbrace{\overline{a}}^{\overline{w}}\cdot\overbrace{\overline{b}}^{\overline{w}}\right) = \overbrace{\overline{w}}^{\overline{w}_0 w}\left(\overbrace{\overline{w}}^{\overline{w}_0 w}\cdot\overline{r}\right) - \overline{r}\overbrace{\left(\overline{w}\cdot\overline{w}\right)}^{w^2} =$$

$$=\overline{w}_0 w\left(w\overbrace{\overline{w}_0\cdot\overline{r}}^{r_w}\right) - \overline{r}w^2 = w^2 r_w\,\overline{w}_0 - \overline{r}w^2 = w^2\left[\overbrace{r_w\,\overline{w}_0}^{\overline{r}_w} - \overline{r}\right] = w^2\left[\overline{r}_w - \overline{r}\right] = w^2\overline{h}.$$

Здесь обозначено: $r_w = \overline{r}\cdot\overline{w}_0$ – проекция вектора $\overline{r}$ на неподвижную ось (**рис. 6**).

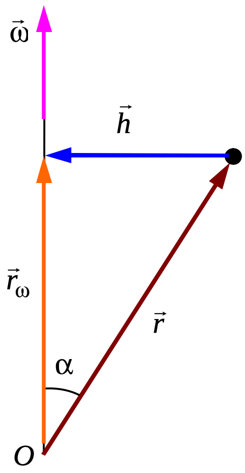


Рис. 6

Заметим, что вектор $\overline{h}$ направлен от точки к оси вращения.

Определение 5. ***Вектор*** $\overline{w}^{oc} = \overline{w}\times\overline{v} = w^2\overline{h}$ ***называется осестремительным ускорением точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси.***

Из определения видно, что осестремительное ускорение всегда направлено в сторону оси вращения (**рис. 7**), а по величине $w^{oc} = w^2 h$.

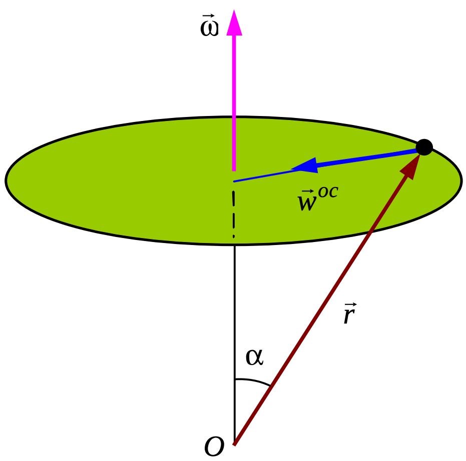


Рис. 7

Разложение вектора ускорения $\overline{w}$ на вращательную $\overline{w}^{вр}$ и осестремительную $\overline{w}^{ос}$ составляющие показано на **рис. 8.**

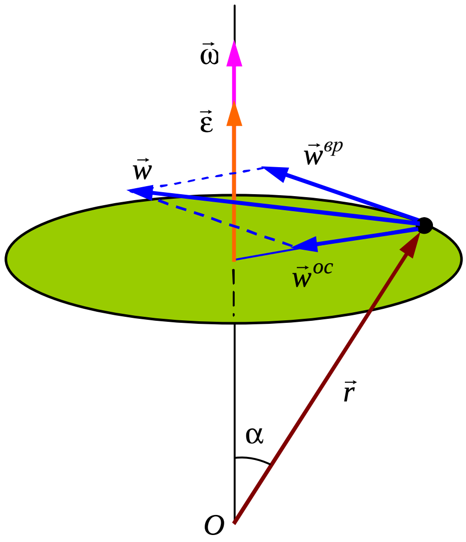


Рис. 8

Для тела, вращающегося относительно неподвижной оси, траекториями всех его точек будут окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения тела, а центры лежат на этой оси, поэтому направление вращательного ускорения точки совпадает с касательной к траектории, а направление осестремительного ускорения – с нормалью к траектории точки. Таким образом, в данном случае вращательное ускорение является касательным ускорением, а осестремительное – нормальным ускорением точки.

В силу $\overline{w} = \overline{w}^{вр} + \overline{w}^{ос}$, $\overline{w}^{вр} \perp \overline{w}^{ос}$ выводим

$$w = \sqrt{\left(w^{вр}\right)^2 + \left(w^{ос}\right)^2} = h\sqrt{e^2 + w^4}.$$

4. ВРАЩЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

4.1. Углы Эйлера

Пусть в процессе перемещения абсолютно твердого тела одна его точка остается неподвижной. Введем абсолютную систему отсчета $Oxhz$, поместив ее начало в неподвижную точку. С телом свяжем систему $Oxyz$ так, чтобы в начальный момент времени t она совпадала с абсолютной системой (см. **рис. 1**).

В конце перемещения, в момент времени $t + \Delta t$, системы координат по-прежнему будут иметь общее начало, а координатные оси повернутся относительно друг друга (см. **рис. 2**).

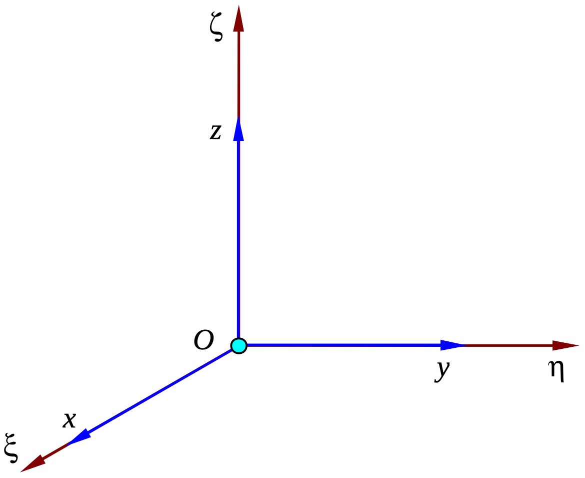


Рис. 1

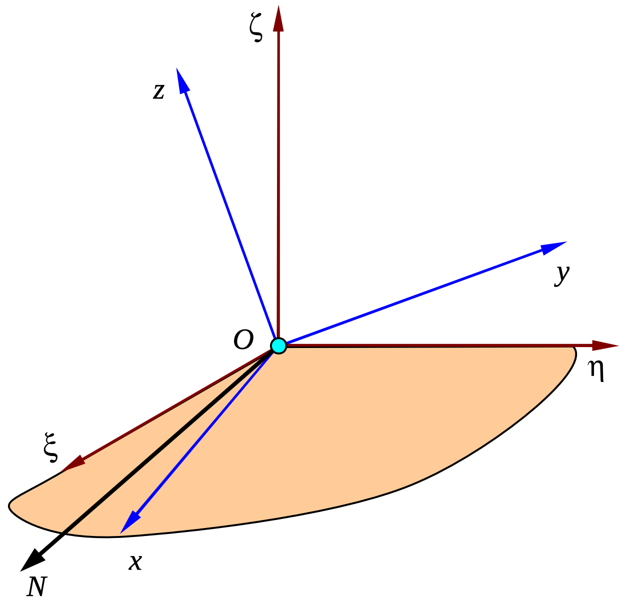


Рис. 2

Определение 1. ***Линию пересечения плоскостей*** Oxy ***и*** Oxh ***– луч*** ON ***– назовем линией узлов.***

Определение 2. Углы j ,y ,q ***, изображенные на рис. 3, называются углами Эйлера.***

При этом угол j ***называется углом собственного вращения, угол*** y ***– углом прецессии и угол*** q ***– углом нутации.***

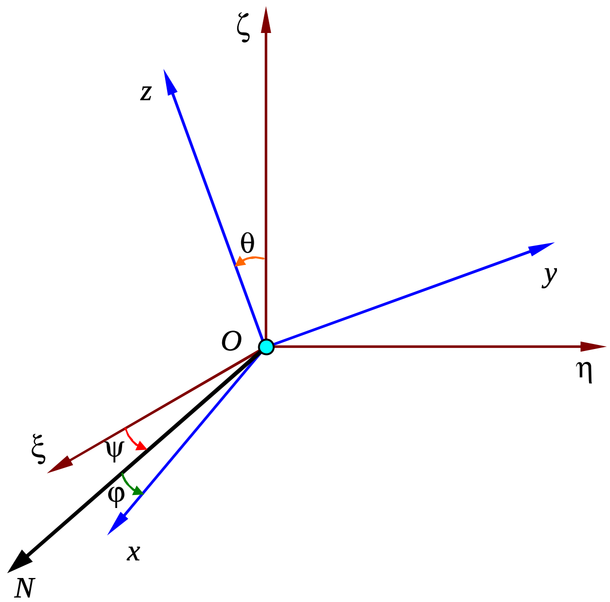


Рис. 3

Рассмотренное перемещение тела можно осуществить тремя последовательными поворотами относительно соответствующих неподвижных осей. Совершим эти повороты в обратном направлении:

на угол y – вокруг оси Oz (ось ON совпадет с осью Ox, **рис. 4**);

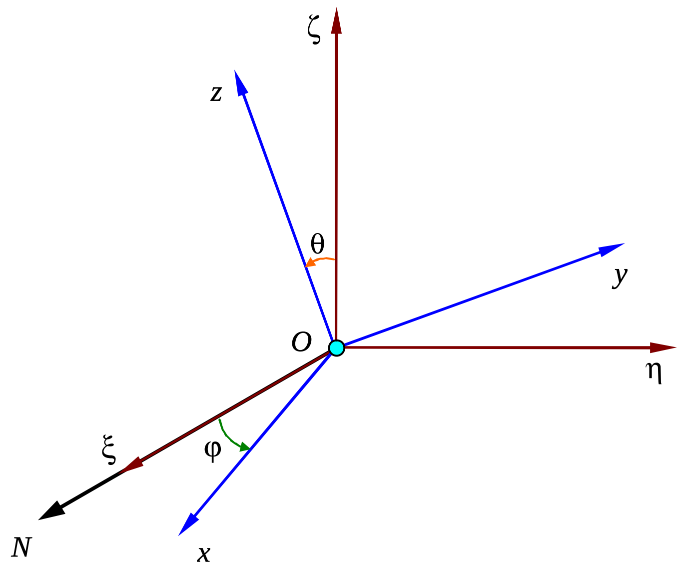


Рис. 4

на угол q – вокруг оси ON (ось Oz совпадет с осью Oz, **рис. 5**);

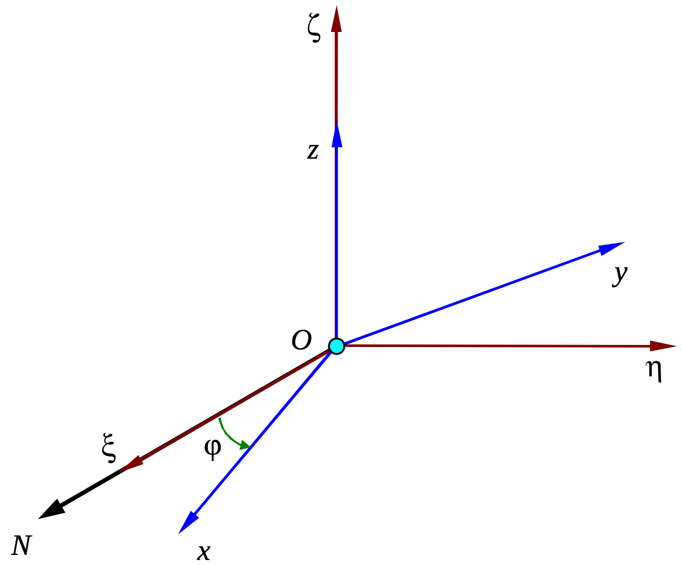


Рис. 5

на угол j – вокруг оси Oz. В результате обе системы совмещаются. Каждый из поворотов характеризуется матрицей

$$A_z(y) = A_1(\Delta t), \quad A_N(q) = A_2(\Delta t), \quad A_z(j) = A_3(\Delta t),$$

а полное перемещение – произведением этих матриц:

$$A(\Delta t) = \prod_{i=1}^{3} A_i(\Delta t). \tag{1}$$

4.2. Теорема Эйлера

Теорема 1 (Эйлера). ***Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством его вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку. При этом ось вращения и угол поворота*** Δj ***определяются однозначно элементами матрицы***

$$A(\Delta t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Из формулы (1.1) и свойств матрицы поворота тела относительно неподвижной оси выводится, что

$$A^{-1}(\Delta t)=A'(\Delta t),\quad Det\left[A(\Delta t)\right]=1.$$

Покажем, что $l^*=1-$собственное число матрицы $A(\Delta t)$. Полагаем

$$f(\lambda)=Det\left[A(\Delta t)-\lambda E\right].$$

Требуется показать, что $f(1)=0$. Действительно,

$$f(1)=Det\left[A(\Delta t)-E\right]=Det\left[A(\Delta t)-E\right]'=Det\left[\overbrace{A'(\Delta t)}^{A^{-1}(\Delta t)}-E\right]=$$

$$=Det\left[A^{-1}(\Delta t)-E\right]=\overbrace{Det\left[A(\Delta t)\right]}^{1}\cdot Det\left[A^{-1}(\Delta t)-E\right]=Det\left[A(\Delta t)\cdot\left(A^{-1}(\Delta t)-E\right)\right]=$$

$$=Det\overbrace{\left[E-A(\Delta t)\right]}^{3\times 3}=(-1)^3\cdot\overbrace{Det\left[A(\Delta t)-E\right]}^{f(1)}=-f(1)\quad\overset{f(1)=-f(1)}{\Rightarrow}\quad f(1)=0.$$

Пусть $\bar{r}-$ собственный вектор матрицы $A(\Delta t)$, отвечающий собственному числу $l^*=1$. Тогда по определению собственного вектора должно выполняться

$$A(\Delta t)\bar{\rho}=\bar{\rho}.$$

Точка тела, в начальный момент характеризующаяся радиус-вектором $\bar{r}(t)=\bar{r}$, остается неподвижной в конце поворота. Это означает, что прямая, проходящая через нее и точку O, является неподвижной осью поворота, посредством которого осуществляется перемещение тела. Направление оси и угол поворота единственны. В противном случае точки тела должны двигаться одновременно по разным окружностям.

Направление оси поворота полностью определяется элементами матрицы $A(\Delta t)$ как направление собственного вектора матрицы. Покажем, что и угол поворота Δj также полностью определяется элементами матрицы $A(\Delta t)$. Из доказанного выше следует, что по существу здесь происходит поворот тела относительно неподвижной оси. Следовательно, можно воспользоваться результатами предыдущего п.4.1. Ось Oz направим вдоль оси поворота. Тогда матрица полного поворота вокруг найденной неподвижной оси примет следующий вид:

$$A^*(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Δj – угол поворота. Известно, что матрицы $A^*(\Delta j)$ и $A(\Delta t)$ подобны и, следовательно, равны их следы:

$$a_{11}(\Delta t) + a_{22}(\Delta t) + a_{33}(\Delta t) = 2\cos\Delta\varphi + 1.$$

Отсюда определяется угол поворота Δj . Теорема доказана полностью. ¢

4.3. Перемещение произвольной точки тела при его повороте относительно неподвижной точки

Пусть абсолютно твердое тело совершило перемещение – поворот относительно неподвижной точки. По теореме Эйлера это перемещение можно представить как поворот тела на угол Δj относительно некоторой неподвижной оси. Ось Oz направим вдоль оси поворота. Выбрав подвижную и неподвижную системы отсчета так, как это было сделано в п. 3.2, для перемещения произвольной точки тела получим

$$\Delta\bar{r}(t+\Delta t) = \left[A(t+\Delta t) - E\right]\cdot\bar{r}(t) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} -1+\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & -1+\cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\bar{r}(t).$$

С точностью до малых высшего порядка малости, чем Δj для перемещения произвольной точки тела, получим

$$\Delta\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\varphi & 0 \\ \Delta\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\bar{r}(t) = \overline{\Delta\varphi}\times\bar{r}(t), \qquad (1)$$

где обозначено $\overline{\Delta j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta j \end{pmatrix}$. Вектор $\overline{\Delta j}$ направлен вдоль оси вращения, причем поворот тела с его острия видится происходящим против хода часовой стрелки. В отличие от поворота относительно неподвижной оси здесь направление оси зависит от поворота тела.

4.4. Скорость произвольной точки тела при его повороте относительно неподвижной точки

По определению скорости точки из (3.1) выводим

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\Delta\varphi}\times\bar{r}(t)}{\Delta t} = \overbrace{\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}\right)}^{\bar{\omega}(t)}\times\bar{r}(t) = \bar{\omega}(t)\times\bar{r}(t). \qquad (1)$$

Определение 3. ***Вектор***

$$\bar{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}$$

называется мгновенной угловой скоростью вращения тела.

Формула (1) может применяться для определения скорости конца произвольного вектора $\bar{a}$ постоянной длины, вращающегося относительно своего начала. В этом случае она принимает вид

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{a}$$

и носит название ***формулы Эйлера.***

Определение 4. ***Прямая, вдоль которой в данный момент времени направлен вектор мгновенной угловой скорости, называется мгновенной осью вращения тела.***

Мгновенная ось вращения совпадает с предельным положением оси поворота тела для конечного перемещения при стремлении промежутка времени перемещения к нулю. В отличие от случая неподвижной оси вращения мгновенная ось вращения изменяет свое положение как относительно неподвижной системы отсчета, так и относительно подвижной, связанной с телом. При этом в любой момент времени мгновенная ось вращения проходит через неподвижную точку тела.

Определение 5. ***Геометрическое место мгновенных осей вращения в абсолютном пространстве называется неподвижным аксоидом, а в подвижной – подвижным аксоидом.***

Подвижный и неподвижный аксоиды представляют собой конусы с общей вершиной в неподвижной точке тела. Для них мгновенная ось вращения является общей образующей. В процессе движения тела подвижный аксоид катится по неподвижному без проскальзывания.

4.5. Ускорение произвольной точки тела при его повороте относительно неподвижной точки

По определению ускорения точки имеем

$$\bar{w}(t) = \frac{d}{dt}\overbrace{\bar{v}(t)}^{\bar{\omega}(t)\times\bar{r}(t)} = \frac{d}{dt}\left[\bar{\omega}(t)\times\bar{r}(t)\right] = \overbrace{\left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}(t)\right)}^{\bar{\varepsilon}(t)}\times\bar{r}(t) + \bar{\omega}(t)\times\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{r}(t)}^{\bar{v}(t)} =$$

$$= \bar{\varepsilon}(t)\times\bar{r}(t) + \bar{\omega}(t)\times\bar{v}(t). \tag{1}$$

Здесь, как и выше, обозначено $\bar{\varepsilon}(t) = \dfrac{d}{dt}\bar{\omega}(t)$.

Определение 6. Вектор $\bar{e}$ ***называется угловым ускорением вращения тела относительно неподвижной точки.***

В отличие от случая неподвижной оси вектор углового ускорения тела здесь не обязан иметь направление мгновенной оси вращения.

Первое слагаемое $\bar{w}^{вр} = \bar{e} \times \bar{r}$ в правой части формулы (1) будем называть вращательным ускорением. В данном случае направление вращательного ускорения не совпадает с направлением касательной к траектории точки, поэтому оно не является ее касательным ускорением.

Повторяя выкладки п. 3.4, преобразуем второе слагаемое в правой части (1) (см. **рис. 6** п. 3.4):

$$\bar{\omega}\times\bar{v}=\omega^2\left[r_\omega\,\bar{\omega}_0-\bar{r}\right]=\omega^2\bar{h}\,.$$

Вектор $\bar{w}\times\bar{v}=w^2\bar{h}$ будем называть осестремительным ускорением. В данном случае направление осестремительного ускорения не совпадает с направлением главной нормали к траектории точки, поэтому оно не является ее нормальным ускорением. В общем случае вектор вращательного ускорения $\bar{w}^{вр}$ не ортогонален вектору осестремительного ускорения $\bar{w}^{ос}$.

Уточним структуру вектора углового ускорения тела при его вращении относительно неподвижной точки:

$$\bar{\varepsilon}(t)=\frac{d}{dt}\bar{\omega}(t)=\frac{d}{dt}\big(\omega(t)\cdot\bar{\omega}_0(t)\big)=\frac{d}{dt}\big(\omega(t)\big)\cdot\bar{\omega}_0(t)+\omega(t)\frac{d}{dt}\big(\bar{\omega}_0(t)\big)=\bar{\varepsilon}_1(t)+\bar{\varepsilon}_2(t).$$

Здесь обозначено

$$\bar{\varepsilon}_1(t)=\frac{d}{dt}\big(\omega(t)\big)\cdot\bar{\omega}_0(t),\quad \bar{\varepsilon}_2(t)=\omega(t)\frac{d}{dt}\big(\bar{\omega}_0(t)\big).$$

Вектор

$$\bar{\varepsilon}_1(t)=\frac{d}{dt}\big(\omega(t)\big)\cdot\bar{\omega}_0(t)$$

направлен вдоль мгновенной оси вращения. Он характеризует изменение угловой скорости по величине. Пусть $\bar{\Omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения единичного орта мгновенной оси вращения тела (**рис. 6**).

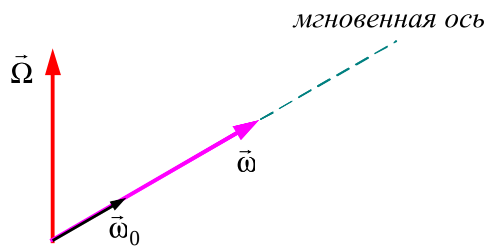


Рис. 6

Тогда по формуле Эйлера находим

$$\bar{\varepsilon}_2(t)=\omega(t)\cdot\overbrace{\frac{d}{dt}\big(\bar{\omega}_0(t)\big)}^{\bar{\Omega}(t)\times\bar{\omega}_0(t)}=\omega(t)\cdot\bar{\Omega}(t)\times\bar{\omega}_0(t)=\bar{\Omega}(t)\times\overbrace{\omega(t)\bar{\omega}_0(t)}^{\bar{\omega}(t)}=\bar{\Omega}(t)\times\bar{\omega}(t).$$

Вектор $\bar{e}_2$ перпендикулярен мгновенной оси вращения тела. Он характеризует изменение угловой скорости по направлению.

Таким образом,

$$\bar{e}=\bar{e}_1+\bar{e}_2,\quad \bar{e}_1\perp\bar{e}_2\quad\Rightarrow\quad e=\sqrt{e_1^2+e_2^2}\,.$$

Пример 1. Конус высотой $OC=h$ и углом $\angle BOA=2a$ при вершине (см. **рис. 7**) катится на нас по неподвижной плоскости без проскальзывания так, что его вершина остается неподвижной. Скорость точки $C-$ центра основания – постоянна по величине и равна v_C. Требуется определить скорость и ускорение точки B.

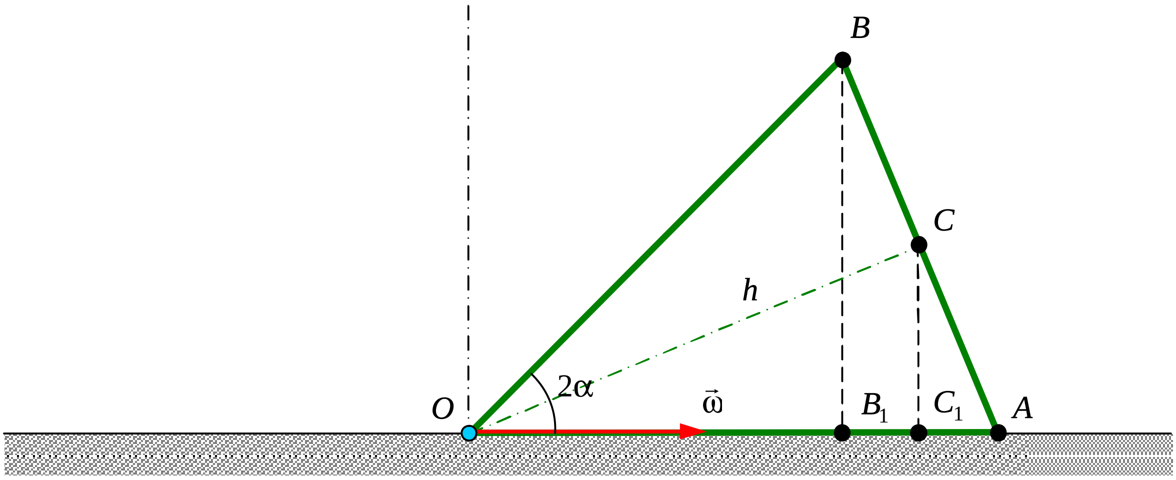


Рис. 7

Решение. Прямая $OA-$ мгновенная ось вращения. Тогда

$$\frac{v_B}{BB_1}=\frac{v_C}{CC_1}(=\omega) \quad\Rightarrow\quad v_B=2v_C.$$

Определим величину мгновенной угловой скорости конуса

$$\omega=\frac{v_C}{CC_1}=\frac{v_C}{h\sin\alpha}=const.$$

Отсюда $w=const$. Тогда

$$\bar{\varepsilon}_1=\frac{d\omega}{dt}\bar{\omega}_0=0, \quad \bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_2=\bar{\Omega}\times\bar{\omega}.$$

Здесь $\bar{\Omega}-$ угловая скорость вращения угловой скорости $\vec{\omega}$ (**рис. 8**).

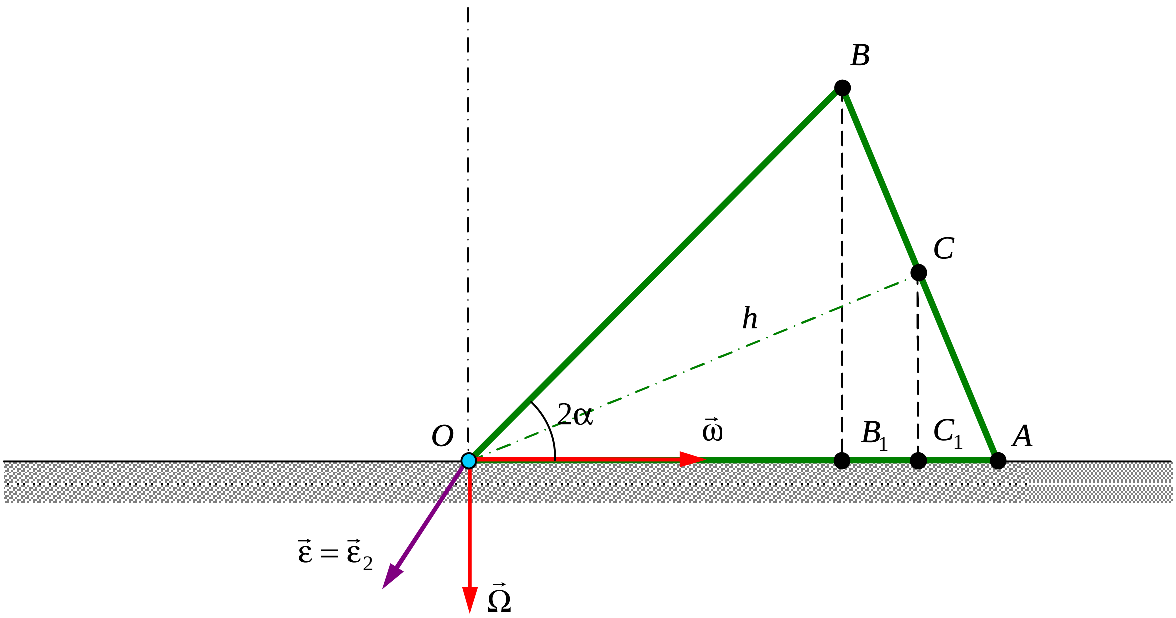


Рис. 8

Вектор $\bar{\Omega}$ направлен перпендикулярно плоскости, по которой катится конус. По величине он равен

$$\Omega = \frac{v_C}{OC_1} = \frac{v_C}{h\cos\alpha}.$$

Вектор углового ускорения $\bar{e} = \bar{e}_2 = \bar{\Omega} \times \bar{w}$ лежит в плоскости, по которой катится конус и направлен на нас. При этом в силу $\bar{\Omega} \perp \bar{w}$ выводим

$$\varepsilon = \overset{\frac{v_C}{h\cos\alpha}}{\Omega} \cdot \overset{\frac{v_C}{h\sin\alpha}}{\omega} = \frac{v_C}{h\sin\alpha} \cdot \frac{v_C}{h\cos\alpha} = \frac{v_C^2}{h^2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2v_C^2}{h^2\sin 2\alpha}.$$

Определим ускорение точки B (см. **рис. 9**).

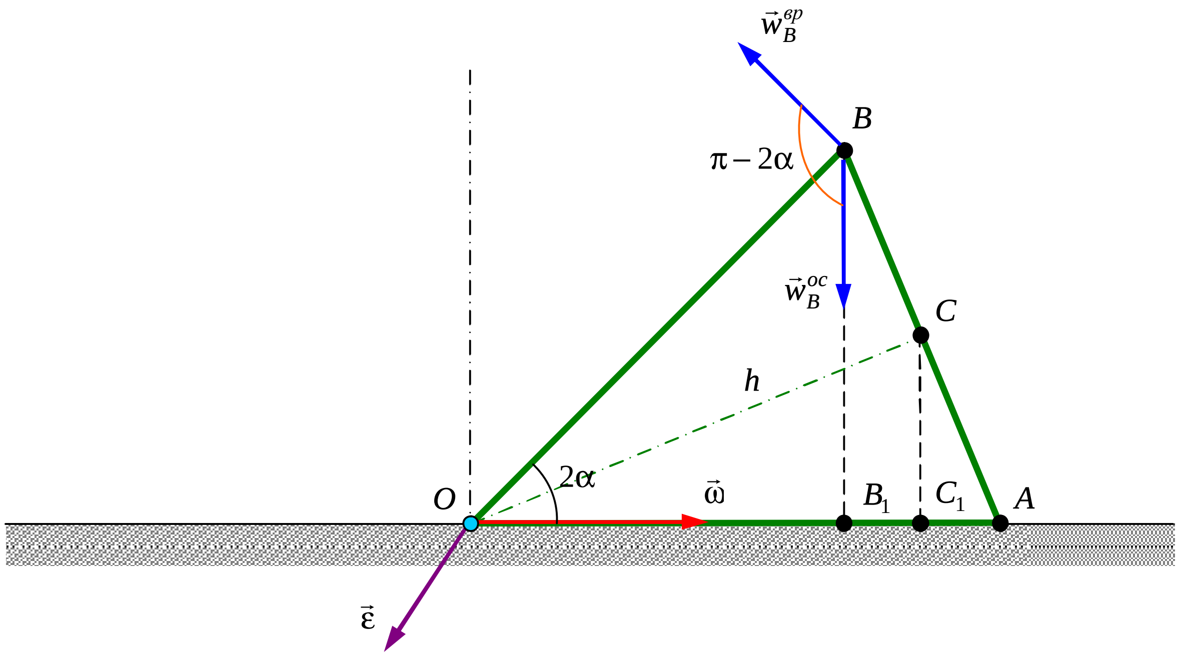


Рис. 9

Имеем

$$\bar{w}_B = \overbrace{\bar{w}_B^{вр}}^{\bar{\varepsilon}\times\overline{OB}} + \overbrace{\bar{w}_B^{oc}}^{\omega^2\,\overline{BB_1}} = \frac{2v_C^2}{h^2\sin 2\alpha} \cdot \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{2v_C^2}{h\sin 2\alpha\cos\alpha},$$

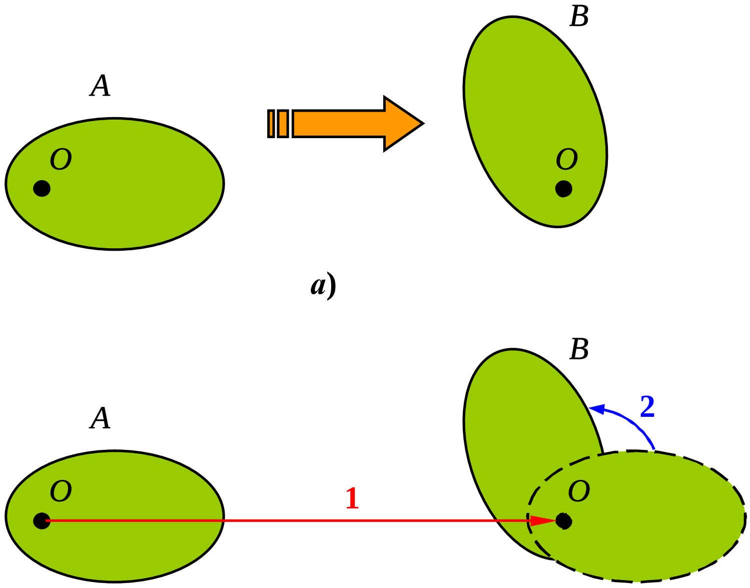
$$w_B^{oc} = \left(\overset{\frac{v_C}{h\sin\alpha}}{\omega}\right)^2 \overset{2h\sin\alpha}{BB_1} = \frac{v_C^2}{h^2\sin^2\alpha} \cdot 2h\sin\alpha = \frac{2v_C^2}{h\sin\alpha}.$$

$$w_B = \sqrt{\left(w_B^{вр}\right)^2 - 2w_B^{вр}w_B^{oc}\cos 2\alpha + \left(w_B^{oc}\right)^2}\Bigg|_{\substack{w_B^{вр} = \frac{2v_C^2}{h\sin 2\alpha\cos\alpha},\\ w_B^{oc} = \frac{2v_C^2}{h\sin\alpha}}} = \frac{v_C^2}{h\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}\sqrt{2(3 - \cos 4\alpha)}.\ \text{u}$$

5. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Перемещение свободного твердого тела как сумма поступательного и вращательного. Теорема Шаля

Пусть свободное твердое тело переместилось из положения A в положение B (**рис. 1**) за время Δt.



б)

Рис. 1

Выберем в теле некоторую точку O (полюс) и разложим рассмотренное перемещение на две составляющие. Первая составляющая заключается в поступательном перемещении тела, при котором полюс переходит из исходного положения в то, которое он будет занимать в положении B тела. Вторая составляющая представляет собой поворот тела вокруг нового положения полюса до полного совпадения тела с положением B. Этот поворот осуществляется в силу теоремы Эйлера относительно одной неподвижной оси, которую будем называть осью поворота тела.

Введем абсолютную систему отсчета Ωxhz и систему отсчета $Oxyz$, связанную с телом, с началом в выбранном полюсе. Оси этой системы за все время перемещения остаются параллельными осям абсолютной системы. Обозначим через $\overline{r}(t), \overline{r}(t+\Delta t)$ радиус-вектор произвольной точки тела в абсолютной системе отсчета в начале и конце движения (см. **рис. 2**).

Тогда

$$\Delta\overline{r}(t) = \overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t). \tag{1}$$

Имеют место равенства

$$\overline{r}(t) = \overline{R}_O(t) + \overline{\rho}(t), \quad \overline{r}(t+\Delta t) = \overline{R}_O(t+\Delta t) + \overline{\rho}(t+\Delta t). \tag{2}$$

Здесь $\overline{r}(t), \overline{r}(t+\Delta t)$ – радиус-векторы выбранной точки в подвижной системе отсчета, а $\overline{R}_O, \overline{R}_O(t+\Delta t)$ – радиус-векторы начала подвижной системы в начале и в конце движения.

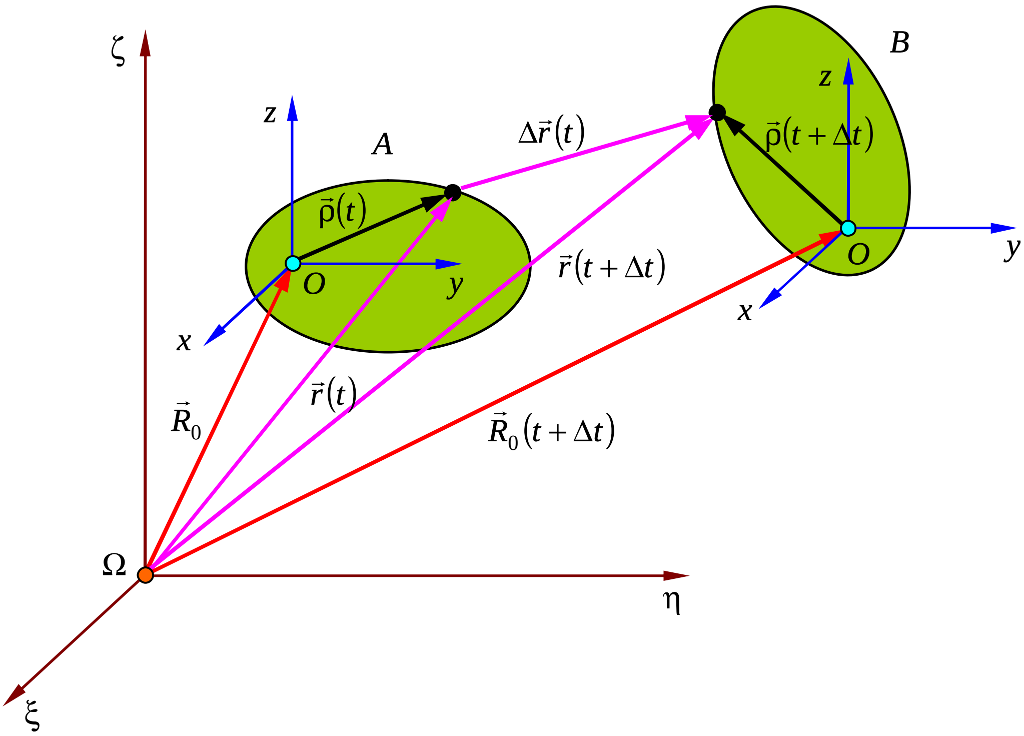


Рис. 2

Вектор $\overline{r}(t+\Delta t)$ получается из вектора $\overline{r}(t)$ в результате поворота тела. Тогда

$$\overline{\rho}(t+\Delta t)=A(t)\overline{\rho}(t),$$

где $A(t)$ – матрица поворота. Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\Delta\overline{r}(t)=\overbrace{\overline{r}(t+\Delta t)}^{\vec{R}_O(t+\Delta t)+\vec{\rho}(t+\Delta t)}-\overbrace{\overline{r}(t)}^{\vec{R}_O(t)+\vec{\rho}(t)}=R_0(t+\Delta t)+\overbrace{\rho(t+\Delta t)}^{A(t)\rho(t)}-R_0(t)-\rho(t)=$$

$$=\overbrace{R_0(t+\Delta t)-R_0(t)}^{\Delta R_0(t)}+A(t)\rho(t)-E\rho(t)=\Delta\overline{R}_O(t)+[A-E]\cdot\overline{\rho}(t)\quad\Rightarrow$$

$$\Delta\overline{r}(t)=\Delta\overline{R}_O(t)+[A-E]\cdot\overline{\rho}(t), \tag{4}$$

где $\Delta\overline{R}_O$ – вектор перемещения точки O. Первое слагаемое в (4) определяет поступательную часть перемещения, а второе – вращательную.

Заметим, что приведенное представление перемещения свободного твердого тела неоднозначно, так как полюс выбран произвольно. В частности, если в качестве полюса выбрана та точка тела, которая в начальный момент совпадала с началом абсолютной системы, то $\overline{r}(t)=\overline{r}(t)$.

Теорема 1 (Шаля). ***Матрица A инвариантна относительно выбора полюса.***

Доказательство. Помимо выбранного полюса O рассмотрим еще один полюс O_1 (**рис. 3**).

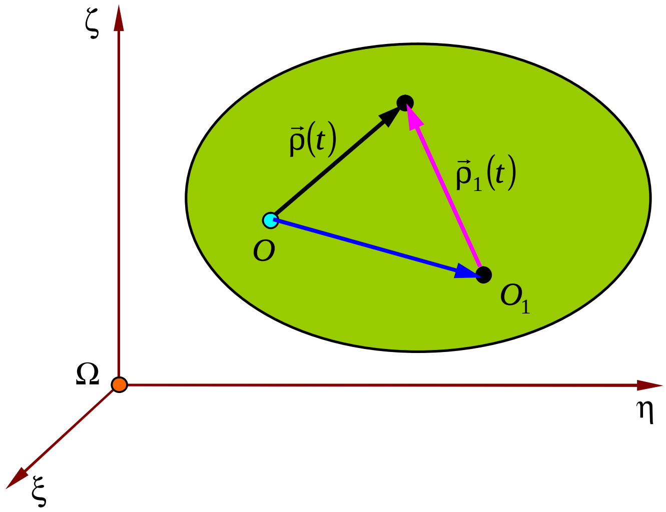


Рис. 3

Тогда

$$\bar{\rho}(t)=\overline{OO_1}+\bar{\rho}_1(t).$$

Из равенства (4) находим

$$\Delta\bar{r}=\Delta\bar{R}_O+[A-E]\left(\overline{OO_1}+\bar{\rho}_1(t)\right)=\overbrace{\Delta\bar{R}_O+[A-E]\overline{OO_1}}^{\Delta\bar{R}_{O_1}}+[A-E]\bar{\rho}_1(t). \tag{5}$$

В силу (4) вектор $\Delta\bar{R}_O+[A-E]\overline{OO_1}$ представляет собой полное перемещение полюса O_1. Отсюда следует корректность обозначения:

$$\Delta\bar{R}_{O_1}=\Delta\bar{R}_O+[A-E]\overline{OO_1}. \tag{6}$$

Из (2) с учетом (6) получаем

$$\Delta\bar{r}=\Delta\bar{R}_{O_1}+[A-E]\bar{\rho}_1(t),$$

что и доказывает инвариантность матрицы A. Теорема доказана. ¢

5.2. Винтовое перемещение свободного твердого тела. Теорема Моцци

Определение 1. ***Совокупность поступательного и вращательного перемещений твердого тела, для которого поступательное перемещение происходит вдоль оси вращения, называется винтовым. Ось поворота тела называется винтовой осью.***

Теорема 2 (Моцци). ***Любое не поступательное перемещение абсолютно твердого тела представляется в виде винтового, причем такое представление единственное.***

Доказательство. Достаточно доказать существование прямой линии в абсолютном пространстве, для которой любая точка тела, совпадающая в начальный момент с какой-либо точкой этой линии, будет перемещаться вдоль нее (**рис. 4**).

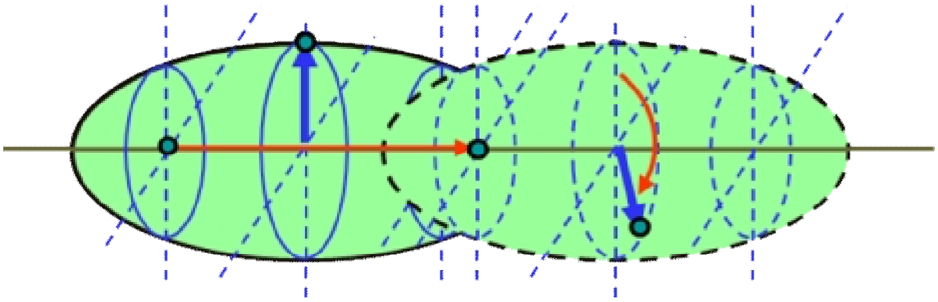


Рис. 4

Очевидно, что эта прямая будет винтовой осью. Искомую прямую (ось поворота) будем искать в виде (**рис. 5**)

$$\bar{r}(\varepsilon)=\bar{r}^*+\varepsilon\,\bar{p}^0,\quad \varepsilon\in(-\infty,+\infty),$$

где $\bar{r}(e)$ – радиус-вектор текущей точки прямой, $\bar{r}^*$ – радиус-вектор фиксированной точки прямой и $\bar{p}^0$ – единичный вектор, определяющий направление прямой.

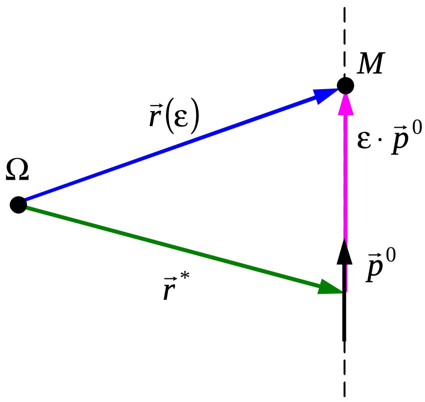


Рис. 5

Итак, тело совершило не поступательное перемещение. Пусть искомая прямая построена. Тогда произвольная точка M тела, лежащая на этой прямой, должна переместиться вдоль этой прямой и занять положение M'. Доказательство теоремы свелось к доказательству существования векторов $\bar{r}^*$ и $\bar{p}^0$, для которых при всех $e\in(+\infty,-\infty)$ найдется число $l\in(-\infty,+\infty)$, что будет $\Delta\bar{r}=l\;\bar{p}^0$ (см. **рис. 6**).

В формуле (4) п. 5.1 в качестве полюса O выберем ту точку тела (подвижного пространства), которая в начальный момент совпадала с началом Ω абсолютной системы. Тогда $r(t)=\bar{r}^*+e\,\bar{p}^0$ и формула (4) п. 5.1 принимает вид

$$\lambda\,\bar{p}^0=\Delta\bar{R}_O+[A-E]\cdot\left(\bar{r}^*+\varepsilon\bar{p}^0\right)\;\Rightarrow\;\lambda\,\bar{p}^0=\Delta\bar{R}_0+A\bar{r}^*+\varepsilon\,\overbrace{A\bar{p}^0}^{\bar{p}^0}-\bar{r}^*-\varepsilon\,\bar{p}^0,\qquad(1)$$

где $\Delta\bar{R}_0$ – вектор перемещения полюса и A – матрица поворота тела.

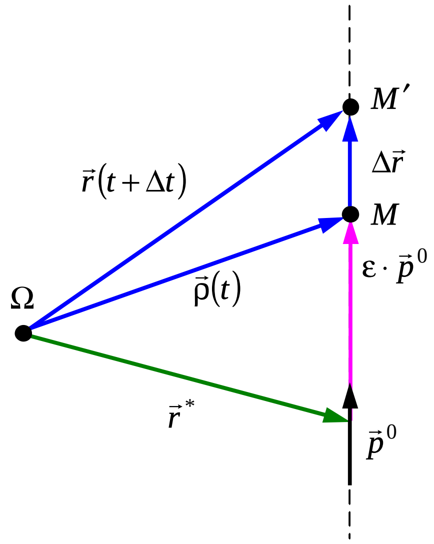


Рис. 6

В качестве вектора $\overline{p}^0$ возьмём собственный вектор матрицы A единичной длины. Тогда $A\overline{p}^0 = \overline{p}^0$. В силу последнего равенства преобразуем (1):

$$\lambda\,\overline{p}^0 = \Delta\overline{R}_0 + A\overline{r}^* + \varepsilon\overline{p}^0 - \overline{r}^* - \varepsilon\,\overline{p}^0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\overline{R}_0 + A\overline{r}^* - \overline{r}^* = \lambda\,\overline{p}^0. \tag{2}$$

В абсолютной системе отсчета полагаем $\overline{z}^0 = \overline{p}^0$ (**рис. 7**).

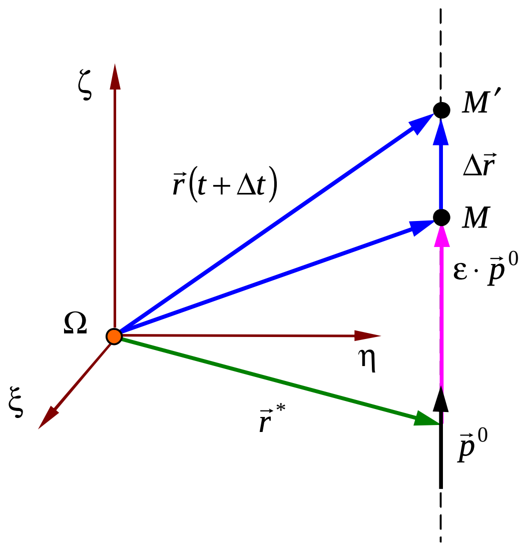


Рис. 7

Перепишем равенство (2) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix}\Delta R_{o\xi}\\ \Delta R_{o\eta}\\ \Delta R_{o\zeta}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\\ r_\zeta^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\\ r_\zeta^*\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Полагаем (их надо подобрать)

$$\lambda = \Delta R_{0\zeta}, \quad r_\zeta^* = 0.$$

Равенство (3) принимает вид

$$\begin{pmatrix}\Delta R_{o\xi}\\ \Delta R_{o\eta}\\ \Delta R_{o\zeta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\\ 0\end{pmatrix}+\Delta R_{o\zeta}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Равенство (2) – векторное. Очевидно, что по третьей компоненте оно выполняется тождественно:

$$\Delta R_{o\zeta}+0\cdot r_\xi^*+0\cdot r_\eta^*+1\cdot 0\equiv 0\cdot+\Delta R_{o\zeta}\cdot 1,$$

а по первым двум имеет вид

$$\begin{pmatrix}\Delta R_{o\xi}\\ \Delta R_{o\eta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1-\cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi\\ -\sin\Delta\varphi & 1-\cos\Delta\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_\xi^*\\ r_\eta^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta R_{o\xi}\\ \Delta R_{o\eta}\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Вычисляем

$$\begin{vmatrix}1-\cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi\\ -\sin\Delta\varphi & 1-\cos\Delta\varphi\end{vmatrix}=(1-\cos\Delta\varphi)^2+\sin^2\Delta\varphi=2-2\cos\Delta\varphi.$$

В случае когда движение не поступательно, справедливо

$$2-2\cos\overset{\neq 0}{\Delta\varphi}\neq 0$$

и система (5) разрешается относительно неизвестных $\begin{pmatrix}r_x^*\\ r_h^*\end{pmatrix}$. Искомые векторы $\overline{r}^*, \overline{p}^0$ и число l построены.

Допустим, что возможно еще одно представление перемещения тела в виде винтового. Тогда в силу теоремы Шаля винтовые оси для них должны быть параллельны. Однако они не могут не совпасть, так как в противном случае траектория точки тела, взятой в начальный момент на одной из осей, должна быть одновременно и отрезком прямой, и дугой окружности. Теорема доказана полностью. ¢

5.3. Скорость произвольной точки тела при его свободном движении

Перемещение точки A тела за время Δt (см. **рис. 8**) равно

$$\Delta\overline{r}_A=\Delta\overline{R}_O+\overbrace{[A-E]\cdot\overline{\rho}_A(t)}^{\approx\overline{\Delta\varphi}\times\overline{\rho}_A(t)}\approx\Delta\overline{R}_O+\overline{\Delta\varphi}\times\overline{\rho}_A(t).$$

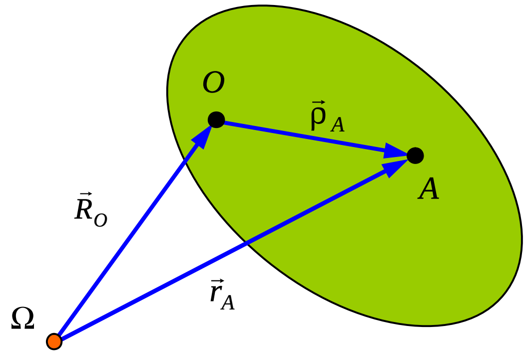


Рис. 8

По определению скорости точки имеем

$$\bar{v}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{R}_O + \overline{\Delta\varphi} \times \bar{\rho}_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \overbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{R}_O}{\Delta t}}^{\bar{v}_O(t)} + \overbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t} \right)}^{\bar{\omega}(t)} \cdot \bar{\rho}_A(t) = \bar{v}_O(t) + \bar{\omega}(t) \times \bar{\rho}_A(t) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_O(t) + \bar{\omega}(t) \times \overbrace{\bar{\rho}_A(t)}^{\overline{OA}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}_A(t) = \bar{v}_O(t) + \bar{\omega}(t) \times \overline{OA}. \qquad (1)$$

Таким образом, скорость точки есть векторная сумма скорости полюса и скорости точки во вращении относительно полюса, при этом в силу теоремы Шаля величина и направление угловой скорости не зависят от выбора полюса.

Теорема 3. ***В каждый момент времени проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.***

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 – две точки тела (**рис. 9**).

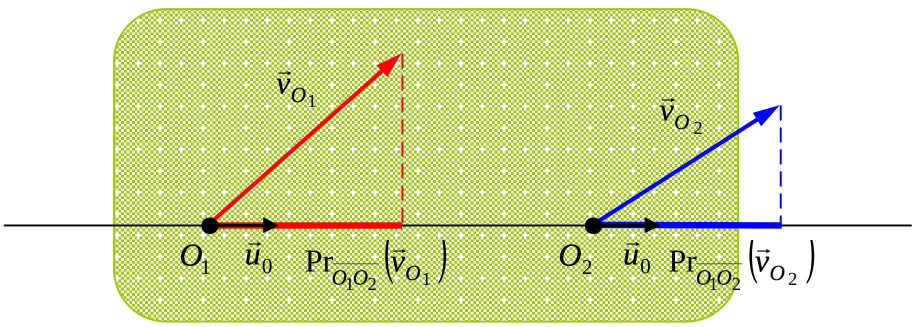


Рис. 9

Выберем одну из них в качестве полюса, например O_1, и определим скорость другой по формуле (1):

$$\bar{v}_{O_2} = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega} \times \overline{O_1O_2}.$$

Умножим последнее равенство скалярно на вектор $\bar{u}_0 = \dfrac{\overline{O_1O_2}}{\left\|\overline{O_1O_2}\right\|}$. В результате получим искомое равенство

$$\bar{v}_{O_2}\cdot\bar{u}_0 = \bar{v}_{O_1}\cdot\bar{u}_0 + \overbrace{\bar{\omega}\times\overline{O_1O_2}\cdot\bar{u}_0}^{=0} \quad\Rightarrow\quad \bar{v}_{O_2}\cdot\bar{u}_0 = \bar{v}_{O_1}\cdot\bar{u}_0 \quad\Rightarrow$$

$$\Pr_{\overline{O_1O_2}}\left(\bar{v}_{O_2}\right) = \Pr_{\overline{O_1O_2}}\left(\bar{v}_{O_1}\right).$$

Теорема доказана. ¢

5.4. Кинематические инварианты

Определение 2. ***Кинематическая характеристика твердого тела, инвариантная относительно выбора полюса, называется кинематическим инвариантом.***

В частности, вектор угловой скорости является кинематическим инвариантом.

Определение 3. ***Величина*** $I_1 = w^2$ ***называется первым кинематическим инвариантом.***

Пусть $A-$произвольная точка тела и $O-$точка, выбранная за полюс. Тогда в силу предыдущего пункта

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_O(t) + \bar{\omega}(t)\times\overline{OA}. \tag{1}$$

Умножим (1) скалярно на вектор $\bar{w}$. В результате получим

$$\bar{v}_A\cdot\bar{\omega} = \bar{v}_O\cdot\bar{\omega} + \overbrace{\left(\bar{\omega}\times\overline{OA}\right)\cdot\bar{\omega}}^{=0} \quad\Rightarrow\quad \bar{v}_A\cdot\bar{\omega} = \bar{v}_O\cdot\bar{\omega} = const.$$

Определение 4. Величина $I_2 = \bar{v}\cdot\bar{w}$, ***где*** $\bar{v}-$***скорость произвольной точки тела, называется вторым кинематическим инвариантом.***

5.5. Кинематический винт

Определение 5. ***Предельное положение винтовой оси будем называть мгновенной винтовой осью.***

Очевидно, что вектор угловой скорости $\bar{w}$ в любой момент времени направлен вдоль мгновенной винтовой оси. В предположении, что тело совершает непоступательное движение, т.е. $w \neq 0$, выведем уравнение мгновенной винтовой оси. Для произвольной точки S мгновенной винтовой оси должно выполняться

$$\bar{v}_S \parallel \bar{\omega} \quad\Rightarrow\quad \bar{v}_S = p\bar{\omega}, \quad p\in R^1. \tag{1}$$

Умножим последнее равенство на вектор $\bar{w}$ скалярно. Тогда

$$\overbrace{\bar{v}_S\cdot\bar{\omega}}^{I_2} = p\,\overbrace{\omega^2}^{I_1} \quad\Rightarrow\quad I_2 = pI_1 \quad\Rightarrow\quad p = \frac{I_2}{I_1}.$$

Из (1) п. 5.3 при $A=S$ находим

$$\bar{v}_S=\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\overline{OS}.$$

Тогда из (1) следует

$$\overbrace{\bar{v}_S}^{\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\overline{OS}}=p\bar{\omega}\quad\Rightarrow\quad\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\overline{OS}=p\cdot\bar{\omega}. \tag{2}$$

Пусть в какой-либо системе координат $Oxyz$ известны проекции векторов $\bar{v}_O$ и $\bar{w}$, т.е.

$$\bar{v}_O=\begin{pmatrix}v_{Ox}\\ v_{Oy}\\ v_{Oz}\end{pmatrix},\quad \bar{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\overline{OS}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. Тогда в проекциях на оси этой системы из (2) получим

$$\begin{cases}v_{Ox}+z\omega_y-y\omega_z=p\omega_x,\\ v_{Oy}+x\omega_z-z\omega_x=p\omega_y,\\ v_{Oz}+y\omega_x-x\omega_y=p\omega_z.\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{v_{Ox}+z\omega_y-y\omega_z}{\omega_x}=p,\quad \frac{v_{Oy}+x\omega_z-z\omega_x}{\omega_y}=p,\quad \frac{v_{Oz}+y\omega_x-x\omega_y}{\omega_z}=p.$$

Или

$$\frac{v_{Ox}+z\omega_y-y\omega_z}{\omega_x}=\frac{v_{Oy}+x\omega_z-z\omega_x}{\omega_y}=\frac{v_{Oz}+y\omega_x-x\omega_y}{\omega_z}. \tag{3}$$

Уравнения (3) представляют собой уравнения винтовой оси. Заметим, что указанная система отсчета может быть как абсолютной, так и связанной с телом. В зависимости от этого уравнение мгновенной винтовой оси (3) определяет ее положение в соответствующем пространстве.

Определение 5. ***Совокупность угловой скорости $\bar{w}$ и скорости $\bar{v}$ произвольной точки мгновенной винтовой оси называется кинематическим винтом, а число p – параметром винта. Кинематический винт называют правым, если $p>0$, и левым, если $p<0$.***

Случай $p=0$ означает чистое вращение, т.к. из (2) следует, что скорость точки S мгновенной оси вращения, определяемая по формуле

$$\bar{v}_S=\overset{0}{p}\,\bar{\omega}=0,$$

равна нулю.

Пример 1. В фиксированный момент времени точки A,B,C твердого тела в некоторой системе отсчета имеют координаты и скорости:

$$\bar r_A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar r_B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar r_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \bar r_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar v_B=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix},\ \bar v_C=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Найти уравнение винтовой оси в данной системе отсчета и параметр винта.

Решение. Возьмем точку A за полюс. Тогда

$$\bar v_B=\bar v_A+\bar\omega\times\overline{AB}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ 1&1&0\end{vmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}0=2-\omega_z,\\ 3=1+\omega_z,\\ -1=-3+\omega_x-\omega_y,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\omega_z=2,\\ \omega_z=2,\\ \omega_x-\omega_y=2.\end{cases}\tag{4}$$

Аналогично

$$\bar v_C=\bar v_A+\bar\omega\times\overline{AC}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ 1&1&1\end{vmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-1=2+\omega_y-\omega_z,\\ 2=1+\omega_z-\omega_x,\\ -1=-3+\omega_x-\omega_y,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\omega_y-\omega_z=-3,\\ \omega_x-\omega_z=-1,\\ \omega_x-\omega_y=2.\end{cases}\tag{5}$$

Из (4) и (5) выводим, что

$$\begin{cases}\omega_x=1,\\ \omega_y=-1,\\ \omega_z=2,\end{cases}\ \Rightarrow\ \bar\omega=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

В системе (4), (5) только три независимых уравнения, т. к. точки A, B, C принадлежат абсолютно твердому телу. Их скорости должны попарно иметь равные проекции на направления, соединяющие соответствующие пары точек.

Вычисляем

$$I_1=\omega^2=1+1+4=6,\quad I_2=\overbrace{\bar\omega}^{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}\cdot\overbrace{\bar v_A}^{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}}=-1-2-2=-5\ \Rightarrow\ p=\frac{I_2}{I_1}=-\frac{5}{6}.$$

Уравнение винтовой оси (3) при

$$O=A,\quad \bar v_A=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad \bar\omega=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad p=-\frac{5}{6};$$

имеет вид

$$\frac{2-z-2y}{1}=\frac{1+2x-z}{(-1)}=\frac{-3+x+y}{2}=-\frac{5}{6}.\ \text{u}$$

5.6. Ускорение произвольной точки тела при его свободном движении

По определению ускорения точки имеем

$$\bar{w}(t)=\frac{d}{dt}\overbrace{\bar{v}(t)}^{\bar{v}_O(t)+\bar{\omega}(t)\times\bar{\rho}(t)}=\frac{d}{dt}\left[\bar{v}_O(t)+\bar{\omega}(t)\times\bar{\rho}(t)\right]=\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{v}_O(t)}^{\bar{w}_O(t)}+\frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}(t)\times\bar{\rho}(t)\right)=$$

$$=\bar{w}_O(t)+\overbrace{\left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}(t)\right)}^{\bar{\varepsilon}(t)}\times\bar{\rho}(t)+\bar{\omega}(t)\times\overbrace{\left(\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t)\right)}^{\bar{\omega}(t)\times\bar{\rho}(t)}=$$

$$=\bar{w}_O(t)+\overbrace{\bar{\varepsilon}(t)\times\bar{\rho}(t)}^{\bar{w}_O^{вр}(t)}+\overbrace{\bar{\omega}(t)\times\bar{\omega}(t)\times\bar{\rho}(t)}^{\bar{w}_O^{ос}(t)}=\bar{w}_O(t)+\bar{w}_O^{вр}(t)+\bar{w}_O^{ос}(t). \qquad (1)$$

Таким образом, ускорение точки есть векторная сумма ускорения полюса и ускорения точки во вращении тела относительно полюса. Подробнее: ускорение точки складывается из ускорения полюса, а также вращательного и осестремительного ускорений точки во вращении тела относительно полюса. Формула (1) называется формулой Ривальса.

6. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Понятие плоского движения абсолютно твердого тела

Определение 1. ***Движение абсолютно твердого тела является плоским (плоскопараллельным), если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, которую называют основной.***

Всякая прямая, связанная с телом и перпендикулярная основной плоскости, будет двигаться поступательно, поэтому изучение плоского движения тела можно свести к изучению движения его сечения плоскостью, параллельной основной, в этой плоскости.

Скорости и ускорения точек плоской фигуры при ее движении в своей плоскости определяются по формулам для свободного тела. Однако специфичность плоского движения позволяет установить для него ряд особенностей.

6.2. Мгновенный центр скоростей

Теорема 1. ***Пусть движение плоской фигуры в данный момент времени не является мгновенно поступательным. Тогда в этот момент времени существует, и причем единственная, точка P плоскости, связанная с движущейся плоской фигурой, скорость которой равна нулю. Скорости остальных точек этой плоскости таковы, какими они были бы при мгновенном вращении плоскости вокруг точки P.***

Доказательство. Для существования точки P достаточно показать, что при $w \neq 0$ уравнение

$$\overbrace{\overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OP}}^{\overline{v}_P} = 0, \tag{1}$$

где O – произвольный полюс, может быть разрешено относительно вектора $\overline{OP}$. С этой целью умножим обе части равенства (1) на вектор $\overline{w}$ векторно слева. В результате получим

$$\overline{\omega}\times\overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{\omega}\times\overline{OP} = 0. \tag{2}$$

Из (2) выводим

$$0 = \overline{\omega}\times\overline{v}_O + \overset{\overline{a}}{\overline{\omega}}\times\overset{\overline{b}}{\overline{\omega}}\times\overset{\overline{c}}{\overline{OP}} = \overline{\omega}\times\overline{v}_O + \overset{\overline{\omega}}{\overline{b}}\left(\overset{\overline{\omega}}{\overline{a}}\cdot\overset{\overline{OP}}{\overline{c}}\right) - \overset{\overline{OP}}{\overline{c}}\left(\overset{\overline{\omega}}{\overline{a}}\cdot\overset{\overline{\omega}}{\overline{b}}\right) =$$

$$= \overline{\omega}\times\overline{v}_O + \overline{\omega}\overset{\overline{OP}\perp\overline{\omega}}{\left(\overline{OP}\cdot\overline{\omega}\right)} - \omega^2\overline{OP} \quad\Rightarrow\quad \overline{\omega}\times\overline{v}_O - \omega^2\overline{OP} = 0 \quad\Rightarrow\quad \overline{OP} = \frac{\overline{\omega}\times\overline{v}_O}{\omega^2}, \quad \omega\neq 0.$$

Возьмем найденную точку P за полюс. Тогда для произвольной точки A плоской фигуры имеем

$$\overline{v}_A = \overset{=0}{\overline{v}_P} + \overline{\omega}\times\overline{PA} \quad\Rightarrow\quad \overline{v}_A = \overline{\omega}\times\overline{PA}. \tag{3}$$

В силу $\overline{w}\perp\overline{PA}$ (см. **рис. 1**) из последней формулы следует, что мгновенное распределение скоростей точек плоскости, связанной с движущейся плоской фигурой, таково, как бы оно было при вращении этой плоскости относительно точки P.

Наконец, при выполнении условия теоремы $w\neq 0$ двух различных точек с нулевыми скоростями существовать не может. Действительно, пусть $P_*\neq P$, но $\overline{v}_{P_*} = 0$. Тогда по формуле (3) при $A = P_*$ находим

$$\overline{v}_{P_*} = \overline{\omega}\times\overline{P_*P} \quad\Rightarrow\quad 0 = \overline{\omega}\times\overline{PP_*}\ .$$

В силу $\overline{w}\perp\overline{PP_*}$ имеем $\overline{w} = 0$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает единственность точки P. Теорема доказана. ¢

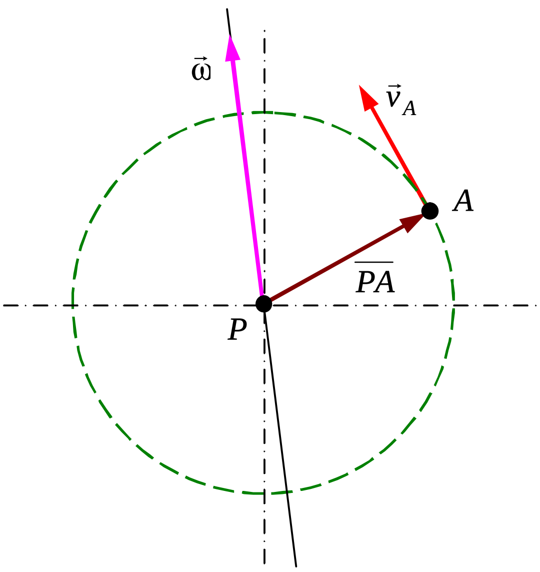


Рис. 1

Определение 2. ***Точка плоскости, связанной с плоской фигурой, имеющая в данный момент времени скорость, равную нулю, называется мгновенным центром скоростей.***

Использование мгновенного центра скоростей часто упрощает определение скоростей точек твердого тела в плоском движении. Рассмотрим случаи, когда положение мгновенного центра скоростей может быть установлено либо с помощью геометрических построений, либо в силу физических соображений.

Пусть известны направления скоростей двух точек A и B фигуры (**рис. 2, *а***). Тогда мгновенный центр скоростей будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям их скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$.

В случае когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к их неравным скоростям, мгновенный центр скоростей фигуры находится в точке пересечения перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей этих точек (**рис. 2, *б*, *в***).

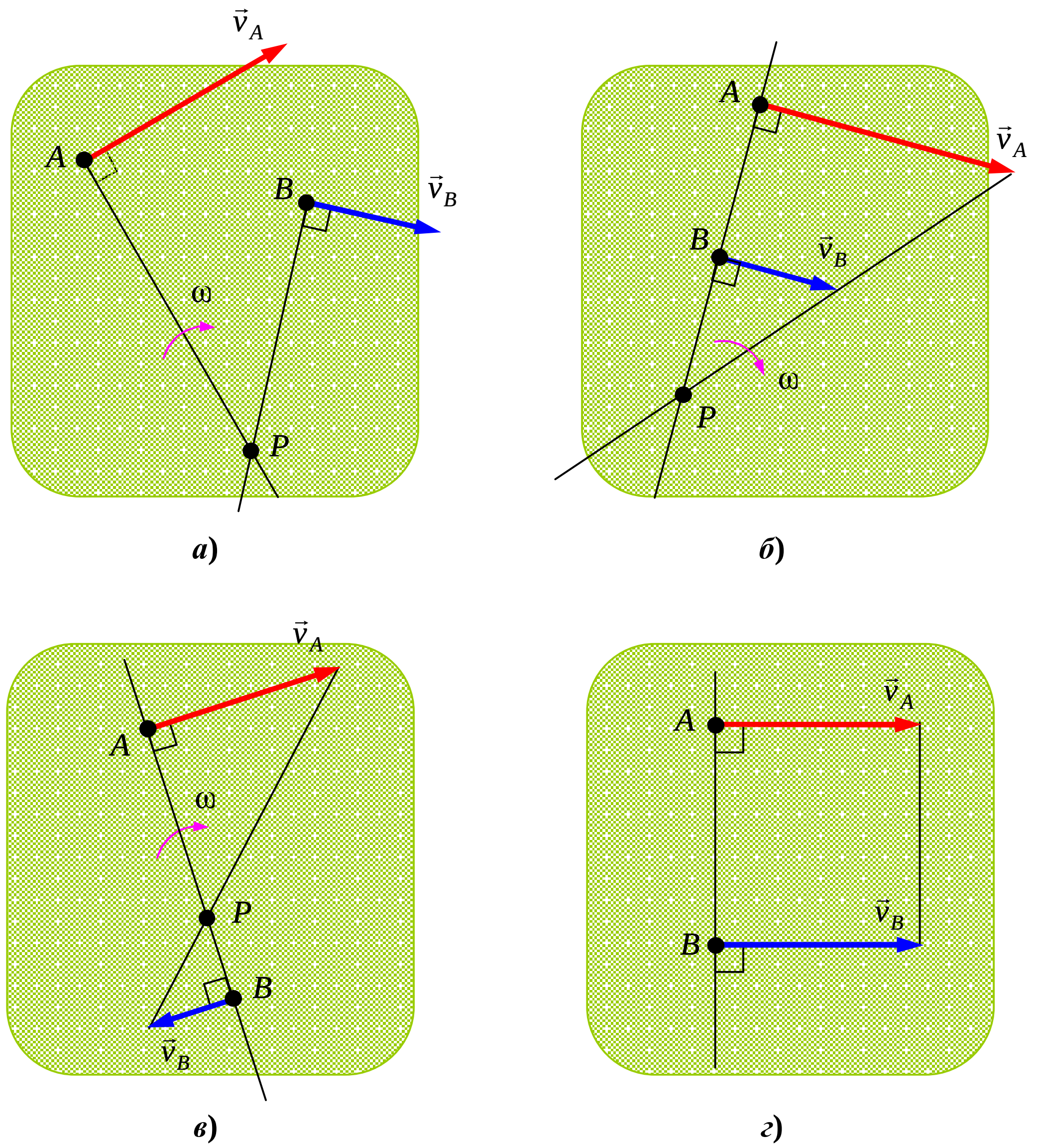


Рис. 2

Если скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны, направлены в одну сторону и равны между собой, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности (**рис. 2, *г***), а угловая скорость плоской фигуры равна нулю (т.к. $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, то $\omega = 0$, а тело совершает мгновенно поступательное движение). Получаем, что скорости всех точек фигуры одинаковы по направлению и модулю. Однако следует иметь в виду, что ускорения точек при таком движении различны.

В некоторых случаях, исходя из физических соображений, удается сразу установить мгновенный центр скоростей плоской фигуры. Это класс задач, в которых рассматривается качение без скольжения плоской фигуры по некоторой неподвижной плоской линии (**рис. 3**). Например, качение без скольжения колеса по неподвижной линии. В этом случае мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится в точке ее контакта с опорой, скорость которой равна нулю.

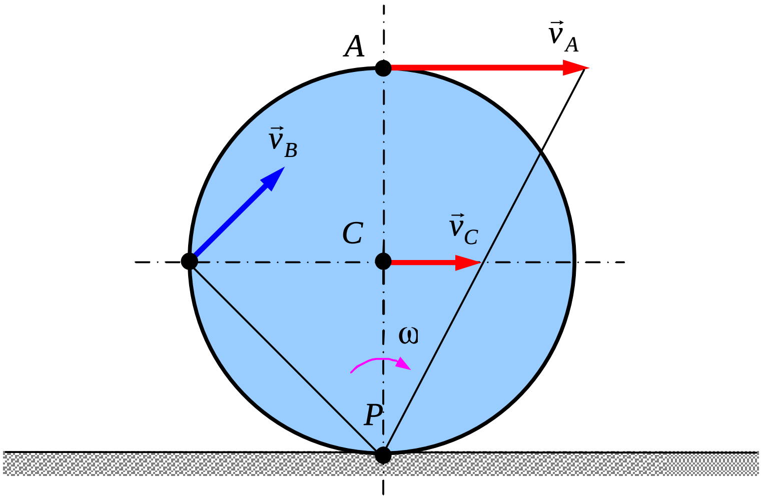


Рис. 3

В процессе движения мгновенный центр скоростей изменяет свое положение как в абсолютном пространстве (основной плоскости), так и в плоскости, связанной с движущейся плоской фигурой.

Пример 1. В положении механизма, схема которого приведена на **рис. 4**, определить угловую скорость шатуна AB и скорость точек B и C, если $\omega_{OA} = 2$ $рад/с$, $OA = 0{,}2$ $м$, $AB = 1{,}6$ $м$, $BC = 0{,}8$ $м$, $h = 0{,}8$ $м$.

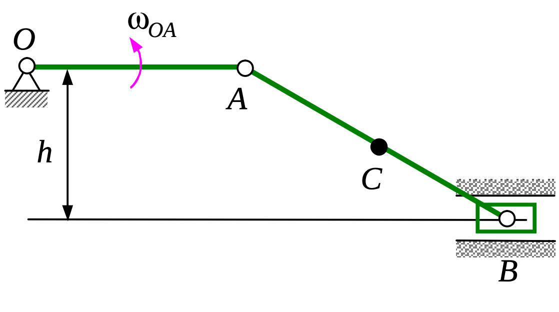


Рис. 4

Решение. Найдем скорость точки A:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \ м/с, \qquad \vec{v}_A \perp \overline{OA}.$$

Скорость ползуна B должна быть направлена вдоль направляющих. Тогда построим мгновенный центр скоростей P шатуна AB как пересечение перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость шатуна AB равна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Треугольник APB – прямоугольный. Так как $h = \frac{1}{2}AB$, то $\angle ABP = 60^0$, находим:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}8^2} = 0{,}8\sqrt{3}\ (м).$$

Следовательно, можем определить угловую скорость шатуна:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{0{,}4}{0{,}8\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ (рад/с).$$

Направление вектора $\vec{\omega}_{AB}$ схематично указано на **рис. 5**

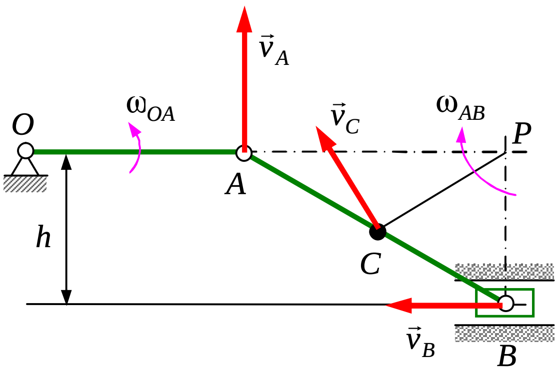


Рис. 5

В силу того что $BC = h$, получаем, что ΔCBP – равносторонний. Тогда

$$CP = BP = BC = h = 0{,}8\ \ м.$$

$$v_B = v_C = \omega_{AB} \cdot BP = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 0{,}8 = \frac{2\sqrt{3}}{15}\ (м/с).$$

Направление скоростей всех точек указаны на **рис. 5.** ►

Определение 3. ***Геометрическое место мгновенных центров скоростей в абсолютной плоскости называется неподвижной центроидой, а в подвижной – подвижной центроидой. При плоском движении тела подвижный центроид катится без проскальзывания по неподвижному центроиду, при этом мгновенный центр скоростей служит для них точкой контакта.***

6.3. Мгновенный центр ускорений

Теорема 2. ***Пусть в некоторый момент времени для твердого тела, совершающего плоское движение, выполнено условие***

$$\omega^2 + \varepsilon^2 \neq 0.$$

Тогда в этот момент времени существует, причем единственная, точка Q плоскости, связанная с движущейся плоской фигурой, ускорение которой равно нулю.

Доказательство. Для существования точки Q достаточно показать, что при $w^2 + e^2 \neq 0$ уравнение

$$\bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\overline{OQ} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\overline{OQ} = 0, \tag{1}$$

где $O-$ произвольный полюс, может быть разрешено относительно вектора $\overline{OQ}$. Сделаем это:

$$\overset{\bar a}{\bar{\omega}}\times\overset{\bar b}{\bar{\omega}}\times\overset{\bar c}{\overline{OQ}} = \overset{\bar\omega}{\bar b}\left(\overset{\bar\omega}{\bar a}\cdot\overset{\overline{OQ}}{\bar c}\right) - \overset{\overline{OQ}}{\bar c}\left(\overset{\bar\omega}{\bar a}\cdot\overset{\bar\omega}{\bar b}\right) = \omega\overbrace{\left(\overline{OQ}\cdot\bar{\omega}\right)}^{\overline{OQ}\perp\bar\omega} - \omega^2\overline{OQ} = -\omega^2\overline{OQ}.$$

С учетом последнего равенства перепишем (1):

$$\bar{w}_O + \bar{e}\times\overline{OQ} - w^2\overline{OQ} = 0 \quad\Rightarrow\quad \bar{e}\times\overline{OQ} = w^2\overline{OQ} - \bar{w}_O. \tag{2}$$

Если $e = 0$, то $w \neq 0$. Тогда из (2)

$$\overline{OQ} = \frac{\bar{w}_O}{\omega^2}$$

и существование точки Q доказано.

Пусть $e \neq 0$. Умножим векторно равенство (2) на вектор $\bar{e}$ слева. Имеем

$$\bar{\varepsilon}\times\bar{\varepsilon}\times\overline{OQ} = \omega^2\left(\bar{\varepsilon}\times\overline{OQ}\right) - \bar{\varepsilon}\times\bar{w}_O.$$

Заметим, что

$$\overset{\bar a}{\bar{\varepsilon}}\times\overset{\bar b}{\bar{\varepsilon}}\times\overset{\bar c}{\overline{OQ}} = \overset{\bar\varepsilon}{\bar b}\left(\overset{\bar\varepsilon}{\bar a}\cdot\overset{\overline{OQ}}{\bar c}\right) - \overset{\overline{OQ}}{\bar c}\left(\overset{\bar\varepsilon}{\bar a}\cdot\overset{\bar\varepsilon}{\bar b}\right) = \bar{\varepsilon}\left(\overbrace{\bar{\varepsilon}\cdot\overline{OQ}}^{\bar\varepsilon\perp\overline{OQ}}\right) - \overline{OQ}\varepsilon^2 = -\overline{OQ}\varepsilon^2.$$

Подставим результат в (3):

$$-e^2\overline{OQ} = w^2\left(\bar{e}\times\overline{OQ}\right) - \bar{e}\times\bar{w}_O \quad\Rightarrow\quad \bar{e}\times\bar{w}_O = w^2\overbrace{\left(\bar{e}\times\overline{OQ}\right)}^{=w^2\overline{OQ}-\bar{w}_O\quad(2)} + e^2\overline{OQ} \quad\Rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon}\times\bar{w}_O = \omega^2\left(\omega^2\overline{OQ} - \bar{w}_O\right) + \varepsilon^2\overline{OQ} \quad\Rightarrow\quad \bar{\varepsilon}\times\bar{w}_O = \overline{OQ}\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right) - \omega^2\bar{w}_O \quad\Rightarrow$$

$$\overline{OQ}\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right) = \bar{\varepsilon}\times\bar{w}_O + \omega^2\bar{w}_O \quad\Rightarrow\quad \overline{OQ} = \frac{\bar{\varepsilon}\times\bar{w}_O + \omega^2\bar{w}_O}{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Существование точки Q доказано.

Допустим, что нашлась еще одна точка Q_1, для которой $w_{Q_1} = 0$. Тогда из (2) при $O = Q_1$ выводим

$$\bar{\varepsilon} \times \overline{Q_1 Q} = \omega^2 \overline{Q_1 Q}.$$

Последнее равенство возможно лишь при нулевых левых и правых частях, т.к. они взаимно ортогональны. Отсюда $e = 0, w = 0$, а это противоречит условию теоремы. Теорема доказана. ¢

Определение 4. ***Точка плоскости, связанная с плоской фигурой, имеющая в данный момент времени ускорение, равное нулю, называется мгновенным центром ускорений.***

Мгновенные центры скоростей и ускорений, вообще говоря, между собой не совпадают.

Пример 2. Колесо катится без проскальзования по плоскости так, что его центр C движется с постоянной скоростью $\bar{v}_C = \overline{const}$ (**рис. 6**).

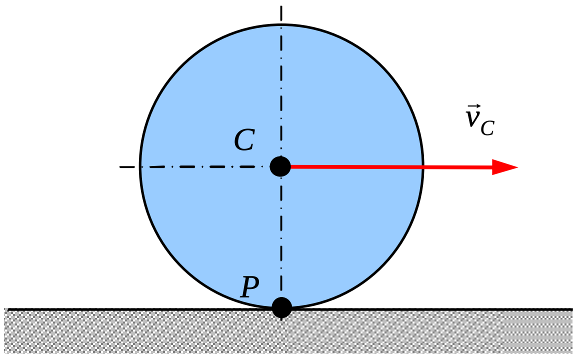


Рис. 6

В рассматриваемом примере точка P – мгновенный центр скоростей, а точка C – мгновенный центр ускорений. u

Рассмотрим случаи, когда положение мгновенного центра ускорений можно определить с помощью геометрических построений.

Пусть известны направления ускорений двух точек плоской фигуры, ее угловые скорость и ускорение (см. **рис. 7, *а***). Тогда мгновенный центр ускорений лежит на пересечении прямых линий, проведенных к векторам ускорений точек фигуры под одним и тем же острым углом

$$\alpha = arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2} \neq 0,$$

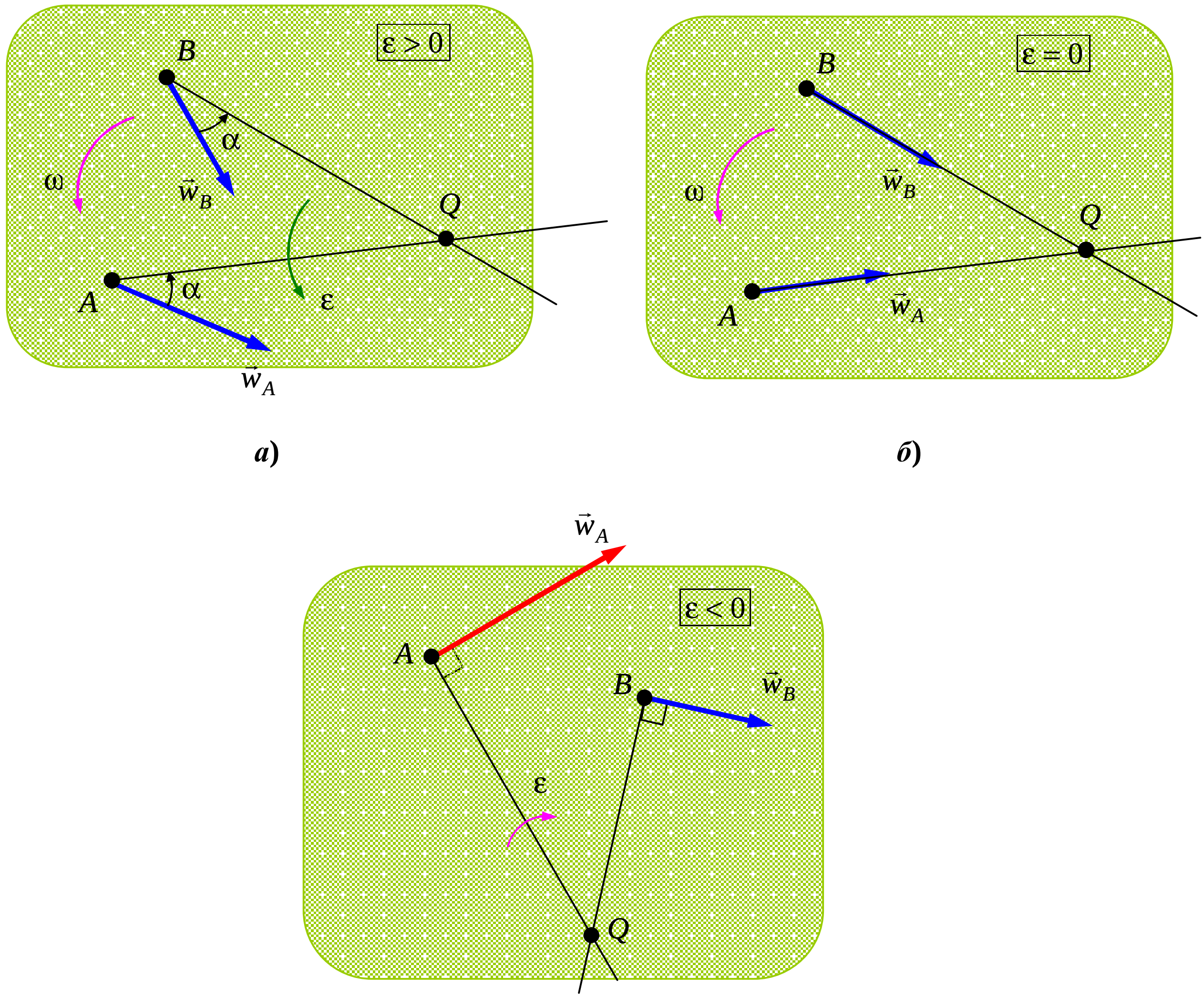
отложенным от векторов ускорений точек в плоскости движения фигуры в направлении $\vec{\varepsilon}$.

Пусть известны направления ускорений двух точек плоской фигуры, ее угловая скорость $\omega \neq 0$, а угловое ускорение $\varepsilon = 0$. Тогда получаем случай вращения плоской фигуры в своей плоскости с постоянной угловой скоростью и, следовательно,

$$tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

В этом случае мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения прямых линий, по которым направлены ускорения точек фигуры (**рис. 7, *б***). Векторы ускорений точек будут направлены к этому центру, т.к. вращательные составляющие ускорений будут равны нулю. Определим расстояние от них до мгновенного центра ускорений:

$$AQ = \frac{w_A}{\omega^2}, \quad BQ = \frac{w_B}{\omega^2}.$$



***а*)** ***б*)** ***в*)**

Рис. 7

Пусть известны направления ускорений двух точек плоской фигуры, ее угловая скорость $\omega = 0$, а угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$. Получаем случай, когда в процессе плоского движения тела меняется направление его вращения. Тогда

$$tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

В этом случае мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек фигуры к векторам их ускорений (**рис. 7, *в***):

$$AQ = \frac{w_A}{\varepsilon}, \quad BQ = \frac{w_B}{\varepsilon}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?

2. По каким траекториям двигаются точки твердого тела при его поступательном движении?

3. Запишите уравнения поступательного движения.

4. Какое движение твердого тела называют вращательным?

5. По каким траекториям двигаются точки твердого тела при его вращательном движении?

6. Запишите уравнения вращательного движения.

7. Как направлены векторы угловых скорости и ускорения при ускоренном и замедленном вращении тела вокруг неподвижной оси?

8. Как определить линейную скорость точки твердого тела при его вращательном движении и как она направлена?

9. Как определить составляющие ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

10. Как направлено ускорение точки твердого тела при равномерном вращении?

11. Какое движение твердого тела называется плоским?

12. Из каких движений состоит плоское движение твердого тела? Зависят ли они от выбора полюса?

13. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?

14. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.

15. Что называется мгновенным центром скоростей?

16. Как определить мгновенный центр скоростей в общем случае?

17. Какие существуют частные случаи определения мгновенного центра скоростей?

18. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры?

19. Какая точка называется мгновенным центром ускорений?

20. Какие существуют частные случаи определения мгновенного центра ускорений?

21. Запишите уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

22. Как определить угловую скорость и как направлен вектор угловой скорости при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки?

23. Как определить угловое ускорение тела, имеющего одну неподвижную точку? Как направлен вектор углового ускорения?

24. Как определить скорость точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?

25. Как определить ускорение точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?

26. Как направлены осестремительное и вращательное ускорения точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?

ГЛАВА 4. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

1.1. Локальная производная вектор-функции

Пусть в абсолютном пространстве задана система отсчета $O\xi\eta\zeta$. Рассмотрим некоторое пространство, вращающееся как твердое тело вокруг начала отсчета O. Свяжем с подвижным пространством систему координат $Oxyz\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$. Пусть $\bar{a}:R^1\to R^3$ – вектор-функция, ставящая каждому моменту времени $t\in R^1$ в соответствие вектор $\bar{a}(t)$ из подвижного пространства с началом в точке O (**рис. 1**).

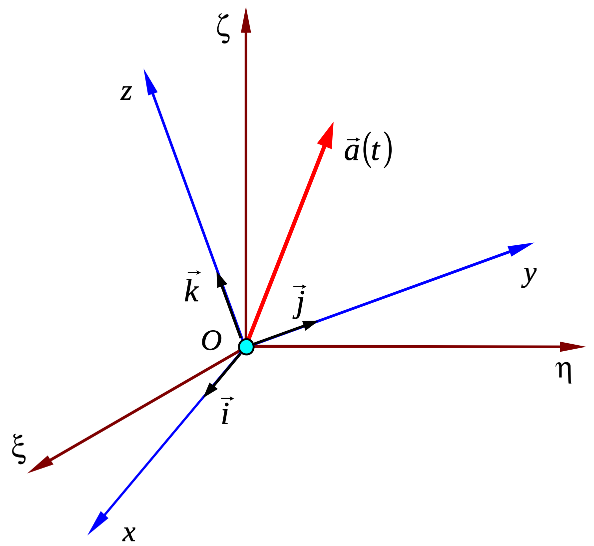


Рис. 1

Предполагая, что эта функция достаточно гладкая, вычислим ее производную по времени. Имеем

$$\frac{d\bar{a}}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left[a_x(t)\bar{i}+a_y(t)\bar{j}+a_z(t)\bar{k}\right]. \tag{1}$$

Здесь $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – орты подвижной системы, а потому они тоже являются функциями времени. Из (1) выводим

$$\frac{d\bar{a}}{dt}(t)=\dot{a}_x(t)\bar{i}(t)+\dot{a}_y(t)\bar{j}(t)+\dot{a}_z(t)\bar{k}(t)+$$

$$+a_x(t)\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{i}(t)}^{\text{формула Эйлера }\bar{w}\times\bar{i}(t)}+a_y(t)\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{j}(t)}^{\text{формула Эйлера }\bar{w}\times\bar{j}(t)}+a_z(t)\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{k}(t)}^{\text{формула Эйлера }\bar{w}\times\bar{k}(t)}=$$

$$= \dot{a}_x(t)\bar{i} + \dot{a}_y(t)\bar{j} + \dot{a}_z(t)\bar{k} + a_x(t)\bar{w}\times\bar{i} + a_y(t)\bar{w}\times\bar{j} + a_z(t)\bar{w}\times\bar{k} =$$

$$= \overbrace{\dot{a}_x(t)\bar{i} + \dot{a}_y(t)\bar{j} + \dot{a}_z(t)\bar{k}}^{\dot{\tilde{a}}(t)} + \bar{\omega}\times\overbrace{\left[a_x(t)\bar{i} + a_y(t)\bar{j} + a_z(t)\bar{k}\right]}^{\bar{a}(t)} = \dot{\tilde{\bar{a}}}(t) + \bar{\omega}\times\bar{a}(t). \qquad (2)$$

Здесь $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения подвижного пространства относительно неподвижного.

Определение 1. ***Вектор***

$$\dot{\tilde{\bar{a}}}(t) = \dot{a}_x(t)\bar{i} + \dot{a}_y(t)\bar{j} + \dot{a}_z(t)\bar{k}$$

называется локальной производной вектор-функции $\bar{a}(t)$**.**

Формулу (2) еще называют формулой полной производной.

1.2. Теоремы о сложении скоростей и ускорений

Пусть некоторое пространство, рассматриваемое как твердое тело, движется относительно абсолютного пространства. Свяжем с подвижным пространством систему координат $Oxyz$, а с неподвижным пространством – систему $\Omega\xi\eta\zeta$. Точка M меняет свое положение и относительно подвижной системы отсчета, и относительно неподвижной системы отсчета.

Условимся о следующей терминологии и обозначениях.

Абсолютное или ***сложное*** движение точки M – движение относительно неподвижной системы координат.

Относительное движение точки M – движение относительно подвижной системы координат.

Переносное движение точки M – движение вместе с подвижным пространством.

Заметим, что если мысленно остановить переносное движение точки, то абсолютное движение будет совпадать с относительным движением и если остановить относительное движение, то абсолютное движение будет совпадать с переносным движением.

Определение 2. ***Скорость и ускорение точки*** M ***в абсолютном, относительном и переносном движениях называются соответственно абсолютными, относительными и переносными скоростями и ускорениями точки и обозначаются символами*** $\bar{v}^a$, $\bar{v}^r$, $\bar{v}^e$, $\bar{w}^a$, $\bar{w}^r$, $\bar{w}^e$**.**

Из приведенного определения вытекает, что

$$\bar{v}^a = \dot{\bar{r}}, \quad \bar{w}^a = \ddot{\bar{r}}, \quad \bar{v}^r = \dot{\tilde{\bar{\rho}}}, \quad \bar{w}^r = \ddot{\tilde{\bar{\rho}}},$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки в абсолютной системе отсчета, а $\bar{\rho}$ – в подвижной системе (см. **рис. 2**).

Переносной скоростью и переносным ускорением точки M будет скорость и ускорение той точки подвижного пространства, с которой в данный момент она совпадает.

Пусть $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ – векторы угловой скорости и углового ускорения подвижного пространства, а $\bar{v}_O$, $\bar{w}_O$ – векторы скорости и ускорения начала подвижной системы отсчета. Тогда

$$\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{\rho}, \quad \bar{w}^e = \bar{w}_O + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{\rho} + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}.$$

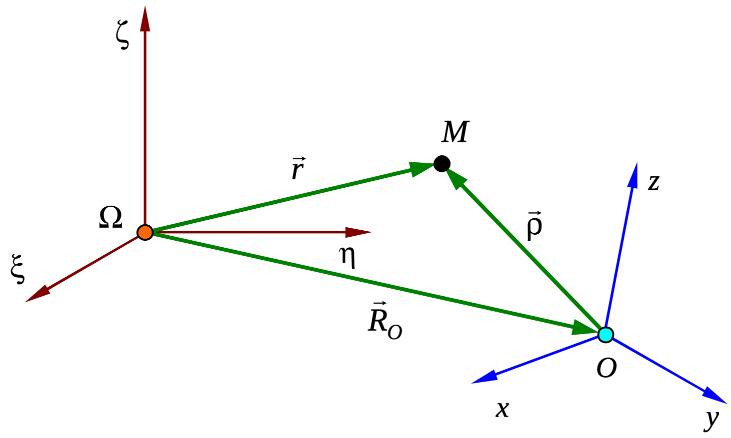


Рис. 2

Теорема 1 (О сложении скоростей). ***В любой момент времени имеет место равенство***

$$\bar{v}^a = \bar{v}^e + \bar{v}^r.$$

Доказательство. За все время движения выполняется равенство

$$\bar{r} = \bar{R}_O + \bar{\rho}.$$

Продифференцируем это тождество по времени:

$$\bar{v}^a = \frac{d}{dt}\overbrace{\bar{r}}^{\bar{R}_0+\bar{\rho}} = \frac{d}{dt}\left(\bar{R}_0 + \bar{\rho}\right) = \overbrace{\frac{d}{dt}\bar{R}_O}^{\bar{v}_O} + \overbrace{\frac{d}{dt}\bar{\rho}}^{\dot{\tilde{\bar{\rho}}}+\bar{\omega}\times\bar{\rho}} = \bar{v}_O + \dot{\tilde{\bar{\rho}}} + \bar{\omega}\times\bar{\rho} = \overbrace{\bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{\rho}}^{\bar{v}^e} + \overbrace{\dot{\tilde{\bar{\rho}}}}^{\bar{v}^r} = \bar{v}^e + \bar{v}^r.$$

Теорема доказана. ¢

Теорема 2 (О сложении ускорений). ***В любой момент времени имеет место равенство***

$$\bar{w}^a = \bar{w}^e + \bar{w}^r + 2\bar{\omega}\times\bar{v}^r.$$

Доказательство. Из теоремы о сложении скоростей следует равенство

$$\bar{v}^a = \overbrace{\bar{v}^e}^{\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\bar{\rho}} + \bar{v}^r \quad \Rightarrow \quad \bar{v}^a = \bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{\rho} + \bar{v}^r,$$

имеющее место в любой момент времени. Продифференцируем его по времени:

$$\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{v}^a}^{\bar{w}^a} = \overbrace{\frac{d}{dt}\bar{v}_O}^{\bar{w}_O} + \overbrace{\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{\rho})}^{\left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}\right)\times\bar{\rho}+\bar{\omega}\times\frac{d}{dt}\bar{\rho}} + \overbrace{\frac{d}{dt}\bar{v}^r}^{\frac{\tilde{d}}{dt}\bar{v}^r+\bar{\omega}\times\bar{v}^r} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{w}^a = \bar{w}_O + \overbrace{\left(\frac{d}{dt}\bar{\omega}\right)}^{\bar{\varepsilon}}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times\overbrace{\frac{d}{dt}\bar{\rho}}^{\frac{\tilde{d}}{dt}\bar{\rho}+\bar{\omega}\times\bar{\rho}} + \overbrace{\frac{\tilde{d}}{dt}\bar{v}^r}^{\bar{w}^r} + \bar{\omega}\times\bar{v}^r =$$

$$= \bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times\left(\overbrace{\frac{\tilde{d}}{dt}\bar{\rho}}^{\bar{v}^r} + \bar{\omega}\times\bar{\rho}\right) + \bar{w}^r + \bar{\omega}\times\bar{v}^r =$$

$$=\overbrace{\overline{w}_O+\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times\overline{\omega}\times\overline{\rho}}^{\overline{w}^e}+\overline{w}^r+2\overline{\omega}\times\overline{v}^r=\overline{w}^e+\overline{w}^r+2\overline{\omega}\times\overline{v}^r.$$

Теорема доказана. ¢

Определение 3. ***Вектор*** $\overline{w}^c=2\overline{\omega}\times\overline{v}^r$ ***называется ускорением Кориолиса.***

Теорему о сложении ускорений еще называют теоремой Кориолиса и записывают в виде равенства

$$\overline{w}^a=\overline{w}^r+\overline{w}^e+\overline{w}^c.$$

Ускорение Кориолиса обращается в ноль в следующих трех и только трех случаях:

$$1)\ \vec{\omega}=0,\qquad 2)\ \vec{v}^{\,r}=0,\qquad 3)\ \vec{\omega}\,\|\,\vec{v}^{\,r}.$$

Пример 1. Точка P движется по окружности радиуса R так, что ее радиус-вектор $\overline{OP}$ вращается с постоянной скоростью ω. Сама окружность вращается с той же угловой скоростью около одного из своих диаметров (**рис. 3**). Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки как функцию угла φ.

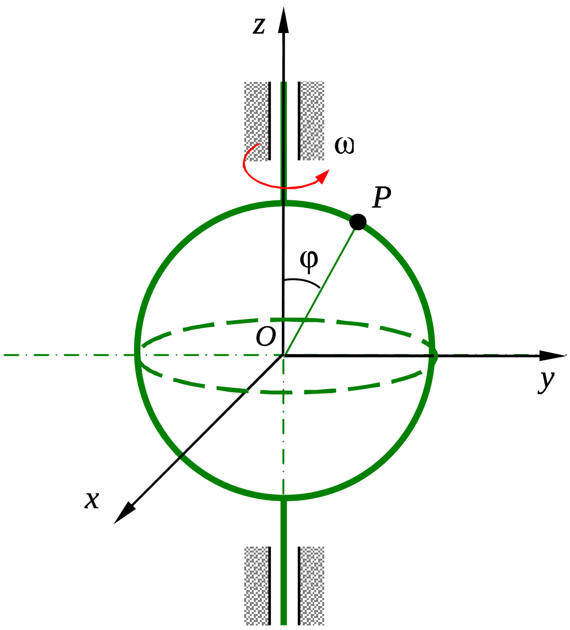


Рис. 3

Решение. Введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с вращающейся окружностью с началом в центре окружности и для которой плоскость Oyz совпадает с плоскостью окружности. Ось Oz направлена вдоль вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ окружности.

Определение скорости точки. В проекциях на оси введенной системы (см. **рис. 4**) получим

$$\overline{v}^a=\overbrace{\overline{v}^e}^{\begin{pmatrix}-\omega R\sin\varphi\\0\\0\end{pmatrix}}+\overbrace{\overline{v}^r}^{\begin{pmatrix}0\\\omega R\cos\varphi\\-\omega R\sin\varphi\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-\omega R\sin\varphi\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\omega R\cos\varphi\\-\omega R\sin\varphi\end{pmatrix}=\omega R\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$v^a = \omega R\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \omega R\sqrt{1+\sin^2\varphi}.$$

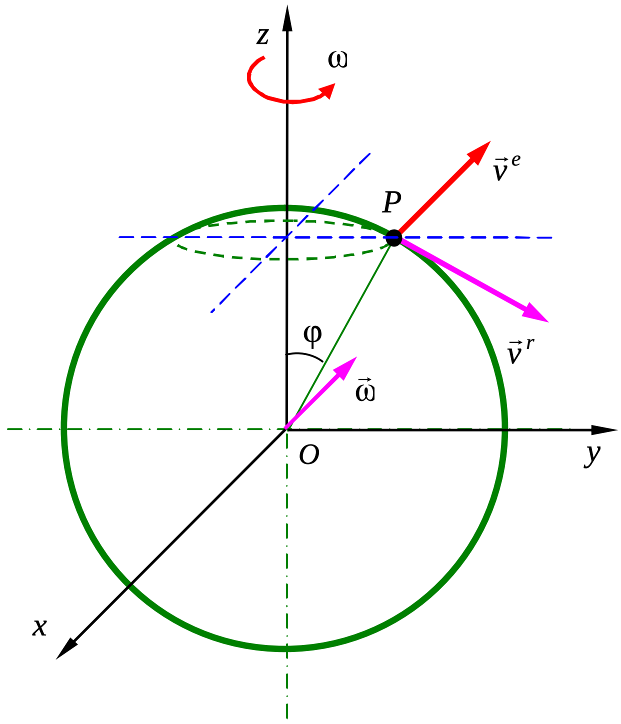


Рис. 4

Определение ускорения точки. В проекциях на оси введенной системы имеем (см. **рис. 5**)

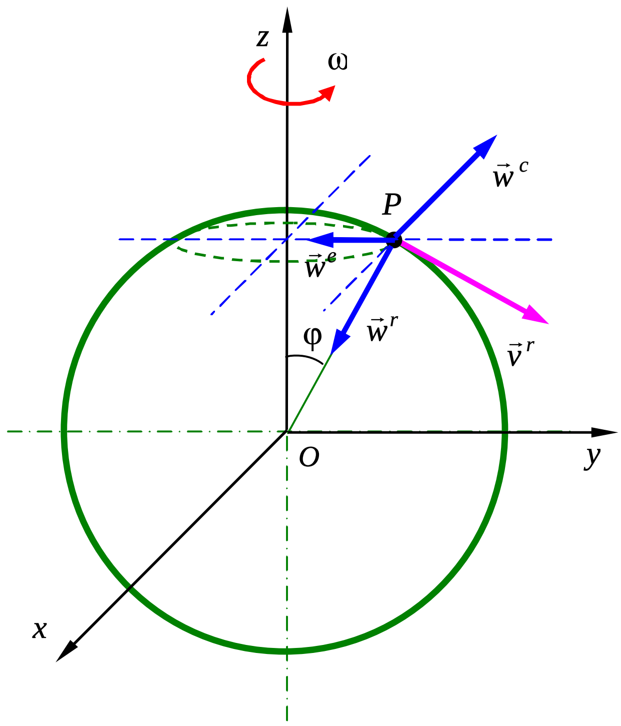


Рис. 5

$$\overline{w}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{w}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ -\omega^2 R\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\overline{w}^c = 2\,\overbrace{\overline{\omega}}^{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}} \times \overbrace{\overline{v}^r}^{\begin{pmatrix} 0 \\ \omega R\cos\varphi \\ -\omega R\sin\varphi \end{pmatrix}} = 2\cdot\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega R\cos\varphi & -\omega R\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 R\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{w}^a = \overbrace{\overline{w}^r}^{\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ -\omega^2 R\cos\varphi \end{pmatrix}} + \overbrace{\overline{w}^e}^{\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} + \overbrace{\overline{w}^c}^{\begin{pmatrix} -2\omega^2 R\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ -\omega^2 R\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\omega^2 R\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -R\omega^2 \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$w^a = \omega^2 R\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \omega^2 R\sqrt{4+\cos^2\varphi}.$$

2. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Постановка задачи

Пусть в абсолютном пространстве задана система отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, относительно которой движется система координат $Oxyz$. В свою очередь относительно нее движется абсолютно твердое тело B (см. **рис. 1**). Это движение имеет две составляющие: относительное движение (движение тела относительно системы $Oxyz$) и переносное движение системы $Oxyz$ относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$.

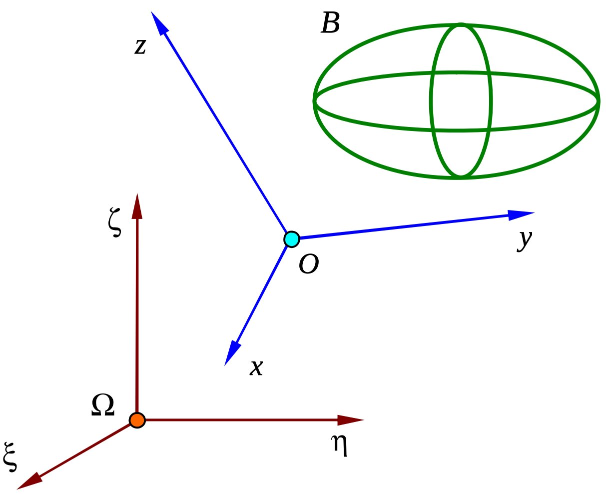


Рис. 1

Задача состоит в том, чтобы найти зависимости между основными характеристиками сложного движения и его составляющими. Ситуация может быть обобщена на случай n составляющих движений.

2.2. Сложение мгновенно поступательных движений

Пусть подвижная система совершает мгновенно поступательное движение относительно неподвижной, а тело – относительно подвижной системы со скоростями $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ соответственно (см. **рис. 2**). Принимаем первое движение за переносное, а второе за относительное. Для абсолютной скорости любой точки P тела имеем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

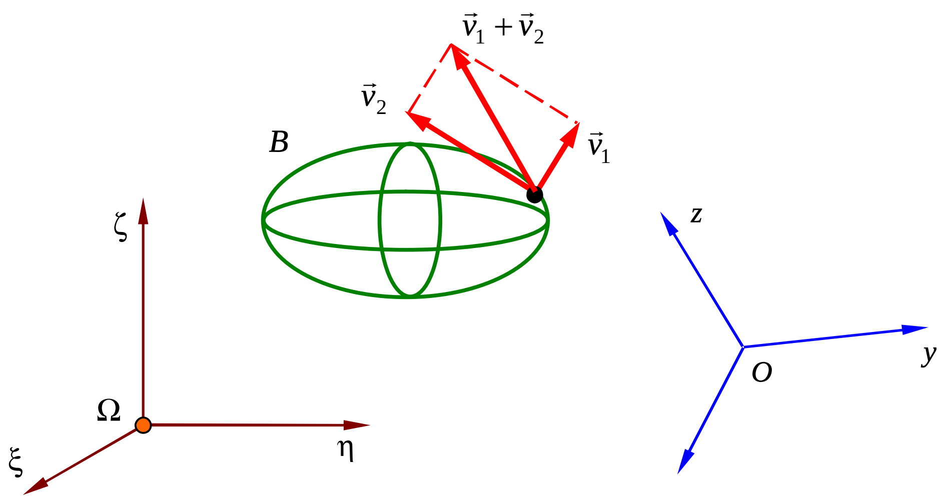


Рис. 2

Таким образом, сложное движение мгновенно поступательно. Это утверждение распространяется и на случай n мгновенно поступательных составляющих движений. При этом

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i.$$

2.3. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть мгновенное вращение тела относительно подвижной системы происходит с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, а подвижной системы относительно неподвижной – $\vec{\omega}_1$. Точка A – пересечение мгновенных осей вращения (см. **рис.3**). Тогда для любой точки P тела имеем

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{1P} + \vec{v}_{2P}, \tag{1}$$

где $\vec{v}_{1P} = \vec{\omega}_1 \times \overline{AP}$ – переносная, а $\vec{v}_{2P} = \vec{\omega}_2 \times \overline{AP}$ – относительная скорость точки P в сложном движении.

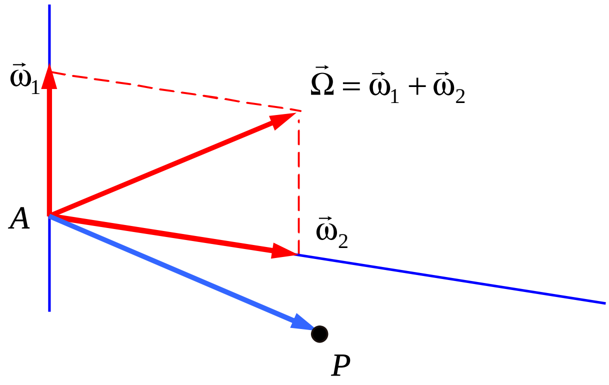


Рис. 3

В силу (1) имеем:

$$\vec{v}_P = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overline{AP}.$$

С другой стороны, точка A неподвижна в абсолютной системе отсчета, так как и в относительном, и переносном движениях она имеет нулевую скорость. Таким образом, абсолютное движение тела представляет собой вращение относительно неподвижной точки A.

Пусть $\vec{\Omega}$ – угловая скорость тела в этом движении. Тогда

$$\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times \overline{AP}$$

и для любой точки P справедливо равенство

$$\vec{\Omega} \times \overline{AP} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overline{AP}. \qquad (2)$$

Покажем, что из (2) следует равенство $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Действительно, пусть

$$\vec{\Omega} - \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq 0.$$

Выберем точку P из условия, что вектор $\overline{AP}$ не параллелен вектору $\vec{\Omega} - \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Тогда

$$0 \neq \left[\vec{\Omega} - (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\right] \times \overline{AP} = \vec{\Omega} \times \overline{AP} - (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overline{AP},$$

что противоречит (2). Остается признать, что

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

В случае n составляющих вращения последняя формула принимает вид

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i .$$

2.4. Кинематические уравнения Эйлера

Пусть твердое тело совершает вращение относительно неподвижной точки O. Введем системы координат: $O\xi\eta\zeta$ – абсолютная система координат; $Oxyz$ – система координат, связанная с телом. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной системы определяется углами Эйлера φ, ψ, ϑ (см. **рис. 4**).

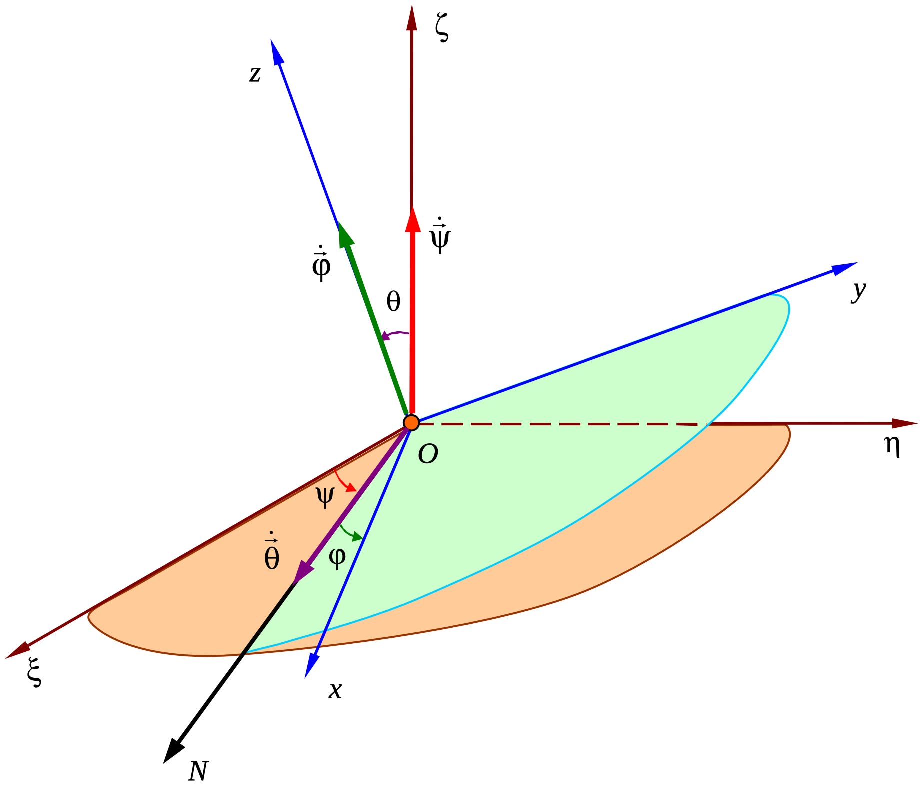


Рис. 4

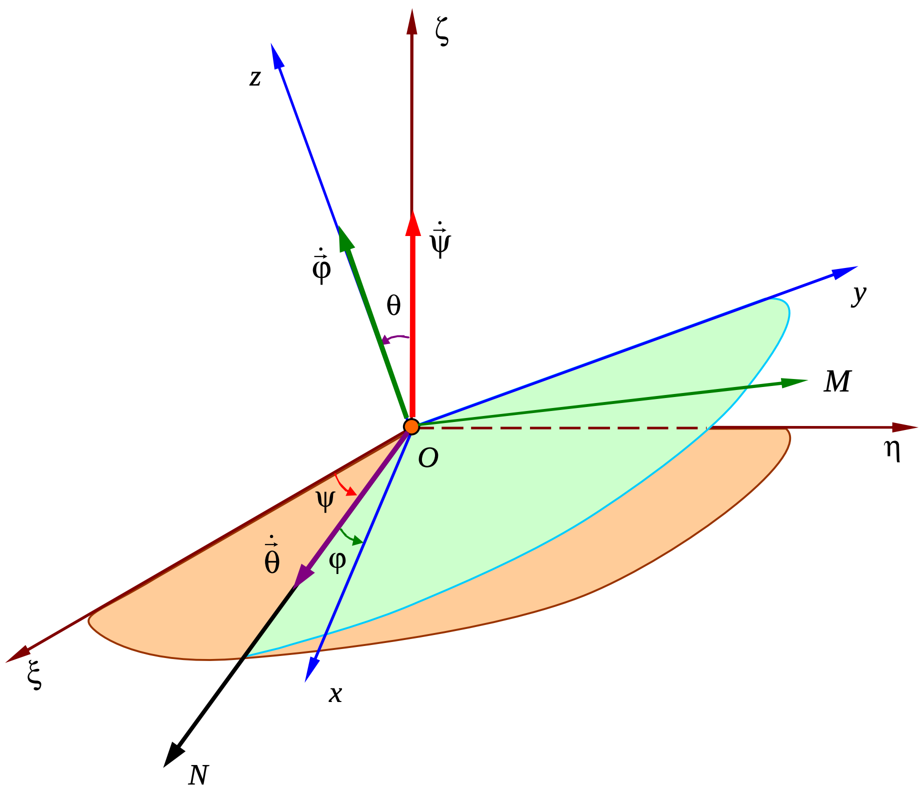


Рис. 5

Тело совершает одновременное вращение относительно пересекающихся в одной точке O осей Oz, $O\zeta$, ON. Тогда

$$\overline{\omega} = \dot{\overline{\varphi}} + \dot{\overline{\psi}} + \dot{\overline{\vartheta}}. \qquad (1)$$

Здесь $\overline{\omega}$ – вектор угловой скорости тела в абсолютном движении. Определим его проекции p, q, r на оси подвижной системы отсчета как функции углов Эйлера и их производных.

Проведем линию OM, перпендикулярную плоскости ONz (см. **рис. 5**). В силу $OM \perp Oz$ эта линия лежит в плоскости Oxy. Тогда оси OM, ON, Ox, Oy лежат в одной плоскости Oxy. По построению $OM \perp ON$. Тогда имеет место равенство $\angle MOy = \angle NOx = \varphi$.

Заметим, что ось ON является пересечением плоскостей $\xi O\eta$ и xOy. Тогда $O\zeta \perp ON$ и $Oz \perp ON$. Таким образом, оси OM, Oz, $O\zeta$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной ON.

Разложим вектор $\dot{\overline{\psi}}$ по направлениям Oz и OM (**рис. 6**).

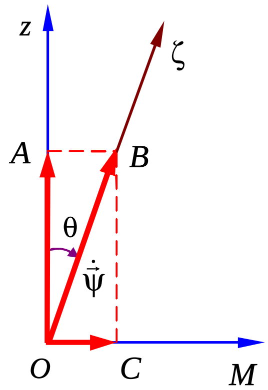


Рис. 6

Параллелограмм $OABC$ является прямоугольником, т.к. линия OM перпендикулярна плоскости NOz по построению. Тогда

$$OA = OB\cos\vartheta = \dot{\psi}\cos\vartheta, \quad OC = OB\sin\vartheta = \dot{\psi}\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$\dot{\overline{\psi}} = \overline{OA} + \overline{OC} = \dot{\psi}\cos\vartheta\,\overline{z}^0 + \dot{\psi}\sin\vartheta\,\overline{m}^0. \qquad (2)$$

С другой стороны, OM лежит в плоскости Oxy. Тогда (**рис. 7**)

$$\overline{m}^0 = \sin\varphi\,\overline{x}^0 + \cos\varphi\,\overline{y}^0.$$

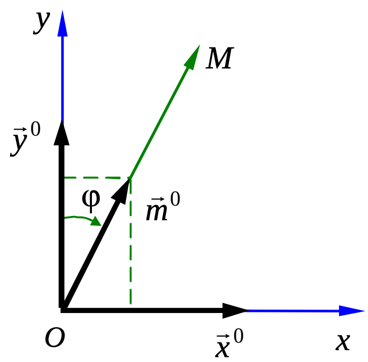


Рис. 7

Подставим в (2):

$$\dot{\vec{\psi}} = \dot\psi\cos\vartheta\,\vec{z}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\,\overbrace{\vec{m}^{\,0}}^{\sin\varphi\vec{x}^{\,0}+\cos\varphi\vec{y}^{\,0}} = \dot\psi\cos\vartheta\,\vec{z}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\left(\sin\varphi\,\vec{x}^{\,0} + \cos\varphi\,\vec{y}^{\,0}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\dot{\vec{\psi}} = \dot\psi\cos\vartheta\,\vec{z}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{x}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{y}^{\,0}. \tag{3}$$

Заметим, что (см. **рис. 8**)

$$\dot{\vec{\vartheta}} = \dot\vartheta\cos\varphi\,\vec{x}^{\,0} - \dot\vartheta\sin\varphi\,\vec{y}^{\,0}, \quad \dot{\vec{\varphi}} = \dot\varphi\,\vec{z}^{\,0}. \tag{4}$$

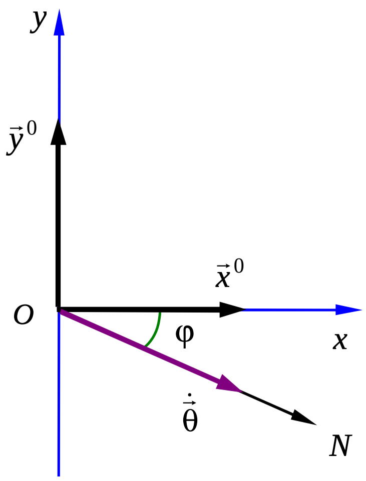


Рис. 8

Перепишем (1) с учетом (3) и (4):

$$\overline{\omega} = \overbrace{\dot{\vec{\varphi}}}^{\dot\varphi\vec{z}^{\,0}} + \overbrace{\dot{\vec{\psi}}}^{\dot\psi\cos\vartheta\vec{z}^{\,0}+\dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi\vec{x}^{\,0}+\dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi\vec{y}^{\,0}} + \overbrace{\dot{\vec{\theta}}}^{\dot\vartheta\cos\varphi\vec{x}^{\,0}-\dot\vartheta\sin\varphi\vec{y}^{\,0}} =$$

$$= \dot\varphi\,\overline{z}^{\,0} + \dot\psi\cos\vartheta\,\overline{z}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi\,\overline{x}^{\,0} + \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi\,\overline{y}^{\,0} + \dot\vartheta\cos\varphi\,\overline{x}^{\,0} - \dot\vartheta\sin\varphi\,\overline{y}^{\,0} \quad\Rightarrow$$

$$\overline{\omega} = \left(\dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi\right)\overline{x}^{\,0} + \left(-\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi\right)\overline{y}^{\,0} + \left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta\right)\overline{z}^{\,0}. \tag{5}$$

Спроецируем (5) на оси подвижной системы координат:

$$\begin{cases} p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \\ q = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Определение 1. ***Соотношения (6) называются кинематическими уравнениями Эйлера в подвижной системе отсчета.***

2.5. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей

Пусть твердое тело совершает мгновенное вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ относительно оси, связанной с системой координат $Oxyz$, которая в свою очередь совершает мгновенное вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ относительно оси, связанной с абсолютной системой $O_1\xi\eta\zeta$. Оси вращения параллельны. Заметим, что если взять прямую, связанную с телом, параллельную осям вращения, то скорости ее точек будут одинаковыми. Следовательно, достаточно рассмотреть движение плоского сечения тела, перпендикулярного осям вращения, в его плоскости.

Пусть векторы $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ имеют одинаковые направления (**рис. 9**).

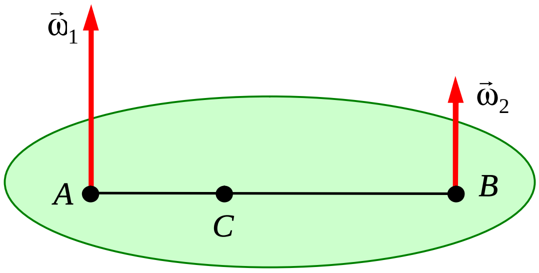


Рис.9

Покажем, что в этом случае сложное движение представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

ось которого проходит через точку C отрезка AB, для которой справедливо равенство

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\bar{v}_C = \bar{v}_C^r + \bar{v}_C^e,$$

где

$$\bar{v}_C^r = \bar{w}_1 \times \overline{AC} \Rightarrow v_C^r = w_1 AC, \quad \bar{v}_C^e = \bar{w}_2 \times \overline{BC} \Rightarrow v_C^e = w_2 BC.$$

Из (1) следует $v_C^r = v_C^e$. Из параллельности векторов $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ и антипараллельности векторов $\overline{AC}, \overline{BC}$ вытекает антипараллельность векторов $\bar{v}_C^r, \bar{v}_C^e$. Тогда в силу (1) находим $\bar{v}_C = 0$. Все точки прямой, проходящей через точку C параллельно осям вращения, имеют нулевые скорости, поэтому эта прямая представляет собой мгновенную ось вращения для сложного движения. Обозначим через $\bar{\Omega}$ угловую скорость этого вращения. Вектор $\bar{\Omega}$ направлен вдоль мгновенной оси вращения (**рис. 10**).

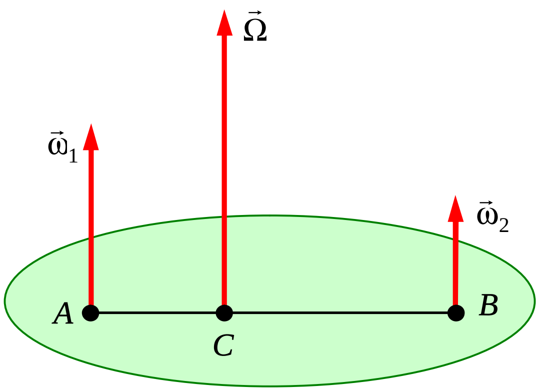


Рис. 10

Вычислим его длину. С одной стороны, скорость точки B равна $\bar{v}_B = \bar{w}_1 \times \overline{AB}$, а с другой – $\bar{v}_B = \bar{\Omega} \times \overline{CB}$. Отсюда

$$\bar{w}_1 \times \overline{AB} = \bar{\Omega} \times \overline{CB} \Rightarrow w_1 \overbrace{AB}^{AC+CB} = \Omega CB \Rightarrow$$

$$w_1 \left(AC + CB \right) = \Omega CB \Rightarrow \overbrace{w_1 \, AC}^{(1) \Rightarrow = w_2 BC} + w_1 CB = \Omega CB \Rightarrow$$

$$w_2 BC + w_1 CB = \Omega CB \Rightarrow \Omega = w_1 + w_2.$$

Пусть векторы $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ антипараллельны и не равны по модулю (**рис. 11**). Для определенности примем, что $w_1 > w_2$.

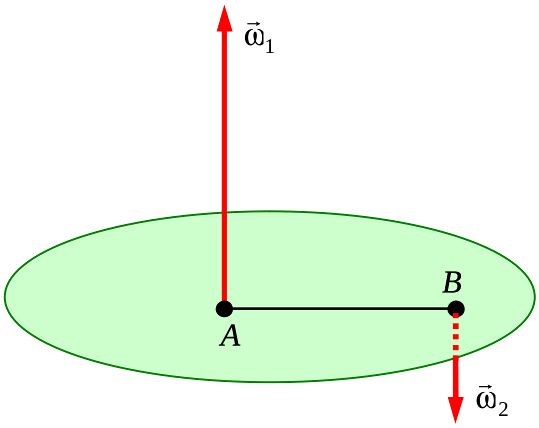


Рис. 11

Покажем, что сложное движение представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью

$$\bar{\Omega} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2,$$

ось которого проходит через точку C, лежащую вне отрезка AB со стороны точки A, для которой справедливо равенство

$$w_1 AC = w_2 CB. \qquad (2)$$

Действительно, как и выше, получаем

$$v_C^r = w_1 AC, \quad v_C^e = w_2 BC.$$

Из антипараллельности векторов $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ и параллельности векторов $\overline{AC}, \overline{BC}$ вытекает антипараллельность векторов $\bar{v}_C^r, \bar{v}_C^e$. Следовательно, в силу (2) $\bar{v}_C = 0$. Все точки прямой, проходящей через точку C параллельно осям вращения, имеют нулевые скорости, поэтому эта прямая представляет собой мгновенную ось вращения для сложного движения. Обозначим через $\bar{\Omega}$ угловую скорость этого вращения. Вектор $\bar{\Omega}$ направлен вдоль мгновенной оси вращения (см. **рис. 12**).

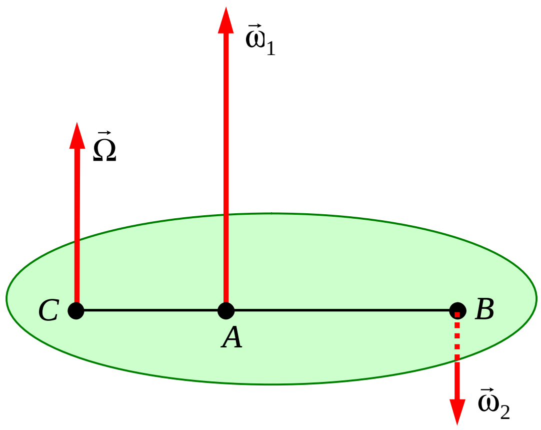


Рис. 12

Вычислим его длину. С одной стороны, скорость точки B равна $\overline{v}_B=\overline{w}_1\times\overline{AB}$, а с другой – $\overline{v}_B=\overline{\Omega}\times\overline{CB}$. Отсюда

$$\overline{w}_1\times\overline{AB}=\overline{\Omega}\times\overline{CB}\Rightarrow w_1\overbrace{AB}^{CB-CA}=\Omega CB\Rightarrow$$

$$w_1\left(CB-CA\right)=\Omega CB\Rightarrow w_1CB-\overbrace{w_1CA}^{(2)\Rightarrow=w_2CB}=\Omega CB\Rightarrow$$

$$w_1CB-w_2CB=\Omega CB\Rightarrow\Omega=w_1-w_2.$$

2.6. Пара вращений

Определение 2. ***Совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с равными по модулю, но противоположными по направлению угловыми скоростями называется парой вращения.***

Определение 3. ***Плоскость, проходящая через оси вращения, называется плоскостью пары.***

Определение 4. ***Расстояние между осями вращения называется плечом пары.***

Теорема 1. ***Тело, участвующее в паре вращений, совершает поступательное движение.***

Доказательство. Пусть P – произвольная точка тела (**рис. 13**).

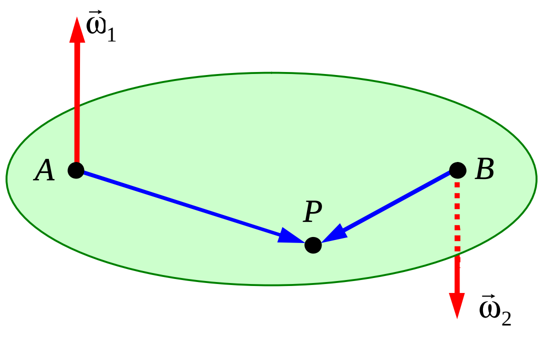


Рис. 13

Тогда справедливо равенство

$$\overline{v}_P = \overline{w}_1 \times \overline{AP} + \overbrace{\overline{w}_2}^{=-\overline{w}_1} \times \overline{BP} = \overline{w}_1 \times \overline{AP} - \overline{w}_1 \times \overbrace{\overline{BP}}^{\Leftrightarrow} =$$

$$= \overline{w}_1 \times \overline{AP} + \overline{w}_1 \times \overline{PB} = \overline{w}_1 \times \left(\overline{AP} + \overline{PB}\right) = \overline{w}_1 \times \overline{AB} = \overline{BA} \times \overline{w}_1 = \overline{AB} \times \overline{w}_2 .$$

Таким образом, вектор $\overline{v}_P$ не зависит от точки P. Теорема доказана. ¢

Определение 5. ***Вектор***

$$\overline{AB} \times \overline{w}_2 = \overline{BA} \times \overline{w}_1$$

называется моментом пары.

Заметим, что

$$\left|\overline{AB} \times \overline{w}_2\right| = \left|\overline{BA} \times \overline{w}_1\right| = w \cdot d .$$

Таким образом, вектор скорости мгновенного поступательного движения тела, участвующего в паре мгновенных вращений, совпадает с моментом пары. Он перпендикулярен плоскости пары, по величине равен $w \cdot d$, где d – плечо пары, и направлен так, что с его конца вращение пары происходит против часовой стрелки. Наоборот, всякое мгновенное поступательное движение тела с вектором скорости $\overline{v}$ может быть заменено на пару вращений, плоскость которой перпендикулярна вектору скорости поступательного движения тела, а плечо пары d и угловая скорость w связаны соотношением $w\,d = v$. Направление вращения пары выбирается так, чтобы направление момента пары было параллельно вектору скорости поступательного движения тела.

2.7. Сложение мгновенных поступательного и вращательного движений

Пусть абсолютно твердое тело совершает мгновенное вращение относительно системы отсчета $Oxyz$ с угловой скоростью $\overline{w}$. В свою очередь эта система движется мгновенно поступательно относительно абсолютной системы Ωxhz со скоростью $\overline{v}$, при этом $\angle\left(\overline{w}, \overline{v}\right) = a \neq 0$. Разложим вектор поступательной скорости на две составляющие (**рис. 14**):

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 .$$

При этом $\overline{v}_1 \parallel \overline{w}, \quad \overline{v}_2 \perp \overline{w}$. Тогда

$$v_1 = v \cos a , \quad v_2 = v \sin a .$$

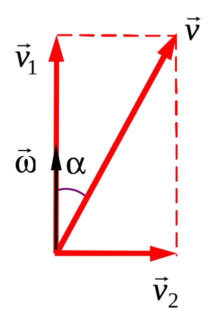


Рис. 14

Вектор скорости $\bar{v}_2$ заменим парой вращений $\bar{w}_1, \bar{w}_2$, $\bar{w}_1 = -\bar{w}_2 = \bar{w}$, в которой ее плоскость перпендикулярна вектору $\bar{v}_2$ (**рис. 15**), а плечо AB определяется из условия $ABw = v_2$.

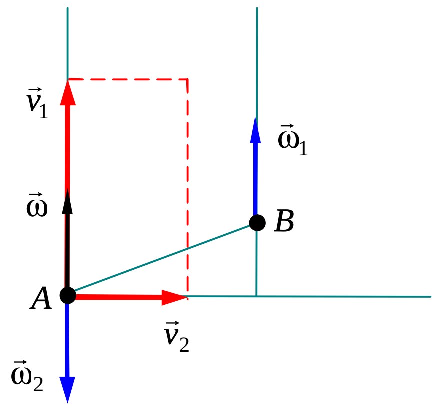


Рис. 15

В силу $\bar{w} + \bar{w}_2 = 0$ и возможности переноса вектора поступательной скорости $\bar{v}_1$ в любую точку тела окончательно получим кинематический винт, изображенный на рис. 16.

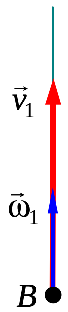


Рис. 16

Таким образом, сложное движение является мгновенно винтовым. Ось винта параллельна оси вращения и смещена от нее на расстояние

$$AB = \frac{\overbrace{v_2}^{=v\sin a}}{w} = \frac{v \sin a}{w},$$

угловая скорость вращения –

$$\bar{w}_1 = \bar{w},$$

поступательная составляющая винта –

$$\bar{v}_1 \ \left(v_1 = v \cos a\right),$$

параметр винта –

$$p = \frac{I_2}{I_1} = \frac{v \cos a}{w}.$$

В частности, если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $v_1 = v\cos\overbrace{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \overline{v} = \overline{v}_2$. Скорость точки будет перпендикулярна оси вращения. Сложное движение представляет собой чистое вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$.

Наконец, при угле $\alpha = 0$ непосредственно видно (рис. 16), что сложное движение является винтом.

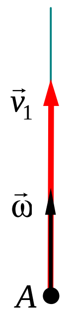


Рис. 16

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение точки называют сложным?
2. Какое движение точки называют абсолютным, относительным и переносным?
3. Сформулируйте и запишите теорему о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение.
4. Сформулируйте и запишите теорему о сложении ускорений точки, совершающей сложное движение.
5. Что характеризует и как определяется ускорение Кориолиса?
6. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
7. Какое движение твердого тела называют сложным?
8. Какое движение получится при сложении двух поступательных движений?
9. Какое движение получится при сложении двух вращений вокруг пересекающихся осей?
10. Какое движение получается при сложении двух одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей и где находится мгновенная ось вращения?
11. Какое движение получается при сложении двух неравных, противоположно направленных вращений вокруг параллельных осей и где находится мгновенная ось вращения?
12. Что называется парой вращения и какое движение совершает твердое тело в этом случае?
13. Какое движение называют винтовым?
14. Какое движение называют мгновенным винтовым движением?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учеб. пособие для университетов. М.: Наука, 1990. 416 с.

2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 1: Кинематика, статика, динамика материальной точки / Н.Н. Бухгольц; в перераб. и с доп. С.М. Тарга. М.: Наука, 1972. 468 с.

3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2: Динамика системы материальных точек / Н.Н. Бухгольц; в перераб. и с доп. С.М. Тарга. М.: Наука, 1972. 332 с.

4. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика: учеб. для втузов. СПб.: Лань, 2001. 768 с.

5. *Мещерский И.В.* Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. СПб.: Лань, 2002. 448 с.

Учебное издание

Лутманов Сергей Викторович
Остапенко Елена Николаевна

Теоретическая и прикладная механика. Кинематика

Учебное пособие

Редактор *Л. А. Богданова*
Корректор *Л. И. Семицветова*
Компьютерная верстка *Е. Н. Остапенко, С. В. Лутманов*

Объем данных 1 Мб
Подписано к использованию 24.06.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15