

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СЛУШАТЕЛЕЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для абитуриентов-иностранцев,  
поступающих в вузы России, для подготовки к сдаче  
вступительного экзамена по математике*



Пермь 2019

УДК 51(075.4)  
ББК 22.1я727  
К94

**Кусяков А. Ш.**

К94 Математика для иностранных слушателей подготовительных курсов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. Ш. Кусяков; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 4,26 Мб; 242 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/matematika-dlya-in-slushatelej-pk.pdf>. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3317-3

Пособие предназначено абитуриентам-иностранцам для подготовки к сдаче вступительного экзамена по математике в вузы России. Содержит основные определения, формулы и теоремы по школьному курсу алгебры и геометрии, а также примеры решения типовых задач. Для удобства использования каждый раздел начинается со списка ключевых слов на русском, английском и арабском языках.

**УДК 51(075.4)**  
**ББК 22.1я727**

*Издается по решению ученого совета механико-математического факультета  
Пермского государственного национально-исследовательского университета*

**Рецензенты:** кафедра математики и естественно-научных дисциплин Пермского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (зав. каф., д-р физ.-мат. наук, профессор **К. Г. Шварц**);  
доцент кафедры «Высшая математика» ПНИПУ, канд. физ.-мат. наук **В. П. Плаксина**

ISBN 978-5-7944-3317-3

© ПГНИУ, 2019  
© Кусяков А. Ш., 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение .....</b>                                     | <b>6</b>  |
| <b>1. Основные понятия алгебры .....</b>                  | <b>7</b>  |
| 1.1. Степени и корни.....                                 | 7         |
| 1.2. Уравнения .....                                      | 12        |
| 1.3. Неравенства.....                                     | 21        |
| 1.4. Функции .....                                        | 33        |
| 1.5. Последовательности .....                             | 40        |
| 1.6. Упражнения.....                                      | 44        |
| <b>2. Показательная и логарифмическая функции .....</b>   | <b>50</b> |
| 2.1. Показательная функция.....                           | 50        |
| 2.2. Логарифмы .....                                      | 53        |
| 2.3. Логарифмическая функция .....                        | 55        |
| 2.4. Упражнения.....                                      | 59        |
| <b>3. Тригонометрические функции .....</b>                | <b>61</b> |
| 3.1. Тригонометрические функции острого угла .....        | 61        |
| 3.2. Тригонометрические функции произвольного угла .....  | 67        |
| 3.3. Формулы приведения .....                             | 70        |
| 3.4. Формулы сложения.....                                | 71        |
| 3.5. Следствия из формул сложения .....                   | 72        |
| 3.6. Тригонометрические функции числового аргумента ..... | 74        |
| 3.7. Обратные тригонометрические функции .....            | 77        |
| 3.8. Тригонометрические уравнения .....                   | 81        |
| 3.9. Упражнения.....                                      | 85        |
| <b>4. Планиметрия .....</b>                               | <b>87</b> |
| 4.1. Основные понятия .....                               | 87        |
| 4.2. Треугольники .....                                   | 90        |
| 4.3. Четырехугольники .....                               | 98        |
| 4.4. Окружность и круг.....                               | 106       |
| 4.5. Хорды, касательные и секущие окружности.....         | 108       |

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| 4.6. Углы в окружности .....                        | 112        |
| 4.7. Треугольники и окружности .....                | 114        |
| 4.8. Четырехугольники и окружности .....            | 117        |
| 4.9. Правильные многоугольники.....                 | 121        |
| 4.10. Упражнения.....                               | 122        |
| <b>5. Стереометрия .....</b>                        | <b>126</b> |
| 5.1. Основные понятия .....                         | 126        |
| 5.2. Призма и пирамида.....                         | 129        |
| 5.3. Тела вращения.....                             | 135        |
| 5.4. Упражнения.....                                | 139        |
| <b>6. Метод координат .....</b>                     | <b>141</b> |
| 6.1. Основные понятия .....                         | 141        |
| 6.2. Уравнение прямой .....                         | 145        |
| 6.3. Уравнение окружности.....                      | 148        |
| 6.4. Пространственная система координат.....        | 150        |
| 6.5. Упражнения.....                                | 153        |
| <b>7. Векторы .....</b>                             | <b>155</b> |
| 7.1. Основные понятия .....                         | 155        |
| 7.2. Координаты вектора .....                       | 156        |
| 7.3. Скалярное произведение векторов .....          | 159        |
| 7.4. Векторы в пространстве .....                   | 161        |
| 7.5. Упражнения.....                                | 166        |
| <b>8. Математический анализ .....</b>               | <b>168</b> |
| 8.1. Понятие производной .....                      | 168        |
| 8. 2. Первообразная и неопределенный интеграл ..... | 184        |
| 8.3. Понятие определенного интеграла .....          | 188        |
| 8.4. Упражнения.....                                | 191        |
| <b>9. Вероятность.....</b>                          | <b>197</b> |
| 9.1. Классическое определение вероятности .....     | 197        |
| 9.2. Умножение и сложение вероятностей.....         | 200        |

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| 9.3. Применение комбинаторики в теории вероятностей..... | 205        |
| 9.4. Упражнения.....                                     | 209        |
| <b>10. Текстовые задачи .....</b>                        | <b>212</b> |
| 10.1. Арифметические задачи .....                        | 212        |
| 10.2. Задачи с прикладным содержанием.....               | 216        |
| 10.3. Задачи на составление уравнений.....               | 220        |
| 10.4. Упражнения.....                                    | 224        |
| <b>11. Задания повышенного уровня сложности .....</b>    | <b>228</b> |
| 11.1. Уравнения.....                                     | 228        |
| 11.2. Стереометрия .....                                 | 231        |
| 11.3. Неравенства.....                                   | 233        |
| 11.4. Планиметрия .....                                  | 234        |
| 11.5. Текстовые задачи с экономическим содержанием ..... | 235        |
| 11.6. Задачи с параметром.....                           | 237        |
| 11.7. Олимпиадные задачи .....                           | 238        |
| <b>Библиографический список .....</b>                    | <b>240</b> |
| <b>Электронные ресурсы .....</b>                         | <b>240</b> |
| <b>Приложение 1. Русский алфавит .....</b>               | <b>241</b> |
| <b>Приложение 2. Числительные.....</b>                   | <b>241</b> |

## Введение

Целью учебного пособия является повторение основных разделов школьного курса математики, необходимых для успешного обучения в вузе. Учебный материал ориентирован в первую очередь на иностранных слушателей, содержит следующие разделы:

1. Основные понятия алгебры.
2. Показательная и логарифмическая функции.
3. Тригонометрические функции.
4. Планиметрия.
5. Стереометрия.
6. Метод координат.
7. Векторы.
8. Математический анализ
9. Вероятность.
10. Текстовые задачи.
11. Задания повышенного уровня сложности.

При оценке уровня знаний и навыков по математике слушателей-иностранцев подготовительных курсов рекомендуется ориентироваться на три уровня подготовки: начальный, базовый и профильный.

*Начальный уровень* предполагает умение решать типовые алгебраические задачи (преобразование выражений, решение уравнений и неравенств, действия с функциями). Освоение курса на данном уровне служит основой для дальнейшего изучения курса элементарной математики.

*Базовый уровень* предполагает умение решать математические задачи среднего уровня сложности, с использованием не только алгебраических, но и специальных функций (показательной, логарифмической и тригонометрических), а также выполнять действия с геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве.

*Профильный уровень* предполагает умение решать математические задачи на том уровне требований, который традиционно предъявляется вузами с профильным экзаменом по математике.

## 1. Основные понятия алгебры

Ключевые слова по теме «Основные понятия алгебры»

|                           |                          |                           |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Алгебра                   | algebra                  | رب ج ا مل ع               |
| Арифметическая прогрессия | arithmetical progression | ةي با س ح ةيل ا وتم       |
| Выражение                 | expression               | ري ب ع ت ا                |
| Вычитание                 | subtraction              | ح ر ط ل ا                 |
| Геометрическая прогрессия | geometric progression    | ةي س د ن ه ةيل ا وتم      |
| Гипербола                 | pyperbola                | دئ ا ز ل ا ع ط ق ل ا      |
| Деление                   | division                 | م ي س ق ت                 |
| Дискриминант              | discriminant             | ز ي ي م ت                 |
| Квадратный корень         | square root              | ي ع ي ب ر ت ل ا ر ذ ج ل ا |
| Корень уравнения          | root of equation         | ق ل د ا ع م ل ا ر ذ ج     |
| Кубический корень         | cubic root               | ب ع ك م ر ذ ج             |
| Неравенство               | inequality               | ت و ا ف ت                 |
| Парабола                  | parabola                 | ئ ف ا ك م ل ا ع ط ق ل ا   |
| Сложение                  | addition                 | ة ف ا ض ا                 |
| Степень                   | power                    | ق و ق                     |
| Сумма                     | sum                      | ع و م ج م                 |
| Умножение                 | multiplication           | ب ر ض                     |
| Уравнение                 | equation                 | ق ل د ا ع م               |
| Функция                   | function                 | ة ف ي ظ و                 |

### 1.1. Степени и корни

Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$  называется произведение  $n$  сомножителей, каждый из которых равен  $a$ :

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a.$$

Число  $a$  называется основанием степени, а число  $n$  – показателем степени.

Степень с натуральным показателем удовлетворяет следующим свойствам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

*Пример 1.* Вычислить  $\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5}$ .

*Решение:*

$$\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5} = \frac{(13 \cdot 2)^6}{26^5} = \frac{26^6}{26^5} = 26.$$

*Ответ:* 26.

Чтобы обобщить понятие степени на случай, когда показатель степени является произвольным целым числом, примем по определению, что

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степень с целым показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем.

*Пример 2.* Вычислить  $3^4 \cdot 9^{-2}$ .

*Решение:*

$$3^4 \cdot 9^{-2} = 3^4 \cdot (3^2)^{-2} = 3^4 \cdot 3^{-4} = 3^{4-4} = 3^0 = 1.$$

*Ответ:* 1.

*Арифметическим квадратным корнем* из числа  $a$  называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ . Квадратный корень обозначается символом  $\sqrt{a}$ . Например,  $\sqrt{9}=3$ ,  $\sqrt{225}=15$ . Выражения  $\sqrt{-9}$ ,  $\sqrt{-16}$  не имеют смысла.

*Пример 3.* Вычислить  $\frac{\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{1,8}}{\sqrt{0,24}}$ .

*Решение:*

$$\frac{\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{1,8}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{4,8 \cdot 1,8}{0,24}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 18}{24}} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$



Ответ: 6.

Арифметический квадратный корень удовлетворяет следующим свойствам:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Кубическим корнем из числа  $a$  называется число, куб которого равен  $a$ . Кубический корень обозначается  $\sqrt[3]{a}$ . Например,  $\sqrt[3]{8} = 2$ ,  $\sqrt[3]{-27} = -3$ . Таким образом, в отличие от арифметического квадратного корня кубический корень можно извлекать не только из положительных, но и из отрицательных чисел. Кубический корень обладает теми же свойствами, что и арифметический квадратный корень.

Пример 4. Вычислить  $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2}$ .

Решение:

$$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Ответ: 4.

Арифметическим корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ . Арифметический корень  $n$ -й степени обозначается символом  $\sqrt[n]{a}$ . Таким образом, по определению имеем

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Степенью числа  $a$  ( $a > 0$ ) с рациональным показателем  $\frac{m}{n}$  ( $m$  – целое число,  $n$  – натуральное число) называется число  $\sqrt[n]{a^m}$ . Степень с рациональным показателем обозначается символом  $a^{\frac{m}{n}}$ . Таким образом, по определению имеем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с целым показателем.

Пример 5. Вычислить  $2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 4^0$ .

Решение:

$$2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 4^0 = 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{2}{3}} \cdot 1 = 2^{-2} \cdot 2^4 = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

Для успешного проведения тождественных преобразований алгебраических выражений важно знать следующие формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Пример 6. Вычислить  $(\sqrt{14} - \sqrt{12})^4 (\sqrt{14} + \sqrt{12})^4$ .

Решение:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{14} - \sqrt{12})^4 (\sqrt{14} + \sqrt{12})^4 = \\ & = \left( (\sqrt{14} - \sqrt{12})(\sqrt{14} + \sqrt{12}) \right)^4 = \\ & = \left( (\sqrt{14})^2 - (\sqrt{12})^2 \right)^4 = (14 - 12)^4 = 2^4 = 16. \end{aligned}$$

Ответ: 16.

Пример 7. Вычислить  $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$ , если  $x = 18$ ,  $y = 12$ .

Решение:

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x}{x-y} = \frac{18}{18-12} = \frac{18}{6} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 8. Вычислить  $\frac{x^3 + 3x^2y + y^3}{x+y} + \frac{3y^2x^2 - 3xy^3}{x^2 - y^2}$ ,

если  $x = 18$ ,  $y = 12$ .

Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + 3x^2y + y^3}{x+y} + \frac{3y^2x^2 - 3xy^3}{x^2 - y^2} = \\ & = \frac{x^3 + 3x^2y + y^3}{x+y} + \frac{3xy^2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \frac{x^3 + 3x^2y + y^3}{x+y} + \frac{3xy^2}{x+y} = \\ & = \frac{x^3 + 3x^2y + y^3 + 3xy^2}{x+y} = \frac{(x+y)^3}{x+y} = \\ & = (x+y)^2 = (18+12)^2 = 30^2 = 900. \end{aligned}$$

Ответ: 900.

Пример 9. Вычислить  $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} - y^{-1}}$ , если  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{3}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} - y^{-1}} = \frac{(x^{-1})^2 - (y^{-1})^2}{x^{-1} - y^{-1}} = \\ & = \frac{(x^{-1} - y^{-1})(x^{-1} + y^{-1})}{x^{-1} - y^{-1}} = x^{-1} + y^{-1} = \\ & = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(1/2)} + \frac{1}{(1/3)} = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

*Пример 10.* Вычислить  $\frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} - y}{(\sqrt[3]{x})^2 - y} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{y}},$

если  $x = 218, y = 124.$

*Решение:*

Введем новые переменные:

$$a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt{y}.$$

Из последнего выражения найдем:  $y = b^2.$

Выполнив в исходном выражении замену переменных, получим:

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot b - b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a}{a + b} &= \frac{b(a - b)}{(a - b)(a + b)} + \frac{a}{a + b} = \\ &= \frac{b}{a + b} + \frac{a}{a + b} = \frac{a + b}{a + b} = 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

## 1.2. Уравнения

*Уравнением* называется равенство, содержащее неизвестную величину.

Неизвестная величина обычно обозначается буквой  $x$ .

*Корнем уравнения* называется число, которое при подстановке его вместо неизвестного обращает уравнение в верное равенство.

*Решить уравнение* – это значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

*Пример 1.* Решить уравнение  $3x - 8 = x.$

*Решение:*

$$3x - 8 = x;$$

$$2x = 8;$$

$$x = 4.$$

*Ответ:*  $x = 4.$

*Пример 2.* Решить уравнение  $\frac{5}{x}=0$ .

*Решение:*

Уравнение  $\frac{5}{x}=0$  не имеет корней, так как делить на 0 нельзя, а при деле-

нии на другие числа в частном 0 не получится.

*Ответ:* корней нет.

*Пример 3.* Решить уравнение  $x^2 - 4x = 0$ .

*Решение:*

$$x^2 - 4x = 0 ;$$

$$x(x - 4) = 0 .$$

Уравнение имеет два корня

$$x_1 = 0, x_2 = 4 .$$

*Ответ:*  $x_1=0, x_2=4$ .

*Пример 4.* Решить уравнение  $x^2 - 1 = 0$ .

*Решение:*

$$x^2 - 1 = 0 ;$$

$$(x + 1)(x - 1) = 0 .$$

Уравнение имеет два корня

$$x_1 = -1, x_2 = 1 .$$

*Ответ:*  $x_1=-1, x_2=1$ .

*Пример 5.* Решить уравнение  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

*Решение:*

$$x^2 - 4x + 4 = 0 ;$$

$$(x - 2)^2 = 0 ;$$

$$x = 2 .$$

*Ответ:*  $x = 2$ .

*Пример 6.* Решить уравнение  $x^2 + 1 = 0$ .

*Решение:*

$$x^2 + 1 = 0;$$

$$x^2 = -1;$$

Это уравнение не имеет действительных корней, так как  $x^2 \geq 0$ ,  $-1 < 0$ .

Таким образом, левая часть уравнения всегда больше правой части уравнения.

*Ответ:* корней нет.

*Квадратным уравнением* называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые числа, причем  $a \neq 0$ . Коэффициент  $a$  называют *первым коэффициентом*, коэффициент  $b$  – *вторым коэффициентом*,  $c$  – *свободным членом*.

*Дискриминантом* квадратного уравнения называется выражение

$$D = b^2 - 4ac.$$

При решении квадратного уравнения возможны три случая:

1. Дискриминант  $D > 0$ . Уравнение имеет *два различных* действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Дискриминант  $D = 0$ . В данном случае существует только одно действительное число:

$$x = \frac{-b}{2a},$$

удовлетворяющее квадратному уравнению. Это число называют *двукратным корнем*.

3. Дискриминант  $D < 0$ . Уравнение не имеет действительных корней.

*Пример 7.* Решить уравнение  $x^2 + 2 = 3x$ .

*Решение:*

$$x^2 + 2 = 3x;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 ;$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0 .$$

Уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 ,$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 .$$

Ответ:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

*Пример 8.* Решить уравнение  $x^2 + 6x = -9$ .

*Решение:*

$$x^2 + 6x = -9 ;$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 ;$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 .$$

Уравнение имеет двукратный корень

$$x = \frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3 .$$

Ответ:  $x = -3$ .

*Пример 9.* Решить уравнение  $x(x + 2) + 6 = 0$ .

*Решение:*

$$x(x + 2) + 6 = 0 ;$$

$$x^2 + 2x + 6 = 0 ;$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 = -20 < 0 .$$

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

*Приведенным квадратным уравнением* называется квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1:

$$x^2 + px + q = 0 ,$$

где  $p$  и  $q$  – некоторые числа. Заметим, что любое квадратное уравнение можно свести к приведенному, разделив его обе части на коэффициент  $a$  .

Формулы корней приведенного квадратного уравнения можно представить в виде

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} , \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} .$$

Из этих формул следует, что

$$x_1 + x_2 = -p ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q .$$

В результате можно сформулировать следующую теорему.

*Теорема Виета.* Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение – свободному члену этого уравнения.

*Пример 10.* Пусть  $x_1$  и  $x_2$  - корни уравнения

$$x^2 + 21x = 7 .$$

Найти  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  .

*Решение:*

$$x^2 + 21x = 7 ;$$

$$x^2 + 21x - 7 = 0 .$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -21 ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -7 .$$

Преобразуем выражение  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  .

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-21}{-7} = 3 .$$



*Ответ:* 3

На практике теорема Виета используется для нахождения корней квадратного уравнения методом подбора.

*Пример 11.* Решить уравнение  $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9} = 0$ .

*Решение:*

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = 5,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6.$$

Подбором находим корни

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Осталось проверить выполнение условия

$$3x - 9 \neq 0;$$

$$x \neq 3.$$

Этому условию удовлетворяет корень  $x = 2$ . Корень  $x = 3$  – посторонний, его в решение не включают (на 0 делить нельзя).

*Ответ:*  $x = 2$ .

*Модулем числа  $a$*  называется само число  $a$ , если  $a \geq 0$ , или  $(-a)$ , если  $a < 0$ . Например,

$$|3| = 3, \text{ так как } 3 > 0;$$

$$|-4| = -(-4) = 4, \text{ так как } -4 < 0.$$

Из определения модуля числа следует, что  $|a| \geq 0$  при любых значениях  $a$ .

*Пример 12.* Решить уравнение  $|x - 3| = 4$ .

*Решение:*

По определению модуля имеем

$$x - 3 = 4 \text{ или } x - 3 = -4 .$$

Таким образом, получаем два корня

$$x_1 = 7, x_2 = -1 .$$

*Ответ:*  $x_1 = 7, x_2 = -1$ .

*Пример 13.* Решить уравнение  $|x - 1| = -2$ .

*Решение:*

По определению модуля выражение в левой части уравнения  $|x - 1| \geq 0$ , а число  $-2 < 0$ . Следовательно, уравнение не имеет корней.

*Ответ:* корней нет.

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня, называются *иррациональными*.

*Пример 14.* Решить уравнение  $\sqrt{x - 1} = 4$ .

*Решение:*

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x - 1})^2 = 4^2 .$$

Отсюда найдем

$$x - 1 = 16 ; x = 17 .$$

*Ответ:*  $x = 17$ .

*Пример 15.* Решить уравнение  $\sqrt{x - 4} + 1 = 0$ .

*Решение.*

Перенесем 1 из левой части в правую часть. В результате получим

$$\sqrt{x - 4} = -1 .$$

По определению арифметического квадратного корня выражение в левой части уравнения  $\sqrt{x-4} \geq 0$ , а число  $-1 < 0$ . Следовательно, уравнение не имеет корней.

*Ответ:* корней нет.

Упорядоченная пара чисел  $(x_0; y_0)$  называется *решением системы уравнений* с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , если при подстановке вместо  $x$  и  $y$  соответственно чисел  $x_0$  и  $y_0$  каждое из уравнений системы обращается в верное числовое равенство.

*Пример 16.* Решить систему уравнений  $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

*Решение:*

Для решения системы уравнений воспользуемся *методом подстановки*.

Выразив из первого уравнения системы переменную  $x$  через переменную  $y$ , получим

$$x = 5 - 2y.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение. В результате получим

$$3(5 - 2y) + 2y = 7.$$

Решим полученное уравнение относительно  $y$ :

$$15 - 6y + 2y = 7;$$

$$15 - 4y = 7;$$

$$-4y = -8;$$

$$y = 2.$$

Подставив найденное значение  $y$  в выражение для  $x$ , найдем

$$x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1.$$

Таким образом, решение системы имеет вид:

$$x = 1, y = 2.$$

Для решения системы можно было воспользоваться *методом сложения*. Этот метод удобно использовать в тех случаях, когда модули коэффициентов при одной из неизвестных в первом и втором уравнениях системы совпадают. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют разные знаки, то при сложении эта неизвестная сокращается. В результате получаем уравнение относительно одной неизвестной. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют одинаковые знаки, тогда вместо сложения выполняется операция вычитания.

В данной системе уравнений коэффициенты при неизвестной  $y$  в первом и втором уравнениях совпадают по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки. В соответствии с методом сложения из первого уравнения вычтем второе уравнение. В результате получим

$$-2x = -2; x = 1.$$

Подставив найденное значение  $x$  в первое уравнение, найдем

$$1 + 2y = 5; 2y = 4; y = 2.$$

Таким образом, получили то же самое решение.

*Ответ:*  $(1; 2)$ .

*Пример 17.* Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

*Решение:*

Введем новые переменные

$$a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}.$$

Выполнив замену переменных в исходной системе уравнений, получим

$$\begin{cases} a + 2b = 4, \\ 2a - b = 3. \end{cases}$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом сложения.

Умножив обе части второго уравнения на 2, получим

$$\begin{cases} a + 2b = 4, \\ 4a - 2b = 6. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, найдем

$$a + 4a + 2b - 2b = 4 + 6;$$

$$5a = 10, a = 2.$$

Подставим найденное значение  $a$  в первое уравнение системы. В результате получим

$$2 + 2b = 4, 2b = 4, b = 2.$$

Таким образом,

$$a = 1, b = 2.$$

Подставив вместо  $a$  и  $b$  их выражения через  $x$  и  $y$  соответственно, получим

$$\sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 2.$$

Отсюда найдем

$$x = 1, y = 4.$$

*Ответ:*  $(1; 4)$ .

### 1.3. Неравенства

*Неравенством* называется выражение, содержащее один из знаков: «больше» ( $>$ ), «меньше» ( $<$ ), «больше или равно» ( $\geq$ ), «меньше или равно» ( $\leq$ ). В зависимости от знака неравенства мы имеем *строгие* ( $>, <$ ) или *нестрогие* ( $\geq, \leq$ ) неравенства. Например, неравенства  $2x - 4 < 2$ ,  $-3x + 9 > 0$  – строгие, а неравенства  $4x - 4 \leq 0$ ,  $x + 3 \leq 2$  – нестрогие.

*Решением неравенства* называются все значения неизвестной величины, при которых исходное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решение неравенства принято записывать при помощи указания соответствующего *числового промежутка*. Перечислим основные числовые промежутки:

1. Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству  $a \leq x \leq b$ , называется *отрезком*  $[a; b]$ .

2. Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству  $a < x < b$ , называется *интервалом*  $(a; b)$ .

3. Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$ , называются *полуинтервалами*  $[a; b)$  и  $(a; b]$  соответственно.

4. Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам  $x \geq a$  или  $x \leq a$ , называются *лучами*  $[a; +\infty)$  и  $(-\infty; a]$  соответственно.

5. Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам  $x > a$  или  $x < a$ , называются *полупрямыми*  $(a; +\infty)$  и  $(-\infty; a)$  соответственно.

Принадлежность элемента числовому промежутку обозначается символом « $\in$ ». Например, запись  $x \in (1; 5)$  означает, что величина  $x$  принадлежит интервалу от 1 до 5.

*Пример 1.* Решить неравенство  $2x - 4 < 2$ .

*Решение:*

$$2x - 4 < 2,$$

$$2x < 6,$$

$$x < 3.$$

Таким образом, решением неравенства служат все значения величины  $x$ , меньшие 3, то есть

$$x \in (-\infty; 3).$$

Неравенство  $x < 3$  – строгое, поэтому в записи решения после числа 3 стоит круглая скобка. Знак бесконечности всегда записывается с круглой скобкой.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

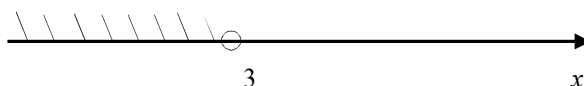


Рис. 1. Решение неравенства  $2x - 4 < 2$

Отметим, что граничная точка строгого неравенства не закрашивается.

*Ответ:*  $(-\infty; 3)$ .

*Пример 2.* Решить неравенство  $5x + 4 \geq 14$ .

*Решение:*

$$5x + 4 \geq 14,$$

$$5x \geq 10,$$

$$x \geq 2.$$

Решением неравенства служат все значения неизвестной  $x$ , большие или равные 2, то есть

$$x \in [2; +\infty).$$

В данном примере неравенство  $x \geq 2$  – нестрогое, поэтому перед числом 2 стоит квадратная скобка.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

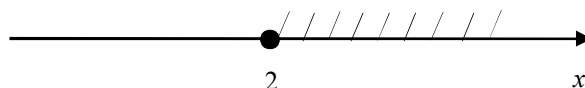


Рис. 2. Решение неравенства  $5x + 4 \geq 14$

Граничная нестрогого неравенства всегда рисуется закрашенной.

*Ответ:*  $[2; +\infty)$ .

Следует помнить, что при умножении или делении неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении или делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

*Пример 3.* Решить неравенство  $x \geq 4x + 9$ .

*Решение:*

$$x \geq 4x + 9,$$

$$x - 4x \geq 9,$$

$$-3x \geq 9,$$

$$x \leq -3.$$

$$x \in (-\infty; -3].$$

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

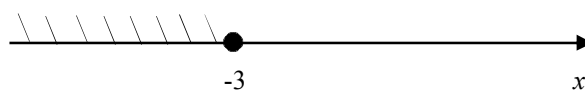


Рис. 3. Решение неравенства  $x \geq -3$

Ответ:  $(-\infty; -3]$ .

Пример 4. Решить систему неравенств  $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7, \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 7, \\ 2x \leq 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq 9, \\ x \leq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 5. \end{cases}$$

В данном примере решением служит отрезок от 3 до 5, полученный в результате пересечения решений неравенств  $x \geq 3$  и  $x \leq 5$ , то есть

$$x \in [3; 5].$$

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

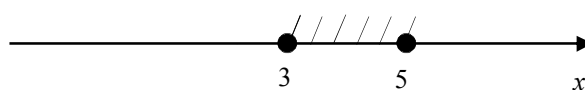


Рис. 4. Решение системы неравенств  $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7, \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Ответ:  $[3; 5]$ .

Пример 5. Решить двойное неравенство  $3 \leq 2x - 1 \leq 5$ .



*Решение:*

Решить двойное неравенство можно путем замены его системой неравенств.

$$3 \leq 2x - 1 \leq 5 ;$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 5, \\ 2x - 1 \geq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 6, \\ 2x \geq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$x \in [2; 3].$$

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

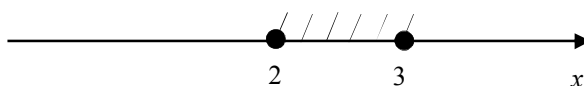


Рис. 5. Решение двойного неравенства  $3 \leq 2x - 1 \leq 5$

*Ответ:*  $[2; 3]$ .

*Пример 6.* Решить неравенство  $\frac{x-2}{x-4} < 0$ .

*Решение:*

Для решения рациональных неравенств обычно применяют *метод интервалов*. В соответствии с этим методом на числовой прямой отмечаются все точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель рационального выражения. Затем на каждом из полученных интервалов определяется знак выражения. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак выражения в какой-либо внутренней точке рассматриваемого промежутка.

В данном примере имеются только две характерные точки  $x=2$  и  $x=4$ , обращающие в нуль числитель и знаменатель соответственно. Отметим эти точки на числовой прямой.

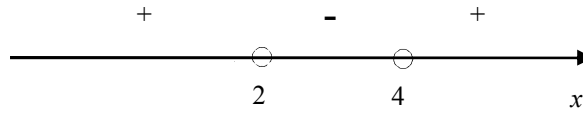


Рис. 6. Решение неравенства  $\frac{x-2}{x-4} < 0$

Так как неравенство строгое, характерные точки на числовой прямой не закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков. Обычно исследование знака проводят справа налево.

При  $x > 4$  возьмем  $x = 5$ , тогда  $\frac{5-2}{5-4} = 3 > 0$ . Ставим знак «+».

При  $2 < x < 4$  возьмем  $x = 3$ , тогда  $\frac{3-2}{3-4} = -1 < 0$ . Ставим знак «-».

При  $x < 2$  возьмем  $x = 0$ , тогда  $\frac{0-2}{0-4} = \frac{1}{2} > 0$ . Ставим знак «+».

Из рисунка видно, что выражение  $\frac{x-2}{x-4}$  принимает отрицательные значения на интервале  $(2; 4)$ , то есть

$$x \in (2; 4).$$

*Ответ:*  $(2; 4)$ .

*Пример 7.* Решить неравенство  $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$ .

*Решение:*

Представим неравенство в виде

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x-1} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$$x = -3, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

Отметим эти точки на числовой оси.

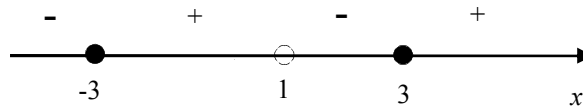


Рис. 7. Решение неравенства  $\frac{x^2 - 9}{x - 1} \geq 0$

Так как неравенство не строгое, точки  $x = -3$  и  $x = 3$  на числовой прямой закрашены. Точка  $x = 1$  обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на нуль делить нельзя).

Теперь определим знаки выражения на каждом из промежутков.

При  $x > 3$  возьмем  $x = 5$ , тогда  $\frac{(5+3)(5-3)}{5-1} = 4 > 0$ . Ставим знак «+».

При  $1 < x < 3$  возьмем  $x = 2$ , тогда  $\frac{(2+3)(2-3)}{2-1} = -5 < 0$ . Ставим знак «-».

При  $-3 < x < 1$  возьмем  $x = 0$ , тогда  $\frac{(0+3)(0-3)}{0-1} = 9 > 0$ . Ставим знак «+».

При  $x < -3$  возьмем  $x = -4$ , тогда  $\frac{(-4+3)(-4-3)}{-4-1} = -\frac{7}{5} < 0$ . Ставим знак «-».

Решением неравенства является *объединение* двух промежутков:  $[-3; 1)$  и  $[3; +\infty)$ . Для обозначения операции объединения используется символ « $\cup$ ». Таким образом, решение неравенства записывается следующим образом:

$$x \in [-3; 1) \cup [3; +\infty).$$

*Ответ:*  $[-3; 1) \cup [3; +\infty)$ .

*Пример 8.* Решить неравенство  $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 3} \geq 0$ .

*Решение:*

Представим неравенство в виде

$$\frac{x^2(x+2)}{x-3} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 3.$$

Отметим эти точки на числовой оси.

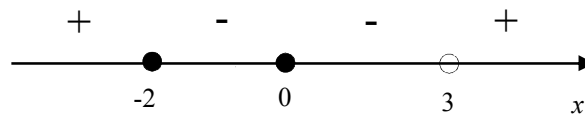


Рис. 8. Решение неравенства  $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 3} \geq 0$

Так как неравенство нестрогое, точки  $x = -2$  и  $x = 0$  на числовой прямой закрашены. Точка  $x = 0$  обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на нуль делить нельзя).

Теперь определим знаки выражения на каждом из промежутков.

При  $x > 3$  возьмем  $x = 4$ , тогда  $\frac{4^2(4+2)}{4-3} = 96 > 0$ . Ставим знак «+».

При  $0 < x < 3$  возьмем  $x = 2$ , тогда  $\frac{2^2(2+2)}{2-3} = -16 < 0$ . Ставим знак «-».

При  $-2 < x < 0$  возьмем  $x = -1$ , тогда  $\frac{(-1)^2(-1+2)}{-1-3} = -\frac{1}{4} < 0$ . Ставим знак «-».

При  $x < -2$  возьмем  $x = -3$ , тогда  $\frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-3} = \frac{3}{2} > 0$ . Ставим знак «+».

Главная особенность данного примера: при переходе через точку  $x = 0$  знак выражения не изменяется (*точка четной кратности*).

Из рисунка видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков  $(-\infty; -2]$  и  $(3; +\infty)$ , а также изолированной точки  $x = 0$ . Если решение неравенства содержит изолированные точки, их заключают в фигурные скобки. Таким образом, решение неравенства в данном примере имеет вид:

$$x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty).$$

*Пример 9.* Решить неравенство  $\frac{x-1}{x^2-5x+6} < 0$ .

*Решение:*

Точка  $x = 1$  обращает в нуль числитель. Чтобы найти точки, обращающие в нуль знаменатель, надо найти корни квадратного уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

По теореме Виета сумма корней равна 5, а произведение корней – 6. Подбором находим корни:

$$x = 2, \quad x = 3.$$

Для удобства вычислений представим знаменатель дроби в виде разложения по корням:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Таким образом, исходное неравенство примет вид:

$$\frac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)} < 0.$$

Отметим найденные характерные точки на числовой оси.

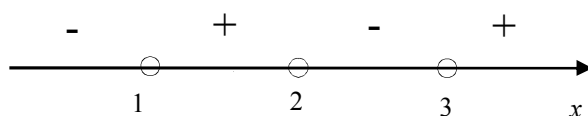


Рис. 9. Решение неравенства  $\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Так как неравенство строгое, точки не закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения на каждом из промежутков.

При  $x > 3$  возьмем  $x = 4$ , тогда  $\frac{4 - 1}{(4 - 2)(4 - 3)} = \frac{3}{2} > 0$ . Ставим знак «+».

При  $2 < x < 3$  возьмем  $x = 2,5$ , тогда  $\frac{2,5 - 1}{(2,5 - 2)(2,5 - 3)} = -6 < 0$ . Ставим знак «-».

При  $1 < x < 2$  возьмем  $x = 1,5$ , тогда  $\frac{1,5 - 1}{(1,5 - 2)(1,5 - 3)} = \frac{2}{3} > 0$ . Ставим знак «+».

При  $x < 1$  возьмем  $x = 0$ , тогда  $\frac{0 - 1}{(0 - 2)(0 - 3)} = -\frac{1}{6} < 0$ . Ставим знак «-».

Из рисунка видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков  $(-\infty; 1)$  и  $(2; 3)$ , то есть

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3).$$

*Ответ:*  $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$ .

*Пример 10.* Решить неравенство  $\frac{2x-6}{x^2+1} < 0$ .

*Решение:*

В данном примере нет необходимости использовать метод интервалов. Действительно, выражение в знаменателе

$$x^2 + 1 > 0$$

при любых значениях  $x$ . Следовательно, исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$2x - 6 < 0.$$

Решив это неравенство, получим

$$x < 3.$$

Таким образом,

$$x \in (-\infty; 3).$$

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

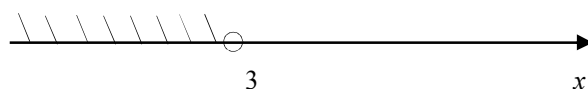


Рис. 10. Решение неравенства  $\frac{2x-6}{x^2+1} < 0$

*Ответ:*  $(-\infty; 3)$ .

*Пример 11.* Решить неравенство  $|x-1| - 2 \leq 0$ .

*Решение:*

Для решения неравенства, содержащего знак модуля, воспользуемся методом интервалов. Сначала найдем точки, обращающие в нуль выражение, стоящее в левой части неравенства. Для этого надо найти корни уравнения

$$|x - 1| - 2 = 0 .$$

Перенесем число 2 в правую часть. В результате получим

$$|x - 1| = 2 .$$

По определению модуля имеем:

$$x - 1 = 2 \text{ или } x - 1 = -2 .$$

Таким образом, получаем два корня:

$$x = 3 , x = -1 .$$

Отметим эти точки на числовой прямой.

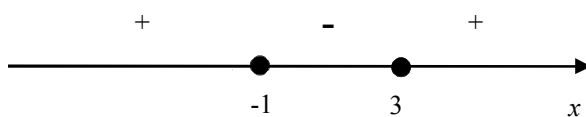


Рис. 11. Решение неравенства  $|x - 1| - 2 \leq 0$

Так как неравенство нестрогое, характерные точки на числовой прямой закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков.

При  $x > 3$  возьмем  $x = 5$ , тогда  $|5 - 1| - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$ .

При  $-1 < x < 3$  возьмем  $x = 0$ , тогда  $|0 - 1| - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ .

При  $x < -1$  возьмем  $x = -2$ , тогда  $|-2 - 1| - 2 = |-3| - 2 = 3 - 2 > 0$ .

Расставим знаки на каждом из промежутков. Из рисунка видно, что решением данного неравенства является отрезок  $[-1; 3]$

*Ответ:*  $[-1; 3]$ .

*Пример 12.* Решить неравенство  $|x + 4| + 1 \leq 0$ .

*Решение:*

По определению модуля  $|x + 4| \geq 0$ . Следовательно, сумма

$$|x + 4| + 1 > 0$$

при любых значениях  $x$ . Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество, то есть

$$x \in \emptyset.$$

*Ответ:*  $\emptyset$ .

Неравенства, содержащие знак корня, называются *иррациональными*. При решении неравенств, содержащих знак квадратного корня, следует помнить, что подкоренное выражение должно быть неотрицательной величиной.

*Пример 13.* Решить неравенство  $\sqrt{x-2} \leq 3$ .

*Решение:*

Исходное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-2 \leq 9. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 11. \end{cases}$$

Таким образом, решением данного неравенства служит отрезок  $[2; 11]$ .

*Ответ:*  $[2; 11]$ .

*Пример 14.* Решить неравенство  $\sqrt{3x+1}+2 \leq 0$ .

*Решение:*

По определению арифметического квадратного корня  $\sqrt{3x+1} \geq 0$ . Следовательно, но,

$$\sqrt{3x+1}+2 > 0$$

при всех допустимых значениях  $x$ . Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество, то есть

$$x \in \emptyset.$$

*Ответ:*  $\emptyset$ .

*Пример 15.* Решить неравенство  $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}+3 > 0$ .



*Решение:*

По определению арифметического квадратного корня  $\sqrt{x-2} \geq 0$  и  $\sqrt{6-x} \geq 0$  при всех допустимых значениях  $x$ . Следовательно,

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + 3 > 0$$

при всех допустимых значениях  $x$ . Таким образом, решением данного неравенства служит множество всех допустимых значений  $x$ , которое определяется из системы

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 6-x \geq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 6. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является отрезок  $[2; 6]$ .

*Ответ:*  $[2; 6]$ .

## 1.4. Функции

*Функцией*  $y = f(x)$  называется правило, по которому каждому значению величины  $x$  из некоторого множества  $X$  ставится в соответствие единственное значение величины  $y$  из множества  $Y$ .

Величина  $x$  называется *независимой переменной*,  $y$  – *зависимой переменной*. Множество  $X$  называется *областью определения функции*  $D(y)$ , множество  $Y$  – *множеством значений функции*  $E(y)$ .

Обозначение  $f(x)$  позволяет компактно записывать результат подстановки значения независимой переменной в выражение функции.

*Пример 1.* Дана функция  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . Вычислить  $f(3)$ .

*Решение:*

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1.$$

*Ответ:*  $f(3) = 1$ .

*Пример 2.* Дана функция  $f(x) = 2x + 1$ . Вычислить  $f(f(3))$ .

*Решение:*

Сначала найдем

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Подставив найденное значение  $f(3) = 7$  в выражение функции, получим

$$f(f(3)) = f(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

*Ответ:*  $f(f(3)) = 15$ .

*Пример 3.* Дана функция  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ . Найти область определения этой

функции.

*Решение:*

Найти область определения значит найти все значения переменной  $x$ , при которых выражение  $f(x)$ , определяющее функцию, имеет смысл.

Выражение  $\sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$  имеет смысл, если подкоренное выражение неотрица-

тельно:

$$\frac{x-2}{x-5} \geq 0.$$

Таким образом, для нахождения области определения требуется решить рациональное неравенство. Для решения полученного неравенства воспользуемся методом интервалов. Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$$x = 2, \quad x = 5.$$

Отметим эти точки на числовой прямой.

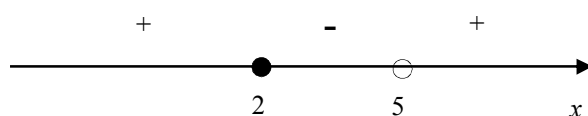


Рис. 12. Область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ .

Так как неравенство нестрогое, точка  $x = 2$  на числовой прямой закрашивается. Точка  $x = 5$  обращает в нуль знаменатель дроби, поэтому эта точка не закрашивается.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков.

При  $x > 5$  возьмем  $x = 6$ , тогда  $\frac{6-2}{6-4} = 2 > 0$ . Ставим знак «+».

При  $2 < x < 5$  возьмем  $x = 3$ , тогда  $\frac{3-2}{3-4} = -1 < 0$ . Ставим знак «-».

При  $x < 2$  возьмем  $x = 0$ , тогда  $\frac{0-2}{0-4} = \frac{1}{2} > 0$ . Ставим знак «+».

Из рисунка видно, что решением неравенства является объединение двух промежутков  $(-\infty; 2]$  и  $(5; +\infty)$ , то есть

$$D(y) = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty).$$

Ответ:  $D(y) = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$ .

Графиком функции  $y = f(x)$  называется множество точек плоскости  $OXY$ , координаты  $x$  и  $y$  которых удовлетворяют уравнению  $y = f(x)$ .

Ниже приведен график простейшей алгебраической функции  $y = x$ .

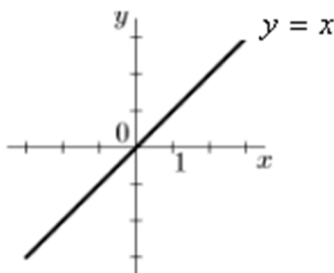


Рис.13. График функции  $y = x$

Функция  $y = x$  — частный случай *линейной функции*

$$y = kx + b.$$

Здесь  $k$  — угловой коэффициент,  $b$  — свободный член. Областью определения линейной функции служит все множество действительных чисел. График функции  $y = kx + b$  есть прямая линия. Поэтому для построения графика, очевидно, достаточно двух точек.

Коэффициент  $k$  характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси  $OX$ .

Если  $k > 0$ , то прямая образует острый угол с осью  $OX$  (функция возрастает), если  $k < 0$  – тупой угол с осью  $OX$  (функция убывает). Если  $k = 0$ , прямая проходит через точку с координатами  $(0; b)$  параллельно оси  $OX$ .

*Пример 4.* Даны координаты двух точек прямой  $(2; 3)$  и  $(5; 7)$ . Вычислить угловой коэффициент и свободный член линейной функции.

*Решение:*

Подставив координаты точек  $(2; 3)$  и  $(5; 7)$  в уравнение прямой  $y = kx + b$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2k + b = 3, \\ 5k + b = 7. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом сложения. Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение. В результате получим

$$-k = -4, \quad k = 4.$$

Подставив найденное значение  $k$  в первое уравнение, найдем

$$2 \cdot 4 + b = 3, \quad b = -5.$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид:

$$y = 4x - 5.$$

*Ответ:*  $k = 4$ ,  $b = -5$ .

Ниже приведен график параболы  $y = x^2$ .

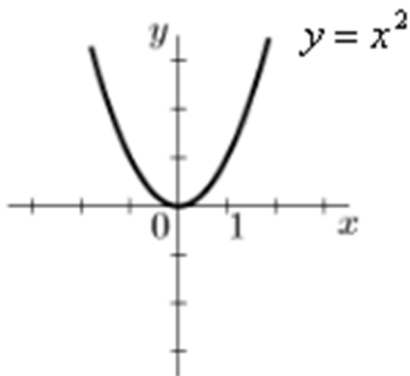


Рис.14. Парабола  $y = x^2$

Функция  $y = x^2$  – это частный случай *квадратичной функции*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – заданные числа, причем  $a \neq 0$ .

Областью определения квадратичной функции являются все действительные числа.

Любую квадратичную функцию можно преобразовать к виду, удобному для построения графика функции:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Здесь  $x_0$ ,  $y_0$  – координаты *вершины параболы*, которые вычисляются по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{D}{4a},$$

где  $D = b^2 - 4ac$ .

Направление ветвей параболы зависит от знака коэффициента  $a$ :

если  $a > 0$  – ветви параболы направлены вверх,

если  $a < 0$  – ветви параболы направлены вниз.

График параболы  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  можно получить из графика  $y = ax^2$  при помощи сдвига по осям  $OX$  и  $OY$  так, чтобы вершина параболы совпала с точкой  $(x_0; y_0)$ .

*Пример 5.* Преобразовать квадратичную функцию  $y = x^2 - 2x + 3$  к виду  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  и построить график этой функции.

*Решение:*

$$x_0 = -\frac{-2}{2} = 1, \quad y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2.$$

Таким образом, квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = (x - 1)^2 + 2.$$

График этой функции можно получить из графика  $y = x^2$  при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси  $OX$  и на две единицы в направлении оси  $OY$ .

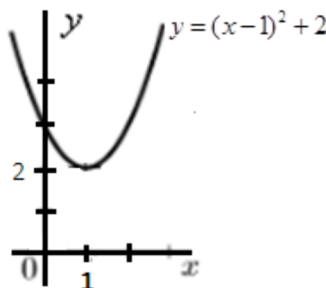


Рис. 15. График функции  $y = x^2 - 2x + 3$

Ответ:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ .

Отметим, что правила сдвига графиков функций вдоль координатных осей являются универсальными, то есть справедливы для любой функции  $y = f(x)$ .

Функция вида  $y = \frac{k}{x}$  называется *обратно пропорциональной*. Область определения этой функции есть множество всех действительных чисел, за исключением нуля.

Графиком функции  $y = \frac{k}{x}$  является гипербола, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат.

Если  $k > 0$ , ветви гиперболы расположены в I и III координатных углах; если  $k < 0$  – во II и IV координатных углах.

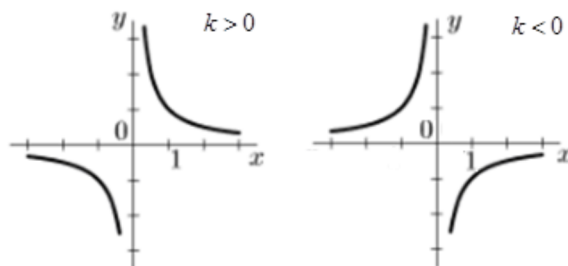


Рис.16. Гипербола  $y = \frac{k}{x}$

*Дробно-линейной функцией* называется функция, равная отношению двух линейных функций:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где  $a, b, c$  и  $d$  – заданные числа.

При выполнении условий

$$c \neq 0 \text{ и } bc - ad \neq 0$$

дробно-линейную функцию можно представить в виде, удобном для построения графика:

$$y = y_0 + \frac{k}{x - x_0},$$

где

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad k = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Таким образом, графиком дробно-линейной функции служит гипербола, полученная смещением графика функции  $y = \frac{k}{x}$  на величину  $x_0$  вдоль оси  $OX$  и на величину  $y_0$  вдоль оси  $OY$ .

*Пример 6.* Преобразовать дробно-линейную функцию  $y = \frac{x - 1}{x - 2}$  к виду

$$y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}.$$

*Решение:*

$$x_0 = -\frac{-2}{-1} = -2, \quad y_0 = \frac{1}{-1} = -1, \quad k = \frac{-1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)}{1^2} = 1.$$

$$y = -1 + \frac{1}{x - 2}.$$

График этой функции можно получить из графика  $y = \frac{1}{x}$  при помощи сдвига на две единицы в направлении оси  $OX$  и на одну единицу в направлении оси  $OY$ .

*Ответ:*  $y = -1 + \frac{1}{x - 2}.$

## 1.5. Последовательности

*Числовая последовательность* – это совокупность перенумерованных действительных чисел

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Здесь нижний индекс указывает *номер члена* последовательности. Примеры числовых последовательностей:

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Числовую последовательность можно рассматривать как *функцию натурального аргумента  $n$* :  $u_n = f(n)$ , где  $n \in N$  ( $N$  – множество натуральных чисел).

*Пример 1.* Последовательность задана формулой

$$u_n = 2n - 1.$$

Вычислить сумму  $u_1 + u_2 + u_3$ .

*Решение:*

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1,$$

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$$

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 3 + 5 = 9.$$

*Ответ:* 9.

*Арифметической прогрессией* называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым *разностью* прогрессии.

Для того чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно знать ее первый член  $a_1$  и разность  $d$ .

*Формула  $n$ -го члена* арифметической прогрессии имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$



*Пример 2.* Даны два члена арифметической прогрессии  $a_5=10$  и  $a_8=16$ .

Вычислить первый член и разность прогрессии.

*Решение:*

$$a_5 = a_1 + 4d,$$

$$a_8 = a_1 + 7d.$$

Согласно условиям задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 10, \\ a_1 + 7d = 16. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом сложения. Вычтем из первого уравнения второе уравнение. В результате получим

$$-3d = -6, \quad d = 2.$$

Подставив найденное значение  $d = 2$  в первое уравнение системы, найдем

$$a_1 + 4 \cdot 2 = 10, \quad a_1 = 2.$$

Таким образом,

$$a_1 = 2, \quad d = 2.$$

*Ответ:*  $a_1 = 2, \quad d = 2$ .

С помощью формулы  $n$ -го члена можно показать, что каждый член прогрессии начиная со второго равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

*Пример 3.* Даны два члена арифметической прогрессии  $a_6=7$  и  $a_8=11$ .

Найти седьмой член прогрессии.

*Решение:*

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9,$$

*Ответ:* 9.

*Формула суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии имеет вид*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Если в последнюю формулу подставить выражение  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , то получится соотношение

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

*Пример 4.* Даны два члена арифметической прогрессии  $a_1=8$  и  $a_3=12$ . Найти сумму первых шести слагаемых арифметической прогрессии.

*Решение:*

$$a_3 = a_1 + 2d;$$

$$8 + 2d = 12, \quad d = 2.$$

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 8 + 5 \cdot 2}{2} \cdot 6 = \frac{26}{2} \cdot 6 = 78.$$

*Ответ:* 78.

*Геометрической прогрессией* называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, отличное от нуля, называемое *знаменателем прогрессии*.

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию  $(b_n)$ , достаточно знать ее первый член  $b_1$  и знаменатель  $q$ .

*Формула  $n$ -го члена* геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

*Пример 5.* Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии  $b_1 = 3$  и  $q=2$ . Вычислить четвертый член прогрессии.

*Решение:*

$$b_4 = b_1 q^3,$$

$$b_4 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24.$$

*Ответ:* 24.

С помощью формулы  $n$ -го члена можно показать, что квадрат любого члена прогрессии начиная со второго равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

*Пример 6.* Даны два члена знакоположительной геометрической прогрессии  $b_3 = 4$  и  $b_5 = 9$ . Найти четвертый член прогрессии.

*Решение:*

$$b_4^2 = b_3 b_5,$$

$$b_4^2 = 4 \cdot 9 = 36,$$

$$b_4 = \pm 6.$$

По условиям задачи прогрессия является знакоположительной, следовательно,

$$b_4 = 6.$$

*Ответ:* 6.

*Формула суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии имеет вид*

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

*Пример 7.* Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии  $b_1 = 3$  и  $q = 2$ . Вычислить сумму первых четырех членов прогрессии.

*Решение:*

$$S_4 = b_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1},$$

$$S_4 = 3 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 15 = 45.$$

*Ответ:* 45.

*Сумма бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяют условию  $|q| < 1$ , вычисляется по формуле*

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

*Пример 8.* Известна сумма и первый член бесконечной геометрической прогрессии  $S = 8$  и  $b_1 = 4$ . Вычислить знаменатель прогрессии.

*Решение:*

$$S = \frac{b_1}{1-q},$$

$$8 = \frac{4}{1-q}, \quad 8(1-q) = 4, \quad 8 - 8q = 4, \quad -8q = -4, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

Рассмотрим бесконечную последовательность вида

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Швейцарский математик Якоб Бернулли установил, что по мере увеличения номера  $n$  величина  $u_n$  сходится к вполне определенному числу, которое принято обозначать буквой  $e$ . Математически этот факт записывается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число  $e$  часто встречается не только в математике, но и во многих естественных науках (физика, химия, биология и т.д.). Его можно вычислить с какой угодно точностью, задавая достаточно большие номера  $n$ . Приближенно  $e = 2,718$ .

## 1.6. Упражнения

Вычислить.

1. а)  $\frac{2^8 \cdot 3^8}{6^6};$

б)  $\frac{12^7}{3^5 \cdot 4^5}.$

2. а)  $4^3 \cdot 16^{-2};$

б)  $5^7 \cdot 125^{-2}.$

3. а)  $\frac{\sqrt{1,4} \cdot \sqrt{0,2}}{\sqrt{0,07}};$

б)  $\frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{0,2}}{\sqrt{0,04}}.$

4. а)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125};$

б)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{54}.$

5. а)  $3^{-4} \cdot 27^{\frac{2}{3}} \cdot 9;$

б)  $9^{\frac{3}{2}} \cdot 27 \cdot 3^{-5}.$

6. а)  $(\sqrt{10}-\sqrt{7})^3(\sqrt{10}+\sqrt{7})^3$ ;

б)  $(\sqrt{5}-1)^3(\sqrt{5}+1)^3$ .

7. а)  $\frac{x^2-xy}{x^2-2xy+y^2}$ , если  $x=16$ ,  $y=8$ .

б)  $\frac{x \cdot y + 2y}{x^2 + 4x + 4}$ , если  $x=11$ ,  $y=39$ .

8. а)  $\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3} + \frac{9x-9y}{x^2-y^2}$ , если  $x=6$ ,  $y=4$ .

б)  $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ , если  $x=16$ ,  $y=13$ .

9. а)  $\frac{x^{-2}+y^{-2}+2x^{-2}y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ , если  $x=\frac{2}{3}$ ,  $y=\frac{2}{5}$ .

б)  $\frac{x^{-2}+y^{-2}-2x^{-2}y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}$ , если  $x=\frac{1}{4}$ ,  $y=\frac{1}{3}$ .

10. а)  $\frac{(\sqrt[3]{x})^2-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}} - \sqrt{y}$ , если  $x=216$ ,  $y=814$ .

б)  $\frac{(\sqrt[3]{x})^2-y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{y}$ , если  $x=64$ ,  $y=1223$ .

Решить уравнения.

11. а)  $x - \frac{x}{5} = 4$ ;

б)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ .

12. а)  $x^2 - 6x = 0$ ;

б)  $x^2 + 9x = 0$ .

13. а)  $x^2 - 9 = 0$ ;

б)  $x^2 + 25 = 0$ .

14. а)  $x^2 + 6 = 7x$ ;

б)  $x(x-8) + 15 = 0$ .

Решить уравнения.

15. а)  $\frac{x^2-8x+7}{2x-2} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-4x+3}{x-3} = 0$ .

16. а)  $|2x+9| = 5$ ;

б)  $|2x-5| = 1$ .

17. а)  $\sqrt{x^2-5} = 2$ ;

б)  $\sqrt{x^2-9} = 4$ .

Решить системы уравнений.

$$18. \text{ а) } \begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + 2y = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - y = 3, \\ x + 5y = 6. \end{cases}$$

$$19. \text{ а) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-3} = 3, \\ 4\sqrt{x-1} - \sqrt{y-3} = 3. \end{cases}$$

Решить неравенства.

$$20. \text{ а) } 5x - 16 \geq x; \quad \text{б) } 7x - 15 \geq 2x. \\ 21. \text{ а) } x \geq 2(x - 4); \quad \text{б) } 4x \leq 5(x - 1). \\ 22. \text{ а) } \frac{2x-1}{2} < 0,5x + 2; \quad \text{б) } \frac{x+0,5}{3} + \frac{x-1}{2} < 1,5 - x.$$

Решить системы неравенств.

$$23. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x-2}{2} \geq \frac{x-2}{3}, \\ 2x \geq 3x - 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq \frac{2x+8}{6}, \\ x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} \leq 10. \end{cases}$$

$$24. \text{ а) } \begin{cases} x - 1 < \frac{x+2}{3}, \\ 2x > \frac{x+2}{3} - 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0,2x < x - 4, \\ x < \frac{x+12}{3}. \end{cases}$$

Решить двойные неравенства.

$$25. \text{ а) } -7 \leq 2x + 1 \leq 9; \quad \text{б) } 4 \leq 4x - 4 \leq 12.$$

Решить рациональные неравенства.

$$26. \text{ а) } \frac{2x-4}{x-6} < 0; \quad \text{б) } \frac{x-6}{3x-6} < 0.$$

$$27. \text{ а) } \frac{x-4}{4x-8} > 0; \quad \text{б) } \frac{2x-4}{3x-9} > 0.$$

$$28. \text{ а) } \frac{x}{(x+2)(x-4)} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{x-2}{x(x-5)} \geq 0.$$

$$29. \text{ а) } \frac{(x-1)^2}{(x-4)(x-6)} \geq 0; \quad \text{ б) } \frac{(x-2)^2}{x(x-4)} \geq 0.$$

$$30. \text{ а) } \frac{x^2-3x+2}{x+1} < 0; \quad \text{ б) } \frac{x}{x^2-7x+10} < 0.$$

$$31. \text{ а) } \frac{x^2+2}{x+2} < 0; \quad \text{ б) } \frac{x^2-1}{x^2+1} < 0.$$

Решить неравенства с модулем.

$$32. \text{ а) } |x-1|-3 \leq 0; \quad \text{ б) } |x-2|-4 \leq 0.$$

$$33. \text{ а) } |x-4|-1 > 0; \quad \text{ б) } |x+1|-2 > 0.$$

Решить иррациональные неравенства.

$$34. \text{ а) } \sqrt{2x-4}-2 < 0; \quad \text{ б) } \sqrt{1-x}-2 < 0.$$

35. Дана функция  $y = f(x)$  и значение аргумента  $a$ . Вычислить  $f(a)$ .

$$\text{ а) } f(x) = x + \frac{5}{x^2+1}, \quad a = 2; \quad \text{ б) } f(x) = x^3 + |x-3|, \quad a = 1.$$

36. Дана функция  $y = f(x)$  и значение аргумента  $a$ . Вычислить  $f(f(a))$ .

$$\text{ а) } f(x) = 3x - 2, \quad a = 2; \quad \text{ б) } f(x) = 6x - 14, \quad a = 3.$$

37. Найти область определения функции.

$$\text{ а) } f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x-6}}; \quad \text{ б) } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

38. Даны координаты двух точек прямой  $A$  и  $B$ . Вычислить угловой коэффициент и свободный член линейной функции.

$$\text{ а) } A(1; 4), \quad B(3; 8); \quad \text{ б) } A(-2; 3), \quad B(0; 9).$$

39. Преобразовать квадратичную функцию к виду  $y = a(x-x_0)^2 + y_0$ .

$$\text{ а) } f(x) = x^2 - 6x + 10; \quad \text{ б) } f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

40. Преобразовать дробно-линейную функцию к виду  $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$ .

а)  $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$ ;

б)  $f(x) = \frac{4x + 3}{x + 1}$ .

41. Последовательность задана формулой  $a_n = f(n)$ . Вычислить сумму  $a_1 + a_2 + a_3$ .

а)  $f(n) = n^2 - 1$ ;

б)  $f(n) = n^2 - 2n + 1$ .

42. Известны первый член  $a_1$ , разность  $d$  и номер члена арифметической прогрессии  $n$ . Найти  $a_n$ .

а)  $a_1 = 1, d = 4, n = 5$ ;    б)  $a_1 = 6, d = 2, n = 7$ .

43. Даны два члена арифметической прогрессии. Вычислить первый член  $a_1$  и разность  $d$  прогрессии.

а)  $a_2 = 3, a_8 = 15$ ;    б)  $a_7 = 10, a_{12} = 16$ .

44. В арифметической прогрессии сумма второго и десятого членов равна 15. Найдите сумму третьего и девятого членов прогрессии.

45. Известны первый член  $a_1$ , разность  $d$  и номер члена арифметической прогрессии  $n$ . Найти сумму  $S_n$  первых  $n$  слагаемых.

а)  $a_1 = 3, d = 2, n = 6$ ;    б)  $a_1 = 1, d = 4, n = 5$ .

46. В арифметической прогрессии сумма четвертого и десятого членов равна 20. Найдите сумму первых 13 членов этой прогрессии.

47. Известны первый член  $b_1$ , знаменатель  $q$  и номер члена геометрической прогрессии  $n$ . Найти  $b_n$ .

а)  $b_1 = 1, d = 3, n = 5$ ;    б)  $b_1 = 32, q = \frac{1}{2}, n = 6$ .

48. Известны первый член  $b_1$ , знаменатель  $q$  и номер члена геометрической прогрессии  $n$ . Найти сумму  $S_n$  первых  $n$  слагаемых.

а)  $b_1 = 2, q = 3, n = 5$ ;    б)  $b_1 = 3, q = 4, n = 4$ .



49. Известны первый член  $b_1$  и знаменатель  $q$  бесконечной геометрической прогрессии. Найти сумму  $S$  бесконечной геометрической прогрессии.

а)  $b_1 = 3$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ;

б)  $b_1 = 4$ ,  $q = \frac{1}{3}$ .

50. Известны знаменатель  $q$  и сумма  $S$  бесконечной геометрической прогрессии. Найти первый член  $b_1$ .

а)  $q = \frac{1}{2}$ ,  $S = 4$ ;

б)  $q = \frac{1}{3}$ ,  $S = 6$ .

## 2. Показательная и логарифмическая функции

Ключевые слова по теме «Показательная и логарифмическая функции»

|                         |                      |                           |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| Логарифм                | logarithm            | تايضاي رلا يف مثر اغول لا |
| Логарифмическая функция | logarithmic function | ي م تي را غول ة في ظو     |
| Показательная функция   | exponential function | ة يس أ لا قل ادل ا        |

### 2.1. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида

$$y = a^x,$$

где  $a$  - некоторое положительное число, отличное от 1.

Областью определения этой функции служат все действительные числа.

Если  $a > 1$ , функция является возрастающей, если  $0 < a < 1$ , — убывающей.

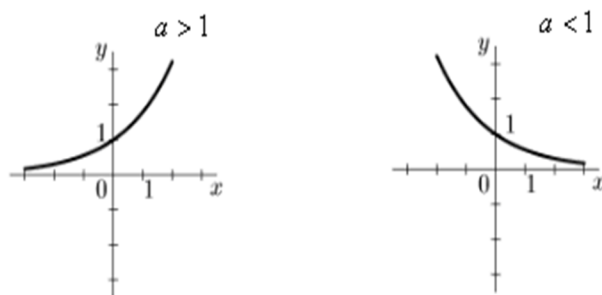


Рис. 17. Показательная функция  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

При любых действительных значениях  $x$  и  $y$  справедливы равенства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Пример 1. Решить уравнение  $2^{x^2+2} = 8^x$ .

Решение:

$$2^{x^2+2} = 8^x, \quad 2^{x^2+2} = (2^3)^x, \quad 2^{x^2+2} = 2^{3x},$$

$$x^2 + 2 = 3x, \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение, корни которого можно найти, например, по теореме Виета

$$x_1=1, x_2=2.$$

*Ответ:*  $x_1=1, x_2=2$ .

*Пример 2.* Решить неравенство  $2^x \geq 8$ .

*Решение:*

Перепишем неравенство следующим образом:

$$2^x \geq 2^3.$$

При решении показательных неравенств следует помнить, что при  $a > 1$  показательная функция является возрастающей, а при  $0 < a < 1$  – убывающей. В данном случае  $a = 2 > 1$ . Функция является возрастающей, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$$x \geq 3.$$

Таким образом, решение неравенства имеет вид

$$x \in [3; +\infty).$$

*Ответ:*  $[3; +\infty)$ .

*Пример 3.* Решить неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq 27$ .

*Решение:*

Перепишем неравенство следующим образом:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}.$$

В данном случае  $a = \frac{1}{3} < 1$ . Функция является убывающей, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции:

$$x + 5 \geq -3,$$

$$x \geq -8.$$

Таким образом, решение неравенства имеет вид

$$x \in [-8; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } [-8; +\infty).$$

*Пример 4.* Решить неравенство  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$ .

*Решение:*

Введем новую переменную  $t = 2^x$ . Неравенство примет вид

$$t^2 - 6t + 8 \leq 0.$$

Представим левую часть неравенства в виде разложения по корням

$$(t - 2)(t - 4) \leq 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$$2 \leq t \leq 4.$$

Следовательно,

$$2 \leq 2^x \leq 4,$$

$$1 \leq x \leq 2.$$

$$\text{Ответ: } [1; 2]$$

*Пример 5.* Решить неравенство  $\frac{3^x - 1}{3^x - 9} < 0$ .

*Решение:*

Введем новую переменную  $t = 3^x$ . Неравенство примет вид

$$\frac{t - 1}{t - 9} < 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$$1 < t < 9.$$

Следовательно,

$$1 < 3^x < 9,$$

$$0 < x < 2.$$

$$\text{Ответ: } (0; 2).$$

## 2.2. Логарифмы

Рассмотрим показательное уравнение в общем виде:

$$a^x = b.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет решение только при  $b > 0$ . Корень этого уравнения называется *логарифмом* числа  $b$  по основанию  $a$  и обозначается следующим образом:

$$x = \log_a b.$$

Например, корнем показательного уравнения

$$2^x = 6$$

является число

$$x = \log_2 6.$$

Таким образом, логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  называется показатель степени, в котором надо возвести  $a$ , чтобы получить  $b$ .

*Пример 1.* Найти значение выражения

$$\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1.$$

*Решение:*

По определению логарифма, имеем

$$\log_3 81 = 4, \text{ так как } 3^4 = 81;$$

$$\log_5 25 = 2, \text{ так как } 5^2 = 25;$$

$$\log_2 1 = 0, \text{ так как } 2^0 = 1.$$

Следовательно,

$$\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1 = 4 + 2 + 0 = 6.$$

*Ответ:* 6.

Из определения логарифма следует *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

*Пример 2.* Найти значение выражения

$$3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5}.$$

*Решение:*

Из основного логарифмического тождества следует

$$3^{\log_3 7} = 7, \quad 2^{\log_2 5} = 5;$$

Следовательно,

$$3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 7 + 5 = 12.$$

*Ответ:* 12.

Сформулируем *основные теоремы о логарифмах*.

1. Логарифм произведения двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равен сумме логарифмов сомножителей, то есть

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равен разности логарифмов сомножителей, то есть

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

3. Логарифм степени положительного числа  $x$  равен произведению показателя степени этого числа на логарифм ее основания, то есть

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

*Пример 3.* Найти значение выражения

$$\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3}.$$

*Решение:*

$$\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3} = \log_4 \left( 12 \cdot \frac{1}{3} \right) = \log_4 4 = 1.$$

*Ответ:* 1.

Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые положительные числа, причем  $a \neq 1$  и  $c \neq 1$ .

Справедлива следующая *формула перехода* от основания  $a$  к основанию  $c$  :

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы, в частности, для  $c = b \neq 1$  имеем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

*Пример 4.* Найти значение выражения  $\log_5 49 \cdot \log_7 5$ .

*Решение:*

$$\log_5 49 \cdot \log_7 5 = \log_5 7^2 \cdot \log_7 5 = 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 5 = 2 \cdot 1 = 2.$$

*Ответ:* 2.

Отметим, что для обозначения *десятичных логарифмов* (логарифмов по основанию 10) принята специальная запись: вместо  $\log_{10} b$  пишут  $\lg b$ .

Логарифм по основанию  $e$  ( $e = 2,718281828\dots$ ) называют *натуральным логарифмом* и обозначают  $\ln b$ .

### 2.3. Логарифмическая функция

Введение понятия логарифма позволяет из формулы  $y = a^x$  выразить величину  $x$  через величину  $y$ :  $x = \log_a y$ . Если в последней формуле поменять обозначения  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , получим  $y = \log_a x$ . Функция  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) называется *логарифмической*. Графики логарифмической функции при  $a > 1$  и  $0 < a < 1$  представлены ниже.

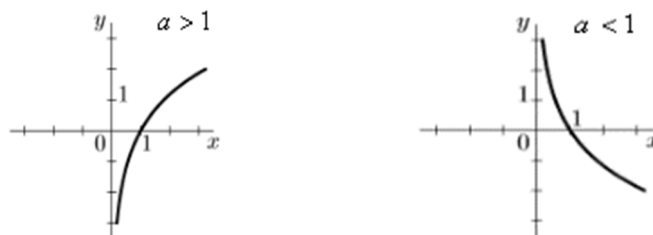


Рис.18. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

Областью определения логарифмической функции являются все положительные числа. При  $a > 1$  функция возрастает, а при  $0 < a < 1$  — убывает.

*Пример 1.* Найти область определения функции

$$f(x) = \log_2(6 - 3x).$$

*Решение:*

Выражение под знаком логарифма по определению должно быть больше нуля:

$$6 - 3x > 0.$$

Решив данное неравенство, получим

$$x < 2.$$

Таким образом,

$$x \in (-\infty; 2)$$

*Ответ:*  $(-\infty; 2)$ .

При решении логарифмических уравнений и неравенств следует помнить, что выражение под знаком логарифма должно быть положительным.

*Пример 2.* Решить уравнение

$$\log_4(2x - 4) = \log_4(3x - 5).$$

*Решение:*

Согласно определению логарифма имеем

$$2x - 4 = 3x - 5.$$

Решив данное уравнение, получим

$$x = 1.$$

Проверим выполнение условий

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0. \end{cases}$$

$$2x - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0.$$

Проверять второе условие не обязательно, так как корень уравнения был найден из условия

$$2x - 4 = 3x - 5.$$



Таким образом, найденное значение величины  $x$  не удовлетворяет условиям положительности выражений под знаком логарифма. Следовательно, уравнение не имеет корней.

*Ответ:* корней нет.

*Пример 3.* Решить уравнение  $\log_4(2x-4)=0,5$ .

*Решение:*

Согласно определению логарифма имеем

$$2x - 4 = 4^{0,5}, \quad 2x - 4 = (2^2)^{0,5},$$

$$2x - 4 = 2, \quad 2x = 6, \quad x = 3.$$

Отметим, что в данном примере нет необходимости проверять условие положительности выражения под знаком логарифма, так как в правой части равенства

$$2x - 4 = 4^{0,5}$$

стоит положительное число  $4^{0,5}$ , что автоматически обеспечивает выполнение условия  $2x - 4 > 0$ .

*Ответ:*  $x = 3$ .

*Пример 4.* Решить неравенство  $\log_3(x-1) < 2$ .

*Решение:*

При решении логарифмических неравенств в дополнение к условию положительности выражения под знаком логарифма следует учитывать также величину основания.

Здесь  $a = 2 > 1$ . Следовательно, функция является возрастающей, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Таким образом, имеем

$$x-1 < 3^2, \quad x < 10.$$

Выражение под знаком логарифма должно быть положительным, то есть

$$x-1 > 0, \quad x > 1.$$

Таким образом, решение исходного неравенства определяется условиями

$$\begin{cases} x < 10, \\ x > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x \in (1; 10).$$

*Ответ:*  $(1; 10)$ .

*Пример 5.* Решить неравенство  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) < -2$ .

*Решение:*

Здесь  $a = \frac{1}{2} < 1$ . Следовательно, функция является убывающей, то есть

большому значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Таким образом, имеем

$$x-3 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \quad x-3 > 4, \quad x > 7.$$

Записывать условие

$$x-3 > 0$$

нет необходимости, так как при  $x > 7$  это условие выполняется автоматически.

Таким образом, решение исходного неравенства имеет вид

$$x > 7;$$

$$x \in (7; +\infty).$$

*Ответ:*  $(7; +\infty)$ .

*Пример 6.* Решить неравенство  $\log_3^2 x - 3 \cdot \log_3 x + 2 \leq 0$ .

*Решение:*

Введем новую переменную  $t = \log_3 x$ . Неравенство примет вид

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0.$$

Представим левую часть неравенства в виде разложения по корням

$$(t-1)(t-2) \leq 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$$1 \leq t \leq 2.$$

Следовательно,

$$1 \leq \log_3 x \leq 2,$$

$$3 \leq x \leq 9.$$

Ответ:  $[3; 9]$

Пример 7. Решить неравенство  $\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 3} < 0$ .

Решение:

Введем новую переменную  $t = \log_2 x$ . Неравенство примет вид

$$\frac{t-1}{t-3} < 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$$1 < t < 3.$$

Следовательно,

$$1 < \log_2 x < 3,$$

$$2 < x < 8.$$

Ответ:  $(2; 8)$ .

## 2.4. Упражнения

Решить уравнения:

1. а)  $2^{x-2} = 8$ ,                      б)  $3^{3x-2} = 81$ ;
2. а)  $2^x = \frac{1}{4}$ ,                      б)  $3^x = \frac{1}{27}$ ;
3. а)  $2^{3x-3} = 4^{x+1}$ ,                      б)  $9^{x-1} = 3^{x+1}$ .

Решить неравенства:

4. а)  $3^x \geq 9$ ,                      б)  $5^x \geq 625$ ;
5. а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > \frac{1}{8}$ ,                      б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ ;

6. а)  $2^{2x-6} < \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , б)  $3^{3x-8} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$  ;

7. а)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ , б)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 \geq 0$ ;

8. а)  $\frac{2^x - 1}{2^x - 8} < 0$ , б)  $\frac{6^x - 6}{6^x - 36} > 0$ .

Решить уравнения:

9. а)  $2^x = 7$ , б)  $3^x = 25$ .

Найдите значение выражения:

10. а)  $\log_2 16 + \log_3 3 + \log_6 1$ ,  
б)  $\log_4 64 + \log_7 7 + \log_9 1$ ;

11. а)  $3^{\log_3 8} + 2^{\log_2 11}$ , б)  $5^{\log_5 4} + 3^{\log_3 6}$  ;

12. а)  $\log_8 14 + \log_8 \frac{32}{7}$ , б)  $\log_5 \frac{35}{3} + \log_5 \frac{75}{7}$  ;

13. а)  $\log_{0,6} 3 - \log_{0,6} 5$ , б)  $\log_7 \frac{21}{5} - \log_7 \frac{3}{35}$  ;

14. а)  $\log_3 5 \cdot \log_5 27$ , б)  $\log_7 36 \cdot \log_6 49$ .

Найдите область определения функции:

15. а)  $f(x) = \log_2 (2x - 2)$ , б)  $f(x) = \log_8 (4 - 2x)$ .

Решить уравнения:

16. а)  $\log_{\sqrt{3}} (2x - 9) = 2$ , б)  $\log_9 \left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0,5$ .

Решить неравенства:

17. а)  $\log_3 (x - 1) > 2$ , б)  $\log_4 (x - 6) > 2$ ;

18. а)  $\log_{\frac{1}{3}} x < -1$ , б)  $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) < -2$  ;

19. а)  $\log_3^2 x - 4 \cdot \log_3 x + 3 \leq 0$ ,  
б)  $\log_5^2 x - \log_5 x \leq 0$ ;

20. а)  $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 x - 2} < 0$ , б)  $\frac{\log_4 x}{\log_4 x - 1} > 0$ .

### 3. Тригонометрические функции

Ключевые слова по теме «Тригонометрические функции»

|               |               |                        |
|---------------|---------------|------------------------|
| Арккосинус    | arc cosine    | مامتل ا بي ج سوق       |
| Арккотангенс  | arc cotangent | مامتل ا لظو سوق        |
| Арсинус       | arc sine      | بي ج سوق               |
| Артангенс     | arc tangent   | لظلا سوق               |
| Градус        | Degree        | ة ج رد                 |
| Косинус       | Cosine        | مامتل ا بي ج           |
| Котангенс     | cotangent     | مامتل ا لظو            |
| Радииан       | Radian        | ن ا ي دار              |
| Синус         | Sine          | ة ي فن ا ل ا بوي ج ل ا |
| Тангенс       | tangent       | ة ي و ا ز ل ا ل ظ      |
| Тригонометрия | trigonometry  | ت ا ث ل ث م ل ا م ل ع  |
| Угол          | angle         | ة ي و ا ز              |

#### 3.1. Тригонометрические функции острого угла

Изучение тригонометрии начнем с рассмотрения *тригонометрических функций острого угла*.

Построим прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$ . Обозначим острый угол, противолежащий катету  $a$ , буквой  $\alpha$ . Второй острый угол  $\beta = 90^\circ - \alpha$ .

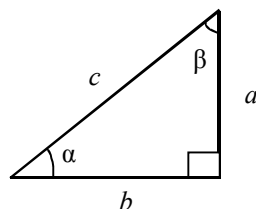


Рис. 19. Прямоугольный треугольник

*Синусом* угла  $\alpha$  называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

*Косинусом* угла  $\alpha$  называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

*Тангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

*Котангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Из определений тангенса и котангенса следует:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Очевидно, что пропорциональное увеличение и уменьшение длин сторон треугольника не влияет на значения тригонометрических функций. Разделим длины всех сторон прямоугольного треугольника на  $c$ . В результате получим треугольник с единичной гипотенузой. Катеты этого треугольника будут равны соответственно  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  и  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .

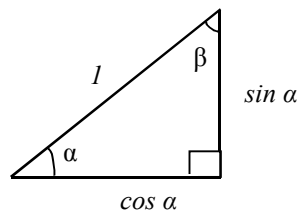


Рис. 20. Треугольник с единичной гипотенузой

Применив теорему Пифагора к треугольнику с единичной гипотенузой, получим *основное тригонометрическое тождество*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 .$$

Разделив обе части последнего уравнения на  $\cos^2 \alpha$  , получим *первое следствие* из основного тригонометрического тождества:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} .$$

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на  $\sin^2 \alpha$  , получим *второе следствие*:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} .$$

*Пример 1.* Известно, что  $\alpha$  – острый угол. Найдите значение  $\sin \alpha$  , если  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ .

*Решение:*

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 \alpha + \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha + \frac{2}{5} = 1, \quad \sin^2 \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} .$$

Так как тригонометрические функции острого угла могут принимать только положительные значения, в решении мы оставляем только положительные корни.

$$\text{Ответ: } \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} .$$

*Пример 2.* Упростите выражение  $2(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)\cos^2 \alpha + 1$  .

*Решение:*

Воспользуемся первым следствием из основного тригонометрического тождества

$$2(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)\cos^2 \alpha + 1 = \frac{2}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha + 1 = 2 + 1 = 3 .$$

*Ответ:* 3.

По определению имеем

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Путем аналогичных рассуждений найдем:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, получено еще четыре формулы, которые называются *формулами дополнительного угла*. Выпишем эти формулы еще раз:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

*Пример 3.* Найдите значение выражения

$$\sin^2 24^\circ + \sin^2 66^\circ + 2.$$

*Решение:*

$$24^\circ + 66^\circ = 90^\circ, \quad 66^\circ = 90^\circ - 24^\circ,$$

$$\sin 66^\circ = \sin(90^\circ - 24^\circ) = \cos 24^\circ,$$

$$\sin^2 24^\circ + \cos^2 24^\circ + 2 = 1 + 2 = 3.$$

*Ответ:* 3.

Значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  произвольного острого угла  $\alpha$  можно найти, например, измерив длины катетов треугольника с единичной гипотенузой. Од-



нако существуют три стандартных угла, для которых значения тригонометрических функций можно найти без использования измерительных инструментов.

Пусть  $\alpha = 30^\circ$ . Воспользуемся известной из геометрии теоремой: длина катета, противолежащего углу  $\alpha = 30^\circ$ , равна половине длины гипотенузы, то есть  $a = \frac{c}{2}$ . Подставив выражение  $a = \frac{c}{2}$  в формулу для синуса, получим

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

Из основного и тригонометрического тождества найдем

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По известным значениям синуса и косинуса найдем значения тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Пусть  $\alpha = 45^\circ$ . Вторым углом равен  $\beta = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ . Следовательно,  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ . Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1,$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ,$$

$$\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1,$$

$$2\sin^2 45^\circ = 1,$$

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ , тангенс и котангенс данного угла равны единице:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Пусть  $\alpha = 60^\circ$ . Воспользуемся формулами дополнительного угла

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Выпишем значения основных тригонометрических функций для трех стандартных значений острого угла еще раз.

Таблица 1

Значения тригонометрических функций для стандартных значений углов

| Функция                     | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

*Пример 4.* Найдите значение выражения

$$\sqrt{2} \sin 45^\circ + 4 \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ.$$

*Решение:*

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin 45^\circ + 4 \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \\ & = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 + 2 + 1 = 4. \end{aligned}$$

*Ответ:* 4.

### 3.2. Тригонометрические функции произвольного угла

Обобщим понятия тригонометрических функций на случай произвольного угла  $\alpha$ .

Построим *тригонометрический круг* – круг единичного радиуса на координатной плоскости, центр которого совпадает с началом координат. Отметим на круге произвольную точку М. Обозначим через  $\alpha$  угол, который образует единичный радиус ОМ с положительным направлением оси ОХ.

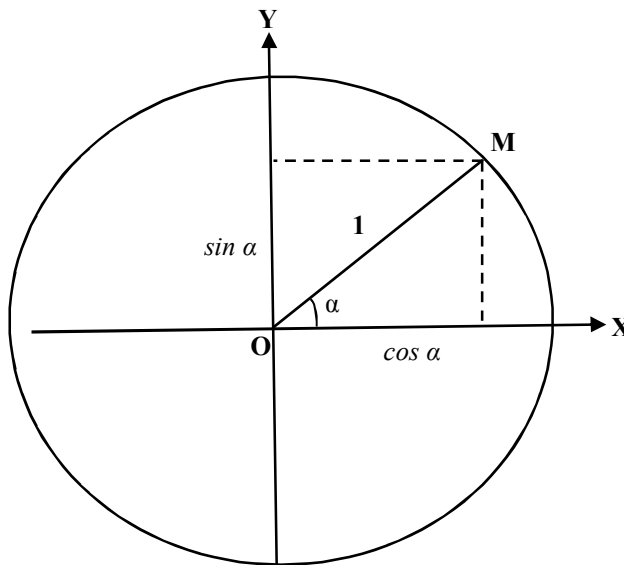


Рис. 21. Тригонометрический круг

*Синусом* угла  $\alpha$  называется проекция точки М на ось ОУ.

*Косинусом* угла  $\alpha$  называется проекция точки М на ось ОХ.

*Тангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение синуса этого угла к косинусу

того же угла, то есть  $tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

*Котангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение косинуса этого угла к синусу

того же угла, то есть  $ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

Координатные оси делят тригонометрический круг на четыре четверти.

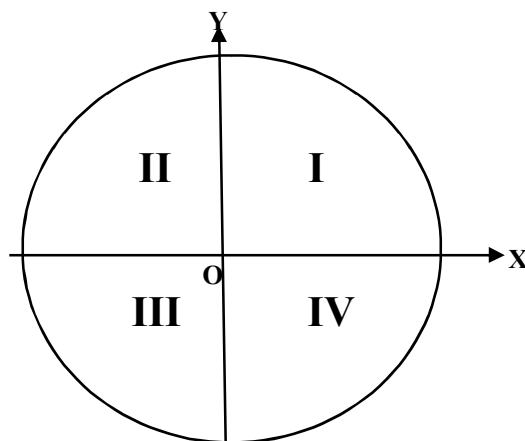


Рис.22. Четверти тригонометрического круга

Знаки основных тригонометрических функций в каждой из четвертей тригонометрического круга представлены ниже.

Таблица 2

Знаки основных тригонометрических функций

| Функция       | I | II | III | IV |
|---------------|---|----|-----|----|
| $\sin \alpha$ | + | +  | –   | –  |
| $\cos \alpha$ | + | –  | –   | +  |
| $tg \alpha$   | + | –  | +   | –  |
| $ctg \alpha$  | + | –  | +   | –  |

Таким образом, в первой четверти все тригонометрические функции принимают *положительные значения*. В остальных четвертях тригонометрические функции могут принимать как *положительные*, так и *отрицательные значения*.

*Пример 1.* Известно, что угол  $\alpha$  находится во второй четверти. Найдите значение  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

*Решение:*

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{16}{25},$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Косинус угла, находящегося во второй четверти, – величина отрицательная, поэтому в решении мы оставляем только отрицательный корень.

Ответ:  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$

Если единичный радиус совершает поворот *против часовой стрелки*, то угол  $\alpha$  считается *положительным*, если же единичный радиус совершает поворот *по часовой стрелке* – *отрицательным*.

При помощи тригонометрического круга нетрудно установить справедливость следующих равенств:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

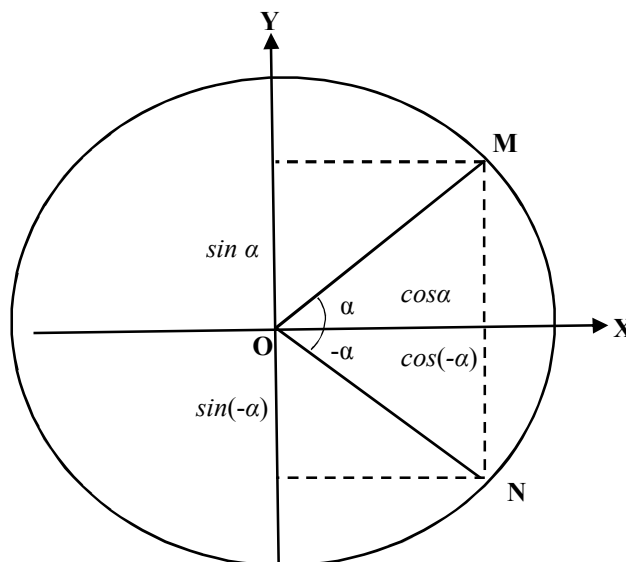


Рис. 23. Равенства  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  и  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Действительно, рассмотрим два угла  $\alpha$  и  $(-\alpha)$ . Проекции на ось OX точек M и N, задающих эти углы, одинаковы, проекции на ось OY отличаются только знаком (рис.10). Таким образом, синус как функция угла  $\alpha$  является *нечетной* функцией, а косинус – *четной* функцией.

Значения синуса и косинуса по определению не изменяются при повороте единичного радиуса на угол, кратный  $360^\circ$ , то есть

$$\sin(\alpha \pm 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha, \cos(\alpha \pm 360^\circ \cdot n) = \cos \alpha,$$

где  $n$  – любое целое число. Это свойство называется *периодичностью*.

*Пример 2.* Найдите значение выражения

$$\sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 2\sqrt{3} \cos(-30^\circ) - 4 \cos 420^\circ.$$

*Решение:*

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 2\sqrt{3} \cos(-30^\circ) - 4 \cos 420^\circ = \\ & = -\sqrt{2} \sin 45^\circ + 2\sqrt{3} \cos 30^\circ - 4 \cos 60^\circ = \\ & = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 3 - 2 = 0. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0.

### 3.3. Формулы приведения

Формулы, позволяющие выразить значения тригонометрических функций углов  $90^\circ \pm \alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$  и  $270^\circ \pm \alpha$  через функцию угла  $\alpha$  называются *формулами приведения*.

Углы  $180^\circ \pm \alpha$  принято называть углами, откладываемыми от *горизонтального диаметра*, а углы  $90^\circ \pm \alpha$  и  $270^\circ \pm \alpha$  – углами, откладываемыми от *вертикального диаметра*.

Сформулируем *правило приведения*:

1. Если угол откладывается от горизонтального диаметра, то наименование функции не меняется, если же угол откладывается от вертикального диаметра, то наименование функции меняется на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и т.д.).

2. Знак в правой части формулы определяется по знаку функции, стоящей в левой части, при этом угол  $\alpha$  считается острым независимо от его величины.

Применив данное правило, получим, в частности:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha; \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, & \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha; \end{aligned}$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha.$$

*Пример.* Найдите значение выражения

$$3\sin 120^\circ - \sqrt{2}\sin(135^\circ) + 2\sin 150^\circ.$$

*Решение:*

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{3}\sin 120^\circ - \sqrt{2}\sin(135^\circ) + 2\sin 150^\circ = \\ & = 4\sqrt{3}\sin(90^\circ + 30^\circ) - \sqrt{2}\sin(90^\circ + 45^\circ) + 2\sin(180^\circ - 30^\circ) = \\ & = 4\sqrt{3}\cos 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sin 30^\circ = \\ & = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 1 + 1 = 6. \end{aligned}$$

*Ответ:* 6.

### 3.4. Формулы сложения

*Формулы сложения* позволяют выразить тригонометрические функции углов  $\alpha \pm \beta$  через функции углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Выпишем шесть основных формул сложения для синуса, косинуса и тангенса.

*Формулы синуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

*Формулы косинуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

*Формулы тангенса суммы и разности* двух аргументов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

*Пример.* Вычислить  $\cos(\alpha - \beta)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ;  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ;  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ;

$270^\circ < \beta < 360^\circ$ .

*Решение:*

При помощи основного тригонометрического тождества найдем значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \beta$  с учетом четверти, которой принадлежат углы  $\alpha$  и  $\beta$  :

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Подставив найденные значения в формулу косинуса разности двух аргументов, получим:

$$\cos(\alpha - \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}$$

*Ответ:*  $-\frac{7}{25}$ .

### 3.5. Следствия из формул сложения

Из формул сложения, положив  $\beta = \alpha$ , получим *формулы двойного угла*:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

*Пример 1.* Упростить выражение

$$1 - \cos(180^\circ - 2\alpha) - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha.$$

*Решение:*

$$\begin{aligned} 1 - \cos(180^\circ - 2\alpha) - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 + \cos 2\alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= 1 + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1 \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

Используя основное тригонометрическое тождество, можно получить еще две дополнительные формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$



Выражая из двух последних формул  $\sin^2 \alpha$  и  $\cos^2 \alpha$ , получим *формулы понижения степени*:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

*Пример 2.* Вычислить  $\sin^2 \alpha$ , если  $\cos 2\alpha = 0,2$ .

*Решение:*

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - 0,2}{2} = 0,4.$$

*Ответ:* 0,4.

При помощи формул сложения для синуса и косинуса можно получить следующие формулы *преобразования произведения тригонометрических функций в сумму*:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

*Пример 3.* Упростить выражение

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos 2\alpha.$$

*Решение:*

$$\begin{aligned} & 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos 2\alpha = \\ & = 2 \frac{\cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha}{2} - \cos 2\alpha = \\ & = \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0,5.

С помощью тождеств

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

можно получить следующие формулы *преобразования суммы тригонометрических функций в произведение*:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

*Пример 12.* Преобразовать сумму в произведение

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha.$$

*Решение:*

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha.$$

*Ответ:*  $2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha$ .

### 3.6. Тригонометрические функции числового аргумента

В тригонометрии кроме градусной меры, используется также *радианная мера* угла. Связь между радианной мерой  $\varphi$  и градусной мерой  $\alpha$  устанавливается из пропорции:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}.$$

Число  $\pi$  приближенно равно 3,14. Из последнего равенства получим формулу, позволяющую переводить градусную меру в радианную:

$$\varphi = \frac{\pi \alpha}{180^\circ}.$$

В качестве примера приведем значения углов в радианах для стандартного набора значений углов в градусной мере

## Перевод градусной меры углов в радианную

|           |           |                 |                 |                 |                 |             |                  |             |
|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|
| $\alpha$  | $0^\circ$ | $30^\circ$      | $45^\circ$      | $60^\circ$      | $90^\circ$      | $180^\circ$ | $270^\circ$      | $360^\circ$ |
| $\varphi$ | 0         | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$      |

Пример 1. Вычислить  $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .

Решение:

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Использование радианной меры позволяет считать углом любое действительное число, следовательно, тригонометрические функции можно рассматривать как *функции числового аргумента*.

Воспользуемся общепринятыми для функций обозначениями:  $x$  – независимая переменная (аргумент),  $y$  – зависимая переменная (функция). Графики функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  представлены ниже.

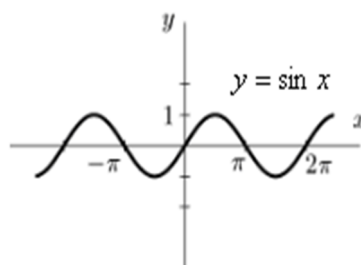


Рис. 24. Синус как функция числового аргумента  $x$

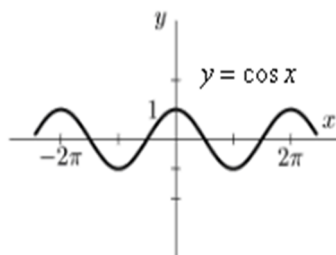


Рис. 25. Косинус как функция числового аргумента  $x$

Область определения синуса и косинуса – все действительные числа, а множество значений – отрезок  $[-1; 1]$ . Синус – нечетная функция, косинус – четная функция. Наименьший положительный период этих функций равен  $2\pi$ .

Обозначив через  $Z$  множество целых чисел, запишем решения простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

*Пример 2.* Решить уравнение  $\cos^2 x - 3 \cos x = 0$ .

*Решение:*

$$\cos^2 x - 3 \cos x = 0;$$

$$\cos x (\cos x - 3) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений

$$\cos x = 0, \quad \cos x = 3.$$

Первое из них имеет решение  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$ . Второе уравнение не имеет решений, так как  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$ .

Ниже представлены графики функций  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ .

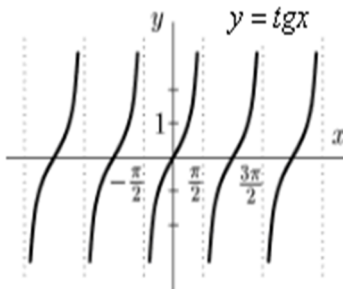


Рис. 26. Тангенс как функция числового аргумента  $x$

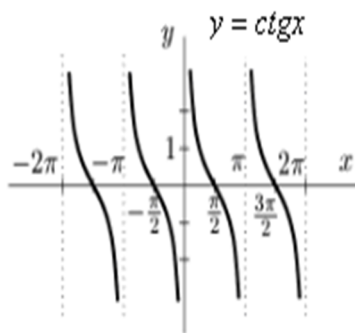


Рис. 27. Котангенс как функция числового аргумента  $x$

Область определения тангенса – все действительные числа, за исключением точек  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Область определения котангенса – все действительные числа, за исключением точек  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Множество значений функций тангенса и котангенса – все действительные числа. Тангенс и котангенс – нечетные функции. Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен  $\pi$ .

### 3.7. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа  $a$  ( $|a| \leq 1$ ) называется угол из промежутка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ . Арксинус обозначается  $\arcsin a$ . Например,

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Функция  $y = \arcsin x$  является обратной к функции  $y = \sin x$  на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . График функции приведен ниже.

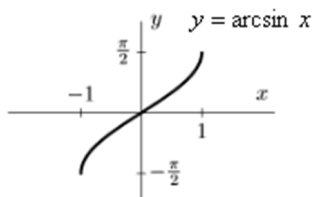


Рис.28. Функция  $y = \arcsin x$

Область определения арксинуса – отрезок  $[-1;1]$ , а множество значений – отрезок  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Арксинус – нечетная функция, то есть  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ .

*Пример 1.* Вычислить  $\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin 0$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin 0 &= \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 0 &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{\pi}{3}$ .

Арккосинусом числа  $a$  ( $|a| \leq 1$ ) называется угол из промежутка  $[0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ . Арккосинус обозначается  $\arccos a$ . Например,

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Функция  $y = \arccos x$  является обратной к функции  $y = \cos x$  на промежутке  $[0; \pi]$ . График функции приведен ниже.

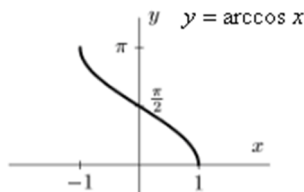


Рис.29. Функция  $y = \arccos x$

Область определения арккосинуса – отрезок  $[-1;1]$ , а множество значений – отрезок  $[0; \pi]$ . Для арккосинуса справедливо равенство  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ .

*Пример 2.* Вычислить

–

.

*Решение:*

$$\begin{aligned} & \arccos 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 0 = \\ & = 0 + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{7\pi}{6}$ .

Арктангенсом числа  $a$  называется угол из промежутка  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  тангенс которого равен  $a$ . Арктангенс обозначается  $\operatorname{arctg} a$ . Например,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Функция  $y = \operatorname{arctg} x$  является обратной к функции  $y = \operatorname{tg} x$  на промежутке  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . График функции приведен ниже.

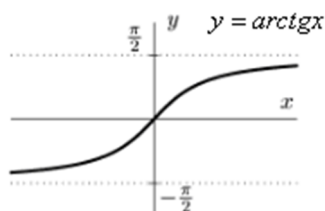


Рис.30. Функция  $y = \operatorname{arctg} x$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Арктангенс – нечетная функция, то есть  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ .

*Пример 3.* Вычислить  $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} 0$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} 0 = \\ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 0 = -\frac{\pi}{12} . \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-\frac{\pi}{12}$ .

Арккотангенсом числа  $a$  называется угол из промежутка  $(0; \pi)$ , котангенс которого равен  $a$ . Арккотангенс обозначается  $\operatorname{arccctg} a$ . Например,

$$\operatorname{arccctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arccctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\operatorname{arccctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Функция  $y = \operatorname{arccctg} x$  является обратной к функции  $y = \operatorname{ctg} x$  на промежутке  $(0; \pi)$ . График функции приведен ниже.

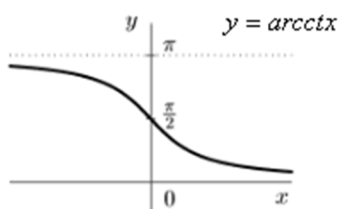


Рис.31. Функция  $y = \operatorname{arccctg} x$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал  $(0; \pi)$ . Для арккотангенса справедливо равенство  $\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x$ .

*Пример 4.* Вычислить  $\operatorname{arccctg} 1 + \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arccctg} 0$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \operatorname{arccctg} 1 + \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arccctg} 0 = \\ = \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{12} . \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{19\pi}{12}$ .



### 3.8. Тригонометрические уравнения

Прежде чем выписать общие формулы для корней простейших тригонометрических уравнений, рассмотрим следующий пример.

*Пример 1.* Решить уравнение  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

*Решение:*

Данное уравнение вследствие периодичности функции  $y = \sin x$  имеет бесконечное множество решений. Для удобства построим сначала решение на промежутке  $[0; 2\pi]$ . Длина этого промежутка равна периоду функции. Проведем прямую  $y = \frac{1}{2}$ .

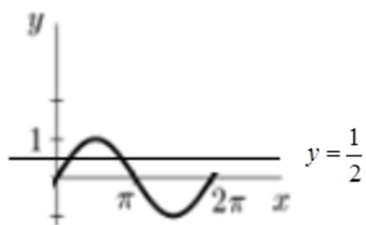


Рис.32. Решение уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  на отрезке  $[0; 2\pi]$

Прямая  $y = \frac{1}{2}$  пересекает график функции в двух точках:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ и } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Таким образом, на промежутке  $[0; 2\pi]$  уравнение  $\sin x = \frac{1}{2}$  имеет два решения:  $x = \frac{\pi}{6}$  и  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Тогда вследствие периодичности функции  $y = \sin x$  общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно проверить, что полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Действительно, подставив в последнюю формулу значение  $k = 2n$ , получим первую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Подставив в формулу  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$  значение  $k = 2n+1$ , получим вторую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + (2n+1)\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

*Ответ:*  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$

*Формула корней уравнения*

$$\sin x = a,$$

где  $|a| \leq 1$ , в общем случае имеет вид

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z.$$

*Пример 2.* Решить уравнение  $\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0.$

*Решение:*

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0;$$

$$\sqrt{2} \sin x \left( \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0;$$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\sin x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Первое из них имеет решение

$$x = \pi n, \quad n \in Z.$$

Решение второго уравнения представим в виде

$$x = (-1)^k \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi k, \quad k \in Z.$$

Подставив значение  $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$  в последнюю формулу, получим

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Пример 3.* Решить уравнение  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

*Решение:*

Сначала построим решение данного уравнения на промежутке  $[-\pi, \pi]$ .

Длина этого промежутка равна периоду функции. Проведем прямую  $y = \frac{1}{2}$ .

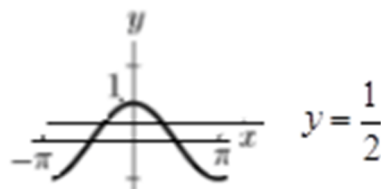


Рис.33. Решение уравнения  $\cos x = \frac{1}{2}$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$

Прямая  $y = \frac{1}{2}$  пересекает график функции в двух точках:

$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ и } x = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, на промежутке  $[-\pi, \pi]$  уравнение  $\cos x = \frac{1}{2}$  имеет два решения:  $x = -\frac{\pi}{3}$  и  $x = \frac{\pi}{3}$ . Тогда вследствие периодичности функции  $y = \cos x$  общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Формула корней уравнения*

$$\cos x = a,$$

где  $|a| \leq 1$  в общем случае имеет вид

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Пример 4.* Решить уравнение  $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$ .

*Решение:*

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$2\cos x \left( \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Первое из них имеет решение  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Решение второго уравнения представим в виде

$$x = \pm \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Подставив значение  $\arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$  в последнюю формулу, получим

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Формула корней уравнения*

$$\operatorname{tg} x = a$$

в общем случае имеет вид

$$x = \arctg a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Например,

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставив значение  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , получим

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Формула корней уравнения*

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Например,

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставив значение  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ , получим

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 3.9. Упражнения

- Известно, что  $\alpha$  – острый угол. Найдите значение  $\cos \alpha$  по заданному значению  $\sin \alpha$ .

$$\text{а) } \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{13}}; \quad \text{б) } \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

- Найдите значение выражения.

$$\text{а) } -4\sin^2 \alpha - 5 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 4\cos^2 \alpha;$$

$$\text{б) } -3\sin^2 \alpha + 8 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 3\cos^2 \alpha.$$

- Найдите значение выражения.

$$\text{а) } 2\sin^2 47^\circ + 2(\sin^2 43^\circ - 1);$$

$$\text{б) } 3\sin^2 11^\circ + 3(\sin^2 79^\circ + 2).$$

- Вычислить.

$$\text{а) } 6\sin 30^\circ + 4\cos^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ;$$

$$\text{б) } 2\sin^2 60^\circ + \cos 60^\circ - 3\operatorname{tg}^2 30^\circ.$$

5. Найдите значение выражения.

а)  $2\sin 150^\circ + 4\cos(-60^\circ) + \cos 0^\circ$ ;

б)  $\sqrt{2}\sin 135^\circ + 6\cos 120^\circ + \sin 0^\circ$ .

6. Вычислить.

а)  $2\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{4}$ ;

б)  $2\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ .

Решить уравнения.

7. а)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

б)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

8. а)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

б)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

9. а)  $\cos x - \sin 2x = 0$ ;

б)  $\sin x - \sin 2x = 0$ .

10. а)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin x = 0$ ;

б)  $\sin 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ .

## 4. Планиметрия

### Ключевые слова по теме «Планиметрия»

|                 |               |             |
|-----------------|---------------|-------------|
| Геометрия       | geometry      | قسطدن مل    |
| Касательная     | tangent       | لظلا        |
| Луч             | ray           | يار         |
| Многоугольник   | polygon       | غلض مل      |
| Окружность      | circumference | قرياد       |
| Отрезок         | line segment  | طخ نم عزج   |
| Планиметрия     | planimetry    | ميسج تل     |
| Плоскость       | plane         | قري اطل     |
| Прямая          | direct        | رشابم       |
| Секущая         | secant        | عطاقلا      |
| Треугольник     | triangle      | ثلثم        |
| Фигура          | Figure        | مقرلا       |
| Хорда           | Chord         | رتو         |
| Четырехугольник | quadrilateral | يعابرلا     |
| Ромб            | rhomb         | يسدنه ني عم |
| Прямоугольник   | rectangle     | ليطتس مل    |
| Квадрат         | square        | عبرم        |

### 4.1. Основные понятия

*Планиметрия* – это раздел геометрии, изучающий фигуры на плоскости.

*Основные геометрические фигуры* на плоскости – это *точка* и *прямая*. С помощью этих фигур можно определить все остальные геометрические фигуры.

*Отрезок* – это часть прямой, лежащая между двумя данными ее точками. Эти точки называются концами отрезка.

*Луч* – это часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной начальной точки.

*Угол* – это фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Эти лучи называют *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. Если обе стороны угла лежат на одной прямой, угол называют *развёрнутым*. По определению градусная мера развернутого угла равна  $180^\circ$ .

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжением одна другой, называются *смежными*. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

*Пример 1.* Внутри развернутого угла  $\angle AOB$  проведен луч  $OC$  так, что угол  $\angle AOC$  составляет  $0,7$  угла  $\angle AOB$ . Найдите величину угла  $\angle COB$ .

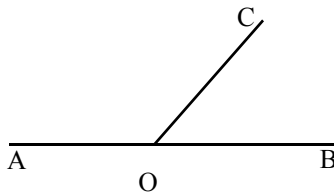


Рис. 34. Углы  $\angle AOB$ ,  $\angle AOC$  и  $\angle COB$

*Решение:*

$$\angle AOB = 180^\circ, \angle AOC = 0,7 \cdot 180^\circ = 126^\circ,$$

$$\angle COB = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ.$$

*Ответ:*  $54^\circ$ .

Два угла называются *вертикальными*, если обе стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

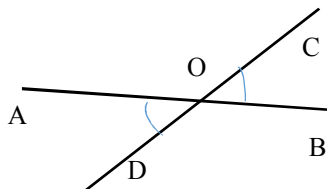


Рис.35. Вертикальные углы

*Прямой угол* – это половина развернутого угла, то есть его градусная мера равна  $90^\circ$ .

Прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.



Прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то справедливы следующие утверждения:

1. Соответственные углы равны, то есть

$$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6.$$

2. Внутренние накрест лежащие углы равны, то есть

$$\angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5.$$

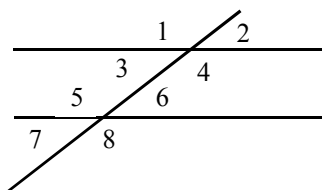


Рис.36. Свойства параллельных прямых

*Пример 2.* Линии  $l$  и  $m$  параллельны. Найдите сумму углов  $\alpha + \beta$ .

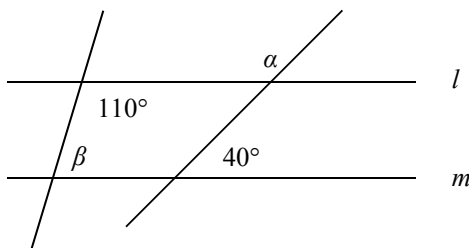


Рис. 37. Нахождение суммы углов

*Решение:*

$$\alpha + 40^\circ = 180^\circ, \quad \alpha = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ;$$

$$\beta + 110^\circ = 180^\circ, \quad \beta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ;$$

$$\alpha + \beta = 210^\circ.$$

*Ответ:*  $210^\circ$ .

*Ломаной* называется фигура, которая состоит из точек и соединяющих их отрезков. Точки называются *вершинами ломаной*, а отрезки — *звеньями ломаной*. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений.

*Многоугольник* — это простая замкнутая ломаная линия. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

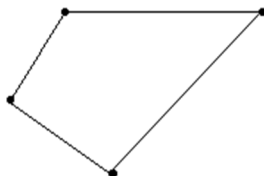


Рис. 38. Выпуклый многоугольник

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна  $180^\circ(n-2)$ , где  $n$  — число сторон многоугольника.

Сумма длин всех сторон многоугольника называется *периметром*. Периметр многоугольника обозначается заглавной буквой  $P$  латинского алфавита.

## 4.2. Треугольники

*Треугольник* — это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются *вершинами* треугольника, отрезки — *сторонами* треугольника. Сумма внутренних углов произвольного треугольника равна  $180^\circ$ .

*Пример 1.* Дан треугольник  $ABC$ . Найдите величину угла  $\hat{A}$  треугольника  $ABC$ , если угол  $\hat{A}$  в 4 раза меньше угла  $\hat{B}$  и на  $18^\circ$  больше угла  $\hat{C}$ .

*Решение:*

По условиям задачи имеем

$$\hat{B} = 4\hat{A}, \quad \hat{C} = \hat{A} - 18^\circ;$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Подставив в последнее равенство выражения для  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  через  $\hat{A}$ , получим

$$\hat{A} + 4\hat{A} + \hat{A} - 18^\circ = 180^\circ,$$

$$6\hat{A} = 198^\circ, \quad \hat{A} = 33^\circ.$$

*Ответ:*  $33^\circ$ .

Для любого треугольника справедливо *утверждение*: сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны, а разность – меньше третьей стороны (*неравенство треугольника*).

*Пример 2.* В четырехугольнике  $ABCD$   $AB=5$ ,  $BC=17$ ,  $CD=5$ ,  $DA=9$ . Найти длину диагонали  $BD$ , если известно, что  $BD$  является целым числом.

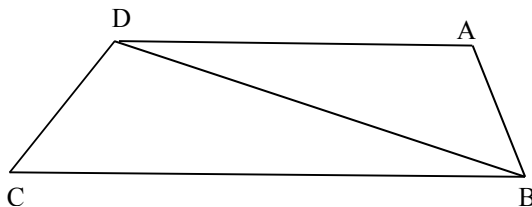


Рис. 39. Нахождение длины диагонали четырехугольника

*Решение:*

Рассмотрим треугольник  $DAB$ . Из неравенства треугольника следует  $BD < DA + AB$ ,  $BD < 9 + 5$ ,  $BD < 14$ .

Рассмотрим треугольник  $DBC$ . Из неравенства треугольника следует  $BD > BC - CD$ ,  $BD > 17 - 5$ ,  $BD > 12$ .

Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} BD < 14, \\ BD > 12. \end{cases}$$

Единственным целым решением этой системы является значение  $BD = 13$ .

*Ответ:* 13.

Два треугольника *равны*, если у них соответственно равны:

1. Две стороны и угол между ними.
2. Два угла и прилежащий к ним угол.
3. Три стороны.

Два треугольника *подобны*, если:

1. Два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника.
2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны.
3. Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

*Медиана* треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

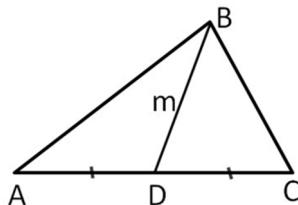


Рис. 40. Медиана треугольника

Медианы пересекаются в одной точке. В точке пересечения медианы треугольника делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

*Биссектриса* треугольника — это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне (биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий угол пополам).

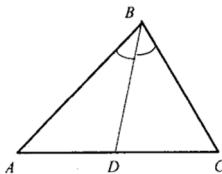


Рис. 41. Биссектриса треугольника

Биссектрисы пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис является центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

*Высота* треугольника — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

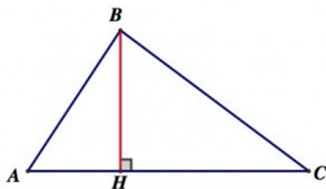


Рис.42. Высота треугольника

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Если из одной и той же вершины провести медиану, биссектрису и высоту, то *медиана* окажется *самым длинным отрезком*, а *высота* — *самым коротким отрезком*.

*Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон этого треугольника. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны.

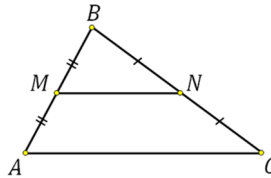


Рис. 42. Средняя линия треугольника

Если у треугольника две стороны равны, то такой треугольник называют *равнобедренным*. Равные стороны называют *боковыми*, а третью сторону — *основанием*. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Треугольник, у которого все стороны равны называется *равносторонним треугольником*. Очевидно, что каждый внутренний угол равностороннего треугольника равен  $60^\circ$ .

*Прямоугольным* треугольником называется треугольник, имеющий прямой угол.

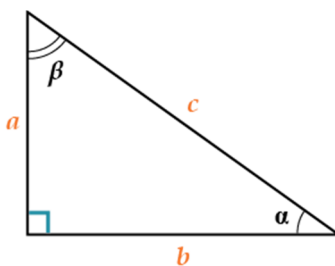


Рис. 43. Прямоугольный треугольник

*Гипотенуза* – сторона, противолежащая прямому углу. *Катеты* – стороны, прилежащие к прямому углу треугольника.

*Свойства* прямоугольного треугольника:

1. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ .

2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы (гипотенуза в два раза длиннее катета против угла в  $30^\circ$ ).

Пусть  $a$  и  $b$  – катеты,  $\alpha$  и  $\beta$  – углы, противолежащие катетам  $a$  и  $b$  соответственно,  $c$  – гипотенуза.

*Теорема Пифагора:* квадрат гипотенузы треугольника равен сумме квадратов его катетов, то есть

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

*Пример 3.* В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  – прямой. Найти катет  $BC$ , если  $AB=5$ ,  $CA=4$ .

*Решение:*

По теореме Пифагора

$$AB^2 = CA^2 + BC^2, \quad 5^2 = 4^2 + BC^2, \quad BC^2 = 25 - 16 = 9.$$

Следовательно,  $BC = 3$ .

*Ответ:* 3.

Из определения тригонометрических функций острого угла следует:

$$a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \beta;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

*Пример 4.* В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  – прямой. Найти катет  $BC$ , если  $AB=10$ ,  $\cos \hat{A} = 0,6$ .

*Решение:*

Найдем катет  $CA$ :

$$CA = AB \cdot \cos \hat{A}, \quad CA = 10 \cdot 0,6 = 6.$$

По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - CA^2}, \quad BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8.$$

*Ответ:* 8.

*Площадь  $S$*  прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  вычисляются по формуле

$$S = \frac{ab}{2}.$$

*Пример 5.* Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой  $c = 2$ .

*Решение:*

Пусть  $a$  – катет равнобедренного прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора

$$c^2 = a^2 + a^2, \quad c^2 = 2a^2, \quad 4 = 2a^2, \quad a^2 = 2.$$

Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна  $S = \frac{a^2}{2}$ .

Следовательно,  $S = \frac{2}{2} = 1$ .

*Ответ:* 1.

Рассмотрим произвольный треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углы, противолежащие сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно.

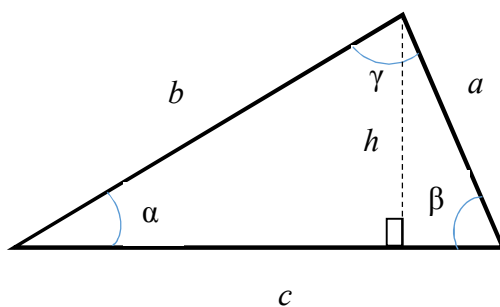


Рис. 44. Произвольный треугольник

*Теорема косинусов:* квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Теорема косинусов позволяет определить *вид треугольника* по его сторонам. Пусть  $c$  – наибольшая из трех сторон треугольника, тогда по теореме косинусов:

- а) если  $c^2 < a^2 + b^2$ , то треугольник остроугольный;
- б) если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то треугольник прямоугольный;
- а) если  $c^2 > a^2 + b^2$ , то треугольник тупоугольный.

*Пример 6.* Определить вид треугольника, если его стороны равны 5, 12 и 13.

*Решение:*

Квадрат наибольшей стороны:  $c^2 = 13^2 = 169$ .

Найдем сумму квадратов двух других сторон:

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$$

Таким образом, получаем:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

то есть треугольник – прямоугольный.

*Ответ:* прямоугольный треугольник.

*Теорема синусов:* Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

*Пример 7.* Сторона  $a$  треугольника равна  $4\sqrt{2}$ , а противолежащий этой стороне угол  $\alpha = 45^\circ$ . Найдите сторону  $b$ , если противолежащий этой стороне угол  $\beta = 30^\circ$ .

*Решение:*

По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$b = 4\sqrt{2} \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 4.$$

*Ответ:* 4.

*Площадь* произвольного треугольника можно вычислить по одной из формул:

$$S = \frac{ch}{2},$$



$$S = \frac{ab}{2} \sin \gamma ,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона).}$$

Здесь  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – полупериметр треугольника,

$h$ – высота, проведенная к стороне  $c$ ,

*Пример 8.* На бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

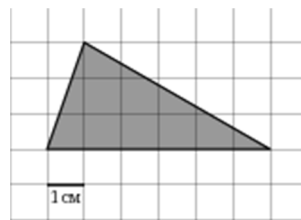


Рис.45. Площадь треугольника

*Решение:*

Находим основание  $c = 6$ . Высота равна  $h = 3$ .

Вычисляем площадь:

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

*Ответ:* 9.

*Пример 9.* Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание  $c = 8$ , а боковая сторона  $b = 5$ .

*Решение:*

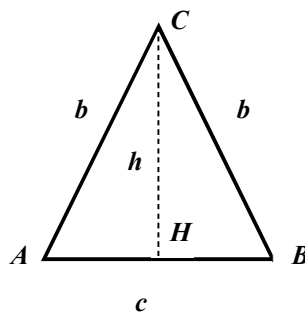


Рис. 46. Равнобедренный треугольник

Проведем из вершины, противолежащей основанию, высоту  $CH$ . Обозначим ее буквой  $h$ . В равнобедренном треугольнике эта высота одновременно является и медианой, то есть делит основание на два равных отрезка.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ACH$ . По теореме Пифагора

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$

*Ответ:* 12.

*Пример 10.* Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной  $a$ .

*Решение:*

В равностороннем треугольнике все углы равны  $60^\circ$ . Для нахождения площади воспользуемся формулой

$$S = \frac{ab}{2} \sin \gamma.$$

Положив в этой формуле  $b = a$ , а угол  $\gamma = 60^\circ$ , получим:

$$S = \frac{a^2}{2} \sin 60^\circ = \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

*Ответ:*  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$

### 4.3. Четырехугольники

*Четырехугольник* – это фигура, состоящая из четырех точек, три из которых не лежат на одной прямой, и четырех последовательно соединяющих их отрезков. Точки называют *вершинами* четырехугольника, отрезки – *сторонами* четырехугольника. Предполагается, что четырехугольник является *выпуклым*, то есть лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. Сумма внутренних углов любого выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ .

*Пример 1.* Известно, что углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите сумму наименьшего и наибольшего углов четырехугольника.

*Решение:*

Без ограничения общности считаем, что арифметическая прогрессия является возрастающей. Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_4$  – наименьший и наибольший углы соответственно.

Воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии

$$S = \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \cdot 4.$$

Подставив числовые значения, получим

$$360^\circ = 2(\alpha_1 + \alpha_4), \quad \alpha_1 + \alpha_4 = 180^\circ.$$

*Ответ:*  $180^\circ$ .

*Параллелограммом* называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

*Свойства* параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.
2. Противоположные углы параллелограмма равны.
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
4. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна  $180^\circ$ .

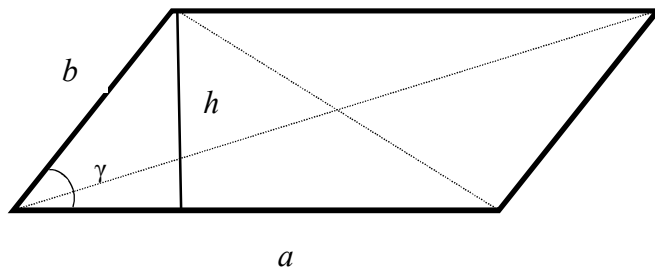


Рис. 46. Параллелограмм

*Пример 2.* Одна из сторон параллелограмма равна 6. Найдите вторую сторону, если периметр параллелограмма равен 36.

*Решение:*

Пусть  $a = 6$ . Найдем сторону  $b$ .

$$P = 2(a+b), \quad 36 = 2(6+b), \quad 18 = 6+b, \quad b = 12.$$

*Ответ:* 12.

Площадь  $S$  параллелограмма можно вычислить по одной из формул:

$$S = ah.$$

$$S = ab \sin \gamma.$$

Здесь  $h$  – высота параллелограмма, проведенная к стороне  $a$ ;  $\gamma$  – угол между сторонами  $a$  и  $b$ .

*Пример 3.* Косинус угла между смежными сторонами параллелограмма равен 0,6. Найти площадь параллелограмма со сторонами 4 и 5.

*Решение:*

Пусть  $a = 4$ ,  $b = 5$ .

По условиям задачи  $\cos \gamma = 0,6$ .

Из основного тригонометрического тождества найдем

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8.$$

Подставив найденное значение  $\sin \gamma$  в формулу площади параллелограмма, получим

$$S = ab \sin \gamma = 4 \cdot 5 \cdot 0,8 = 16.$$

*Ответ:* 16.

*Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

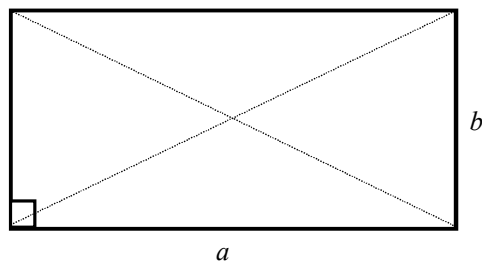


Рис. 47. Прямоугольник

Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.

Свойство присущее только прямоугольнику: диагонали прямоугольника равны.

Площадь  $S$  прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  вычисляется по формуле:

$$S = ab.$$

*Пример 4.* Периметр прямоугольника равен 40. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 8.

*Решение:*

Пусть  $a = 8$ . Найдём сторону  $b$ .

$$P = 2(a + b), \quad 40 = 2(8 + b), \quad 20 = 8 + b, \quad b = 12.$$

Найдём площадь прямоугольника

$$S = ab = 8 \cdot 12 = 96.$$

*Ответ:* 96.

*Ромб* называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

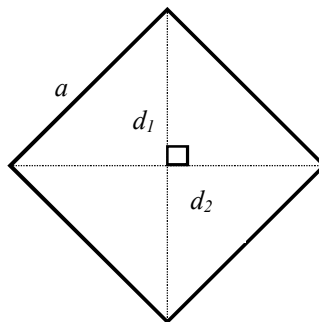


Рис. 48. Ромб

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.

Свойства, присущие только ромбу:

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами углов.

*Пример 5.* Найдите периметр ромба  $ABCD$ , если  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $AC = 10$ .

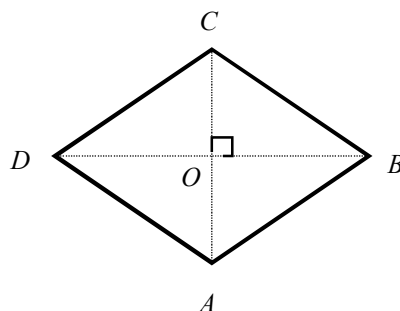


Рис. 49. Нахождение периметра ромба

*Решение:*

Треугольник  $ABC$  – равнобедренный. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а угол при вершине равнобедренного треугольника  $\angle ABC = 60^\circ$ . Отсюда следует, что  $\angle BCA = \angle BAC = 60^\circ$ , то есть треугольник  $ABC$  – равносторонний. Так как  $AC = 10$ , следовательно, сторона ромба равна 10. Периметр ромба равен 40.

*Ответ:* 40.

Площадь  $S$  ромба с диагоналями  $d_1$  и  $d_2$  вычисляется по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

*Пример 6.* Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна 5, а одна из диагоналей – 8.

*Решение:*

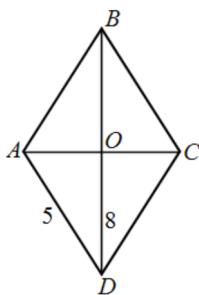


Рис. 50. Площадь ромба

Пусть  $BD$  – известная диагональ. По условиям задачи  $BD = 8$ . Согласно свойствам ромба его диагонали пересекаются под прямым углом и делятся в точке пересечения пополам. Рассмотрим прямоугольный треугольник  $AOD$ . Найдём катет  $AO$  по теореме Пифагора

$$AO = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

В точке пересечения диагонали делятся пополам, то есть

$$AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 3 = 6.$$

Найдем площадь ромба

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

*Ответ:* 24.

*Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

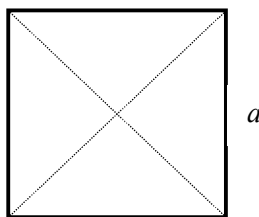


Рис. 51. Квадрат

Квадрат можно считать ромбом с прямыми углами или прямоугольником с равными сторонами, поэтому квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

*Площадь*  $S$  квадрата со стороной  $a$  вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

*Пример 7.* Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 и 18.

*Решение:*

Найдем площадь прямоугольника

$$S_{np} = 8 \cdot 18 = 144.$$

Обозначим длину стороны квадрата буквой  $a$ . Площадь квадрата

$$S_{кв} = a^2.$$

По условиям задачи имеем

$$S_{кв} = S_{np}.$$

Следовательно,

$$a^2 = 144, \quad a = 12.$$

*Ответ:* 12.

*Трапецией* называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

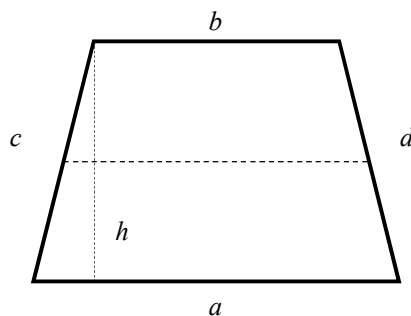


Рис.52. Трапеция

Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*. Стороны, которые не параллельны, называются *боковыми сторонами* трапеции.

*Средней линией* трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

Трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям, называется *прямоугольной трапецией*.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобедренной*.

*Свойства равнобедренной трапеции*

1. Углы при основаниях равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

*Площадь  $S$*  трапеции с основаниями  $a, b$  и высотой  $h$  вычисляется по формуле

$$S = \frac{a + b}{2} h .$$

*Пример 8.* Найдите площадь четырёхугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

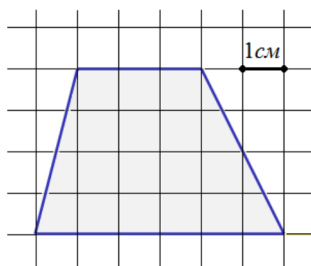


Рис. 53. Площадь трапеции



*Решение:*

Находим основания:  $a = 6$ ,  $b = 3$ . Высота равна  $h = 5$ .

Вычисляем площадь:

$$S = \frac{a+b}{2} h = \frac{6+3}{2} \cdot 5 = 22,5.$$

*Ответ:* 22,5.

*Пример 9.* В равнобедренной трапеции большие и меньшие основания равны соответственно  $DA = 18$ ,  $CB = 10$ . Боковая сторона равна  $AB = 5$ . Найдите площадь трапеции.

*Решение:*

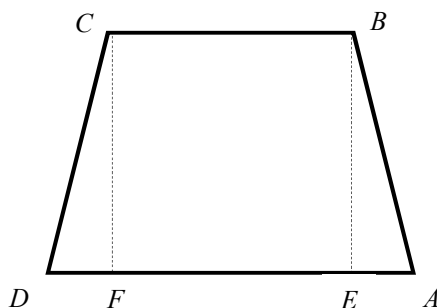


Рис. 54. Нахождение площади трапеции

Проведем высоты  $CF$  и  $BE$ . Прямоугольные треугольники  $DFC$  и  $AEB$  равны по катету и гипотенузе. Следовательно,  $DF = EA = \frac{18-10}{2} = 4$ .

Из прямоугольного треугольника  $AEB$ , по теореме Пифагора получим

$$BE = \sqrt{AB^2 - EA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Найдем площадь трапеции:

$$S = \frac{DA + CB}{2} BE = \frac{18 + 10}{2} \cdot 3 = 42.$$

*Ответ:* 42.

Площадь произвольного выпуклого четырехугольника с диагоналями  $d_1$ ,  $d_2$  и углом между диагоналями  $\varphi$  вычисляется по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi.$$

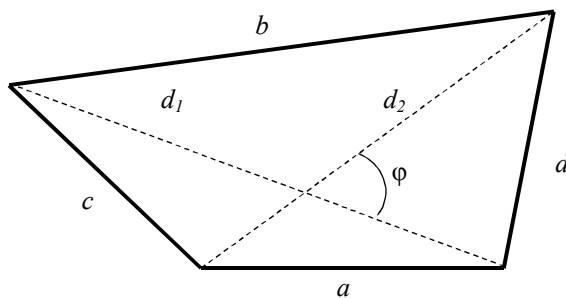


Рис. 55. Произвольный четырехугольник

*Пример 10.* Одна из диагоналей выпуклого четырехугольника равна 3, а вторая диагональ вдвое больше первой. Найдите площадь четырехугольника, если угол между диагоналями равен  $30^\circ$ .

*Решение:*

Пусть  $d_1 = 3$ . Найдем вторую диагональ:

$$d_2 = 2 \cdot d_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Площадь четырехугольника:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{3 \cdot 6}{2} \sin 30^\circ = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$$

*Ответ:* 4,5.

#### 4.4. Окружность и круг

*Окружностью* называется множество точек на плоскости, находящихся от данной точки (центр окружности) на данном расстоянии (радиус окружности).

*Круг* – это часть плоскости, ограниченной окружностью.

*Длина окружности C* и *площадь круга S* вычисляются по формулам

$$C = 2\pi R, \quad S = \pi R^2.$$

Здесь  $R$  – радиус окружности (круга).

*Пример 1.* Найдите площадь круга, длина окружности которого равна  $10\sqrt{\pi}$ .

*Решение:*

Сначала найдем радиус окружности (круга):

$$10\sqrt{\pi} = 2\pi R, \quad R = \frac{10\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}.$$

Подставив найденное значение радиуса в формулу площади круга, найдем

$$S = \pi R^2 = \pi \left( \frac{5}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = 25.$$

*Ответ:* 25.

*Пример 2.* На клетчатой бумаге нарисован круг площадью 17. Найдите площадь заштрихованного сектора.

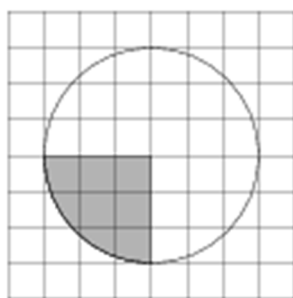


Рис. 56. Площадь сектора

*Решение:*

Площадь сектора с центральным углом  $90^\circ$  равна  $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$  части площади круга, то есть  $\frac{1}{4} \cdot 17 = 4,25$ .

*Ответ:* 4,25.

Длина дуги  $l$  и площадь сектора  $S$  в общем случае вычисляются по формулам

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}, \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ},$$

где  $\alpha$  – градусная мера центрального угла.

*Пример 3.* Найдите длину дуги и площадь сектора, если  $\alpha = 60^\circ$ , а  $R = 6$ .

*Решение:*

$$l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60^\circ}{180^\circ} = 2\pi ;$$

$$S = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi .$$

*Ответ:*  $l = 2\pi$  ,  $S = 6\pi$  .

Если используется *радианная мера* угла, формулы вычисления длины дуги и площади сектора заметно упрощаются:

$$l = R\varphi , S = \frac{R^2\varphi}{2} .$$

Здесь  $\varphi$  – радианная мера центрального угла.

#### 4.5. Хорды, касательные и секущие окружности

*Хордой* называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

*Теорема о пересекающихся хордах:* Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков второй хорды.

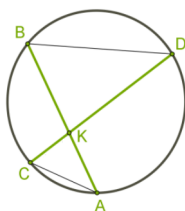


Рис. 57. Теорема о пересекающихся хордах:  $AK \cdot BK = CK \cdot DK$

*Пример 1.* Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности пересекаются в точке  $K$ . Найдите  $AK$ , если  $BK=4$ ,  $DK=6$ ,  $CK=2$ .

*Решение:*

По теореме о пересекающихся хордах имеем

$$AK \cdot BK = CK \cdot DK .$$

Подставив числовые значения, получим

$$AK \cdot 4 = 2 \cdot 6 , AK \cdot 4 = 12 , AK = 3 .$$

*Ответ:* 3.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*. Диаметр окружности обозначается буквой  $D$  Очевидно, что  $D=2R$ .

*Пример 2.* Точка  $O$  – центр окружности. Через центр окружности проведены две хорды  $AB$  и  $CD$ . Найдите  $AC$ , если  $AB=3$ ,  $\angle AOD=120^\circ$ .

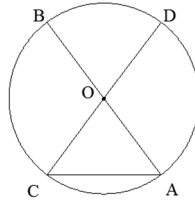


Рис. 58. Нахождение хорды  $AC$

*Решение:*

Отрезок  $OA$  – это радиус окружности, а хорда  $AB$  – диаметр окружности. Следовательно,

$$OA = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Углы  $AOD$  и  $AOC$  – смежные. Следовательно,

$$\angle AOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Треугольник  $AOC$  – равнобедренный. У равнобедренного треугольника углы при основании равны, то есть

$$\angle OCA = \angle OAC = 60^\circ.$$

Таким образом, получили, что треугольник  $AOC$  – равносторонний, то есть

$$AC = OC = OA = 1,5$$

*Ответ:* 1,5.

*Касательной* к окружности называется прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точке касания.

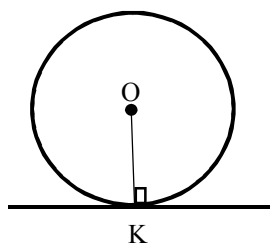


Рис. 59. Касательная к окружности в точке  $K$

*Пример 3.* Окружность с центром в точке  $O$  касается треугольника  $AOK$  в точке  $K$ . Найдите радиус окружности, если  $OA = 6$ ,  $\angle OAK = 30^\circ$ .

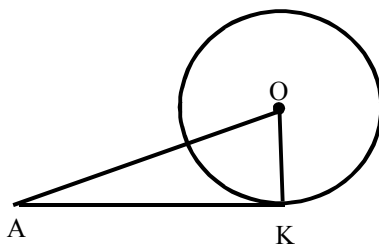


Рис. 60. Нахождение радиуса окружности

*Решение:*

Треугольник  $AOK$  — прямоугольный. По свойству прямоугольного треугольника катет  $OK$ , противолежащий углу  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы  $OA$ :

$$OK = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

*Ответ:* 3.

*Теорема о двух касательных:* отрезки двух касательных, проведенных из одной точки равны.

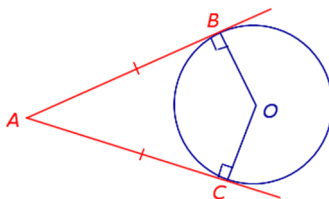


Рис. 61. Теорема о двух касательных:  $AC = AB$

*Секущей* окружности называется прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

*Теорема о касательной и секущей:* если из одной точки проведены к окружности секущая и касательная, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

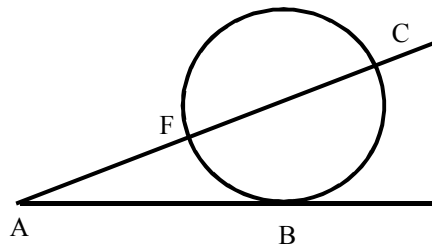


Рис. 62. Теорема о касательной и секущей:  $AB^2 = AC \cdot AF$

*Пример 4.* Окружность проходит через вершину  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $F$  и касается стороны  $AB$  в точке  $B$ . Найдите сторону  $AB$ , если  $AF=4$ ,  $FC=12$ .

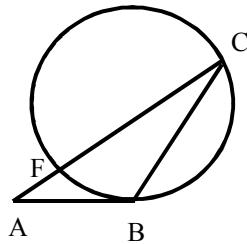


Рис. 63. Вычисление длины отрезка касательной

*Решение:*

Найдем длину секущей  $AC$  :

$$AC = AF + FC = 4 + 12 = 16.$$

По теореме о касательной и секущей получим

$$AB^2 = AC \cdot AF,$$

$$AB^2 = 16 \cdot 4 = 64,$$

$$AB = 8.$$

*Ответ:* 8.

*Теорема о двух секущих:* если из одной точки проведены к окружности две секущие, то произведение первой секущей на её внешнюю часть равно произведению второй секущей на её внешнюю часть.

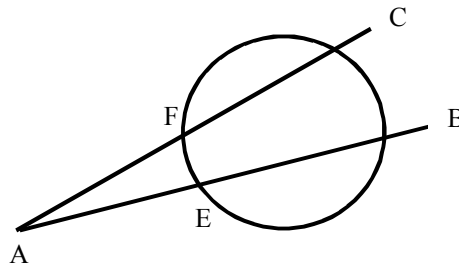


Рис. 64. Теорема о двух секущих:  $AC \cdot AF = AB \cdot AE$

#### 4.6. Углы в окружности

*Центральным углом* называется угол с вершиной в центре окружности.

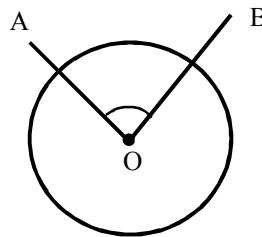


Рис. 65. Центральный угол

Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги окружности.

*Пример 1.* Найдите центральный угол, опирающийся на дугу, равную  $\frac{1}{12}$  окружности.

*Решение:*

Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги, то есть  $\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$ .

*Ответ:*  $30^\circ$ .

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*.



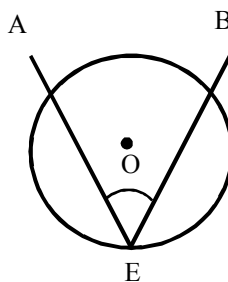


Рис. 66. Вписанный угол

*Теорема о вписанном и центральном углах.* Вписанный угол измеряется половиной центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу, то есть

$$\angle AEB = \frac{\angle AOB}{2}.$$

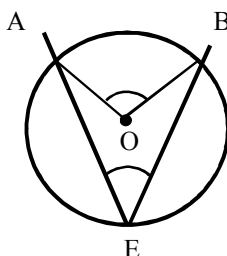


Рис. 67. Теорема о вписанном и центральном углах

*Пример 2.* Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, нулю  $\frac{1}{5}$  окружности.

*Решение:*

Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги, то есть  $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$ .

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу, то есть  $\frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$ .

*Ответ:*  $36^\circ$ .

Из теоремы о вписанном и центральном углах следует, что *вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

#### 4.7. Треугольники и окружности

Окружность называют *описанной* около треугольника, если все вершины треугольника расположены на окружности. Центр описанной окружности находится в *точке пересечения серединных перпендикуляров* к сторонам треугольника.

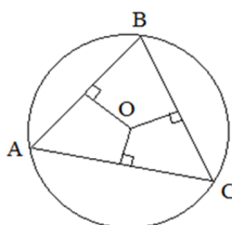


Рис. 68. Центр описанной окружности

Для *остроугольного* треугольника центр окружности находится *внутри* треугольника. Центр описанной окружности *тупоугольного* треугольника находится *вне* треугольника. В случае *прямоугольного* треугольника центр находится *на середине гипотенузы*.

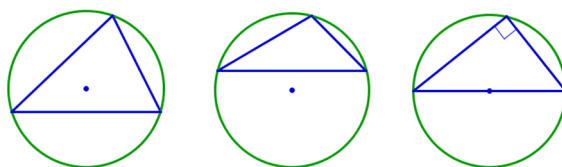


Рис. 69. Положение центра описанной окружности для различных видов треугольников

Окружность называют *вписанной* в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности. Центр вписанной окружности находится в *точке пересечения биссектрис* треугольника.

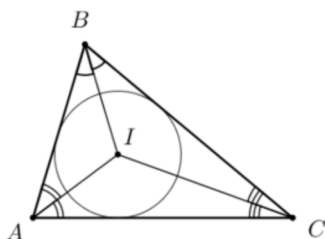


Рис. 70. Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис

Так как биссектрисы углов треугольника всегда пересекаются внутри треугольника, то для *всех треугольников* центр вписанной окружности находится *внутри* треугольника.

Радиусы описанной и вписанной в *прямоугольный треугольник* окружности вычисляются по формулам:

$$R = \frac{c}{2} - \text{радиус описанной окружности;}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} - \text{радиус вписанной окружности.}$$

Здесь  $a$  и  $b$  – катеты,  $c$  – гипотенуза прямоугольного треугольника.

*Пример 1.* Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

*Решение:*

Пусть  $a = 6$ ,  $b = 8$ . По теореме Пифагора найдем гипотенузу:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Найдем радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружности:

$$R = \frac{c}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2.$$

*Ответ:*  $R = 5$ ,  $r = 2$ .

В случае *произвольного треугольника* (остроугольного или тупоугольного) со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и соответствующими углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для нахождения радиуса описанной окружности можно воспользоваться формулой

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где  $S$  – площадь треугольника.

В некоторых задачах для нахождения радиуса описанной окружности удобнее использовать *расширенную теорему синусов*:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Радиус вписанной окружности *произвольного треугольника* вычисляется по формуле

$$r = \frac{S}{p},$$

где  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – полупериметр треугольника.

*Пример 2.* Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна 8. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

*Решение:*

Пусть  $b=10$  – боковая сторона,  $h=8$  – высота, проведенная к основанию  $c$  равнобедренного треугольника.

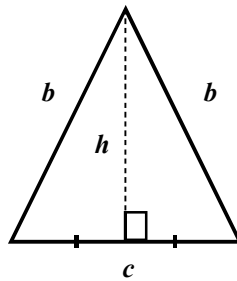


Рис. 71. Нахождение радиусов описанной и вписанной окружностей

В равнобедренном треугольнике высота  $h$  одновременно является и медианой, то есть делит основание на два равных отрезка. По теореме Пифагора

$$\frac{c}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\frac{c}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6, \quad c = 12.$$

Найдем площадь треугольника

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48.$$

Найдем радиус описанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6,25.$$

Найдем полупериметр равнобедренного треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+10+12}{2} = 16.$$

Радиус вписанной окружности будет таким:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3.$$

Ответ:  $R = 6,25$ ;  $r = 3$ .

*Пример 3.* Одна из сторон треугольника равна 6, а противолежащий ей угол равен  $30^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности.

*Решение:*

Пусть  $a = 6$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Для нахождения радиуса описанной окружности воспользуемся расширенной теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

В последней формуле выразим радиус через сторону и синус противолежащего угла, а затем подставим числовые значения:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6.$$

Ответ: 6.

В случае *равностороннего* треугольника со стороной  $a$  соответствующие формулы для радиусов описанной и вписанной окружности приобретают вид:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

#### 4.8. Четырехугольники и окружности

Четырёхугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется *вписанным в эту окружность*, а окружность называется описанной около четырёхугольника.

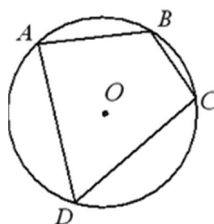


Рис. 72. Четырёхугольник, вписанный в окружность

Не во все четырёхугольники возможно вписать окружности, так как серединные перпендикуляры четырёх сторон могут не пересекаться в одной точке.

Чтобы около четырехугольника можно было *описать окружность*, необходимо и достаточно, чтобы *сумма его противоположных углов равнялась  $180^\circ$* .

Очевидно, что около прямоугольника и равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.

*Пример 1.* Стороны прямоугольника равны 5 и 12. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

*Решение:*

Диагонали прямоугольника совпадают с диаметрами описанной окружности.

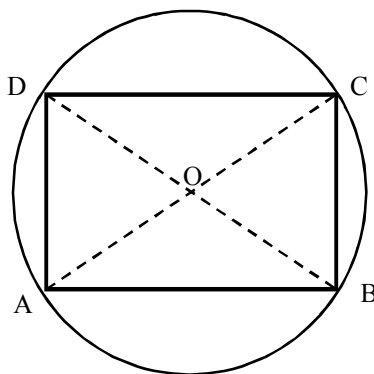


Рис. 73. Нахождение радиуса описанной окружности

По теореме Пифагора найдем диагональ  $BD$ :

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Радиус окружности равен половине диагонали  $BD$ :

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{13}{2} = 6,5.$$

*Ответ:* 6,5.

*Пример 2.* Диагональ равнобедренной трапеции равна  $6\sqrt{3}$ , а противолежащий ей острый угол трапеции равен  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

Решение:

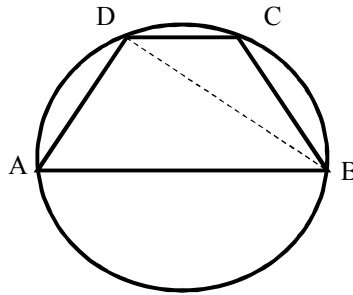


Рис. 74. Нахождение радиуса описанной окружности равнобедренной трапеции

Радиус описанной около трапеции окружности в данном случае совпадает с радиусом описанной окружности треугольника  $ABD$ .

Пусть  $\gamma = \angle BAD = 60^\circ$ ,  $c = BD = 6\sqrt{3}$ .

По расширенной теореме синусов радиус описанной окружности треугольника  $ABD$ :

$$R = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$$

Ответ: 6.

Если все стороны четырёхугольника касаются окружности, то он называется четырёхугольником, *описанным около этой окружности*, а окружность — вписанной в четырёхугольник.

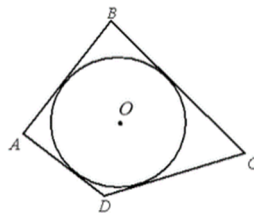


Рис. 75. Четырёхугольник, описанный около окружности

Не все четырёхугольники можно описать около окружности, так как биссектрисы четырёх углов могут не пересекаться в одной точке.

Чтобы в четырёхугольник можно было *вписать окружность*, необходимо и достаточно, чтобы *суммы противоположных сторон были равны*.

*Пример 3.* Средняя линия равнобедренной трапеции равна  $10\sqrt{3}$ , а острый угол трапеции равен  $60^\circ$ . Найдите радиус вписанной в трапецию окружности.

*Решение:*

Введем следующие обозначения:  $a$ ,  $b$  – основания трапеции;  $m$  – средняя линия трапеции  $c$  – боковая сторона трапеции;  $h$  – высота трапеции;  $\gamma$  – острый угол трапеции.

В трапецию окружность можно вписать тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны, то есть

$$a+b=c+c, \quad a+b=2c, \quad c=\frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, ее боковая сторона равна средней линией трапеции:

$$c=m=10\sqrt{3}.$$

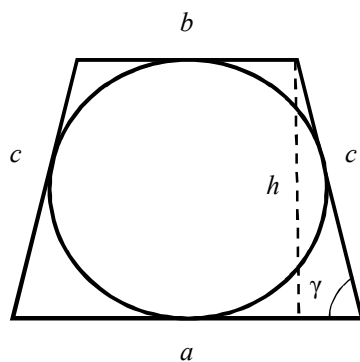


Рис. 76. Нахождение радиуса вписанной в трапецию окружности

Радиус вписанной окружности в данном случае равен половине высоты трапеции. Высота трапеции:

$$h=c \cdot \sin \gamma = 10\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Следовательно,

$$r = \frac{h}{2} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

*Ответ:* 7,5.



#### 4.9. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и все углы, называется *правильным многоугольником*.

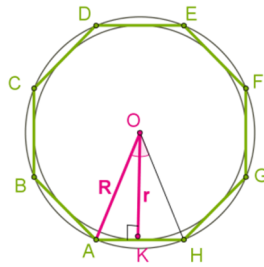


Рис. 77. Правильный многоугольник

Так как все углы правильного  $n$ -угольника равны, то величина одного внутреннего угла такова:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n},$$

где  $n$  – число сторон.

*Пример 1.* Найдите внутренний угол правильного десятиугольника.

*Решение:*

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (10-2)}{10} = \frac{180^\circ \cdot 8}{10} = 144^\circ.$$

*Ответ:*  $144^\circ$ .

Около *любого* правильного многоугольника можно *описать и вписать* в него окружность, при этом совпадают центры обеих окружностей, и эту точку называют *центром многоугольника*. Вписанная окружность касается всех сторон, описанная окружность проходит через все вершины.

Радиусы описанной и вписанной окружностей, также площадь  $S$  правильного  $n$ -угольника со стороной  $a$  вычисляются по формулам:

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}, \quad S = \frac{a^2 n}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

*Пример 2.* Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей, также площадь  $S$  правильного шестиугольника со стороной  $a$ .

*Решение:*

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2 \sin 30^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a.$$

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \frac{a^2 6}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6}} = \frac{6a^2}{4 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{3a^2}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\text{Ответ: } R = a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

#### 4.10. Упражнения

1. Внутри развернутого угла  $\angle AOB$  проведен луч  $OC$  так, что угол  $\angle AOC$  составляет 0,6 угла  $\angle AOB$ . Найдите величину угла  $\angle COB$ .

2. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите величину угла  $\hat{A}$  треугольника  $ABC$ , если угол  $\hat{A}$  в 3 раза меньше угла  $\hat{B}$  и на  $20^\circ$  больше угла  $\hat{C}$ .

3. В четырехугольнике  $ABCD$   $AB=6$ ,  $BC=15$ ,  $CD=3$ ,  $DA=8$ . Найти длину диагонали  $BD$ , если известно, что  $BD$  является целым числом.

4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  – прямой. Найти катет  $BC$ , если  $AB=13$ ,  $\cos \hat{A} = \frac{5}{13}$ .

5. Определить вид треугольника, если его стороны равны 5, 10 и 11.

6. Сторона  $a$  треугольника равна  $\sqrt{6}$ , а противолежащий этой стороне угол  $\alpha = 60^\circ$ . Найдите сторону  $b$ , если противолежащий этой стороне угол  $\beta = 45^\circ$ .

7. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см  $\times$  1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

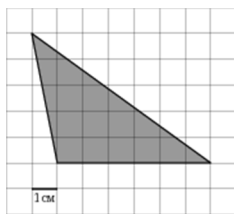


Рис. 78. Площадь треугольника

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание  $c = 1$ , а боковая сторона  $b = 13$ .

9. Найдите площадь треугольника со сторонами  $\sqrt{3}$  и 4, если угол между ними равен  $60^\circ$ .

10. Найдите площадь треугольника со сторонами 3, 6 и  $3\sqrt{5}$ .

11. Одна из сторон параллелограмма равна 3. Найдите вторую сторону, если периметр параллелограмма равен 14.

12. Угол между смежными сторонами параллелограмма равен  $\gamma = 45^\circ$ . Найти площадь параллелограмма со сторонами  $4\sqrt{2}$  и 5.

13. Периметр прямоугольника равен 20. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 4.

14. Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна  $\sqrt{10}$ , а одна из диагоналей – 3.

15. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 4 и 9.

16. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

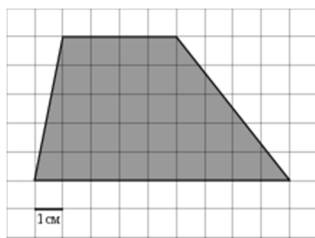


Рис. 79. Площадь трапеции

17. Одна из диагоналей выпуклого четырехугольника равна 2, а вторая диагональ втрое больше первой. Найдите площадь четырехугольника, если диагонали пересекаются под прямым углом.

18. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна  $8\sqrt{\pi}$ .

19. На клетчатой бумаге нарисован круг площадью 12. Найдите площадь заштрихованного сектора.

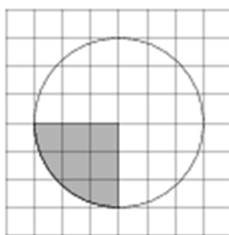


Рис. 80. Площадь сектора

20. Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности пересекаются в точке  $K$ . Найдите  $AK$ , если  $BK=2$ ,  $DK=3$ ,  $CK=4$ .

21. Окружность с центром в точке  $O$  касается треугольника  $AOK$  в точке  $K$ . Найдите радиус окружности, если  $OA = 6\sqrt{2}$ ,  $\angle OAK = 45^\circ$ .

22. Окружность проходит через вершину  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $F$  и касается стороны  $AB$  в точке  $B$ . Найдите сторону  $AB$ , если  $AF=4$ ,  $FC=5$ .

23. Найдите центральный угол, опирающийся на дугу, равную  $\frac{1}{8}$  окружности.

24. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную  $\frac{1}{10}$  окружности.

25. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

26. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а высота, проведенная к основанию равна 4. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

27. Одна из сторон треугольника равна  $4\sqrt{3}$ , а противолежащий ей угол равен  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности.

28. Стороны прямоугольника равны 6 и 10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

29. Диагональ равнобедренной трапеции равна  $\sqrt{8}$ , а противолежащий ей острый угол трапеции равен  $45^\circ$ . Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

30. Средняя линия равнобедренной трапеции равна  $6\sqrt{3}$ , а острый угол трапеции равен  $60^\circ$ . Найдите радиус вписанной в трапецию окружности.

31. Найдите внутренний угол правильного восьмиугольника.

32. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей, также площадь  $S$  правильного шестиугольника со стороной  $a=4\sqrt{3}$ .

## 5. Стереометрия

### Ключевые слова по теме «Стереометрия»

|                     |                  |                     |
|---------------------|------------------|---------------------|
| Аксиома             | axiom            | هوي سكا             |
| Куб                 | cube             | ب ع كم              |
| Многогранник        | polyhedron       | هوجول دد ع تم       |
| Объем               | volume           | م ج ح               |
| Параллелепипед      | parallelepiped   | ي ز ا و ت م         |
| Пирамида            | pyramid          | م ر ه ل ا           |
| Площадь поверхности | surface area     | ح ط س ل ا ة ح ا س م |
| Стереометрия        | stereometry      | ت ا م س ج م ل ا     |
| Сфера               | sphere           | ل ا ج م ل ا         |
| Тело вращения       | body of rotation | ن ا ر و د م س ج ل ا |
| Теорема             | theorem          | ة ي ر ظ ن           |
| Цилиндр             | cylinder         | ة ن ا و ط س ا       |

### 5.1. Основные понятия

*Стереометрия* – это раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве.

Сформулируем *основные аксиомы стереометрии*.

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости, т.е. прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

*Следствия из аксиом:*

1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, притом только одна.

2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, притом только одна.

Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

*Прямая и плоскость называются параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки

*Признак параллельности прямой и плоскости.* Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в данной плоскости, то она параллельна данной плоскости.

*Две плоскости называются параллельными*, если они не имеют общих точек.

*Признак параллельности двух плоскостей.* Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*, если прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости.

*Признак перпендикулярности прямой и плоскости.* Если прямая перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

*Теоремы о взаимно перпендикулярных прямых и плоскостях:*

а) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна плоскости;

б) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

*Перпендикуляр*, проведенный из данной точки к плоскости, – это отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*.

*Наклонная*, проведенная из данной точки плоскости, – любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости, не являющийся перпендикуляром к данной плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*.

*Проекцией наклонной на плоскость* называется отрезок, соединяющий основания наклонной и перпендикуляра.

*Теорема о трех перпендикулярах*. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции прямой на эту плоскость.

Две плоскости называются *взаимно перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная *линии* пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

*Признак перпендикулярности двух плоскостей*. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

*Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

*Углом между прямой и плоскостью* называется угол, образованный этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным  $0^\circ$ .

*Углом между плоскостями* называется угол, образуемый прямыми, полученными при пересечении этих двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной заданным плоскостям. Если данные плоскости параллельны, то угол между ними считается равным  $0^\circ$ .



## 5.2. Призма и пирамида

*Многогранником* называется тело, ограниченное со всех сторон конечным числом плоскостей. Поверхность многогранника состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

*Площадью поверхности* многогранника называется сумма площадей всех его граней.

*Призмой* называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (их называют основаниями), а все другие грани – параллелограммы (их называют боковыми гранями).

*Площадь поверхности призмы:*

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

Здесь  $S_{\text{осн}}$  – площадь одного основания,  $S_{\text{бок}}$  – сумма площадей боковых граней.

*Высотой* призмы называется перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки на плоскость другого основания.

*Объем призмы:*

$$V = S_{\text{осн}} H.$$

Здесь  $S_{\text{осн}}$  – площадь основания,  $H$  – высота призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В случае прямой призмы высота равна длине бокового ребра, а площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H.$$

Здесь  $P_{\text{осн}}$  – периметр основания.

*Пример 1.* В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Найдите полную площадь поверхности призмы и ее объем, если длина бокового ребра равна 6.

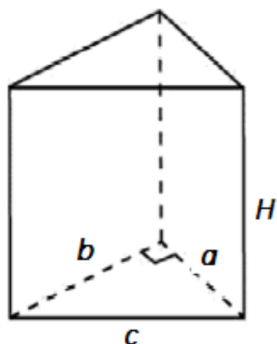


Рис. 81. Прямая призма

*Решение:*

Введем обозначения:  $a$ ,  $b$  – катеты треугольника, лежащего в основании призмы, а  $c$  – гипотенуза этого треугольника. Пусть  $a = 3$ ,  $b = 4$ . Найдём площадь основания:

$$S_{\text{осн}} = \frac{ab}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

По теореме Пифагора найдём гипотенузу треугольника:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Периметр прямоугольного треугольника равен:

$$P_{\text{осн}} = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12.$$

Длина бокового ребра прямой призмы равна  $H = 6$ , следовательно,

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H = 12 \cdot 6 = 72;$$

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 6 + 72 = 84.$$

Найдём объем призмы:

$$V = S_{\text{осн}} H = 6 \cdot 6 = 36.$$

*Ответ:*  $S = 84$ ,  $V = 36$ .

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники.

*Пример 2.* В основании правильной призмы лежит шестиугольник со стороной  $a = 2$ . Найдите полную площадь поверхности призмы и ее объем, если длина бокового ребра  $H = 4\sqrt{3}$ .

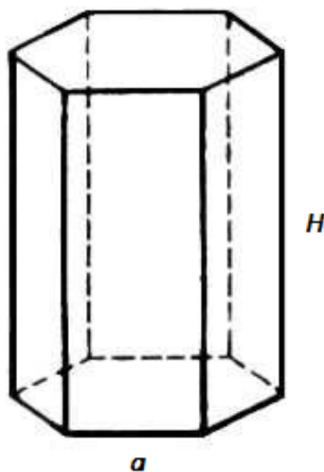


Рис. 82. Правильная шестиугольная призма

*Решение:*

Найдем площадь основания:

$$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} 2^2 = 6\sqrt{3}.$$

Периметр шестиугольника равен:

$$P_{\text{осн}} = 6 \cdot 2 = 12.$$

Длина бокового ребра прямой призмы равна  $H = 4\sqrt{3}$ , следовательно,

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3};$$

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 6\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 60\sqrt{3}.$$

Найдем объем призмы:

$$V = S_{\text{осн}} H = 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 72.$$

*Ответ:*  $S = 60\sqrt{3}$ ,  $V = 72$ .

*Параллелепипедом* называется призма, в основаниях которой лежат параллелограммы.

*Прямоугольным параллелепипедом* называется прямой параллелепипед, в основаниях которого лежат прямоугольники.

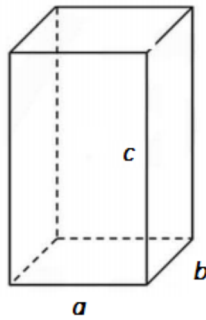


Рис. 83. Прямоугольный параллелепипед

Введем обозначения:  $a$ ,  $b$  – стороны прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда;  $c$  – длина бокового ребра. Формулы для вычисления площади поверхности и объема прямоугольного параллелепипеда имеют вид:

$$S = 2ab + 2(a+b)c, \quad V = abc.$$

*Кубом* называется параллелепипед, у которого все грани – равные квадраты. Формулы для вычисления площади поверхности и объема куба со стороной  $a$  имеют вид:

$$S = 6a^2, \quad V = a^3.$$

*Пример 2.* Свинцовый прямоугольный параллелепипед переплавили в куб. Найдите ребро куба, если ребра параллелепипеда были равны 2, 4 и 8.

*Решение:*

Объем параллелепипеда равен:

$$abc = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64.$$

При переплавке объем тела не изменяется. Следовательно, объем куба:

$$a^3 = 64.$$

Ребро куба:

$$a = \sqrt[3]{64} = 4.$$

*Ответ:* 4.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (называемая *основанием*) является многоугольником, а все другие грани (называемые *боковыми*) – треугольники, имеющие общую вершину (называемую *вершиной* пирамиды).

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

Здесь  $S_{\text{осн}}$  – площадь основания,  $S_{\text{бок}}$  – сумма площадей боковых граней.

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Здесь  $S_{\text{осн}}$  – площадь основания,  $H$  – высота пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. Все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой.

*Пример 3.* Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 10, а сторона основания равна  $6\sqrt{2}$ .

*Решение:*

Построим пирамиду  $SABCD$  с вершиной в точке  $S$ . Основание высоты пирамиды  $SO$  совпадает с центром квадрата  $ABCD$ . Центр основания лежит на пересечении диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

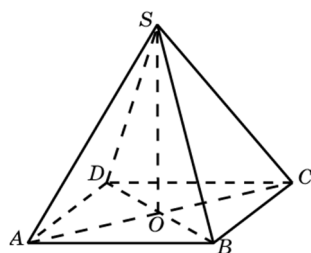


Рис. 84. Правильная четырехугольная пирамида

Длина стороны квадрата равна  $6\sqrt{2}$ . Следовательно, площадь основания:

$$S = (6\sqrt{2})^2 = 72.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $AOS$ . Сторона  $AO$  равна половине диагонали  $AC$ . Диагональ  $AC$  найдем по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{72 + 72} = \sqrt{144} = 12.$$

Следовательно,

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

По теореме Пифагора высота  $SO$  :

$$SO = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} 72 \cdot 8 = 192.$$

Ответ: 192.

Все боковые грани правильной пирамиды – равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = ph.$$

Здесь  $p$  – полупериметр основания,  $h$  – апофема.

*Пример 4.* Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.

*Решение:*

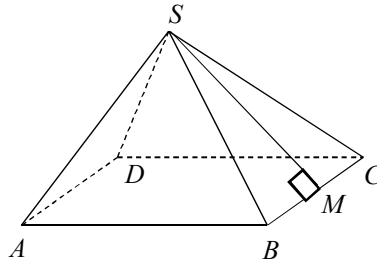


Рис. 85. Апофема правильной пирамиды

Построим пирамиду  $SABCD$  с вершиной в точке  $S$ . Проведем апофему  $SM$ . Обозначим ее буквой  $h$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $SMB$ . По теореме Пифагора

$$h = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Полупериметр основания:

$$p = \frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Найдем площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = ph = 12 \cdot 4 = 48.$$

Ответ: 48.

*Тетраэдром* называется пирамида, в основании которой лежит треугольник. Очевидно, что любая из четырех граней тетраэдра может быть принята за основание. Тетраэдр называется *правильным*, если все его грани – правильные треугольники.

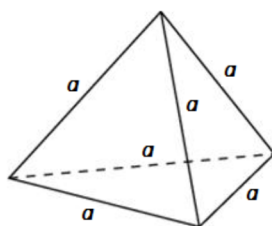


Рис. 86. Правильный тетраэдр с ребром  $a$

Площадь поверхности  $S$  и объем  $V$  правильного тетраэдра с ребром  $a$  вычисляются по следующим формулам:

$$S = a^2 \sqrt{3}, \quad V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

*Пример 5.* Найти площадь поверхности и объем правильного тетраэдра с ребром  $a = 3\sqrt{2}$ .

*Решение:*

$$S = a^2 \sqrt{3} = (3\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = 18\sqrt{3};$$

$$V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = (3\sqrt{2})^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 54\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 9.$$

Ответ:  $S = 18\sqrt{3}$ ,  $V = 9$ .

### 5.3. Тела вращения

*Цилиндр* – это фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

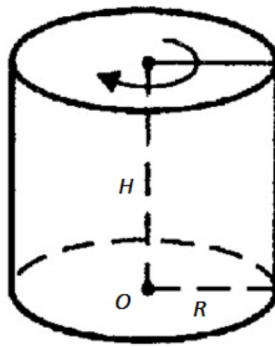


Рис. 87. Цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $H$

*Основания цилиндра* представляют собой круги радиусом  $R$ , лежащие в параллельных плоскостях.

*Высота цилиндра  $H$*  – это расстояние между плоскостями его оснований.

*Площадь боковой поверхности* цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

Основаниями цилиндра служат круги радиусом  $R$ , следовательно, площадь одного основания:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

*Площадь полной поверхности* цилиндра можно представить в виде

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для  $S_{\text{бок}}$  и  $S_{\text{осн}}$  через радиус и высоту цилиндра, получим

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

*Объем* цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}} H.$$

Подставив в последнюю формулу вместо  $S_{\text{осн}}$  выражение через радиус основания, получим

$$V = \pi R^2 H.$$

Отметим, что формулы для площади поверхности и объема *цилиндра* структурно *подобны* соответствующим формулам для *призмы*.



*Пример 1.* Цилиндр получен в результате вращения квадрата со стороной  $a = 2$  вокруг одной из его сторон. Найдите полную площадь поверхности цилиндра и его объем.

*Решение:*

По условиям задачи имеем

$$R = a, \quad H = a.$$

Подставив эти значения в формулы полной площади поверхности и объема цилиндра, получим

$$S = 4\pi a^2, \quad V = \pi a^3.$$

Подставив числовые значения найдем:

$$S = 4\pi a^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi.$$

$$V = \pi a^3 = \pi \cdot 2^3 = 8\pi.$$

*Ответ:*  $S = 16\pi$ ,  $V = 8\pi$ .

*Конус* – это фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащий катет.

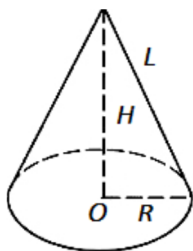


Рис. 88. Конус радиусом  $R$ , высотой  $H$  и образующей  $L$

*Основание конуса* – круг радиусом  $R$ .

*Высота конуса*  $H$  – катет треугольника, принадлежащий оси вращения, а *образующая конуса*  $L$  – гипотенуза треугольника.

*Площадь боковой поверхности конуса:*

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

Основанием конуса служит круг радиусом  $R$ , следовательно, площадь основания равна:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

Площадь полной поверхности конуса можно представить в виде

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для  $S_{\text{бок}}$  и  $S_{\text{осн}}$  через радиус, высоту и образующую конуса, получим

$$S = \pi R^2 + \pi RL.$$

Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Подставив в последнюю формулу вместо  $S_{\text{осн}}$  выражение через радиус основания, получим

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Очевидно, что формулы для площади поверхности и объема конуса структурно *подобны* соответствующим формулам для пирамиды.

*Пример 2.* Конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 вокруг большего катета. Найдите полную площадь поверхности конуса и его объем.

*Решение:*

По условиям задачи имеем

$$R = 3, H = 4.$$

По теореме Пифагора найдем образующую конуса:

$$L = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Вычислим полную площадь и объем конуса:

$$S = \pi R^2 + \pi RL = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4 = 9\pi + 12\pi = 21\pi,$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi.$$

*Ответ:*  $S = 21\pi$ ,  $V = 12\pi$ .

*Шар* – это фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр круга.

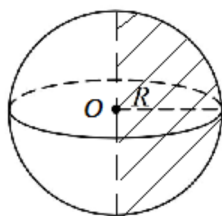


Рис. 89. Шар радиусом  $R$

Площадь поверхности  $S$  и объем  $V$  шара радиусом  $R$  вычисляются по формулам

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

*Пример 3.* Площадь поверхности шара равна  $S = 36\pi$ . Найдите объем шара.

*Решение:*

Сначала найдем радиус шара:

$$36\pi = 4\pi R^2, \quad R^2 = 9, \quad R = 3.$$

По известному радиусу вычислим объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi.$$

Ответ:  $36\pi$ .

## 5.4. Упражнения

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите полную площадь поверхности призмы и ее объем, если длина бокового ребра равна 4.

2. Свинцовый прямоугольный параллелепипед переплавили в куб. Найдите ребро куба, если ребра параллелепипеда были равны 1, 3 и 9.

3. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 5, а сторона основания равна  $3\sqrt{2}$ .

4. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 10, а сторона основания равна 12.

5. Цилиндр получен в результате вращения квадрата со стороной  $a = 3$  вокруг одной из его сторон. Найдите полную площадь поверхности цилиндра и его объем.

6. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 75 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

7. Конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета. Найдите полную площадь поверхности конуса и его объем.

8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

9. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

10. Площадь поверхности шара равна  $S = 16\pi$ . Найдите объем шара.

## 6. Метод координат

Ключевые слова по теме «Метод координат»

|                  |            |                             |
|------------------|------------|-----------------------------|
| Абсцисса         | abscissa   | ي ن ي س ل ا ي ث ا د ح ا ل ا |
| Координата       | coordinate | ق ي س ن ت                   |
| Начало координат | origin     | ل ص ا ل ا                   |
| Ордината         | ordinate   | ق ي س ن ت و                 |
| Ось              | axis       | ر و ح م ل ا                 |

### 6.1. Основные понятия

*Метод координат* позволяет исследовать геометрические объекты алгебраическими методами. Реализация метода координат предполагает использование какой-либо *системы координат*. Наиболее употребительной является *прямоугольная система координат*, которая определяется так:

1. Задаются две взаимно перпендикулярные прямые – оси координат: ось  $Ox$  и ось  $Oy$ . Точка их пересечения называется *началом координат*.
2. На каждой из осей координат выбирается *положительное направление*, указываемое стрелкой.
3. На каждой из осей выбирается *единица длины*, то есть масштаб.

Положение некоторой точки  $M$  относительно выбранной системы координат определяется двумя координатами: абсциссой  $x$  и ординатой  $y$ . Абсолютная величина координаты  $x$  представляет собой расстояние от точки  $M$  до оси ординат в заданном масштабе, а знак указывает, в какой из полуплоскостей относительно оси  $Oy$  находится данная точка. Абсолютная величина ординаты  $y$  равна расстоянию от точки  $M$  до оси абсцисс в заданном масштабе, а знак указывает, в какой из полуплоскостей относительно оси  $Ox$  находится данная точка. Тот факт, что точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$ , символически обозначают так:  $M(x; y)$ . При этом первой в скобках указывают абсциссу, а второй — ординату. Начало координат имеет координаты  $(0; 0)$ .

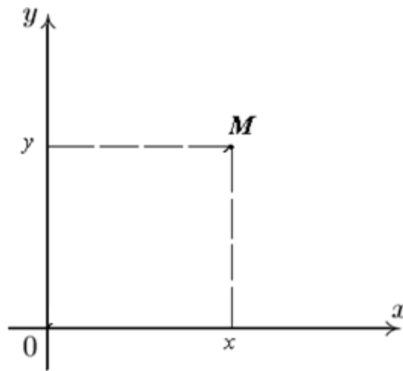


Рис. 90. Координаты точки в прямоугольной системе координат

Пусть на плоскости задана точка  $M(x, y)$ . Расстояние точки  $M(x, y)$  от начала координат определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

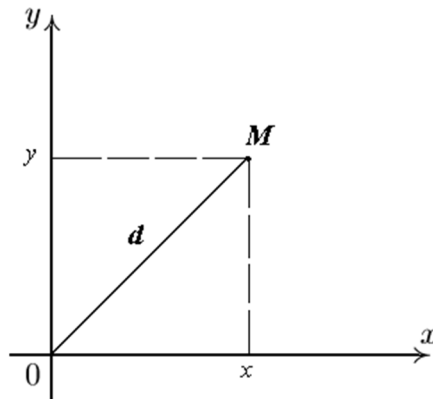


Рис. 91. Расстояние точки  $M(x, y)$  от начала координат

*Пример 1.* Найти длину отрезка, соединяющего точку  $M(3; -4)$  и начало координат.

*Решение:*

Подставив числовые значения в формулу, найдем

$$d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

*Ответ:* 5.

В общем случае, когда заданы две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ , расстояние между ними вычисляется по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

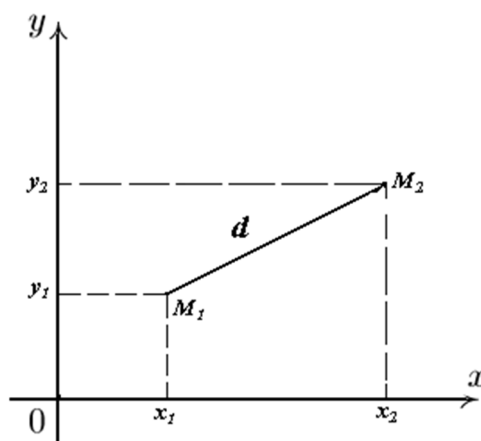


Рис. 92. Расстояние между двумя точками на плоскости

*Пример 2.* Найти длину отрезка, соединяющего точки  $(-1; 3)$  и  $(5; 11)$ .

*Решение:*

Подставив координаты точек в последнюю формулу, получим

$$d = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

*Ответ:* 10.

*Пример 3.* Даны вершины треугольника  $M_1(1; 1)$ ,  $M_2(5; 4)$  и  $M_3(1; 4)$ . Найти периметр  $P$  треугольника  $M_1M_2M_3$ .

*Решение:*

Периметр  $P$  треугольника  $M_1M_2M_3$  равен сумме длин его сторон:

$$P = |M_1M_2| + |M_2M_3| + |M_3M_1|.$$

Найдем последовательно длины сторон треугольника, используя формулу вычисления расстояния между двумя точками:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = 5,$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (4 - 4)^2} = 4,$$

$$|M_3M_1| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = 3.$$

Следовательно,

$$P = 5 + 4 + 3 = 12.$$

*Ответ:* 12

Пусть на плоскости даны две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Координаты точки  $M(x, y)$ , которая делит отрезок  $M_1M_2$  пополам, вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

т.е. координаты середины отрезка равны полусумме одноименных координат его концов.

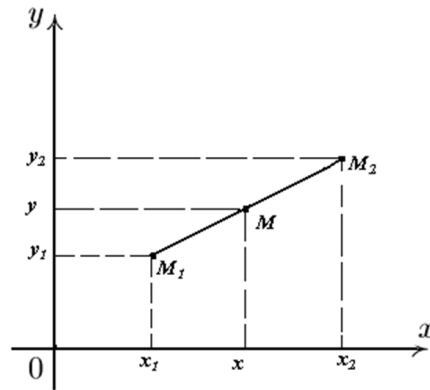


Рис. 93. Точка  $M(x, y)$  – середина отрезка  $M_1M_2$

*Пример 4.* Точки  $M_1(2; 3)$  и  $M_2(6; 7)$  – концы отрезка  $M_1M_2$ . Найти координаты точки  $M(x, y)$  – середины отрезка  $M_1M_2$ .

*Решение:*

Подставив координаты точек в формулы, получим:

$$x = \frac{2 + 6}{2} = 4, \quad y = \frac{3 + 7}{2} = 5, \text{ т.е. } M(4; 5).$$

*Ответ:*  $x = 4, \quad y = 5$ .

*Пример 5.* Концом отрезка служит точка  $M_1(-3; 5)$ , а его серединой – точка  $M(3; -2)$ . Найти координаты второго конца отрезка – точку  $M_2(x_2, y_2)$ .

*Решение:*

Подставив координаты точек  $M_1$  и  $M$  в формулу, получим:

$$3 = \frac{-3 + x_2}{2},$$

$$-2 = \frac{5 + y_2}{2}.$$



Отсюда найдем

$$6 = -3 + x_2,$$

$$-4 = 5 + y_2.$$

Следовательно,

$$x_2 = 9, \quad y_2 = -9, \text{ т.е. } M_2(9; -9).$$

*Ответ:*  $x_2 = 9, \quad y_2 = -9$ .

*Пример 6.* Даны вершины треугольника  $M_1(1; 1)$ ,  $M_2(3; 3)$  и  $M_3(2; 6)$ . Найти длину медианы  $M_3M$ , проведенной из вершины  $M_3$ .

*Решение:*

По определению медиана  $M_3M$  делит сторону  $M_1M_2$  пополам, т.е.  $M(x, y)$  – середина отрезка  $M_1M_2$ . Следовательно,

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{1+3}{2} = 2, \text{ т.е. } M(2; 2).$$

Найдем длину медианы  $M_3M$ :

$$|M_3M| = \sqrt{(2-2)^2 + (6-2)^2} = 4.$$

*Ответ:* 4.

## 6.2. Уравнение прямой

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b.$$

Здесь  $k$  – угловой коэффициент;  $b$  – начальная ордината, т.е. отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Oy$ . Угловой коэффициент  $k$  характеризует направление прямой и вычисляется по формуле

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс.

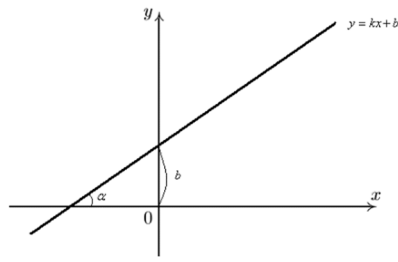


Рис. 94. Прямая с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \alpha$  и начальной ординатой  $b$

*Пример 1.* Составить уравнение прямой, наклоненной к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$ . Начальная ордината  $b = -5$ .

*Решение:*

Сначала вычислим угловой коэффициент  $k$ :

$$k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Подставив числовые значения  $k$  и  $b$  в уравнение прямой, получим

$$y = x - 5.$$

*Ответ:*  $y = x - 5$ .

Если  $\alpha = 0$ , то и  $k = 0$ , прямая параллельна оси  $Ox$ . Уравнение прямой в этом случае имеет вид:

$$y = b.$$

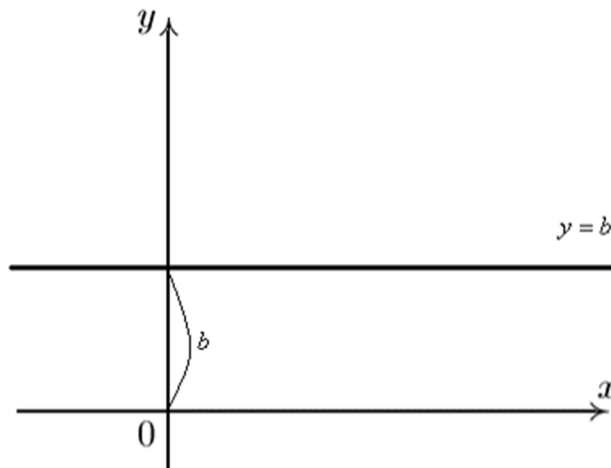


Рис. 95. Прямая с угловым коэффициентом  $k = 0$  параллельна оси  $Ox$

Если  $b = 0$ , прямая проходит через начало координат. Уравнение прямой имеет вид:

$$y = kx.$$

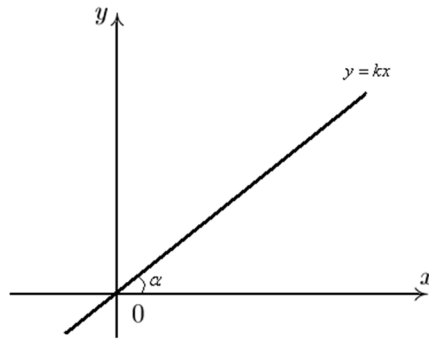


Рис. 96. Прямая с начальной ординатой  $b = 0$  проходит через начало координат

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  наклонены к оси абсцисс под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, то

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

следовательно,

$$k_1 = k_2.$$

Здесь  $k_1, k_2$  – угловые коэффициенты прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

*Пример 3.* Составить уравнение прямой, которая отсекает по оси ординат отрезок  $b = 2$  и параллельна прямой  $y = 3x$ .

*Решение:*

Из условия параллельности прямых следует, что угловой коэффициент  $k=3$ . Следовательно, искомое уравнение прямой имеет вид

$$y = 3x + 2.$$

*Ответ:*  $y = 3x + 2$ .

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  перпендикулярны, то

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1.$$

Из последнего равенства следует, что

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким образом, условие перпендикулярности прямых  $l_1$  и  $l_2$  с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, имеет вид

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad \text{или} \quad k_1 \cdot k_2 = -1.$$

*Пример 4.* Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и перпендикулярна к прямой  $y = 0,5x + 1$ .

*Решение:*

Из условия перпендикулярности прямых следует, что угловой коэффициент

$$k = -\frac{1}{0,5} = -2.$$

Следовательно, искомое уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид

$$y = -2x.$$

*Ответ:*  $y = -2x$ .

### 6.3. Уравнение окружности

Уравнение окружности с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и радиусом равным  $R$  имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

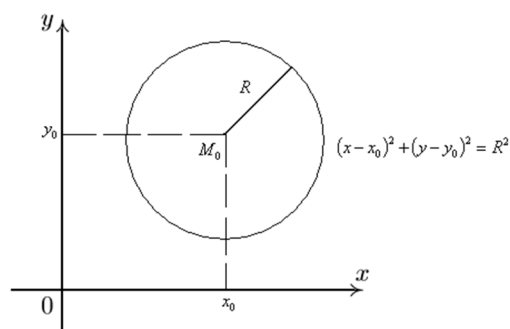


Рис. 97. Уравнение окружности с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

*Пример 1.* Составить уравнение окружности с центром в точке  $(1; 2)$  и с радиусом равным 5.

*Решение:*

Подставив числовые значения в уравнение окружности, получим

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2.$$

*Ответ:*  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2.$

*Пример 2.* Составить уравнение окружности с центром в точке  $(5; -7)$  и проходящей через точку  $(2; -3)$ .

*Решение:*

В данном примере сначала надо найти радиус окружности  $R$ . Подставим в уравнение окружности координаты центра  $(5; -7)$  и координаты данной точки  $(2; -3)$  вместо переменных координат  $x$  и  $y$ . В результате получим

$$(2-5)^2 + (-3-(-7))^2 = R^2,$$

откуда

$$3^2 + 4^2 = R^2, \quad 25 = R^2.$$

Следовательно,

$$R = 5.$$

Подставив в уравнение окружности координаты центра и найденную величину радиуса, получим

$$(x-5)^2 + (y-(-7))^2 = 5^2$$

или

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 5^2.$$

*Ответ:*  $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 5^2.$

*Пример 3.* Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0.$$

*Решение:*

Сначала сгруппируем члены данного уравнения

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) = 0.$$

Дополним выражения  $(x^2 - 8x)$  и  $(y^2 + 6y)$  до полных квадратов, прибавив к первому слагаемому 16, а ко второму – 9. Одновременно к правой части последнего равенства прибавляется сумма этих чисел. В результате получим

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = 25$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Последнее равенство представим в виде

$$(x - 4)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2.$$

Следовательно,

$$x_0 = 4, y_0 = -3, R = 5.$$

*Ответ:*  $x_0 = 4, y_0 = -3, R = 5.$

#### 6.4. Пространственная система координат

Положение геометрических образов в пространстве можно определить по отношению к прямоугольной системе координат, состоящей из трех взаимно перпендикулярных осей координат, пересекающихся в одной и той же точке (начало координат). Начало координат обозначается буквой  $O$ , оси координат обозначаются соответственно символами  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Первая координатная ось называется осью абсцисс, вторая — осью ординат, третья — осью аппликат. На каждой из осей координат выбирается *положительное направление*, указываемое стрелкой, а также *единица длины*, то есть масштаб.

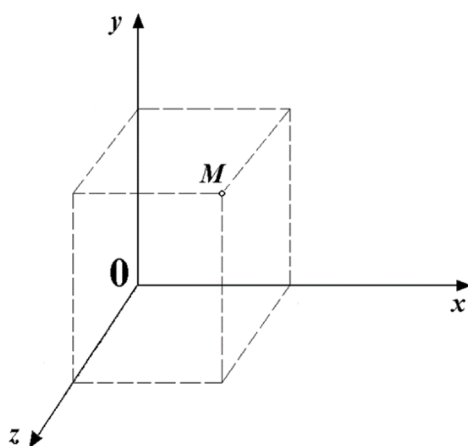


Рис. 98. Прямоугольные координаты в пространстве

Положение некоторой точки  $M$  относительно выбранной системы координат определяется тремя координатами: абсциссой  $x$ , ординатой  $y$  и аппликатой  $z$ .

Расстояние между точками  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  вычисляется по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

*Пример 1.* Даны две точки  $M_1(1; 2; 3)$  и  $M_2(3; 7; 17)$ . Найти длину отрезка, соединяющего эти точки.

*Решение:*

Подставив координаты точек в последнюю формулу, получим

$$d = \sqrt{(3-1)^2 + (7-2)^2 + (17-3)^2} = \sqrt{4+25+196} = \sqrt{225} = 15.$$

*Ответ:* 15.

Даны две точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . Координаты точки  $M(x; y; z)$ , которая делит отрезок  $M_1M_2$  пополам, вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

то есть координаты середины отрезка равны половине суммы одноименных координат его концов.

*Пример 2.* Точки  $M_1(1;2;3)$  и  $M_2(3;6;9)$  – концы отрезка  $M_1M_2$ . Найти координаты точки  $M(x; y; z)$  – середины отрезка  $M_1M_2$ .

*Решение:*

Подставив координаты точек в формулы, получим

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{2+6}{2} = 4, \quad z = \frac{3+9}{2} = 6, \quad \text{т.е. } M(2;4;6).$$

*Ответ:*  $M(2;4;6)$ .

Всякое уравнение первой степени относительно координат  $x, y, z$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

задает плоскость в пространстве, которое называется *уравнением плоскости*.

Предполагается, что коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  одновременно не равны 0.

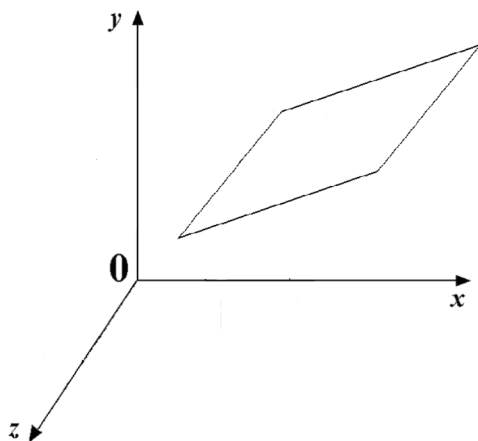


Рис. 99. Плоскость

*Пример 3.* Уравнение плоскости имеет вид  $x + 2y + z - 4 = 0$ .

Проверить принадлежность точки с координатами  $(1;1;1)$  данной плоскости.

*Решение:*

Подставив координаты точек в левую часть уравнения плоскости, получим

$$1 + 2 \cdot 1 + 1 - 4 = 0.$$

Таким образом, точка с координатами  $(1;1;1)$  принадлежит данной плоскости.

*Ответ:* точка с координатами  $(1;1;1)$  принадлежит данной плоскости

Если плоскость проходит через начало координат, то свободный член  $D$  равен нулю. Уравнение плоскости в этом случае имеет вид:

$$Ax + By + Cz = 0.$$



Пусть коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не равны нулю. Перенесем свободный член  $D$  в правую часть общего уравнения плоскости, а затем разделим обе части уравнения на  $(-D)$ . В результате получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  — это отрезки, отсекаемые по осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно.

*Пример 4.* Составить уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 2; 0)$  и  $(0; 0; 4)$ .

*Решение:*

Воспользуемся уравнением плоскости в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Очевидно, что

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 4.$$

Таким образом, уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, имеет вид

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1.$$

Умножим обе части последнего уравнения на 4, а затем перенесем свободный член в левую часть. В результате получим:

$$4x + 2y + z - 4 = 0.$$

*Ответ:*  $4x + 2y + z - 4 = 0$ .

## 6.5. Упражнения

1. Найти длину отрезка, соединяющего точку  $M(1; \sqrt{3})$  и начало координат.
2. Найти длину отрезка, соединяющего точки  $(-2; 3)$  и  $(6; 9)$ .
3. Найти координаты середины отрезка, соединяющего точки  $(0; 4)$  и  $(4; 8)$ .

4. Составить уравнение прямой, наклоненной к оси  $Ox$  под углом  $60^\circ$ .  
Начальная ордината  $b = 2$ .
5. Составить уравнение прямой, которая отсекает по оси ординат отрезок  $b=1$  и параллельна прямой  $y = 2x$ .
6. Составить уравнение прямой, которая отсекает по оси ординат отрезок  $b = 3$  и перпендикулярна прямой  $y = -2x + 1$ .
7. Составить уравнение окружности с центром в точке  $(1; 2)$  и проходящей через точку  $(4; 6)$ .
8. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением
- $$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0.$$
9. Найти длину отрезка, соединяющего точки  $M_1(0; 0; 0)$  и  $M_2(1; 5; \sqrt{10})$ .
10. Найти координаты середины отрезка, соединяющего точки  $(3; 4; 6)$  и  $(-1; 6; 8)$ .
11. Уравнение плоскости имеет вид:  $2x + y + z - 4 = 0$ . Проверить, принадлежит ли точка с координатами  $(0; 1; 3)$  данной плоскости.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $(-2; 0; 0)$ ,  $(0; -1; 0)$  и  $(0; 0; -6)$ .

## 7. Векторы

Ключевые слова по теме «Векторы»

|                        |                       |               |
|------------------------|-----------------------|---------------|
| Вектор                 | vector                | ناقلات        |
| Длина вектора          | vector length         | طول ناقلات    |
| Скалярное произведение | scalar multiplication | العددية الضرب |

### 7.1. Основные понятия

Вектором  $\vec{a}$  называется направленный отрезок  $\overline{AB}$  с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$ .

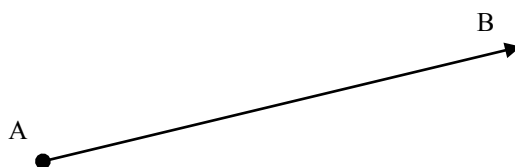


Рис. 100. Вектор с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$

Длиной (или *модулем*) вектора  $\vec{a}$  называется число, равное длине отрезка  $AB$ , изображающего вектор. Обозначается длина вектора  $|\vec{a}|$ , или просто  $a$ .

Если начало и конец вектора совпадают, вектор называется *нулевым* и обозначается  $\vec{0}$ . Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Если два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то это записывается так:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Два коллинеарных вектора могут быть направлены в одном направлении или в противоположных направлениях. В первом случае коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, а во втором — *противоположно направленными*.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены. Из определения равных векторов следует, что вектор можно перемещать параллельно самому себе без изменения длины и направления.

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , имеющий длину  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ , направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$  при  $\lambda > 0$  и противоположно вектору  $\vec{a}$  при  $\lambda < 0$ .

Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{b}$ , при условии, что начало вектора  $\vec{b}$  совпадает с концом вектора  $\vec{a}$  (правило треугольника).

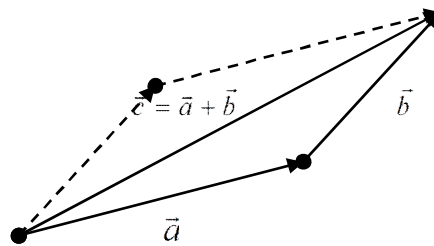


Рис. 101. Сумма векторов

Очевидно, что вектор  $\vec{c}$  можно рассматривать как диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (правило параллелограмма).

Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , начало которого совпадает с концом вектора  $\vec{b}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{a}$ , при условии, что начало вектора  $\vec{b}$  совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ .

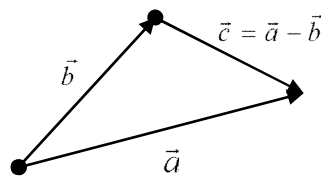


Рис. 102. Разность векторов

## 7.2. Координаты вектора

Построим прямоугольную систему координат с началом в точке  $O$ . Перенесем вектор  $\vec{a}$  параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с началом координат. Координатами вектора  $\vec{a}$  называются координаты его конечной точки.

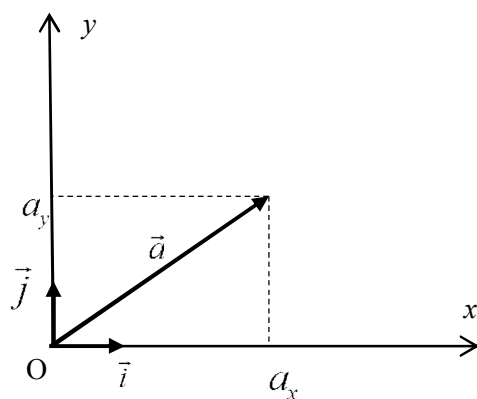


Рис. 103. Координаты вектора  $\vec{a}$

То, что вектор имеет координаты  $a_x$  и  $a_y$ , обозначают обычно так:

$$\vec{a} = (a_x; a_y).$$

Если вектор  $\overline{AB}$  задан координатами начала – точки  $A(x_A; y_A)$  и конца – точки  $B(x_B; y_B)$ , тогда каждая координата вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$  равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$a_x = x_B - x_A;$$

$$a_y = y_B - y_A.$$

*Пример 1.* Вектор  $\overline{AB}$  задан координатами начала –  $A(5; 3)$  и конца –  $B(-1; 6)$ . Найдите координаты вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$ .

*Решение:*

$$a_x = -1 - 5 = -6;$$

$$a_y = 6 - 3 = 3.$$

Следовательно,

$$\vec{a} = (-6; 3).$$

*Ответ:*  $\vec{a} = (-6; 3)$ .

Длина вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

*Пример 2.* Найдите длину вектора  $\vec{a} = (6; 8)$ .

*Решение:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

*Ответ:* 10.

Отложим от начала координат  $O$  единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  так, чтобы направление вектора  $\vec{i}$  совпадало с направлением оси  $OX$ , направление вектора  $\vec{j}$  – с направлением оси  $OY$ . Векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  называются единичными векторами (ортами). Координаты этих векторов:  $\vec{i} = (1; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1)$ . Вектор  $\vec{a}$  можно единственным образом представить в виде *разложения по единичным векторам*  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Например, вектор  $\vec{a} = (4; -3)$  можно записать в виде

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Сформулируем *основные правила*, позволяющие по координатам векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y)$  находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1. Каждая координата суммы двух векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y)$  равна сумме соответствующих координат этих векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y).$$

2. Каждая координата разности двух векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y)$  равна разности соответствующих координат этих векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y).$$

3. Каждая координата произведения вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  на число  $\lambda$  равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y).$$

*Пример 3.* Даны вектора  $\vec{a} = (2; -1)$  и  $\vec{b} = (2; 4)$ . Найти вектор  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

*Решение:*

$$\vec{c} = (2 + 2 \cdot 2; -1 + 2 \cdot 4) = (8; 7).$$

*Ответ:*  $\vec{c} = (8; 7)$ .

Если вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y)$  коллинеарные, то  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , следовательно, выполняется  $a_x = \lambda b_x$ ,  $a_y = \lambda b_y$ . Отсюда следует условие *коллинеарности векторов*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

*Пример 4.* Даны вектора  $\vec{a} = (2; \alpha)$  и  $\vec{b} = (6; 3)$ . При каком значении  $\alpha$  эти вектора коллинеарны?

*Решение:*

Запишем условие коллинеарности данных векторов:  $\frac{2}{6} = \frac{\alpha}{3}$ .

Следовательно,  $\alpha = 1$ .

*Ответ:* 1.

### 7.3. Скалярное произведение векторов

*Скалярным произведением* двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними. Скалярное произведение обозначается  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  или  $(\vec{a}; \vec{b})$ . Таким образом, по определению, имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

В координатной форме скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y)$  равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Если вектора ортогональны, то угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi = 0$ . Получаем условие

ортогональности векторов:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0.$$

*Пример 1.* При каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = \alpha \vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$  ортогональны?

*Решение:*

Условие ортогональности имеет вид:  $2\alpha - 12 = 0$ . Следовательно,  $\alpha = 6$ .

*Ответ:*  $\alpha = 6$ .

Используя определение скалярного произведения, можно найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

или в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

*Пример 2.* Найти угол между векторами  $\vec{a} = (3; 4)$  и  $\vec{b} = (12; -5)$ .

*Решение:*

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 12 - 4 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{16}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{169}} = \frac{16}{65}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos \frac{16}{65}.$$

*Ответ:*  $\varphi = \arccos \frac{16}{65}$ .



## 7.4. Векторы в пространстве

Основные понятия для *векторов в пространстве* вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Построим прямоугольную систему координат в пространстве с началом в точке  $O$ . Перенесем вектор  $\vec{a}$  параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с началом координат.

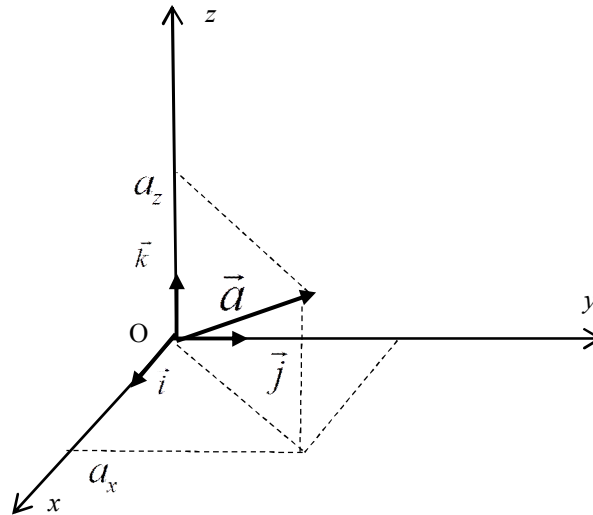


Рис. 103. Координаты вектора в пространстве

*Координатами* вектора  $\vec{a}$  называются координаты его конечной точки.

То, что вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ , обозначают обычно так:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z).$$

Если вектор  $\overline{AB}$  задан координатами начала – точки  $A(x_A; y_A; z_A)$  и конца – точки  $B(x_B; y_B; z_B)$ , тогда каждая координата вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$  равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$a_x = x_B - x_A;$$

$$a_y = y_B - y_A;$$

$$a_z = z_B - z_A.$$

*Пример 1.* Вектор  $\overline{AB}$  задан координатами начала –  $A(5; 3; 1)$  и конца –  $B(-1; 6; 1)$ . Найдите координаты вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$ .

*Решение:*

$$a_x = -1 - 5 = -6;$$

$$a_y = 6 - 3 = 3;$$

$$a_z = 1 - 1 = 0;$$

Следовательно,

$$\vec{a} = (-6; 3; 0).$$

*Ответ:*  $\vec{a} = (-6; 3; 0).$

Длина вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

*Пример 2.* На ребре  $A_1D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  взята точка  $P$  – середина этого ребра. Найдите расстояние от точки  $B$  до точки  $P$ , если длина ребра куба равна 2.

*Решение:*

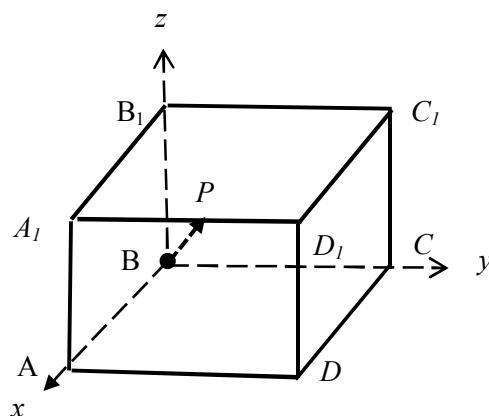


Рис. 104. Куб

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат с началом в точке  $B$ . Координаты вектора  $\overrightarrow{BP}$  равны координатам точки  $P$ , следовательно,

$$\overrightarrow{BP} = (2; 1; 2).$$

Найдем длину вектора  $\overrightarrow{BP}$ :

$$|\overline{BP}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3.

Отложим от начала координат  $O$  единичные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  так, чтобы направление вектора  $\vec{i}$  совпадало с направлением оси  $OX$ , направление вектора  $\vec{j}$  — с направлением оси  $OY$ , а направление вектора  $\vec{k}$  — с направлением оси  $OZ$ . Координаты этих векторов равны:  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ . Вектор  $\vec{a}$  можно единственным образом представить в виде *разложения по единичным векторам*  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Например, вектор  $\vec{a} = (4; -3; 5)$  можно записать в виде

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Правила, позволяющие по координатам векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число для *векторов в пространстве*, формулируются так же, как и для векторов на плоскости.

1. Каждая координата суммы двух векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  равна сумме соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$$

2. Каждая координата разности двух векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  равна разности соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$$

3. Каждая координата произведения вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  на число  $\lambda$  равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

*Пример 3.* Даны вектора  $\vec{a} = (2; -1; 1)$  и  $\vec{b} = (2; 4; 1)$ . Найти координаты вектора  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

*Решение:*

$$\vec{c} = (2 + 2 \cdot 2; -1 + 2 \cdot 4; 1 + 2 \cdot 1) = (8; 7; 3).$$

*Ответ:*  $\vec{c} = (8; 7; 3)$ .

Условие коллинеарности векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  имеет

вид

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Условие ортогональности векторов записывается следующим образом:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно определить из равенства:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

*Пример 4.* На ребре  $A_1D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  взята точка  $P$  – середина этого ребра. Найдите угол между прямыми  $BP$  и  $BD_1$ .

*Решение:*

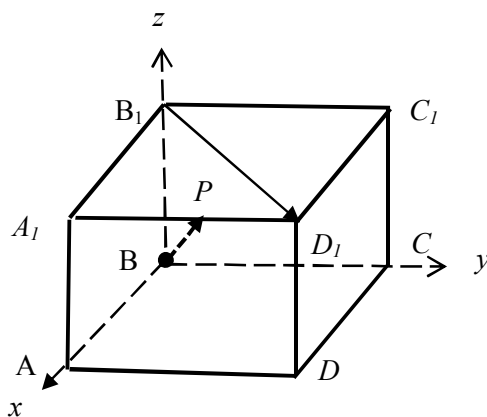


Рис. 105. Нахождение угла между прямыми.

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат с началом в точке  $B$ . Пусть  $a$  – длина ребра куба.

Координаты вектора  $\overrightarrow{BP}$  равны координатам точки  $P$ , следовательно,

$$\overrightarrow{BP} = \left( a; \frac{a}{2}; a \right).$$

Координаты вектора  $\overrightarrow{B_1D_1}$  равны разностям координат конечной и начальной точек:

$$\overrightarrow{B_1D_1} = (a-0; a-0; a-a) = (a; a; 0).$$

Найдем скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{BP}$  и  $\overrightarrow{B_1D_1}$ :

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = a^2 + \frac{a^2}{2} + 0 = \frac{3a^2}{2}.$$

Найдем длины векторов  $\overrightarrow{BP}$  и  $\overrightarrow{B_1D_1}$ :

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3a}{2};$$

$$|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{B_1D_1}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{B_1D_1}|} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{\frac{3}{2}a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

*Ответ:*  $\varphi = \frac{\pi}{4}.$

Если плоскость проходит через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и вектор  $\vec{n}(A; B; C)$  является ее нормальным вектором (перпендикулярен плоскости), то уравнение плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

*Пример 5.* Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору  $\vec{n}(1;2;4)$ .

*Решение:*

В данном примере точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  находится в начале координат, то есть  $x_0=0, y_0=0, z_0=0$ .

Подставив эти значения координат, а также координаты нормального вектора в уравнение плоскости, получим

$$x + 2y + 4z = 0.$$

*Ответ:*  $x + 2y + 4z = 0$ .

*Пример 6.* Найдите угол между плоскостями  $2x + y + 2z = 0$  и  $x + y = 0$ .

*Решение:*

Угол между плоскостями, очевидно, равен углу между соответствующими нормальными векторами:

$$\vec{n}_1(2;1;2) \text{ и } \vec{n}_2(1;1;0).$$

Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

*Ответ:*  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

## 7.5. Упражнения

1. Вектор  $\overrightarrow{AB}$  задан координатами начала —  $A(0;3)$  и конца —  $B(4;6)$ .

Найдите координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

2. Найдите длину вектора  $\vec{a}(2; \sqrt{5})$ .

3. Даны вектора  $\vec{a} = (3;2)$  и  $\vec{b} = (1;2)$ . Найти вектор  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

4. Даны вектора  $\vec{a} = (3; \alpha)$  и  $\vec{b} = (6;4)$ . При каком значении  $\alpha$  эти вектора коллинеарны?

5. При каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = (\alpha; 2)$  и  $\vec{b} = (3; 6)$  ортогональны?

6. Найти угол между векторами  $\vec{a} = (-3; 4)$  и  $\vec{b} = (5; 12)$ .

7. Даны точки  $A(0; 3; -7)$  и  $B(1; 1; -5)$ . Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

8. Найдите длину вектора  $\vec{a}(2; \sqrt{5}; \sqrt{7})$ .

9. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найти вектор  $\vec{c}$ .

а)  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (0; -3; 2)$ ,  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ;

б)  $\vec{a} = (-1; 3; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ;

в)  $\vec{a} = (4; 0; 2)$ ,  $\vec{b} = (0; -1; 2)$ ,  $\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ .

10. Определить, при каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

а)  $\vec{a} = (\alpha; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 4; \beta)$ ;

б)  $\vec{a} = (1; \alpha; \beta)$ ,  $\vec{b} = (4; 8; 12)$ ;

в)  $\vec{a} = (4; 1; 2)$ ,  $\vec{b} = (8; \alpha; \beta + 1)$ .

11. Определить, при каких значениях  $\alpha$  вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны.

а)  $\vec{a} = (-4; \alpha; 5)$ ,  $\vec{b} = (4; 3; \alpha)$ ;

б)  $\vec{a} = (-6; \alpha; 3)$ ,  $\vec{b} = (4; \alpha; -4)$ ;

в)  $\vec{a} = (\alpha; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (\alpha; 2; 3)$ .

12. Найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

а)  $\vec{a} = (2; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 3; -6)$ ;

б)  $\vec{a} = (1; 0; -4)$ ,  $\vec{b} = (4; -8; 1)$ ;

в)  $\vec{a} = (3; 0; 4)$ ,  $\vec{b} = (0; 6; 8)$ .

13. Пусть точка  $P$  – середина ребра  $A_1D_1$ , а точка  $Q$  – середина ребра  $C_1D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . Найдите угол между прямыми  $BP$  и  $B_1Q$ .

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(0; 2; 1)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(2; 4; 1)$ .

15. Найдите угол между плоскостями  $2x + 2y + z = 0$  и  $2x + 3y - 6z = 0$ .

## 8. Математический анализ

Ключевые слова по теме «Математический анализ»

|                         |                           |                          |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| Математический анализ   | mathematical analysis     | رياضي تحليلي             |
| Производная             | derivative                | وقت شمل                  |
| Приращение функции      | increment function        | قفيظو قدايز              |
| Приращение аргумента    | increment of the argument | قجحل ا يذ نم قدايزل      |
| Первообразная           | antiderivative            | يفيت افيريديتنأ          |
| Неопределенный интеграл | indefinite integral       | أزجتي ال يمسم ريغ لجأ لى |
| Определенный интеграл   | definite integral         | أزجتي ال حضاو            |
| Предел                  | limit                     | دحل                      |

### 8.1. Понятие производной

Геометрически понятие производной возникает в задаче о нахождении углового коэффициента касательной к графику функции. Угловым коэффициент прямой, как известно, равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси  $OX$ .

Пусть дана непрерывная кривая  $y = f(x)$  и необходимо найти тангенс угла наклона касательной к этой кривой в точке  $M(x_0, y_0)$ . Придадим аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$  и перейдем на кривой  $y = f(x)$  от точки  $M(x_0, y_0)$  к точке  $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . Проведем через точки  $M$  и  $M_1$  секущую  $M_0M_1$ .

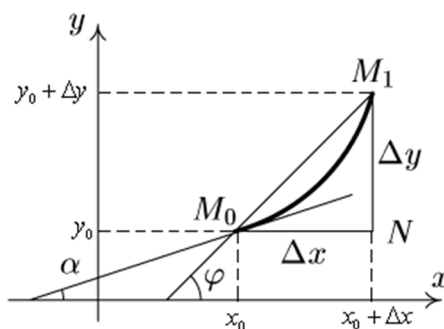


Рис. 106. Секущая и касательная в данной точке



Угловой коэффициент секущей может быть найден из треугольника  $\Delta M_0 M_1 N$ :

$$k_c = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При перемещении точки  $M_1$  вдоль кривой  $y = f(x)$  к точке  $M_0$  (при  $\Delta x \rightarrow 0$ ), секущая  $M_0 M_1$  будет вращаться вокруг точки  $M_0$  и приближаться к некоторой прямой с углом наклона  $\alpha$ .

Касательной к кривой к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M_0$  называется предельное положение секущей  $M_0 M_1$  при приближении точки  $M_1$  к точке  $M_0$ , то есть при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Угловой коэффициент касательной – это число, к которому стремится относительное приращение функции  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Математически это определение записывается следующим образом:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел относительного приращения функции  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Таким образом, производная функции в точке  $x = x_0$  равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке.

*Пример 1.* На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

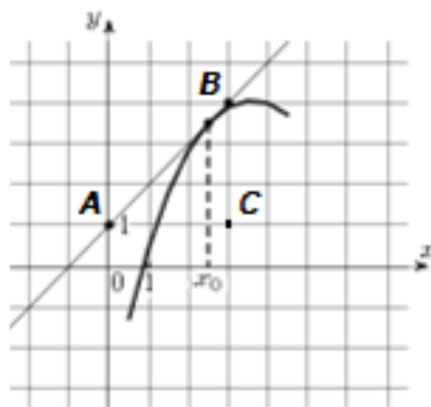


Рис. 107. Нахождение производной по графику функции

*Решение:*

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$ . По рисунку найдем катеты этого треугольника:

$$AC=3, BC=3.$$

Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной  $k$  в данной точке:

$$f'(x_0)=k.$$

Угловой коэффициент  $k$  равен тангенсу угла  $\alpha = \angle BAC$ :

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тангенс угла  $\alpha = \angle BAC$  равен отношению противолежащего катета  $BC$  к прилежащему катету  $AC$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{3} = 1.$$

Следовательно,

$$f'(x_0)=1$$

*Ответ:* 1.

*Пример 2.* На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и восемь точек на оси абсцисс  $x_1, x_2, \dots, x_8$ . В скольких из точек производная функции положительна?

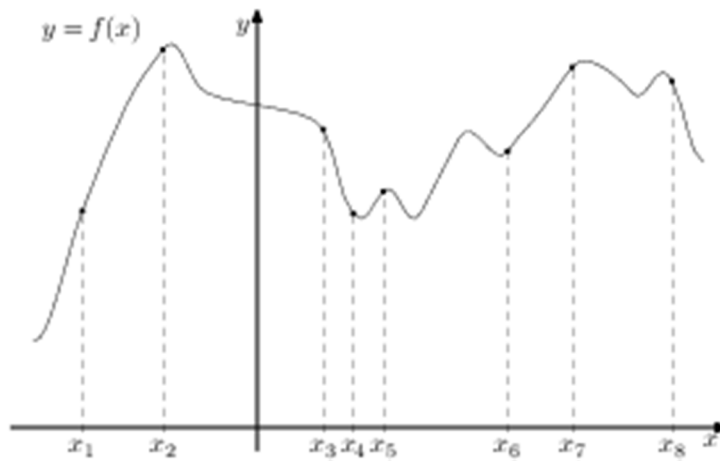


Рис. 108. Определение знака производной функции  $y = f(x)$

*Решение:*

Из рисунка видно, что в точках  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  и  $x_7$  касательная к графику функции образует острый угол. Следовательно, производная в этих точках положительна.

*Ответ:* 5.

*Пример 3.* На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-1; 13)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $y = f(x)$  равна 0.

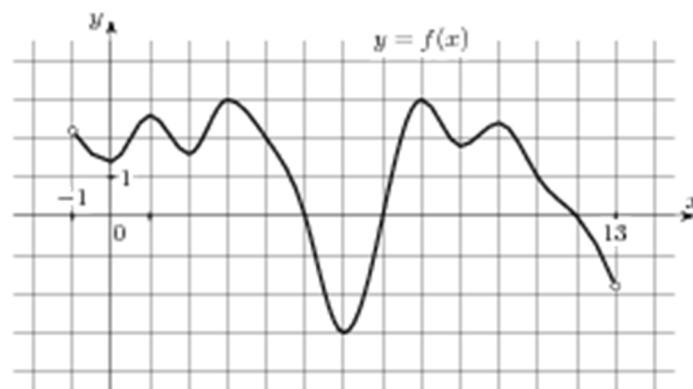


Рис. 109. Нахождение нулевых значений производной

*Решение:*

Из геометрического смысла производной следует, что она равна нулю в тех точках графика функции, где касательные параллельны оси  $OX$ .

Из рисунка видно, что касательные параллельны оси  $OX$  в восьми точках:

$x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 6$ ,  $x = 8$ ,  $x = 9$ ,  $x = 10$ .

Ответ: 8.

Функция  $f(x)$  называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

*Признак возрастания функции:* если функция  $f(x)$  во всех точках некоторого интервала имеет *положительную производную*  $f'(x)$ , то она *возрастает* на этом интервале.

*Пример 4.* На рисунке изображён график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-11; 3)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

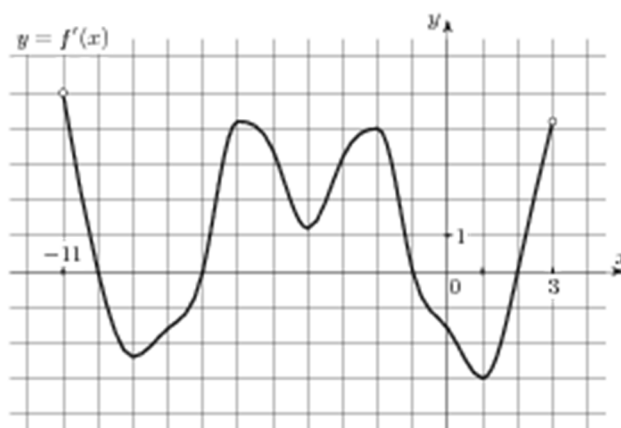


Рис. 110. Нахождение промежутков возрастания функции

*Решение:*

При решении этого примера следует обратить внимание на то, что на рисунке изображен график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ .

Из рисунка видно, что график производной находится выше оси  $OX$  (функция  $f(x)$  возрастает) на следующих интервалах:

$(-11; -10)$ ,  $(-7; -1)$  и  $(2; 3)$ .

Наибольшую длину имеет интервал  $(-7; -1)$ . Длина  $d$  этого интервала равна

$$d = -1 - (-7) = -1 + 7 = 6.$$

Ответ: 6.

Функция  $f(x)$  называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

*Признак убывания функции:* если функция  $f(x)$  во всех точках некоторого интервала имеет *отрицательную производную*  $f'(x)$ , то она *убывает* на этом интервале.

*Пример 5.* На рисунке изображён график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-3; 14)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

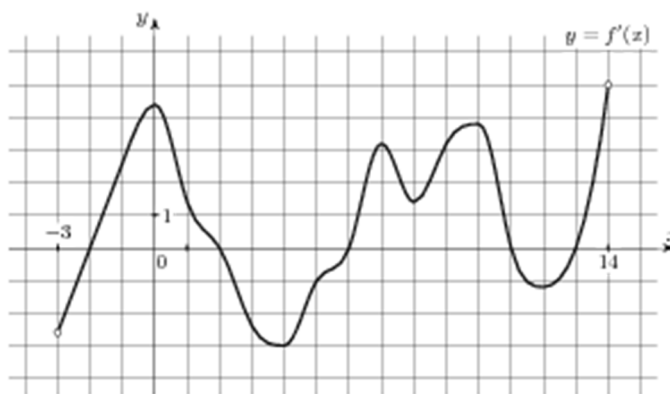


Рис. 111. Нахождение промежутков убывания функции

*Решение:*

При решении этого примера следует обратить внимание на то, что на рисунке изображен график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ .

Из рисунка видно, что график производной находится ниже оси  $OX$  (функция  $f(x)$  убывает) на следующих интервалах:

$(-3; -2)$ ,  $(2; 6)$  и  $(11; 13)$ .

Наибольшую длину имеет интервал  $(2; 6)$ . Длина  $d$  этого интервала:

$$d = 6 - 2 = 4.$$

*Ответ:* 4.

Точки оси абсцисс, которые отделяют промежутки возрастания функции от промежутков убывания, называются *точками экстремума* функции.

Если точка  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f(x)$  и в этой точке существует производная  $f'(x)$ , то она равна нулю:

$$f'(x_0)=0.$$

Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются *критическими точками*.

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток возрастания, а справа – промежуток убывания, то такая точка называется *точкой максимума*. Значение функции в точке максимума называют *максимумом* функции.

*Признак максимума функции*: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума.

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток убывания, а справа – промежуток возрастания, то такая точка называется *точкой минимума*. Значение функции в точке минимума называют *минимумом* функции.

*Признак минимума функции*: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума.

*Пример 6.* На рисунке изображён график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-11;3)$ . Найдите количество точек максимума и минимума функции  $f(x)$  на данном промежутке.

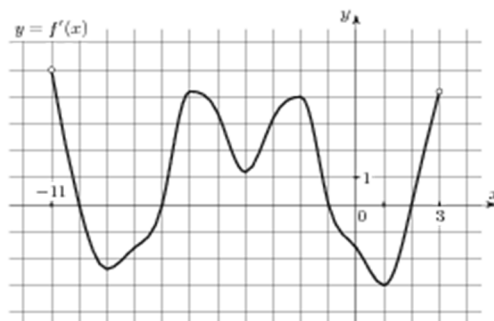


Рис. 112. Нахождение количества точек экстремума

*Решение:*

Производная меняет знак с плюса на минус в точках

$x = -10$  и  $x = -1$ .

Следовательно, количество точек максимума равно

$$k_{\max} = 2.$$

Производная меняет знак с минуса на плюс в точках

$$x = -7 \quad x = 2.$$

Следовательно, количество точек минимума равно

$$k_{\min} = 2.$$

*Ответ:* количество точек максимума – 2; количество точек минимума – 2.

*Пример 7.* На рисунке изображён график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 4)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 2]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

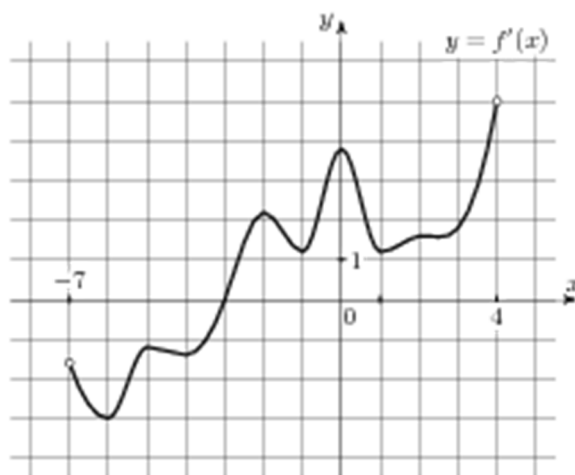


Рис. 113. Отыскание наибольшего значения функции

*Решение:*

В этом примере следует обратить внимание на то, что функция задана на интервале  $(-7; 4)$ , а наибольшее значение ищется на отрезке  $[-3; 2]$ .

В точке  $x = -3$  производная меняет знак с минуса на плюс, то есть  $x = -3$  – точка минимума.

На отрезке  $[-3; 2]$  производная больше нуля, следовательно, функция возрастает и достигает своего наибольшего значения в точке  $x = 2$

*Ответ:* 2.

*Пример 8.* На рисунке изображён график **производной**  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-10; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 1]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

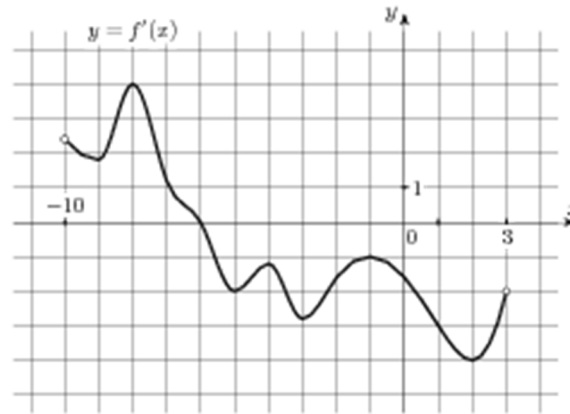


Рис. 114. Нахождение наименьшего значения

*Решение:*

В этом примере следует обратить внимание на то, что функция задана на интервале  $(-10; 3)$ , а наименьшее значение ищется на отрезке  $[-3; 1]$ .

В точке  $x = -6$  производная меняет знак с плюса на минус, то есть  $x = -6$  — точка максимума.

На отрезке  $[-3; 1]$  производная меньше нуля, следовательно, функция убывает.

Таким образом, наименьшее значение функции достигается в точке  $x = 1$ .

*Ответ:* 1.

Производная степенной  $y = x^n$  функции вычисляется по формуле:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Например,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Производная показательной функции  $y = a^x$  имеет вид:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Например,

$$(2^x)' = 2^x \ln 2.$$



В частности, производная функции  $y=e^x$  совпадает с самой функцией:

$$(e^x)'=e^x.$$

Производная логарифмической функции  $y=\log_a x$  находится по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Например,

$$(\log_4 x)' = \frac{1}{x \ln 4}.$$

В частности, производная натурального логарифма вычисляется по формуле

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Производные тригонометрических функций вычисляются по формулам:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пусть  $C$  – константа, а  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  – некоторые дифференцируемые функции. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu'.$$

2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Отметим, что данное правило можно обобщить на случай алгебраической суммы нескольких функций.

3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

4. Производная отношения двух функций вычисляется по формуле ( $v \neq 0$ ):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

*Пример 9.* Вычислить производную функции

$$y = 3x^2 + 2x + 4.$$

*Решение:*

Воспользуемся правилом вычисления производной суммы нескольких функций:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 + 2x + 4)' = (3x^2)' + (2x)' + (4)' = \\ &= 3(x^2)' + 2(x)' + (4)' = 6x + 2. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $y' = 6x + 2$ .

*Пример 10.* Вычислить производную функции

$$y = (2x + 1)(x^2 + 3).$$

*Решение:*

Воспользуемся правилом вычисления производной произведения двух функций:

$$\begin{aligned} y' &= ((2x + 1)(x^2 + 3))' = (2x + 1)'(x^2 + 3) + (2x + 1)(x^2 + 3)' = \\ &= 2(x^2 + 3) + (2x + 1) \cdot 2x = 6x^2 + 2x + 6. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $6x^2 + 2x + 6$ .

*Пример 11.* Вычислить производную функции  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

*Решение:*

Воспользуемся правилом вычисления производной отношения двух функций:

$$y' = \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Ответ:  $\frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$

Пусть  $y = f(z)$  есть функция от переменной  $z$ , а переменная  $z$  в свою очередь является функцией  $z = g(x)$  от переменной  $x$ , т.е. задана сложная функция  $y = f(g(x))$ .

Если  $y = f(z)$  и  $z = g(x)$  – дифференцируемые функции от своих аргументов, то *производная сложной функции* равна производной данной функции по промежуточному аргументу  $z$ , умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной  $x$ , т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

*Пример 12.* Вычислить производную функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

*Решение:*

Здесь  $y = \sqrt{z}$ ,  $z = x^2 + 1$ . По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = \left( \sqrt{z} \right)'_z \cdot \left( x^2 + 1 \right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ответ:  $y'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

*Пример 13.* Вычислить производную функции

$$y = \sin^2 x.$$

*Решение:*

Здесь  $y = z^2$ ,  $z = \sin x$ . По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_z \cdot z'_x = (z^2)'_z \cdot (\sin x)'_x = \\ &= 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $y'_x = \sin 2x$ .

На практике, как правило, промежуточную переменную  $z$  не вводят, а производную сложной функции находят непосредственно, без явного указания переменной, по которой производится дифференцирование. Например,

$$\begin{aligned} ((6x+5)^3)' &= 3(6x+5)^2 (6x+5)' = \\ &= 3 \cdot (6x+5)^2 \cdot 6 = 18(6x+5)^2. \end{aligned}$$

*Пример 14.* Найти экстремумы функции

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

*Решение:*

Сначала найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 15x^2 + 36x - 14)' = \\ &= 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

Приравнивая производную нулю

$$6(x-2)(x-3) = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 3.$$

Экстремумы могут быть только в этих точках. Нанесем критические точки на числовую ось.

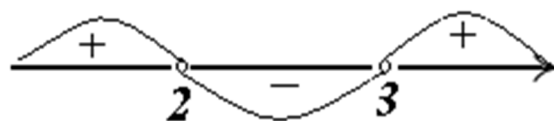


Рис.115. Знаки производной функции  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$

Так как при переходе через точку  $x_1 = 2$  производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку  $x_2 = 3$  производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в точке  $x_2 = 3$  функция имеет минимум. Вычислив значения функции в точках  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 3$ , найдем экстремумы функции: максимум  $f_{\max} = f(2) = 14$  и минимум  $f_{\min} = f(3) = 13$ .

*Ответ:*  $f_{\max} = f(2) = 14$ ;  $f_{\min} = f(3) = 13$ .

*Пример 15.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-2)^2 e^{-x}$$

на отрезке  $[0; 5]$ .

*Решение:*

Сначала найдем производную

$$f'(x) = 2(x-2)e^{-x} - (x-2)^2 e^{-x} = -e^{-x}(x-2)(x-4).$$

Приравняв производную нулю

$$-e^{-x}(x-2)(x-4) = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 4.$$

Найденные критические точки принадлежат отрезку  $[0; 5]$ .

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(2) = 0, \quad f(4) = \frac{4}{e^4};$$

$$f(0) = 4, \quad f(5) = \frac{9}{e^5}.$$

Следовательно,

$$f_{\text{наим}} = f(2) = 0, \quad f_{\text{наиб}} = f(0) = 4.$$

*Ответ:*  $f_{\text{наим}} = f(2) = 0$ ,  $f_{\text{наиб}} = f(0) = 4$ .

*Пример 16.* Исследовать функцию

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

и построить ее график.

*Решение:*

1. Область определения функции  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .
2. Функция общего вида, неперiodическая.
3. Найдем промежутки возрастания и убывания функции.

Производная функции:

$$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Приравняв производную нулю

$$y' = 0,$$

получим уравнение

$$3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 3.$$

Таким образом, имеем две критические точки  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ .

Исследуем знак производной. Для этого представим производную в виде

$$y' = 3(x - 1)(x - 3).$$

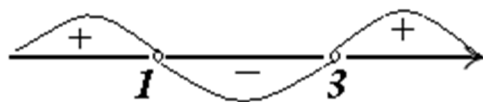


Рис. 116. Знаки производной функции  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

На интервале  $(-\infty; 1)$  производная положительна, следовательно, функция возрастает. На интервале  $(1; 3)$  производная отрицательна, следовательно, функция убывает. На интервале  $(3; +\infty)$  производная положительна, следовательно, функция возрастает. При переходе через точку  $x_1 = 1$  производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, точка  $x_1 = 1$  — точка максимума. При переходе через точку  $x_2 = 3$  производная меняет знак с минуса на плюс, следо-

вательно, точка  $x_2 = 3$  — точка минимума. Найдем значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max} = y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1;$$

$$y_{\min} = y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3.$$

4. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$$x = 0, \quad y(0) = -3;$$

$$x = 4, \quad y(4) = 1.$$

Построим график функции  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ .

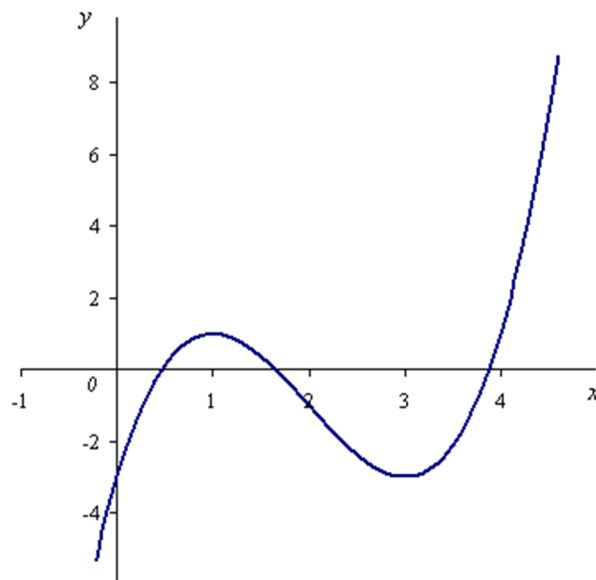


Рис. 116. График функции  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Пусть задан закон прямолинейного движения точки  $s = s(t)$ , где  $s$  — пройденный путь, а  $t$  — время. Требуется найти скорость движения точки в момент времени  $t_0$ .

К моменту времени  $t_0$  пройденный путь равен  $s(t_0)$ , а к моменту  $(t_0 + \Delta t)$  —  $s(t_0 + \Delta t)$ . За промежуток времени  $\Delta t$  пройденный путь составит

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Средняя скорость движения точки за промежуток времени  $\Delta t$  составит

$$v_c = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Скоростью точки в момент времени  $t_0$  называется предел средней скорости за промежуток от  $t_0$  до  $(t_0 + \Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Таким образом, скорость движения точки в момент времени  $t_0$  равна производной пути по времени. В этом состоит *физический смысл производной*.

*Пример 17.* Закон движения материальной точки имеет вид  $s(t) = 4 + 3t + 5t^2$ , где  $s$  – координата точки в момент времени  $t$ . Найти скорость точки в момент времени  $t = 2$ .

*Решение:*

Найдем производную пути по времени:

$$s'(t) = (4 + 3t + 5t^2)' = 3 + 10t.$$

Подставив значение  $t = 2$  в последнее выражение, получим

$$v = s'(2) = 3 + 10 \cdot 2 = 23.$$

*Ответ:* 23.

## 8. 2. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

Нетрудно убедиться, что первообразная  $F(x)$  функции

$$f(x) = x^n,$$

при условии  $n \neq -1$ , имеет вид

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Действительно, найдем производную функции  $F(x)$ :



$$F'(x) = \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = (n+1) \frac{x^n}{n+1} = x^n = f(x).$$

Например, функция

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

является первообразной для функции

$$f(x) = x^2.$$

Если показатель степени функции  $x^n$  равен  $n = -1$ , то есть функция имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

тогда первообразная  $F(x)$  вычисляется по формуле:

$$F(x) = \ln |x|.$$

Знак модуля в последней формуле поставлен для того, чтобы учесть случай, когда переменная  $x$  функции  $f(x)$  принимает отрицательные значения.

Первообразная показательной функции  $f(x) = a^x$  имеет вид:

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}.$$

Например, первообразная  $F(x)$  показательной функции  $f(x) = 2^x$ :

$$F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

В частности, первообразная функции  $f(x) = e^x$  совпадает с самой функцией

$$F(x) = e^x.$$

Первообразные  $F(x)$  тригонометрических функций  $f(x)$  находятся по следующим формулам:

$$f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x;$$

$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x.$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad F(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad F(x) = -\operatorname{ctgx}.$$

Следует отметить, что для заданной функции  $f(x)$  ее первообразная  $F(x)$  определяется неоднозначно. Например, первообразными функции

$$f(x) = x^2$$

могут служить функции

$$\frac{x^3}{3} + 1, \quad \frac{x^3}{3} + 4$$

и вообще

$$\frac{x^3}{3} + C,$$

где  $C$  – произвольная константа.

Пусть  $F(x)$  – некоторая первообразная функции  $f(x)$ . Можно показать, что выражение вида

$$F(x) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная, описывает *все первообразные* функции  $f(x)$ .

Совокупность всех первообразных функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  и обозначается символом

$$\int f(x) dx.$$

Таким образом, по определению имеем

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения интеграла называется *интегрированием* этой функции.

Сформулируем три основных правила нахождения неопределенных интегралов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Здесь  $k$  – некоторое число.

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

Отметим, что данное свойство распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых.

3. Пусть  $F(x)$  – некоторая первообразная функции  $f(x)$ . Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C ,$$

где  $k$  и  $b$  – некоторые числа ( $k \neq 0$ ). На практике особенно часто встречаются частные случаи, когда  $k = 1$  или  $b = 0$ :

$$\int f(x + b)dx = F(x + b) + C ,$$

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C .$$

*Пример 1.* Вычислить интеграл  $\int (6x^2 + 1)dx$ .

*Решение:*

$$\int (6x^2 + 1)dx = 6 \int x^2 dx + \int dx = 6 \frac{x^3}{3} + x + C = 2x^3 + x + C .$$

В данном примере были использованы первое и второе правила нахождения интеграла, а также табличный интеграл для степенной функции.

*Ответ:*  $2x^3 + x + C$ .

*Пример 2.* Вычислить интеграл  $\int e^{2x+1} dx$ .

*Решение:*

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C .$$

В этом примере использованы третье правило нахождения интеграла и табличный интеграл для показательной функции.

*Ответ:*  $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$ .

Пример 3. Вычислить интеграл  $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx$ .

Решение:

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int \left( 3x^2 - 2x + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = x^3 - x^2 + \ln |x| + C.$$

Ответ:  $x^3 - x^2 + \ln |x| + C$ .

Пример 4. Вычислить интеграл  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

Решение:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Ответ:  $\operatorname{tg} x - x + C$ .

### 8.3. Понятие определенного интеграла

Исторически понятие *определенного интеграла* возникло в связи с задачей о вычислении *площади* фигуры.

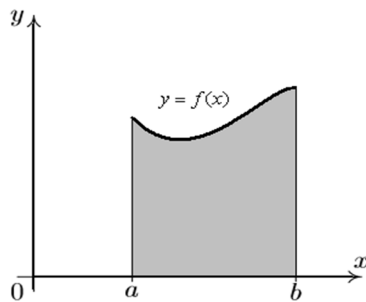


Рис. 117. Криволинейная трапеция

Пусть на отрезке  $[a; b]$  задана неотрицательная функция  $y = f(x)$ . Площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью абсцисс  $y = 0$ , равна определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Число  $a$  называется *нижним пределом*, число  $b$  — его *верхним пределом* функции; функция  $f(x)$  — *подынтегральной функцией*.

Определенный интеграл равен *приращению первообразной*  $F(x)$  функции  $f(x)$  на этом отрезке, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула носит название формулы Ньютона–Лейбница. Для сокращения записи решения приращение первообразной обозначают следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

*Пример 1.* Вычислить интеграл  $\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1)dx$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^2 + 2x + 1)dx &= \left( \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = (x^3 + x^2 + x) \Big|_1^2 = \\ &= (2^3 + 2^2 + 2) - (1^3 + 1^2 + 1) = 14 - 3 = 11. \end{aligned}$$

*Ответ:* 11.

*Пример 2.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = 3x^2$ , прямыми  $x = 0$ ,  $x = 1$  и  $y = 0$ .

*Решение:*

$$S = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = x^3 \Big|_0^1 = 1.$$

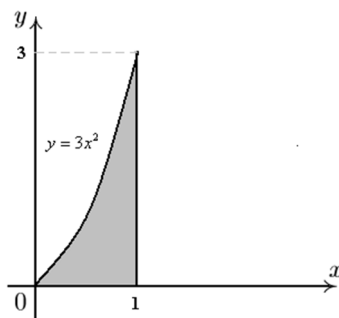


Рис. 119. Фигура, ограниченная кривой  $y = 3x^2$  на отрезке  $[0; 1]$

Ответ: 1.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$ .

Решение:

В отличие от предыдущего примера в данной задаче надо сначала найти пределы интегрирования  $a$  и  $b$ . Вычислим координаты точек пересечения указанных кривых, для чего решим уравнение

$$x^2 = \sqrt{x}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^4 = x.$$

Приведем это уравнение к виду

$$x^4 - x = 0;$$

$$x(x^3 - 1) = 0.$$

Решив последнее уравнение, получим

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

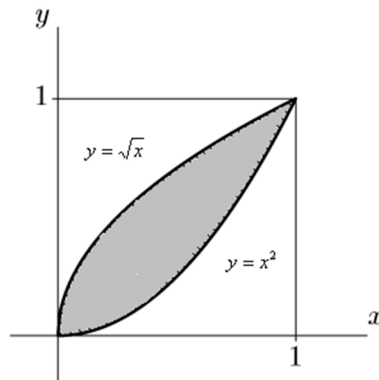


Рис. 120. Фигура, ограниченная линиями  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$

Таким образом, нижний и верхний пределы интегрирования соответственно:

$$a = 0, \quad b = 1.$$

Теперь найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$  на отрезке  $[0; 1]$ .

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}$ .

## 8.4. Упражнения

1. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

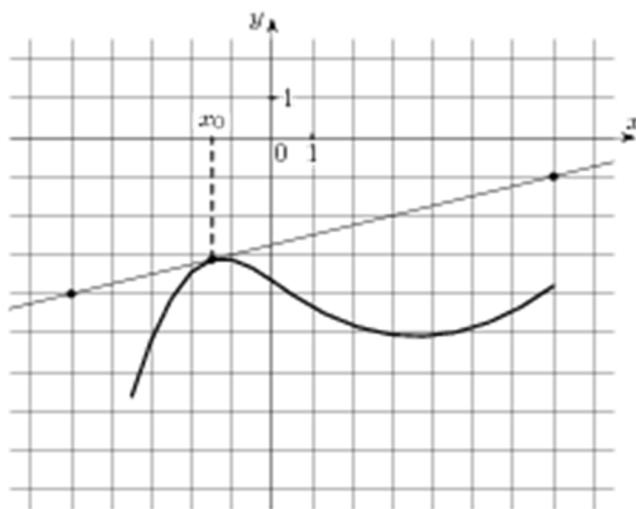


Рис.121. Нахождение производной по графику функции

2. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и семь точек на оси абсцисс  $x_1, x_2, \dots, x_7$ . В скольких из точек производная функции отрицательна?

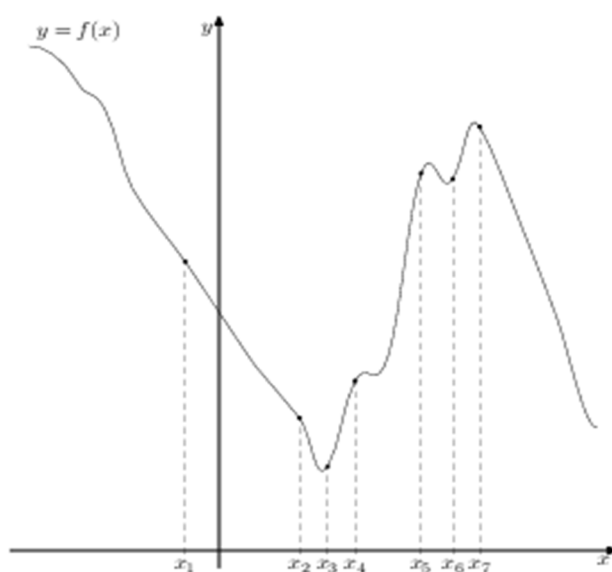


Рис. 122. Определение знака производной функции  $y = f(x)$

3. На рисунке изображён график функции  $y=f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;9)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $y=f(x)$  равна 0.

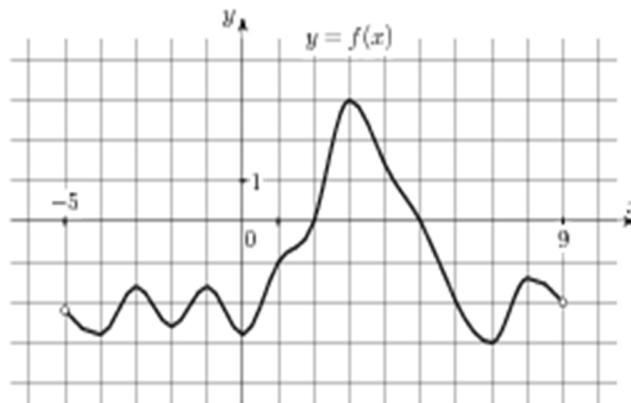


Рис. 123. Нахождение нулевых значений производной

4. На рисунке изображён график производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-1;16)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

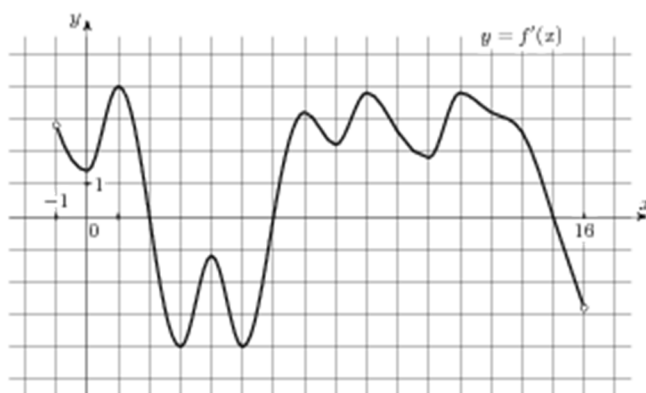


Рис. 124. Нахождение промежутков возрастания функции

5. На рисунке изображён график производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-1;17)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



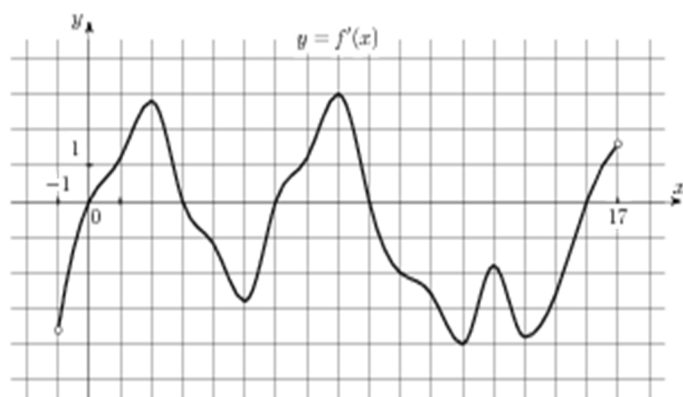


Рис. 125. Нахождение промежутков убывания функции

6. На рисунке изображён график производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-3; 14)$ . Найдите количество точек максимума и минимума функции  $f(x)$  на данном промежутке.

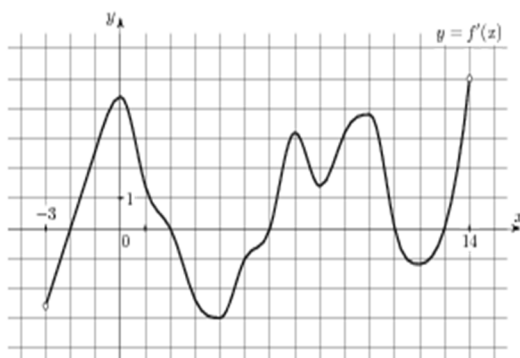


Рис. 126. Нахождение количества точек экстремума

7. На рисунке изображён график производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-1; 12)$ . В какой точке отрезка  $[0; 4]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

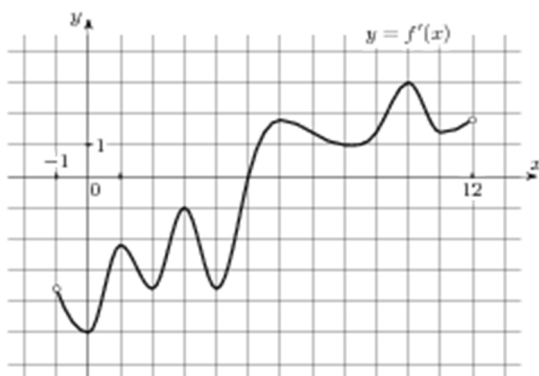


Рис. 127. Отыскание наибольшего значения функции

8. На рисунке изображён график производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-7; -2]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

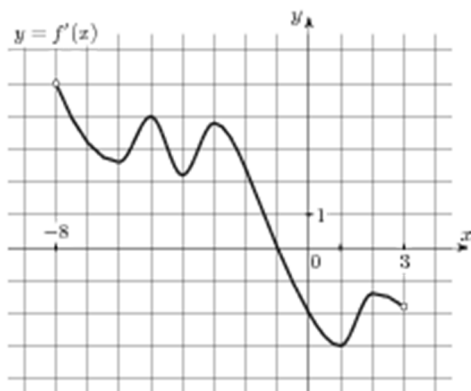


Рис. 128. Нахождение наименьшего значения

Найдите производные следующих функций:

9.  $y = 3x^2 - 2x + \frac{4}{x} - 3$ ;

10.  $y = \frac{8}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + 2x + 9$ ;

11.  $y = 3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x - x + 1$ ;

12.  $y = (2x - 1)(x + 1)$ ;

13.  $y = (x^2 + 1)(e^x - 1)$ ;

14.  $y = (\ln x + x)(\sin x + 2)$ ;

15.  $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ ;

16.  $y = \frac{e^x}{x+1}$ ;

17.  $y = \frac{\ln x}{\sin x + 1}$ ;

18.  $y = (3x + 2)^7$ ;

19.  $y = e^{6x+1}$ ;

20.  $y = \ln(2x + 3)$ ;

21.  $y = \sin(9x + 2)$ ;

22. Найдите точку минимума функции  $y = x^3 - 48x + 1$ .

23. Найдите точку максимума функции  $y = x^3 - 6x^2 + 4$ .

24. Найдите точку минимума функции  $y = (x+16)e^{x-16}$ .

25. Найдите точку максимума функции  $y = x^2 - 28x + 90 \ln x + 5$ .

Исследовать на экстремум функции:

26.  $y = x^3 - 3x + 4$ ;

27.  $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 6$ .

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

28.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ,  $[1; 3]$ ;

29.  $y = 2x^3 - 6x$ ,  $[-2; 2]$ .

30. Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{x^2 + 9}{x}$  на отрезке  $[1; 8]$ .

31. Найдите наибольшее значение функции  $y = (5-x)e^{x-4}$  на отрезке  $[3; 5]$ .

32. Закон движения материальной точки имеет вид  $s(t) = 1 + 3t + t^2$ , где  $s$  – расстояние, пройденное материальной точкой к моменту времени  $t$ . Найдите скорость точки в момент времени  $t = 3$ .

33. Найти неопределенные интегралы:

34.  $\int \left( 8x^3 - \frac{1}{3x^2} + \frac{2}{x} \right) dx$ ;

35.  $\int \left( 1 - 6\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

36.  $\int \left( 4 \cos x + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$ ;

37.  $\int (2x+1)^5 dx$ ;

38.  $\int 3e^{3x+2} dx$ ;

39.  $\int 4 \sin(2x+1) dx$ .

Вычислить определенные интегралы:

$$40. \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx;$$

$$41. \int_1^e \frac{dx}{x};$$

$$42. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$43. y = x^2 + 2, x = -1, x = 2, y = 0;$$

$$44. y = -x^2 + x + 2, y = 0;$$

$$45. y = x^2, y = x.$$

## 9. Вероятность

*Ключевые слова по теме «Вероятность»*

|                     |                  |                 |
|---------------------|------------------|-----------------|
| Вероятность         | probability      | لامتِح          |
| Случайное событие   | random event     | يئْاوش ع ثدح    |
| Достоверное событие | certain event    | ثدح لا قنْي عم  |
| Невозможное событие | impossible event | ثدح لا لي ح تسم |

### 9.1. Классическое определение вероятности

*Событие* – это результат некоторого испытания. Например, подбрасывание монеты – это испытание, а выпадение герба – событие.

*Достоверное событие* – это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение черного шара – это достоверное событие. Достоверное событие будем обозначать буквой  $\Omega$ .

*Вероятность достоверного события* равна единице:

$$P(\Omega) = 1 .$$

*Невозможное событие* – это событие, которое заведомо не может произойти в результате испытания. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение белого шара – невозможное событие. Невозможное событие будем обозначать буквой  $\emptyset$ .

*Вероятность невозможного события* равна нулю:

$$P(\emptyset) = 0 .$$

*Случайное событие* – это событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти. Например, если в урне находятся три белых и пять черных шаров, то извлечение белого шара – случайное событие. Случайные события будем обозначать заглавными латинскими буквами А, В, С и т.д.

Вероятностью случайного события  $A$  называют отношение числа  $m$  исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу  $n$  всех равновозможных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Очевидно, что вероятность случайного события удовлетворяет условию:

$$0 < P(A) < 1.$$

*Пример 1.* На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный билет.

*Решение:*

Событие  $A$  – на экзамене попался выученный билет.

Число всех равновозможных исходов – общее число билетов  $n=60$ .

Число благоприятных исходов – число выученных билетов  $m=54$ .

Вероятность того, что Андрею попадет выученный билет:

$$P(A) = \frac{54}{60} = 0,9.$$

*Ответ:* 0,9 .

*Пример 2.* В фирме «Такси» в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

*Решение:*

Событие  $A$  – приехало зеленое такси.

Число всех равновозможных исходов – число всех машин  $n=20$ .

Число благоприятных исходов – число зеленых машин  $m=8$ .

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{8}{20} = 0,4.$$

*Ответ:* 0,4

*Пример 3.* На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

*Решение:*

Событие  $A$  – выбран пирожок с вишней.

Число всех равновозможных исходов – общее количество пирожков  $n=16$ .

Число благоприятных исходов – количество пирожков с вишней  $m=4$ .

Вероятность того, что пирожок окажется с вишней:

$$P(A) = \frac{4}{16} = 0,25.$$

*Ответ:* 0,25.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление другого события в одном и том же испытании.

События называются *противоположными*, если они несовместны и одно из них обязательно произойдет в результате испытания. Например, выпадение герба или решки при подбрасывании монеты – противоположные события. Если одно из противоположных событий обозначено, например, буквой  $A$ , то другое событие принято обозначать той же буквой с чертой, например,  $\bar{A}$ .

Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  вычисляется по формуле

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

*Пример 4.* Бросается игральная кость. Какова вероятность того, что не выпадет цифра 3?

*Решение:*

Пусть событие  $A$  – выпала цифра 3. Тогда противоположное событие  $\bar{A}$  – не выпала цифра 3.

Найдем вероятность события  $A$ .

Число всех равновозможных исходов – общее количество цифр на гранях игральной кости  $n=6$ .

Число благоприятных исходов – количество цифр 3 на гранях игральной кости  $m=1$ .

Вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  – не выпала цифра 3:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ответ:  $\frac{5}{6}$ .

## 9.2. Умножение и сложение вероятностей

События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если реализация одного из них никак не влияет на вероятность другого события. Например, вероятности поражения цели первым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события "первое орудие поразило цель" и "второе орудие поразило цель" независимы.

Если два события  $A$  и  $B$  независимы, и вероятность каждого из них известна, то *вероятность одновременного наступления событий  $A$  и  $B$*  (обозначается  $AB$ ) равна произведению вероятностей событий  $A$  и  $B$ :

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

*Пример 1.* Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а вероятность попадания при стрельбе из второго орудия – 0,6. Найдите вероятность попадания одновременного попадания в цель обоими орудиями при залпе.

*Решение:*

Событие  $A$  – попадание из первого орудия. Вероятность попадания равна  $P(A)=0,8$ .

Событие  $B$  – попадание из второго орудия. Вероятность попадания равна  $P(B)=0,6$ .

Событие  $AB$  – попадание в цель обоими орудиями.



События А и В – независимые, следовательно, вероятность попадания при залпе  $P(AB)$  равна:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

*Ответ:* 0,48.

*Пример 2.* В урне находятся три белых и два черных шара. Из урны извлекаются два шара, причем после извлечения первого шара он возвращается обратно в урну. Какова вероятность того, что будут извлечены два белых шара?

*Решение:*

Событие А – в первый раз извлечен белый шар.

Вероятность события А:

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Событие В – во второй раз извлечен белый шар. Вероятность события В:

$$P(B) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Событие АВ – извлечены два белых шара. Вероятность события АВ:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36.$$

*Ответ:* 0,36.

В общем случае вероятность одновременного наступления событий А и В вычисляется по формуле

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Здесь  $P(B/A)$  – вероятность события В, при условии, что событие А уже произошло (*условная вероятность*).

*Пример 3.* В урне находятся три белых и два черных шара. Из урны извлекаются два шара, причем после извлечения первого шара он не возвращается обратно в урну. Какова вероятность того, что будут извлечены два белых шара?

*Решение:*

Событие  $A$  – в первый раз извлечен белый шар.

Вероятность события:

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Событие  $B$  – во второй раз извлечен белый шар. Вероятность события  $B$ , при условии, что событие  $A$  произошло (в первый раз извлечен белый шар):

$$P(B/A) = \frac{2}{4} = 0,5.$$

Событие  $AB$  – извлечены два белых шара. Вероятность события  $AB$ :

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3.$$

*Ответ:* 0,3.

Вероятность наступления хотя бы одного из событий  $A$  или  $B$  (обозначается  $A+B$ ) вычисляется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

*Пример 4.* Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а вероятность попадания при стрельбе из второго орудия – 0,6. Найдите вероятность того, что, хотя бы одно из орудий попадет в цель при залпе.

*Решение:*

Событие  $A$  – попадание из первого орудия. Вероятность попадания:  $P(A)=0,8$ .

Событие  $B$  – попадание из второго орудия. Вероятность попадания:  $P(B)=0,6$ .

События  $A$  и  $B$  – независимые, следовательно,

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

Найдем вероятность попадания в цель хотя бы одним из орудий:

$$P(A+B) = 0,8 + 0,6 - 0,48 = 0,92.$$

*Ответ:* 0,92.

Если события  $A$  и  $B$  – несовместные, формула вероятности суммы событий  $(A+B)$  принимает более простой вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

*Пример 5.* Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

*Решение:*

Событие  $A$  – чайник прослужит меньше двух лет, но больше года.

Событие  $B$  – чайник прослужит больше двух лет. Вероятность события:

$$P(B) = 0,89.$$

Событие  $(A+B)$  – чайник прослужит больше года. Вероятность события равна:  $P(A+B) = 0,97$

События  $A$  и  $B$  – несовместные, следовательно,

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Подставив числовые значения, получим

$$0,97 = P(A) + 0,89,$$

$$P(A) = 0,97 - 0,89 = 0,08.$$

*Ответ:* 0,08.

*Пример 6.* Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,7, а второго – 0,6. Найдите вероятность того, что наудачу взятая деталь (из набора взятого наудачу) – стандартная.

*Решение:*

Событие  $A$  – извлечена стандартная деталь.

Событие  $B_1$  – деталь извлечена из первого набора. Вероятность события:  
 $P(B_1)=0,5$ .

Событие  $B_2$  – деталь извлечена из второго набора. Вероятность события:  
 $P(B_2)=0,5$ .

Событие  $AB_1$  – стандартная деталь извлечена из первого набора.

Событие  $AB_2$  – стандартная деталь извлечена из второго набора.

Очевидно, что

$$A=AB_1+AB_2.$$

События  $AB_1$  и  $AB_2$  – несовместные, следовательно,

$$P(AB_1 + AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2).$$

Вероятность события  $AB_1$ :

$$P(AB_1) = P(A/B_1) \cdot P(B_1),$$

где  $P(A/B_1)$  – вероятность извлечения стандартной детали из первого набора.

По условиям задачи вероятность этого события равна 0,7.

Вероятность события  $AB_2$ :

$$P(AB_2) = P(A/B_2) \cdot P(B_2),$$

где  $P(A/B_2)$  – вероятность извлечения стандартной детали из второго набора. По условиям задачи вероятность этого события равна 0,6.

Таким образом, вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2).$$

Полученная формула называется *формулой полной вероятности*.

Подставив числовые значения, получим

$$P(A) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,65.$$

*Ответ:* 0,65.

### 9.3. Применение комбинаторики в теории вероятностей

*Комбинаторика* – это раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

*Правило умножения.* Если объект  $M$  можно выбрать  $m$  способами, а объект  $N$  можно выбрать  $n$  способами, то пара объектов  $(M, N)$  в указанном порядке может быть выбрана  $m \cdot n$  способами.

*Пример 1.* В буфете имеется 5 видов печенья и 3 вида сока. Сколько существует вариантов выбора сока с печеньем?

*Решение:*

По правилу произведения имеется  $5 \cdot 3 = 15$  вариантов выбора сока с печеньем.

*Ответ:* 15.

*Пример 2.* В группе 10 студентов, из которых нужно выбрать старосту и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение:*

Старосту ( $C$ ) можно выбрать 10 способами. Профорга ( $П$ ) можно выбрать  $10 - 1 = 9$  способами. Следовательно, пару  $(C, П)$  можно выбрать  $10 \cdot 9 = 90$  способами.

*Ответ:* 90.

*Пример 3.* Сколькими способами можно рассадить трех человек на пяти стульях?

*Решение:*

Первого человека можно разместить 5 способами, второго – 4 способами, а третьего – 3 способами.

Применив последовательно правило умножения, получим, что трех человек на пяти стульях можно разместить  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  способами.

*Ответ:* 60.

*Размещениями* множества из  $n$  различных элементов по  $k$  элементов называются комбинации, которые составлены из данных  $n$  элементов по  $k$

элементов в каждом и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов. Число размещений обозначается символом  $A_n^k$ .

Применив последовательно правило умножения, можно получить следующую формулу для вычисления числа размещений:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

*Пример 4.* В группе 10 студентов, из которых нужно выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение:*

Воспользуемся формулой для вычисления числа размещений при  $n=10$ ,  $k=3$ :

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

*Ответ:* 720.

В предельном случае, когда  $k = n$ , получим

$$A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1.$$

Число  $P_n = A_n^n$  представляет собой количество всех *перестановок* из  $n$  элементов.

Произведение первых подряд идущих  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Знак  $n!$  читается как «эн факториал», что дословно с английского языка означает «состоящий из  $n$  множителей».

Таким образом, число перестановок из  $n$  элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

*Пример 5.* Сколькими способами можно рассадить пять человек на пяти стульях?

*Решение:*

Воспользуемся формулой для вычисления числа перестановок при  $n=5$ :

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

*Ответ:* 120.

*Сочетаниями* множества из  $n$  элементов по  $k$  элементов в каждом называются комбинации, которые составлены из данных  $n$  элементов по  $k$  элементов в каждом и отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний обозначается символом  $C_n^k$ .

В отличие от размещений в сочетаниях порядок элементов не учитывается. Поэтому число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов в  $P_k$  раз меньше числа размещений  $A_n^k$ :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

*Пример 6.* В группе 10 студентов, из которых нужно выбрать трех человек для участия в конференции. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение:*

Найдем число размещений  $A_{10}^3$ :

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Вычислим количество перестановок  $P_3$ :

$$P_3 = 3! = 6.$$

Разделив число размещений  $A_{10}^3$  на число перестановок  $P_3$ , найдем число сочетаний  $C_{10}^3$ :

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{720}{6} = 120.$$

*Ответ:* 120.

Знак факториала позволяет представить формулы для вычисления числа размещений и числа сочетаний в следующей форме:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отметим, что в этих формулах по определению принимается, что  $0!=1$ .

Рассмотрим примеры использования формул комбинаторики в задачах теории вероятностей.

*Пример 7.* На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой, достают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность, что получится число 41?

*Решение:*

Событие А – получено число 41.

Число благоприятных исходов:  $m=1$ . Для нахождения числа всех равно-  
возможных исходов  $n$  воспользуемся формулой числа размещений:

$$n = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Таким образом, вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

*Ответ:* 0,05.

*Пример 8.* Буквы Р, Т, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в произвольном порядке и прикладывает их друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР»?

*Решение:*

Событие А – получилось слово «ТОР».

Число благоприятных исходов равно  $m=1$ . Для нахождения числа всех равно-  
возможных исходов  $n$  воспользуемся формулой числа перестановок:

$$n = P_3 = 3! = 6.$$

Таким образом, вероятность события А:



$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{6}.$

*Пример 9.* Из 10 студентов половина имеет спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

*Решение:*

Событие А – выбранные 3 студента имеют спортивные разряды.

Найдем количество благоприятных исходов:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 10.$$

Найдем число всех равновозможных исходов:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 7!} = 120.$$

Таким образом, вероятность события А:

$$P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{12}.$

## 9.4. Упражнения

1. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику будет вопрос по ботанике.

*Ответ:* 0,2.

2. Максим с папой решил покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 11 – синие, 7 – зеленые, остальные – оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в оранжевой кабине.

*Ответ:* 0,4.

3. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 – из Норвегии.

Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швеции.

*Ответ:* 0,36.

4. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

*Ответ:* 0,5.

5. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

*Ответ:* 0,04.

6. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 65 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 13 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

*Ответ:* 0,2.

7. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

*Ответ:* 0,38.

8. Стрелок стреляет по мишени два раза. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что стрелок промахнется оба раза.

*Ответ:* 0,04.

9. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

*Ответ:* 0,81.

10. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35% этих стекол, вторая – 65%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

*Ответ:* 0,043.

11. На трех карточках написаны цифры 3, 4, 5. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой, достают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность, что получится число 35?

*Ответ:*  $\frac{1}{6}$ .

12. В классе учится 10 мальчиков и 10 девочек. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 ученика – мальчики?

*Ответ:*  $\frac{2}{19}$ .

## 10. Текстовые задачи

*Ключевые слова по теме «Текстовые задачи»*

|                    |              |             |
|--------------------|--------------|-------------|
| Время              | time         | تقولا       |
| Производительность | productivity | ةي ج اتن إا |
| Пропорция          | proportion   | قبسن        |
| Процент            | percentage   | قبسن        |
| Путь               | way          | ةق ي ر ط لا |
| Работа             | work         | ل م ع لا    |
| Скорость           | velocity     | ة ع ر س لا  |

### 10.1. Арифметические задачи

*Пример 1.* Поезд Новосибирск – Красноярск отправляется в 15:23, а прибывает в 4:23 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

*Решение:*

Если время отправления и время прибытия уменьшить (или увеличить) на одну и ту же величину, время в пути не изменится.

Уменьшим время отправления и прибытия на 23 минуты. Таким образом, получим, что время отправления – 15:00, а время прибытия – 4:00 следующего дня.

В день отправления поезд находится в пути  $24-15=9$  часов, а на следующий день, до момента прибытия, он едет 4 часа. Таким образом, общее время в пути составляет  $9+4=13$  часов.

*Ответ:* 13 часов.

*Пример 2.* Таксист за месяц проехал 5000 км. Стоимость 1 литра бензина — 30 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 8 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

*Решение:*

Средний расход бензина за месяц составил

$$\frac{5000}{100} \cdot 8 = 400 \text{ литров.}$$

Количество рублей, потраченных на бензин:

$$400 \cdot 30 = 1200 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 12000 рублей.

*Пример 3.* В квартире, где проживает Ольга, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 220 куб. м воды, а 1 октября — 240 куб.м. Какую сумму должна заплатить Ольга за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

*Решение:*

Расход холодной воды за сентябрь составил

$$240 - 220 = 20 \text{ куб.м.}$$

Значит, за сентябрь надо заплатить

$$20 \cdot 9,9 = 198 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 198 рублей.

*Пример 4.* Сырок стоит 7 рублей 20 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 60 рублей?

*Решение:*

Разделим 60 на 7,2:

$$\frac{60}{7,2} = \frac{600}{72} = \frac{100}{12} = 8\frac{1}{3}.$$

Таким образом, на 60 рублей можно купить 8 сырков, затратив при этом 57 рублей 60 копеек (сдача составит 2 рубля 40 копеек).

*Ответ:* 8 сырков.

*Пример 5.* Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

*Решение:*

Всего на теплоходе находится 620 человек. Разделим 620 на 60:

$$\frac{620}{60} = \frac{62}{6} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}.$$

Таким образом, для размещения всех пассажиров и членов экипажа потребуется 11 шлюпок. В десяти шлюпках будут размещены 600 человек, а в одиннадцатой шлюпке – 20 человек.

*Ответ:* 11 шлюпок.

*Пример 6.* Цена на электрический чайник была повышена на 20% и составила 2400 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

*Решение:*

Пусть  $c$  – первоначальная стоимость чайника.

Составим пропорцию:

$$\frac{c}{2400} = \frac{100}{120}.$$

Следовательно,

$$c = \frac{100}{120} \cdot 2400 = \frac{5}{6} 2400 = 2000 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 2000 рублей.

*Пример 7.* Пачка сливочного масла стоит 50 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 15%. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?

*Решение:*

Две пачки масла стоят 100 рублей. Следовательно, пенсионер заплатит за две пачки масла:

$$100 - \frac{15}{100} 100 = 85 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 85 рублей.

*Пример 8.* Клиент взял в банке кредит 30.000 рублей на год под 20%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

*Решение:*

Через год клиент должен будет выплатить:

$$30000 + \frac{20}{100} 30000 = 36000 \text{ рублей.}$$

Следовательно, ежемесячно клиент должен вносить

$$\frac{36000}{12} = 3000 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 3000 рублей.

*Пример 9.* Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 10% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства в течение суток следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 5 кг?

*Решение:*

В одной таблетке содержится

$$30 \cdot \frac{10}{100} = 3 \text{ мг активного вещества.}$$

Суточная норма активного вещества для ребенка в возрасте пяти месяцев и весом 5 кг составляет

$$1,2 \cdot 5 = 6 \text{ мг.}$$

Следовательно, в течение суток ребенку следует давать:

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ таблетки.}$$

*Ответ:* 2 таблетки.

*Пример 10.* Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 140 рублей за штуку. Торговая наценка составляет 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1110 рублей?

*Решение:*

Пусть  $c$  – стоимость горшка после наценки. Составим пропорцию

$$\frac{c}{140} = \frac{120}{100}.$$

Следовательно, стоимость горшка после наценки:

$$c = \frac{120}{100} \cdot 140 = 168 \text{ рублей.}$$

Разделив 1110 на 168, получим:

$$\frac{1110}{168} = 6 \frac{17}{28}.$$

Таким образом, на 1110 рублей можно купить 6 горшков, затратив при этом 1008 рублей (сдача составит 102 рубля).

*Ответ:* 6 горшков.

## 10.2. Задачи с прикладным содержанием

*Пример 1.* При температуре  $0^\circ\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 10 \text{ м}$ . При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$ , где  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t$  — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

*Решение:*

Найдем разность между начальной и конечной длинами рельса:

$$l(t) - l_0 = l_0(1 + \alpha t) - l_0 = l_0 \alpha t.$$

По условиям задачи имеем

$$l_0 \alpha t = 3.$$

Следовательно,

$$t = \frac{0,003}{l_0 \alpha} = \frac{0,003}{10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}} = 25^\circ\text{C}.$$

*Ответ:*  $25^\circ\text{C}$ .

*Пример 2.* По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ , где  $\varepsilon$  - ЭДС источника (в вольтах),  $r = 1 \text{ Ом}$  - его внутреннее сопротивление,  $R$  - сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем со-



противлении цепи сила тока будет составлять не более 25% от силы тока короткого замыкания  $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$ . Ответ выразите в омах.

*Решение:*

Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства:

$$I \leq 0,25 \cdot I_{кз}$$

при известном внутреннем сопротивлении  $r=1$ .

Подставив выражения для величин  $I$  и  $I_{кз}$  в это неравенство, получим (при  $r=1$ )

$$\frac{\varepsilon}{R+1} \leq 0,25 \varepsilon.$$

Разделив обе части неравенства на величину  $\varepsilon$ , получим:

$$\frac{1}{R+1} \leq 0,25.$$

Решив последнее неравенство, найдем:

$$R \geq 3.$$

Таким образом, наименьшим решением неравенства служит значение  $R=3$

*Ответ:* 3.

*Пример 3.* В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1=90$  Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  Ом и  $R_2$  Ом их общее сопротивление даётся формулой  $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

*Решение:*

Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства

$$R_{\text{общ}} \geq 9$$

при известном сопротивлении  $R_1 = 90$ .

Подставив выражение для величины  $R_{\text{общ}}$  в это неравенство, получим (при  $R_1 = 90$ ):

$$\frac{90R_2}{90 + R_2} \leq 9.$$

Решив последнее неравенство, найдем:

$$R \leq 10.$$

Таким образом, наибольшим решением неравенства служит значение  $R = 10$ .

*Ответ:* 10.

*Пример 4.* Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела  $P$ , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры  $P = \sigma \cdot S \cdot T^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  – постоянная, площадь  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь  $S = \frac{10^{22}}{2401}$  кв.м, а излучаемая ею мощность  $P$  не менее  $5,7 \cdot 10^{26}$  Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

*Решение:*

Решение задачи сводится к нахождению наименьшего решения неравенства

$$P \geq 5,7 \cdot 10^{26}$$

при заданных значениях величин  $\sigma$  и  $S$ .

Подставив выражение для величины  $P$  в это неравенство, получим (при заданных значениях величин  $\sigma$  и  $S$ ):

$$5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{10^{22}}{2401} \cdot T^4 \geq 5,7 \cdot 10^{26}.$$

Выполнив ряд преобразований, получим:

$$\frac{10^{14}}{2401} \cdot T^4 \geq 10^{26}; T^4 \geq 2401 \cdot 10^{12};$$

$$T \geq \sqrt[4]{2401 \cdot 10^{12}}; T \geq 7 \cdot 10^3; T \geq 7000.$$

Таким образом, наименьшим решением неравенства служит значение  $T = 7000$ .

*Ответ:* 7000.

*Пример 5.* Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ ,

где  $T_0 = 1380 K$ ,  $a = -15 \frac{K}{мин^2}$ ,  $b = 165 \frac{K}{мин}$ ,  $t$  - время в минутах. Известно, что при температуре нагревателя свыше  $1800 K$  прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

*Решение:*

Задача сводится к нахождению наименьшего корня уравнения

$$T_0 + bt + at^2 = 1800$$

при заданных значениях величин  $T_0$ ,  $a$  и  $b$ .

Подставив числовые значения величин  $T_0$ ,  $a$  и  $b$  в данное уравнение, получим

$$1380 + 165t - 15t^2 = 1800.$$

Разделив обе части уравнения на (-15), получим

$$-92 - 11t + t^2 = 120.$$

Преобразуем последнее уравнение следующим образом:

$$t^2 - 11t + 28 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$t_1 = 4 \text{ и } t_2 = 7.$$

Наименьший корень уравнения равен  $t=4$ .

Таким образом, через 4 минуты прибор нагреется до 1800 К и его надо выключить.

*Ответ:* 4.

### 10.3. Задачи на составление уравнений

*Пример 1.* Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

*Решение:*

Пусть  $x$  — масса первого сплава, а  $y$  — масса второго сплава. По условиям задачи имеем

$$x + y = 200 .$$

Масса никеля в первом сплаве равна  $0,1x$ .

Масса никеля во втором сплаве равна  $0,3y$ .

Масса никеля в третьем сплаве:  $0,25 \cdot 200 = 50$ .

Составляем уравнение

$$0,1x + 0,3y = 50 .$$

Таким образом, получаем систему из двух уравнений относительно двух неизвестных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0,1x + 0,3y = 50. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$x = 50 , y = 150 .$$

Таким образом, масса первого сплава меньше массы второго сплава на  $150-50=100$  килограммов.

*Ответ:* 100.

*Пример 2.* Два велосипедиста одновременно отправляются в 168-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй,

и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

*Решение:*

Пусть  $x$  – скорость второго велосипедиста, тогда скорость первого велосипедиста равна  $(x + 2)$ .

Время пробега первого велосипедиста равно  $\frac{168}{x + 2}$ .

Время пробега второго велосипедиста равно  $\frac{168}{x}$ .

Составляем уравнение:

$$\frac{168}{x} - \frac{168}{x + 2} = 2.$$

Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} = \frac{2}{168}.$$

Выполним очевидные преобразования:

$$\frac{2}{x(x + 2)} = \frac{1}{84}; 168 = x(x + 2); x^2 + 2x - 168 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, получим

$$x_1 = -14, x_2 = 12.$$

Первый корень не подходит по физическому смыслу, следовательно, скорость второго велосипедиста равна 12.

*Ответ:* 12.

*Пример 3.* Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 437 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если собственная скорость теплохода равна 21 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 46 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

*Решение.*

Пусть  $x$  – скорость течения реки, тогда скорость теплохода по течению реки равна  $(21 + x)$ , против течения –  $(21 - x)$ .

На весь путь теплоход затратил  $46-4=42$  часа.

Составляем уравнение:

$$\frac{437}{21+x} + \frac{437}{21-x} = 42.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{42}{21^2 - x^2} = \frac{42}{437}; \quad 437 = 21^2 - x^2; \quad x^2 = 441 - 437;$$

$$x^2 = 4.$$

Положительный корень этого уравнения равен 2 (отрицательный корень лишен физического смысла).

*Ответ:* 2.

*Пример 4.* Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 192 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 224 таких же деталей. Сколько деталей делает в час второй рабочий?

*Решение:*

Пусть  $x$  – производительность второго рабочего, тогда производительность второго рабочего равна  $(x+2)$ .

Время, затраченное первым рабочим на выполнение заказа, равно  $\frac{192}{x+2}$ .

Время, затраченное вторым рабочим на выполнение заказа, равно  $\frac{224}{x}$ .

Составляем уравнение:

$$\frac{224}{x} - \frac{192}{x+2} = 4.$$

Разделив обе части уравнения на 4, получим:

$$\frac{56}{x} - \frac{48}{x+2} = 1.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{56(x+2) - 48x}{x(x+2)} = 1; \quad 8x + 112 = x^2 + 2x;$$

$$x^2 - 6x - 112 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем:

$$x_1 = -8, x_2 = 14.$$

Отрицательный корень не подходим по смыслу задачи, следовательно, производительность второго рабочего равна 14.

*Ответ:* 14.

*Пример 5.* Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 320 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

*Решение:*

Пусть  $x$  – производительность первой трубы, тогда производительность второй трубы равна  $(x + 4)$ .

Время заполнения резервуара первой трубой равно  $\frac{320}{x}$ .

Время заполнения резервуара второй трубой равно  $\frac{320}{x + 4}$ .

Составляем уравнение:

$$\frac{320}{x} - \frac{320}{x + 4} = 4.$$

Разделив обе части уравнения на 320, получим

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{80}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{4}{x(x + 4)} = \frac{1}{80}; \quad 320 = x(x + 4); \quad x^2 + 4x - 320 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем

$$x_1 = -20, x_2 = 16.$$

Отрицательный корень не подходим по смыслу задачи, следовательно, производительность второй трубы равна 16.

*Ответ:* 16.

#### 10.4. Упражнения

1. Поезд Саранск – Москва отправляется в 19:45, а прибывает в 5:45 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

*Ответ:* 10.

2. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина — 28 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 8 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

*Ответ:* 13340.

3. В квартире, где проживает Татьяна, установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 85 куб. м воды, а 1 июня — 97,5 куб. м. Какую сумму должна заплатить Татьяна за горячую воду за май, если цена 1 куб. м горячей воды составляет 72 руб. 60 коп.? Ответ дайте в рублях.

*Ответ:* 181,7.

4. Сырок стоит 6 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

*Ответ:* 6.

5. Теплоход рассчитан на 1000 пассажиров и 30 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

*Ответ:* 18.

6. Цена на электрический чайник была повышена на 22% и составила 3050 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

*Ответ:* 2500.

7. Пачка сливочного масла стоит 64 рубля. Пенсионерам магазин делает скидку 15%. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?

*Ответ:* 108.

8. Клиент взял в банке кредит 24000 рублей на год под 12%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем,



чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

*Ответ:* 2240.

9. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 6% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,25 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 6 кг в течение суток?

*Ответ:* 6.

10. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 10%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 12000 рублей?

*Ответ:* 9.

11. При температуре  $0^{\circ}\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 20$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$ , где  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^{\circ})^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t$  — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

*Ответ:* 37,5.

12. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах:  $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ , где  $\varepsilon$  — ЭДС источника (в вольтах),  $r = 1$  Ом — его внутреннее сопротивление,  $R$  — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 50% от силы тока короткого замыкания  $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$ . Ответ выразите в омах.

*Ответ:* 1.

13. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1 = 99$  Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном

соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  Ом и  $R_2$  Ом их общее сопротивление дается формулой  $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 18 Ом. Ответ выразите в омах.

*Ответ:* 22.

14. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела  $P$ , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:  $P = \sigma \cdot S \cdot T^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  – постоянная, площадь  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь  $S = \frac{10^{21}}{216}$  кв.м, а излучаемая ею мощность  $P$  не менее  $3,42 \cdot 10^{26}$  Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

*Ответ:* 6000.

15. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  – время в минутах,  $T_0 = 1330$  К,  $a = -15 \frac{K}{мин^2}$ ,  $b = 165 \frac{K}{мин}$ . Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

*Ответ:* 2.

16. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

*Ответ:* 90.

17. Два велосипедиста одновременно отправляются в 100-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 5 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в километрах в час.

*Ответ:* 20.

18. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 504 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в километрах в час.

*Ответ:* 5.

19. Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 117 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 143 таких же деталей. Сколько деталей делает в час первый рабочий?

*Ответ:* 13.

20. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 240 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 224 литра?

*Ответ:* 115.

## 11. Задания повышенного уровня сложности

В данном разделе приведены задания из разных разделов математики на том уровне сложности, который традиционно предъявляется вузами с профильным экзаменом по математике.

### 11.1. Уравнения

Решить уравнения.

1.  $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$ .

Ответ: -4; -3; 3.

2.  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 17x + 15} = 2 - x$ .

Ответ: 2.

3.  $x^2 + x = 0,6 \left( x + 3 - \sqrt{5x^2 + 2x + 1} \right)$ .

Ответ: -1; 0,6.

4.  $2^{5x-1} \cdot 3^{4x+1} \cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}$ .

Ответ: -2,5.

5.  $\sqrt{10 + \frac{1}{\log_x 2}} = 2 \log_2(0,5\sqrt{x})$ .

Ответ: 64.

6.  $9^x - 28 \cdot 3^x + 31 = \left( \sqrt{4 - x^2} \right)^2 + x^2$

Ответ: 0.

7.  $\log_{\frac{2}{3}} x - 3 \log_{\frac{1}{3}} x + 27 = \left( \sqrt{25 - x^2} \right)^2 + x^2$ .

Ответ: 3.

8. а) Решите уравнение  $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$[1,5\pi; 3\pi]$ .

Ответ:

а)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

б)  $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ .

9. а) Решите уравнение  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sin x = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$[1,5\pi; 2,5\pi]$ .

*Ответ:*

а)  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}$ .

10. а) Решите уравнение  $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right]$ .

*Ответ:*

а)  $-1; \log_3 \frac{5}{3}$

б)  $\log_3 \frac{5}{3}$ .

11. а) Решите уравнение  $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .

*Ответ:*

а)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

б)  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ .

12. а) Решите уравнение  $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[ \frac{-7\pi}{2}; -2\pi \right].$$

*Ответ:*

$$\text{а) } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}.$$

$$13. \text{ а) Решите уравнение } 2\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$ .

*Ответ:*

$$\text{а) } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } 2\pi; \frac{13\pi}{6}.$$

$$14. \text{ а) Решите уравнение } 2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[ 2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

*Ответ:*

$$\text{а) } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \frac{7\pi}{3}.$$

$$15. \text{ а) Решите уравнение } 2 \cos 2x + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$$

Ответ:

а)  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  $\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}.$

## 11.2. Стереометрия

1. Радиус основания конуса с вершиной  $P$  равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ .

Ответ:  $9\sqrt{14}$ .

2. В треугольной пирамиде  $MABC$  основанием является правильный треугольник  $ABC$ , ребро  $MB$  перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро  $MA$  равно 6. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $AD = AL = 2$  и  $BE = 1$ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $E, D$  и  $L$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

3. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD$ .

а) Докажите, что  $AP:PB_1 = 2:1$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $AB_1$ .

б) Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1 C_1 C$ .

Ответ:

а) утверждение верно;

б)  $\arctg \frac{\sqrt{17}}{3}$ .

4. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, боковое ребро  $SA$  равно 4. Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ:

а) утверждение верно;

б)  $8 + 2\sqrt{2}$ .

5. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{3}$ . На ребрах  $AB$ ,  $AD_1$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причем  $AM = A_1 N = C_1 K = 1$ .

а) Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

Ответ:

а) утверждение верно;

б) 55.



### 11.3. Неравенства

Решить неравенства.

1.  $x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2.$

*Ответ:*  $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [1; 5).$

2.  $\frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 6} \geq 2x + 1.$

*Ответ:*  $[3; 4) \cup (6; +\infty).$

3.  $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leq 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$

*Ответ:*  $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1).$

4.  $25^x - 5^{x+3} \leq 126.$

*Ответ:*  $(-\infty; \log_5 126].$

5.  $2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leq 13.$

*Ответ:*  $[0; \log_4 12].$

6.  $\log_4^2(64 - x^2) - 5 \log_4(64 - x^2) + 6 \geq 0.$

*Ответ:*  $(-8; -\sqrt{48}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{48}; 8).$

7.  $\log_{x^2}(x - 1)^2 \leq 1.$

*Ответ:*  $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$

8.  $\log_{x+2} \frac{(x-1)^2}{x+5} \leq 0.$

*Ответ:*  $(-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 4].$

9.  $\log_{5-x}(25 - x^2) \leq 1.$

*Ответ:*  $(-5; -4] \cup (4; 5).$

$$10. \log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{x+5} \geq 8.$$

*Ответ:*  $(-5; -4] \cup (3; 4).$

#### 11.4. Планиметрия

1. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты ACDE и BFKC. Точка M – середина гипотенузы AB, N – точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что  $CM \perp DK$ .

б) Найдите MN, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

*Ответ:*

а) утверждение верно;

б) 49.

2. Через вершину B трапеции ABCD с основаниями AD и BC проведена прямая, параллельная диагонали AC. Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания AD в точке E.

а) Докажите, что треугольник DBE равновелик трапеции ABCD.

б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.

*Ответ:*

а) утверждение верно;

б) 120.

3. В равнобедренную трапецию ABCD с основаниями AD и BC вписана окружность, CH – высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH.

б) Найдите диагональ AC, если известно, что средняя линия трапеции равна  $2\sqrt{7}$ , а  $\angle AOD = 120^\circ$ , где O – центр окружности, вписанной в трапецию, а AD – большее основание.

*Ответ:*

а) утверждение верно;

б) 7.

4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $BH$ . Из точки  $H$  на стороны  $AB$  и  $BC$  опустили перпендикуляры  $NK$  и  $NM$  соответственно.

а) Докажите, что треугольник  $MBK$  подобен треугольнику  $ABC$ .

б) Найдите отношение площади треугольника  $MBK$  к площади четырёхугольника  $AKMC$ , если  $BH = 2$ , а радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$  равен 4.

*Ответ:*

а) утверждение верно;

б)  $\frac{1}{15}$ .

5. Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность с центром  $O$ . На продолжении отрезка  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $K$  так, что  $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $OBKC$  описанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника  $OBKC$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ , а  $BC = 48$ .

*Ответ:*

а) утверждение верно;

б) 25.

### 11.5. Текстовые задачи с экономическим содержанием

1. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк  $X$  рублей. Какой должна быть сумма  $X$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

*Ответ:* 2 296 350.

2. 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

*Ответ:* 506 250.

3. 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Андрей переводит в банк 587250 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

*Ответ:* 986 000.

4. 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 тысяч рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 50 000 рублей, во второй 66 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

*Ответ:* 10.

5. 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1464100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674100, то за два года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

*Ответ:* 10.

## 11.6. Задачи с параметром

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a - 6x)^3 + 2x^2 = 6x - a$$

не имеет корней.

*Ответ:*  $(4, 5; \infty)$ .

2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

*Ответ:*  $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right); 0$ .

3. Найдите все значения  $p$ , при которых уравнение

$$6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$$

не имеет корней.

*Ответ:*  $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$ .

4. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Ответ:*  $3; \sqrt{65} + 2$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x + 4}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

*Ответ:*  $\left(0; \frac{1}{4}\right] \cup \{1\}$ .

### 11.7. Олимпиадные задачи

1. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

*Ответ:* нет, да, 371.

2. Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

*Ответ:* а) нет, б) нет, в) 4.

3. Даны  $n$  различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ( $n \geq 3$ ).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
- б) Каково наибольшее значение  $n$ , если сумма всех данных чисел меньше 900
- в) Найдите все возможные значения  $n$ , если сумма всех данных чисел равна 123.

*Ответ:* а) да, 2,3,4,5; б) 41; в) 3, 6.

4. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все экс-

перты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{25}$ ?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{35}$ ?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

*Ответ:* а) нет; д) да; и)  $\frac{6}{7}$ .

5. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2 970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в три раза меньше суммы исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

*Ответ:* а) 32 раза число 92 и число 26 б) нет; в) 693.

### **Библиографический список**

1. ЕГЭ 2016. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / И.В. Ященко, М.А. Волкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семенов, О.Н. Косухин, Д.А. Федоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под. ред. И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2016. 247 с.
2. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые тестовые задания / И.В. Ященко, М.А. Волкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семенов, О.Н. Косухин, Д.А. Федоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под. ред. И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2016. 55 с.
3. Иванов А.П., Кондаков В.М. Математика: учеб. пособие для учащихся лицеев и слушателей подготовительных курсов. Пермь: изд-во Перм. ун-та, 1995. 244 с.
4. Иванов А. П. Тесты и контрольные работы по математике. М.: МФТИ. 2002. 288 с.
5. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ: учеб. пособие. / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса. М.: Интеллект-Центр, 2015. 128 с.
6. Требования к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке: утв. приказом Минобрнауки РФ от 3.10.2014 № 1304 // Рос. газ. 2014. 3 дек. С. 31.

### **Электронные ресурсы**

1. <http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge>.
2. <http://alexlarin.net/>.



# Приложение 1. Русский алфавит

А а Аа Б б Бб В в Вв Г г Гг  
 Д д Дд Е е Ее Ё ё Ёё Ж ж Жж  
 З з Зз И и Ии Й й Йй К к Кк  
 Л л Лл М м Мм Н н Нн О о Оо  
 П п Пп Р р Рр С с Сс Т т Тт  
 У у Уу Ф ф Фф Х х Хх Ц ц Цц  
 Ч ч Чч Ш ш Шш Щ щ Щщ Ъ ъ Ъ  
 Ы ы Ыы Ь ь Ьь Э э Ээ Ю ю Юю Я я Яя

## Приложение 2. Числительные

|    |        |       |             |
|----|--------|-------|-------------|
| 1  | один   | one   | دح او       |
| 2  | два    | two   | ن ي ن ث ا   |
| 3  | три    | three | ق ث ا ل ث   |
| 4  | четыре | four  | ة ع ب ر ا   |
| 5  | пять   | five  | ق س م خ     |
| 6  | шесть  | six   | ق ت س       |
| 7  | семь   | seven | ة ع ب س     |
| 8  | восемь | eight | ة ي ن ا م ث |
| 9  | девять | nine  | ة ع س ت     |
| 10 | десять | ten   | ق ر ش ع     |

*Учебное издание*

**Кусяков Альфред Шамильевич**

**Математика для иностранных слушателей  
подготовительных курсов**

Учебное пособие

Редактор *Л. П. Сидорова*

Корректор *Л. П. Северова*

Техническая подготовка материалов: *А. Ш. Кусяков*

---

Объем данных 4,26 Мб

Подписано к использованию 02.07.2019

---

Размещено в открытом доступе

на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)

в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр

Пермского государственного

национального исследовательского университета

614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15