ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Л. Свистков

ТЕРМОДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ОПЕРАТОРНАЯ ШКОЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Л. Свистков

ТЕРМОДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ОПЕРАТОРНАЯ ШКОЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Механика и математическое моделирование»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2021

УДК 536-1(075.8)
ББК 22.25
С247

Свистков А. Л.

С247 Термодинамика сплошной среды. Операторная школа тензорного исчисления [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Л. Свистков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 1,1 Мб ; 88 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/svistkov-termodinamika-sploshnoj-sredy.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3636-5

В учебном пособии излагаются основы операторной школы тензорного исчисления. Дается определение основных понятий и вывод формул, без которых невозможно изучение термодинамики нелинейных сред, работающих в условиях конечных деформаций. Математический аппарат, изложенный в пособии, необходим для вывода следствий из первого и второго начал термодинамики и для анализа определяющих уравнений в нелинейных моделях деформируемых сред.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов механико-математических и физических факультетов университетов, а также для инженеров-исследователей и других специалистов, желающих расширить и углубить знания в области математического моделирования деформируемых сред.

УДК 536-1(075.8)
ББК 22.25

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра «Динамика и прочность машин» Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. кафедрой – д-р физ.-мат. наук, доцент ***И. Э. Келлер***);

главный научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела ИМСС УрО РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор ***А. А. Роговой***

ISBN 978-5-7944-3636-5

Оглавление

Глава 1

Три школы тензорного исчисления

Неизбежным следствием общения между людьми стало появление письменности. С давних времен люди стремились выразить свои мысли не только произносимыми фразами, но и в виде знаков, изображений. Современные языки используют для этого специальные знаки – буквы. Из букв собираются слова, из слов предложения. В ряде языков используются иероглифы. Изображение букв и иероглифов мы можем видеть на бумаге, на экране компьютера. Но мы не замечаем каждый знак в отдельности. Человек, владеющий грамотой английского языка, читая английскую художественную литературу, не видит в книге отдельных букв и слов. Воображение рисует перед ним картины событий художественного произведения. Но стоит открыть книгу, изданную на незнакомом языке, как все сразу меняется. Человек, не знающий японского языка, не увидит в книге событий художественного произведения. Перед его взором будут стоять непонятные иероглифы. То же самое происходит и при чтении научной физико-математической литературы.

Владеющий математическим аппаратом читатель, смотрит на формулы, и при этом видит не только формулы, но и происходящие в природе процессы. Формулы – это строгий язык точной науки. В них есть своя красота и поэзия, свой сюжет. Изящные математические выкладки выстраиваются в последовательный рассказ о научном поиске. Выводы, получаемые из очевидных посылок, могут поразить читателя своим неожиданным содержанием, расшифровать причинно-следственную зависимость. Строгие выкладки с целью получения следствий являются одним из методов исследования Природы. Но если человек не владеет математическим аппаратом, то формулы будут восприниматься им как набор символов, выстроенных определенным образом. Правила, по которым осуществляются выкладки, станут скучным сводом законов, которые нельзя нарушать. Не владеющий математической грамотой “читатель” физических процессов в формулах не увидит.

С автором данной работы произошло следующее. В университете он прослушал курс лекций по тензорному исчислению. Но не смог его понять. Тем не менее он знал, как правильно отвечать на вопросы экзаменатора. Сознание воспринимало тензорную математику как мертвый язык, лишенный содержания. После окончания университета началась работа в Академии наук. Тогда автор узнал, что существуют разные научные школы. В университете давали координатную школу тензорного исчисления. Язык этой школы казался трудным для понимания. В противоположность этому физически более прозрачной для автора явилась безкоординатная (безиндексная) школа тензорного исчисления. У используемых математических выражений появился физический смысл. Стало интересно работать. Вместо скучных выкладок на бумаге появилось повествование о явлениях природы.

Координатная школа тензорного исчисления

Существует обширная литература с изложением основ этой школы. Строгие определения тензора могут даваться на формализованом языке, доступном математикам, но плохо воспринимаемом механиками и физиками. Примером может служить определение в математической энциклопедии [1, с. 326]. Более простым является определение из физической энциклопедии [2, с. 66]. Многие учебники по тензорному исчислению для механиков и физиков содержат близкие по смыслу формулировки. Ниже приводится в качестве примера определение из фундаментального справочника по математике [3, с. 498]:

- **Тензором А, r раз контравариантным и s раз ковариантным (истинным тензором, абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным)**, называется объект, который в координатных системах x и $\bar{x}$ определяется сответственно n^{r+s} компонентами $A^{i_1 i_2 ... i_r}_{i'_1 i'_2 ... i'_s}(x^1, x^2, ..., x^n)$ и n^{r+s} компонентами $\bar{A}^{k_1 k_2 ... k_r}_{k'_1 k'_2 ... k'_s}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$, связанными с $A^{i_1 i_2 ... i_r}_{i'_1 i'_2 ... i'_s}(x^1, x^2, ..., x^n)$ в каждой точке преобразованием

$$\bar{A}^{k_1 k_2 ... k_r}_{k'_1 k'_2 ... k'_s} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{k_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial \bar{x}^{k'_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial \bar{x}^{k'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i'_s}}{\partial \bar{x}^{k'_s}} A^{i_1 i_2 ... i_r}_{i'_1 i'_2 ... i'_s}.$$

  Общее число индексов $r + s$ называется **рангом (валентностью) тензора А**.

Перед этим определением в справочнике вводится понятие точек, а также понятия старых x^1, x^2, ... ,x^n и новых $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, ..., $\bar{x}^n$ координат. Механиков и физиков интересует случай трехмерного пространтва когда n=3. У автора данной работы возникают вопросы, связанные с данным определением.

1. Возьмем в качестве примера напряжения. Это тензорная характеристика состояния материала. Напряжения существуют независимо от того, присутствует ли рядом внешний наблюдатель или нет. Не имеет никакого значения, ввел ли внешний наблюдатель какие-то координаты или не ввел. Тело находится под нагрузкой. Эту нагрузку можно измерить приборами. Что представляет собой тензор напряжений? Это дважды ковариантный тензор, или дважды контравариантный тензор, или один раз ковариантный и один контравариантный? Может быть, существует просто тензор напряжений, не зависимый от систем координат и способов их преобразования? Если бы речь шла о компонентах тензоров в тех или иных координатах, то вопросов бы не возникло. Однако компонентная школа тензорного исчисления предлагает термины ковариантности и контравариантности к самим тензорам.

2. Что скрывается за понятием метрического тензора, который обычно упоминается в координатной школе? Если это объект, не зависящий от выбора системы координат, то что может означать слово "метрический". Если это объект, зависимый от выбора координат, то ни о какой объективности этого объекта не может быть и речи. Такой математический объект нельзя использовать для моделирования явлений в реальном мире.

3. Для проверки, является ли рассматриваемый математический объект тензором согласно определению координатной школы, необходимо использовать множество систем координат и рассматривать особенности преобразования математического объекта при переходе от одной системы координат к другой. В природе координат не существует. Их придумывают люди. Объективным или субъективным в этом случае будет понятие математического объекта, претендующего на роль тензора? Если тензор — это субъективное понятие, то таким объектом нельзя пользоваться для моделирования явлений в реальном мире. Если это объективное понятие, то зачем нужны внешние наблюдатели?

Бескоординатная школа тензорного исчисления

Координатная школа тензорного исчисления разработана математиками. Они оказались далекими от тех проблем, решение которых потребовало создания математического аппарата тензорного исчисления. Первые представления о векторах зарождались из практических потребностей. Исследователей интересовали действующие на тела силы и геометрические особенности формы тел. За дело взялись математики. Появилась координатная школа тензорного исчисления.

Бескоординатная школа тензорного исчисления — это возвращение к реальному миру. Ключевым отличием бескоординатной школы является то, что первичными понятиями в ней являются не координаты, а векторы. С векторами можно совершать операции сложения, умножения на число, скалярного и векторного умножения. Тензорное умножение двух векторов позволяет получить новые математические объекты — тензоры второго ранга. Тензор второго ранга можно умножить на число, транспонировать, сложить с другим тензором. В российской бескоординатной школе используются операции внутреннего умножения тензоров второго ранга, двойного внутреннего умножения, умножения тензора второго ранга на вектор справа или на вектор слева [4]. *В рамках бескоординатной школы векторы и тензоры второго ранга являются объектами и между ними должны существовать математические операции.*

С точки зрения данной школы координаты являются вторичными понятиями. Можно выбрать тройку векторов, не лежащих в одной плоскости, и использовать ее в качестве базиса. С помощью этого базиса нетрудно ввести понятия координат, компонент векторов, компонент тензоров и работать с ними как с матрицами. Но эти матрицы нельзя назвывать векторами и тензорами. Они содержат в себе информацию о векторах и тензорах, но ими не являются.

Операторная школа тензорного исчисления

Тензоры второго ранга и векторы являются математическими объектами с точки зрения бескоординатной школы. По своей сути они являются характеристиками состояния среды. Их можно сравнить с фотографиями, фиксирующими что-то, происходящее в реальном мире. Это остановленное мгновение.

У операторной школы тензорного исчисления есть качественное отличие. *Особенностью операторной школы является то, что тензор второго ранга рассматривается в ней как математический оператор, отображающий вектор в новый вектор. Поэтому между тензором второго ранга и вектором не может быть никаких математических операций.* Он сам является операцией над вектором. А это существенно меняет дело. Оператор — это изменение, движение, переход из одного состояния в другое. Очень наглядным становится физический смысл ключевых тензоров, используемых в механике и термодинамике сплошной среды. Тензор поворота вращает векторы на заданный угол вокруг заданной оси. Тензор растяжений дает представление о том, в каких направлениях и во сколько раз растягивается деформируемая среда. Тензор напряжений нужен для того, чтобы преобразовать внешнюю нормаль к поверхности в плотность внешней силы, действующей на поверхность.

Все три школы тензорного исчисления равнозначны с математической точки зрения. Они дают исследователям одинаковые возможности для решения задач. Различия состоят в особеннстях визуального восприятия образов используемых объектов. Каждый исследователь решает сам, какой математический аппарт более пригоден для него, чтобы расшифровать причинно-следственную зависимость явлений в Природе. В дальнейшем речь пойдет только об операторной школе тензорного исчисления. К сожалению, эта школа в российской литературе представлена очень мало. Можно порекомендовать для чтения только монографию [5].

Глава 2

Векторы и тензоры

Тензорные величины используются в механике и термодинамике для описания свойств и процессов в реальном мире. Они дают информацию об объективных величинах и никак не связаны с субъективным выбором системы отсчета и способа введения координат. В данном разделе рассматриваются ключевые определения, необходимые для аксиоматического введения понятия тензора без использования представлений о системе координат.

Тензор в рамках рассматриваемой математической школы вводится как линейный оператор, отображающий векторы в новые векторы. Для его определения потребуется использование понятий “множество”, “операция на множестве”, “отображение множества в другое множество”, “образование нового множества с помощью операции тензорного умножения”. Определения будут даны ниже для общего случая. Конкретное их приложение будет касаться множества действительных чисел, множества векторов, множества диад.

С точки зрения возрастающей сложности термины выстраиваются в следующем порядке. В определении **группы** речь идет об *одной операции и одном множестве*. В определении **кольца** речь идет о *двух операциях на одном множестве*. В определении **модуля** говорится о *двух множествах и операциях на них*. После введения этих понятий можно говорить об **отображениях** множеств и **тензорном умножении** (одном из способов отображения двух множеств в одно с появлением нового качества). А именно с помощью множества векторов будет получено множество операторов. Тензорное умножение играет ключевую роль в тензорном исчислении. С его помощью вводится определение **диады**, которая используется для построения **тензора** (линейного оператора), отображающего векторы в новые векторы.

Нас интересует описание движения среды в окружающем нас мире. Происходит оно в трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому ниже будет приведена аксиоматика, необходимая для введения понятия векторов и операций с ними, которые используются для описания поведения сплошной среды в реальном мире.

2.1. Множества и отображения

Бинарная оперция Бинарная операция представляет собой закон, согласно которому каждой паре элементов рассматриваемого множества ставится в соответствие единственный элемент этого же множества.

Группа Группой называется произвольное множество с одной бинарной операцией (используем для обозначения этой операции символ $\odot$), удовлетворяющий аксиомам: 1) ассоциативности $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ для любых a, b и c из множества; 2) существования на множестве элемента e, удовлетворяющего равенствам $a \odot e = e \odot a = a$; 3) существования на множестве элемента x для любого a, удовлетворяющего равенствам $a \odot x = x \odot a = e$.

Абелевой группой называется группа, операция в которой удовлетворяет закону коммутативности $a \odot b = b \odot a$.

Аддитивной группой называется группа, образуемая всеми элементами множества относительно операции сложения. Пояснение. Для обозначения бинарной операции в этом случае используется символ $+$. Элемент e называется нулевым, и для его обозначения используется символ 0. Элемент x называется противоположным к элементу a, и для его обозначения обычно используется символ $-a$.

Мультипликативной группой называется группа, образуемая всеми элементами множества относительно операции умножения. Пояснение. Часто при написании формул символ операции умножения между элементами, к которым она применяется, опускается. То, что стоящие рядом элементы в формулах перемножаются, бывает ясно по смыслу без уточнения. Элемент e в мультипликативной группе называется единичным, и для его обозначения используется символ 1. Элемент x называется обратным к элементу a, и для его обозначения обычно используется символ a^{-1}.

Кольцо Кольцом называется множество с двумя бинарными операциями: сложения и умножения. При этом данное множество: 1) являются абелевой группой относительно сложения; 2) операция умножения удовлетворяет правому $x(y+z) = xy + xz$ и левому $(y+z)\,x = yx + zx$ законам дистрибутивности относительно сложения для любых элементов x, y и z из кольца.

Ассоциативным кольцом называется кольцо, операция умножения в котором удовлетворяет закону ассоциативности. *Коммутативным кольцом* называется кольцо, умножение в котором коммутативно. Единицей (обозначаемой обычно символом 1) называется такой элемент кольца, что $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ для всех элементов x кольца.

Полем называется ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, множество ненулевых элементов которого не пусто и образует группу относительно умножения. Пояснение. Примером поля может служить множество действительных чисел с введенными на нем операциями сложения и умножения. Для его обозначения обычно используется символ $\mathcal{R}$.

Модуль

Аддитивная абелева группа $\mathbb{M}$ называется *левым модулем* над кольцом $\mathcal{A}$, если определено отображение, которое для каждой пары α и m, состоящей из элемента α кольца $\mathcal{A}$ и элемента m группы $\mathbb{M}$, ставит в соответствие элемент группы $\mathbb{M}$, который обозначется как αm, и при этом выполняются аксиомы:

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(m_1 + m_2\right) = \alpha m_1 + \alpha m_2,\\
&\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) m = \alpha_1 m + \alpha_2 m,\\
&\alpha_1\left(\alpha_2 m\right) = \left(\alpha_1 \alpha_2\right) m,
\end{aligned}$$

где α, α_1, α_2 являются элементами кольца $\mathcal{A}$; m, m_1, m_2 — элементами модуля $\mathbb{M}$. Пояснение. Примером модуля может служить множество действительных чисел и множество векторов, на которых введена операция умножения действительного числа на вектор. Кольцо $\mathcal{A}$ в этом случае представляет собой множество действительных чисел с операциями сложения и умножения, а аддитивную группу $\mathbb{M}$ образует множество векторов.

Аддитивная абелева группа $\mathbb{M}$ называется *правым модулем* над кольцом $\mathcal{A}$, если определено отбражение, которое для каждой пары α и m, состоящей из элемента α кольца $\mathcal{A}$ и элемента m группы $\mathbb{M}$, ставит в соответствие элемент $m\alpha$ группы $\mathbb{M}$ при условии выполнения аксиом:

$$\begin{aligned}
&\left(m_1 + m_2\right)\alpha = m_1\alpha + m_2\alpha,\\
&m\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = m\alpha_1 + m\alpha_2,\\
&\left(m\alpha_1\right)\alpha_2 = m\left(\alpha_1\alpha_2\right),
\end{aligned}$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ и $m, m_1, m_2 \in \mathbb{M}$.

В случае, когда кольцо $\mathcal{A}$ коммутативно, различие между левым и правым модулями исчезает. В этом случае говорят о модуле $\mathbb{M}$ над коммутативным кольцом $\mathcal{A}$.

Унитарным модулем называется модуль, в котором кольцо $\mathcal{A}$ обладает единицей и для любого элемента модуля m выполняется равенство $1m = m$.

Бимодулем называется абелева группа $\mathbb{M}$, являющаяся левым модулем над кольцом $\mathcal{A}$ и правым модулем над кольцом $\mathcal{B}$, причем $(\alpha m)\beta = \alpha(m\beta)$ для любых $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{M}$, $\beta \in \mathcal{B}$.

Прямое произведение

Прямым произведением (декартовым произведением) двух непустых множеств X и Y называется множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y)|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Если одно из множеств X или Y пусто, произведение пусто.

Символом $\mathcal{R}^3$ обычно обозначается множество, получаемое в результате следующего тройного прямого произведения $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, где символом $\mathcal{R}$ обозначено множество действительных чисел.

Отображение

Однозначным отображением называется закон, по которому каждому элементу некоторого множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого множества Y (при этом X может совпадать с Y). Соотношение элементов $x \in X$ и $y \in Y$ записывается в виде $y = f(x)$, $y = fx$ или $y = y(x)$. Кроме этого может использоваться запись $f : X \to Y$. Понятие *отображение* совпадает с понятиями *функция*, *оператор*, *преобразование*.

Отображение $f : X \to Y$ порождает множество M, называемое графиком отображения, элементы которого образуют множество пар x, $f(x)$ и являются подмножеством множества $X \times Y$ всех пар x, y.

$$\{\, x, f(x)|\, x \in X\} \subset X \times Y.$$

Линейным отображением (линейной функцией) называется отображение унитарного модуля $\mathbb{A}$ над ассоциативно-коммутативным кольцом $\mathcal{A}$ с единицей в модуль $\mathbb{C}$, в котором каждому элементу a, где $a \in \mathbb{A}$, ставится в соответствие элемент $\varphi(a)$ модуля $\mathbb{C}$ и удовлетворяются следующие условия:

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2),$$
$$\varphi(\alpha a) = \alpha\, \varphi(a),$$

где $\alpha \in \mathcal{A}$; $a, a_1, a_2 \in \mathbb{A}$. В дальнейшем нас будут интересовать линейные отображения множества векторов в себя (в то же самое множество векторов), которые осуществляются с помощью тензоров второго ранга.

Билинейным отображением (билинейной функцией) называется отображение произведения $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ левого унитарного модуля $\mathbb{A}$ над кольцом $\mathcal{A}$ с единицей и правого унитарного модуля $\mathbb{B}$ над кольцом $\mathcal{B}$ с единицей в бимодуль $\mathbb{H}$, в котором каждой паре элементов a и b, где $a \in \mathbb{A}$ и $b \in \mathbb{B}$, ставится в соответствие элемент $f(a, b)$ бимодуля $\mathbb{H}$ и удовлетворяются следующие условия:

$$\begin{aligned}
&f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b),\\
&f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2),\\
&f(\alpha a, b) = \alpha\, f(a, b),\\
&f(a, b\beta) = f(a, b)\,\beta,
\end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathcal{A}$; $\beta \in \mathcal{B}$; $a, a_1, a_2 \in \mathbb{A}$; $b, b_1, b_2 \in \mathbb{B}$.

Для введения понятий тензоров третьего и более высоких рангов необходимо использовать понятие “полилинейное отображение”. Его мы рассматривать не будем.

Тензорное произведение

Тензорным произведением унитарных модулей $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над коммутативно-ассоциативным кольцом $\mathcal{A}$ с единицей называется модуль $\mathbb{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}$ над кольцом $\mathcal{A}$, удовлетворяющий следующему условию. Существует билинейное отображение

$$(a, b) \to a \otimes b \in \mathbb{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B},$$

ставящее в соответствие парам (a, b) элементов множеств $a \in \mathbb{A}$ и $b \in \mathbb{B}$ элементы $a \otimes b$ множества $\mathbb{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}$, сохраняющее тождество их строения. Это означает, что для любого билинейного отображения

$$f : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{W}$$

в произвольный модуль $\mathbb{W}$ над кольцом $\mathcal{A}$ существует единственное линейное отображение в тот же самый модуль

$$\varphi : \mathbb{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B} \to \mathbb{W},$$

такое, что

$$f(a, b) = \varphi(a \otimes b).$$

Пояснение. Следует обратить внимание на то, что упорядоченная пара (a, b) и элемент $a \otimes b$ принадлежат разным множествам. Между ними имеется принципиальное качественное различие. Приведем пример, используя для иллюстрации множество векторов. В этом случае элемент $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ является только упорядоченной парой векторов, в то время как элемент $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ применяется в тензорном исчислении как математический оператор. Упорядоченные пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ могут быть использованы в билинейном отображении, в то время как элементы $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ могут принимать участие только в линейном отображении (поскольку они по своему смыслу представляет собой элементы одного множества, а не пары элементов двух множеств).

Необходимо обратить внимание на тот факт, что пары $(c\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}, c\mathbf{b})$, где c — действительное число, отличаются друг от друга. Они являются парами разных векторов. В отличие от них в тензорном исчислении элементы $c\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \otimes c\mathbf{b}$ представляют собой разные формы записи одного и того же оператора.

Важным моментом в определении тензорного произведения является следующее. Для любой функции f, аргументом которой является упорядоченная пара векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, можно указать аналогичную функцию φ от аргумента $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, которая позволяет точно так же описывать процессы в реальном мире, как и функция f.

2.2. Векторы

Скаляр

Величина является одним из основных математических понятий, смысл которой связан с определенным способом сравнения физических тел и других объектов. *Скаляром* называется величина, каждое значение которой может быть выражено одним действительным числом.

Пространство

Векторным пространством называется аддитивная абелева группа E над полем K, в котором определено умножение элементов на скаляры, т. е. отображение

$$K \times E \to E : (\lambda, x) \to \lambda x,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$\begin{aligned} &\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \\ &(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x, \\ &(\lambda\mu)\, x = \lambda\,(\mu x), \\ &1 \cdot x = x, \end{aligned}$$

где $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in K$. Из аксиом вытекают важные следствия:

$$\lambda \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot x = 0, \qquad (-1)\, x = -x.$$

Элементы векторного пространства называются *точками векторного пространства*, или *векторами*, а элементы поля K — *скалярами.*

Евклидово пространство представляет собой пространство, свойство которого определяется аксиомами евклидовой геометрии.

Пояснение. Первая, достаточно строгая аксиоматика евклидова пространства предложена Д. Гильбертом. Она содержит 20 аксиом. Основными (неопределяемыми) понятиями являются точки, прямые, плоскости и отношения между ними. В качестве примера приведем некоторые из этих аксиом: 1. Для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих точек. 2. Для двух различных точек существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих двух точки. 3. На каждой прямой лежат по крайне мере две точки. Существуют по крайней мере три точки,не лежащие на одной прямой. 4. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует плоскость, проходящая через каждую из этих точек. На каждой плоскости лежит по крайне мере одна точка. 5. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек ...

Векторно-точечная аксиоматика

Векторно-точечная аксиоматика представляет собой аксиоматику, первичными понятиями которой являются “точка” и “вектор”. Связь между ними реализуется с помощью сопоставления парам точек однозначно определенного вектора.

В математике рассматриваются n-мерные векторные пространства. В механике и термодинамике сплошной среды моделируются процессы в трехмерном евклидовом пространстве. Но это не означает, что только элементы трехмерного векторного пространства входят в уравнения. При построении математических моделей механики и термодинамики сплошной среды используются величины, являющиеся элементами 9-мерного векторного пространства (тензоры второго ранга), 81-мерного (тензоры четвертого ранга) и т. д.

Вектор

Вектором, используемым в механике и термодинамике сплошной среды, называется направленный отрезок прямой трехмерного евклидова пространства, у которого один конец (точка A) называется началом, другой (точка B) — концом. Для его обозначения часто используются строчные полужирные буквы, например $\mathbf{a}$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обычно обозначается $\mathbf{0}$. Вектор характеризуется *модулем*, который равен длине отрезка AB, и обозначается $|\mathbf{a}|$ и направлением: от A к B. Вектор, имеющий длину, равную единице, называется *единичным*. Нулевому вектору приписывают любое направление. Два вектора называются равными, если они имеют одинаковые модули и одинаково направлены.

Суммой $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, проведенный из начала $\mathbf{a}$ к концу $\mathbf{b}$, если конец $\mathbf{a}$ и начало $\mathbf{b}$ совмещены. Операция сложения векторов обладает свойствами:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (коммутативности);
2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (ассоциативности);
3) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ (наличием на множестве векторов нулевого элемента);
4) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ (наличием на множестве векторов *противоположного* элемента $-\mathbf{a}$ вектору $\mathbf{a}$).

Разностью $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$.

Произведением $\lambda\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$ на число λ в случае $\lambda\neq 0$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ называется вектор, модуль которого равен $|\lambda||\mathbf{a}|$ и который направлен в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{a}$, если $\lambda>0$, и в противоположную, если $\lambda<0$. Если $\lambda=0$ или (и) $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, то $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ (дистрибутивности относительно сложения векторов);
2) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ (дистрибутивности относительно сложения чисел),
3) $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$ (ассоциативности);
4) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$ (умножения на единицу).

Ненулевые векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{c}$ называются *линейно независимыми,* если равенство

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\cdots+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

возможно только в том случае, когда все входящие в него числа α, β, ..., γ равны нулю. В механике и термодинамике сплошной среды рассматривается трехмерное пространство, в котором может существовать не более трех линейно независимых векторов.

Скалярным произведением $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (коммутативности);

2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (дистрибутивности относительно сложения векторов);
3) $\lambda\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$ (ассоциативности относительно умножения на число);
4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или (и) $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ или когда $\varphi = 0,5\pi$.

Ортонормированным базисом называется тройка, состоящая из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов).

Коллинеарными векторами называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторным произведением $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ненулевых и неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, модуль которого равен произведению их модулей на синус угла φ между ними, перпендикулярный к $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, что тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — правая. Векторное произведение обладает свойствами:

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (антикоммутативности);
2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (дистрибутивности относительно сложения векторов);
3) $\lambda\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$ (ассоциативности относительно умножения на число);
4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или (и) $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ или когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

2.3. Тензоры второго ранга

Диада Диадой $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ называется элемент множества $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, который определяет отображение $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ множества векторов евклидова пространства $\mathcal{E}$ на себя:

$$f:\ \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

по закону

$$\mathbf{y} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{a}$$

с помощью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$.

Тензор второго ранга Тензором второго ранга $\mathbf{A}$ называется оператор

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i,$$

который определяет отображение $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ множества векторов евклидова пространства $\mathcal{E}$ на себя:

$$\mathbf{A}: \ \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

по закону

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_A} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})\, \mathbf{p}_i,$$

где векторы $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$, N_A — целое число.

Пояснение. В качестве $\mathbf{p}_i$ могут использоваться девять векторов:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1 = a^{11}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}_2 = a^{12}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_3 = a^{13}\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{p}_4 = a^{21}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}_5 = a^{22}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_6 = a^{23}\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{p}_7 = a^{31}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}_8 = a^{32}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_9 = a^{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

и в качестве $\mathbf{q}_i$ девять векторов

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{q}_4 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_5 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{q}_6 = \mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{q}_7 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_8 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{q}_9 = \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — тройка неколлинеарных векторов, a^{ij} — некоторые числа. В этом случае тензор второго ранга может быть представлен в виде двойной суммы

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a^{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Для упрощения записи математических выражений принято опускать в формулах круглые скобки около вектора, на который действует оператор

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Равенство тензоров Два тензора второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ считаются равными ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) в том и только в том случае, когда они задают одно и то же отображение векторного пространства на себя.

Пояснение. Используя правило отображения векторного пространства на себя с помощью тензоров второго ранга нетрудно проверить, что тензоры $\mathbf{A} = c\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{a} \otimes c\mathbf{b}$ определяют одно и то же отображение. Следовательно, они являются разными вариантами записи одного и того же оператора, т. е. равны друг другу: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Сложение тензоров Суммой тензоров $\mathbf{A} = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{p}_{N_A} \otimes \mathbf{q}_{N_A}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{u}_{N_B} \otimes \mathbf{v}_{N_B}$ называется тензор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, определяемый формулой

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{p}_{N_A} \otimes \mathbf{q}_{N_A} + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{u}_{N_B} \otimes \mathbf{v}_{N_B}.$$

Введенная таким образом операция сложения обеспечивает выполнение равенства

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{w},$$

подчиняется закону коммутативности

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{w} = (\mathbf{B} + \mathbf{A})\,\mathbf{w}$$

и ассоциативности

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{w} + \mathbf{C}\,\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{w} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{w},$$

что позволяет говорить о коммутативности и ассоциативности операции сложения самих тензоров

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Умножение тензора на скаляр, Тензором $c\mathbf{A}$, полученным в результате умножения скаляра c на тензор $\mathbf{A} = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{p}_{N_A} \otimes \mathbf{q}_{N_A}$, называется тензор

$$c\mathbf{A} = c\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{N_A} (c\,\mathbf{p}_i) \otimes \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes (c\,\mathbf{q}_i).$$

Векторное пространство тензоров второго ранга

Покажем, что множество тензоров второго ранга образует девятимерное векторное пространство. С этой целью представим векторы, входящие в диады тензора $\mathbf{A} = \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{p}_{N_A} \otimes \mathbf{q}_{N_A}$ с помощью неколлинеарной тройки векторов $\mathbf{e}_i$.

$$\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^{3} p^{ni}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{q}_n = \sum_{i=1}^{3} q^{ni}\mathbf{e}_i.$$

Тензор $\mathbf{A}$ определяется в этом случае с помощью выражения

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{N_A} \left(\sum_{i=1}^{3} p^{ni}\mathbf{e}_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{3} q^{nj}\mathbf{e}_j \right),$$

которое можно записать в форме

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{n=1}^{N_A} p^{ni} q^{nj} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{2.1}$$

Но это означает, что тензор $\mathbf{A}$ можно представить в виде разложения по девяти векторам $\mathbf{E}_i$ девятимерного векторного пространства:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{9} a_i \mathbf{E}_i,$$

где тензоры второго ранга

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \qquad &&\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \qquad &&\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3,\\
&\mathbf{E}_4 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \qquad &&\mathbf{E}_5 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \qquad &&\mathbf{E}_6 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3,\\
&\mathbf{E}_7 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \qquad &&\mathbf{E}_8 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \qquad &&\mathbf{E}_9 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

образуют векторный базис в девятимерном векторном пространстве. Коэффициенты в разложении по базису вычисляются по формулам:

$$a_1 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n1}\, q^{n1}, \qquad a_2 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n1}\, q^{n2}, \qquad a_3 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n1}\, q^{n3},$$

$$a_4 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n2}\, q^{n1}, \qquad a_5 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n2}\, q^{n2}, \qquad a_6 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n2}\, q^{n3},$$

$$a_7 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n3}\, q^{n1}, \qquad a_8 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n3}\, q^{n2}, \qquad a_9 = \sum_{n=1}^{N_A} p^{n3}\, q^{n3}.$$

Следует отметить, что любой тензор можно представить в виде суммы трех диад. Например, используя математическую запись (2.1), тензор $\mathbf{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{w}_j \otimes \mathbf{e}_j,$$

где

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{n=1}^{N_A} p^{ni} q^{nj} \right) \mathbf{e}_i.$$

Введение понятия скалярного умножения тензоров второго ранга (векторов в девятимерном пространстве) будет рассмотрено в следующей главе. С помощью операции скалярного умножения можно ввести понятия расстояния и направления в девятимерном пространстве, оценивать близость тензоров, описывать геометрию девятимерного пространства. Операция скалярного умножения тензоров второго ранга используется при введении понятия тензора четвертого ранга.

2.4. Тензоры четвертого ранга

Мы не будем останавливаться подробно на определениях, позволяющих ввести понятие тензоров третьего, четвертого и более высоких рангов. Делается это аналогичным образом, как и при введении понятия тензора второго ранга. В итоге тензор $\mathbb{A}$ четвертого ранга определяется в виде суммы, каждое из слагаемых в которой представляет собой результат тензорного умножения четырех векторов:

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i.$$

Нетрудно заметить, что множество тензоров четвертого ранга образует 81-мерное векторное пространство.

Тензоры четвертого ранга являются операторами, которые определяют отображение $\mathbf{Y} = \mathbb{A}(\mathbf{X})$ множества тензоров второго ранга $\mathcal{T}$ на себя:

$$\mathbb{A} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

по закону

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{a}_j \otimes \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i,$$

где

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{T}, \qquad \mathbf{X} = \sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{b}_j \ \in \mathcal{T}.$$

Как и в случае с тензорами второго ранга, отображающими множество векторов на себя, круглые скобки в математических выражениях принято опускать.

$$\mathbb{A}(\mathbf{X}) \equiv \mathbb{A}\mathbf{X}.$$

Глава 3

Элементы тензорной алгебры

Алгебра представляет собой часть математики, посвященную изучению алгебраических операций. Природа множеств — носителей алгебраических операций — с точки зрения алгебры безразлична. Тензорная алгебра изучает алгебраические операции на множестве тензоров.

Рассмотрим вывод основных формул тензорной алгебры, используемых в механике сплошной среды. Но прежде сделаем несколько пояснений. Для удобства работы с текстом рассматриваемые нами основные формулы и определения помещены в рамки. Комментарий к ним и их вывод располагается ниже. Такой вид позволяет быстро находить нужное математическое выражение в тексте и комментарии к нему.

Чтобы каждый раз не повторять одни и те же фразы, договоримся о следующем. Тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в тексте всегда будут представляться с помощью векторов, обозначенных символами $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{s}_i$, и использоваться в приведенном ниже виде. Символами N_A, N_B, N_C обозначены целые положительные числа. Во многих случаях в механике и термодинамике сплошной среды удается указать физико-механический смысл векторов, определяющих рассматриваемый тензор. Например, для записи тензора напряжений удобно использовать векторы, определяющие направления главных осей. Для записи тензора поворота могут применяться векторы исходной и повернутой ортонормированных троек, задающих этот поворот. В результате формулы становятся удобными для понимания физического смысла и для использования их в математических выкладках.

Математическая запись тензоров, используемая в тексте при формулировке определений и при доказательстве формул

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{C} = \sum_{k=1}^{N_C} \mathbf{h}_k \otimes \mathbf{s}_k$$

При решении практических задач, как правило, применяется запись тензоров с помощью ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a^{ij}\,\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b^{ij}\,\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c^{ij}\,\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j.$$

С целью сравнения в дальнейшем многие формулы будут повторяться в виде выражений, записанных с использованием ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$.

3.1. Определения тензоров и математических операций

Нулевой тензор $\mathbf{0}$ *отображает произвольный вектор* $\mathbf{w}$ *в нулевой*

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{w}$$

Обычно для обозначения нулевого тензора используется в литературе тот же символ, что и для нулевого вектора.

Единичный тензор $\mathbf{I}$ *отображает произвольный вектор* $\mathbf{w}$ *в себя*

$$\mathbf{w} = \mathbf{I}\mathbf{w}$$

С помощью ортонормированной тройки векторов единичный тензор представляется в виде

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i.$$

В этом нетрудно убедиться. Согласно правилу действия тензора на вектор имеем

$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \left(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i\right)\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{w}\cdot\mathbf{i}_i)\,\mathbf{i}_i.$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{w}\cdot\mathbf{i}_i$ является ничем иным, как компонентой w_i вектора $\mathbf{w}$ при записи вектора с помощью ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$. Из этого следует выполнение условия

$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} w_i\,\mathbf{i}_i = \mathbf{w},$$

что и требовалось показать.

Произведение тензоров

$$\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{v}_j$$

Операция произведения, введенная согласно правилу, указанному в рамке, определяет с помощью двух тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ новый тензор $\mathbf{C}$. Легко проверить, что при использовании для записи тензоров ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ результирующий тензор $\mathbf{C}$ будет определяться по правилу

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} a^{ik} b^{kj} \right) \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j .$$

Далее будет показано, что последовательное действие на произвольный вектор $\mathbf{w}$ операторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ эквивалентно действию на вектор $\mathbf{w}$ оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, т. е. выполняется равенство $\mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{w}) = (\mathbf{AB})\,\mathbf{w}$.

Положительная целая степень тензора

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} \quad \textit{и т. д.}$$

Из определения степени тензора и правила умножения тензоров вытекают правила возведения в степень для целых степеней $n \geq 0$ и $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+m} &= \mathbf{A}^n \mathbf{A}^m, \\ (\alpha \mathbf{A})^n &= \alpha^n \mathbf{A}^n, \\ (\mathbf{A}^n)^m &= (\mathbf{A}^m)^n. \end{aligned}$$

Возведение в степень p тензора
$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, *где* $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $a_i > 0$

$$\mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^{3} a_i^{\,p}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Показатель степени p является произвольным действительным числом. Очевидно, что при возведении в целую положительную степень тензора $\mathbf{A}$ получаются формулы, определяемые раньше. В частности, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$ и т. д.

Скалярное произведение тензоров

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{u}_j) \, (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{v}_j)$$

В результате выполнения операции скалярного произведения тензоров получается скалярная величина. По своему математическому смыслу данная операция представляет собой скалярное произведение девятимерных векторов. Этими векторами являются тензоры второго ранга. Операция дает возможность ввести понятие модуля девятимерного вектора или *норму тензора*

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}.$$

Следовательно, можно ввести понятие расстояния в пространстве тензоров второго ранга, которое дает представление о близости элементов пространства и является необходимым для формулировки определений непрерывности и дифференцируемости тензоров. Расстояние l между элементами пространства $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и угол γ между ними вычисляются по формулам

$$l = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|, \qquad \cos\gamma = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}|}\,.$$

При использовании ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ результат скалярного произведения тензоров записывается в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a^{ij} \, b^{ij}.$$

Девять диад $\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ образуют ортонормированный базис в девятимерном векторном пространстве, которое формирует множество тензоров второго ранга. Их скалярное произведение

$$\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_m$$

равно единице в том и только в том случае, когда $i = k$ и $j = m$. В остальных случаях скалярное произведение диад равно нулю. Поэтому разложение тензора $\mathbf{A}$ по диадам $\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ осуществляется с помощью обычных формул разложения векторов по ортонормированному базису

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a^{ij} \, \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j, \quad \text{где} \quad a^{ij} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j\,.$$

След тензора

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_i$$

При использовании для математической записи тензора ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ след тензора вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a^{ii}.$$

Транспонированный тензор

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{p}_i$$

С помощью ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ транспонированный тензор может быть представлен в виде математического выражения

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a^{j\,i}\,\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j.$$

Из определения транспонированного тензора следует автоматическое выполнение равенств

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \qquad \left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$

Симметричный тензор

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

С использованием ортонормированной тройки векторов симметричный тензор записывается в виде математического выражения, в котором коэффициенты удовлетворяют условию $a^{ij} = a^{j\,i}$.

Антисимметричный тензор

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

Антисимметричный тензор с помощью ортонормированной тройки векторов представляется математическим выражением, в котором коэффициенты удовлетворяют условию $a^{ij} = -a^{j\,i}$.

Обратный тензор $\mathbf{A}^{-1}$ *к тензору* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Если с помощью тензора $\mathbf{A}$ вектор $\mathbf{w}$ отображается в вектор $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{w},$$

то с помощью обратного тензора $\mathbf{A}^{-1}$ вектор $\mathbf{z}$ отображается в вектор $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{z}.$$

Тензоры, у которых существуют обратные тензоры, называются *обратимыми*. Из определения обратного тензора следует выполнение равенства

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}.$$

Определитель тензора

$$\det\ \mathbf{A} = \frac{1}{6}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{A})^3 - 3\operatorname{tr}\mathbf{A}\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^2\right) + 2\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^3\right)\right]$$

Подставляя в данное определение выражение тензора $\mathbf{A}$, с помощью ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$ можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{aligned}\det\ \mathbf{A} \ &= \ a^{11}a^{22}a^{33} - a^{11}a^{23}a^{32} - a^{21}a^{12}a^{33} + \\ &+ a^{21}a^{13}a^{32} + a^{31}a^{12}a^{23} - a^{31}a^{13}a^{22} = \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Из определения следует очевидное свойство определителя:

$$\det\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det\ \mathbf{A}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости формулы

$$\det\left(\mathbf{AB}\right) = \det\ \mathbf{A}\ \det\ \mathbf{B}.$$

Ее проверку легко осуществить, используя символьное программирование на компьютере в системах MATLAB, MAPLE и т. д.

Ортогональный тензор

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

Ортогональный тензор обладают важным свойством. Транспонированный к нему тензор равен обратному. В дальнейшем будет показано, что ортогональный тензор сохраняет скалярное произведение, т. е. для произвольных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполняется равенство

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

В частности, ортонормированная тройка векторов с помощью ортогонального тензора переводится в другую ортонормированную тройку векторов. Свойство определителей позволяет написать следующие равенства:

$$(\det\,\mathbf{Q})^2 = \det\,\mathbf{Q}\,\det\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \det\,\mathbf{Q}\,\det\,\mathbf{Q}^{-1} = \det\,(\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^{-1}) = 1.$$

Поэтому определитель ортогонального тензора равен или единице или минус единице.

> *Собственно ортогональный тензор (поворот)*
>
> $$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}, \quad \det\,\mathbf{R} = 1$$

Собственно ортогональный тензор, или *поворот*, является частным случаем ортогонального тензора. Определитель его по определению равен единице. Можно убедиться, что с его помощью правая ортонормированная тройка векторов переводится в другую правую ортонормированную тройку векторов.

> *Положительно определенный тензор*
>
> $$\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} > 0, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Положительно определенным называется симметричный тензор $\mathbf{A}$, у которого выражение $\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}$ имеет положительное значение для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$.

Аналогичным образом вводятся понятия *положительного* тензора (когда значение выражения $\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} \geq 0$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$), *отрицательно определенного* (когда $\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} < 0$) и *отрицательного* тензора (когда $\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} \leq 0$).

> *Инварианты тензора*
>
> $$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \operatorname{tr}\mathbf{A}, \\ I_2(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}\Big((\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)\Big), \\ I_3(\mathbf{A}) &= \det\,\mathbf{A} \end{aligned}$$

Инварианты тензора используются для определения его собственных чисел. В свою очередь, собственные числа используются для нахождения собственных векторов рассматриваемого тензора.

Собственные векторы и собственные числа

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

Ненулевой вектор $\mathbf{a}$, который отображается с помощью тензора $\mathbf{A}$ в вектор $\alpha\mathbf{a}$, называется собственным вектором тензора $\mathbf{A}$, а число α — собственным числом (собственным значением). Найти их можно следующим образом. Разложим вектор $\mathbf{a}$ по ортонормированной тройке $\mathbf{i}_i$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i$$

и подставим его в математическую запись определения собственного вектора

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i \right) = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i \right).$$

Умножим скалярно на вектор $\mathbf{i}_j$ правую и левую части полученного равенства:

$$\mathbf{i}_j \cdot \alpha \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i \right) = \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i \right).$$

В результате оно примет вид

$$\alpha\, x_j = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{A}\,(x_i \mathbf{i}_i) = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_i)\, x_i.$$

Меняя значения j от единицы до трех, получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a^{11}x_1 + a^{12}x_2 + a^{13}x_3 &= \alpha x_1, \\ a^{21}x_1 + a^{22}x_2 + a^{23}x_3 &= \alpha x_2, \\ a^{31}x_1 + a^{32}x_2 + a^{33}x_3 &= \alpha x_3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Коэффициенты матрицы в ней вычисляются по формуле $a^{ji} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_i$. Решение выписанной системы уравнений определяет собственные векторы $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i}_1 + x_i\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$ и собственные значения α тензора $\mathbf{A}$.

Из теории решения систем линейных уравнений известно, что ненулевое решение системы (3.1) существует только в том случае, когда определитель матрицы системы равен нулю. Это требование формулируется в виде уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}) = 0, \tag{3.2}$$

т. е.

$$-\alpha^3 + I_1(\mathbf{A})\,\alpha^2 - I_2(\mathbf{A})\,\alpha + I_3(\mathbf{A}) = 0. \tag{3.3}$$

Легко проверить эквивалентность равенств (3.2) и (3.3), используя символьное программирование на компьютере в системах MATLAB, MAPLE и т. д. Уравнение (3.3) является кубическим уравнением с действительными коэффициентами. Оно имеет или один, или три действительных корня. Следовательно, тензоры имеют или одно, или три действительных собственных числа.

Ортопроектор
$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

Ортопроекторы могут быть использованы для нахождения проекций геометрических фигур на заданную прямую или плоскость. Например, с помощью тензора $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2$ определяется проекция вектора $\mathbf{w} = w_1\,\mathbf{i}_1 + w_2\,\mathbf{i}_2 + w_3\,\mathbf{i}_3$ на плоскость, нормалью которой является вектор $\mathbf{i}_3$:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = w_1\,\mathbf{i}_1 + w_2\,\mathbf{i}_2,$$

где $\mathbf{i}_i$ — ортонормированная тройка векторов.

Нильпотентный тензор
$\mathbf{A}^m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^p \neq \mathbf{0},$
$0 < p < m$

Нильпотентным тензором класса m называется тензор, который при возведении в степень p при $0 < p < m$ дает тензор, отличный от нулевого, а при возведении в степень m становится нулевым. Числа m и p являются целыми положительными.

$\exp\,\mathbf{A} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}\,\mathbf{A}^k$

Обратной функцией к экспоненциальной является логарифмическая функция $\mathbf{B} = \ln \mathbf{A}$. Определяется она как зависимость тензора $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A})$ от аргумента $\mathbf{A}$ при условии, что между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеется связь $\exp\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

В том случае, когда тензор задается ортонормированной тройкой векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и тремя числами a_1, a_2, a_3,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

экспоненциальная и логарифмические функции от него определяются простыми выражениями:

$$\exp\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \exp a_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \qquad \ln\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \ln a_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

В отличие от множества действительных чисел для произвольных тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, как правило справедливыми бывают неравенства

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \neq \exp \mathbf{A} \exp \mathbf{C}, \qquad \ln(\mathbf{AC}) \neq \ln \mathbf{A} + \ln \mathbf{C}.$$

3.2. Основные формулы тензорной алгебры

$$\boxed{(\mathbf{AB})\,\mathbf{w} = \mathbf{A}\,(\mathbf{Bw})}$$

Для того чтобы доказать выделенное в рамке равенство, рассмотрим конкретный вид левой и правой его частей. Перепишем левую часть равенства, используя представление тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с помощью диад. Левая часть равенства примет вид

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{w} = \left(\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j\right)\right)\mathbf{w}.$$

Осуществив операцию умножения тензоров, придем к формуле

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{w} = \left(\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{v}_j\right)\mathbf{w}.$$

Поэтому вектор, получаемый в результате действия оператора $\mathbf{AB}$ на вектор $\mathbf{w}$, имеет вид

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{p}_i.$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства. Нашей целью является проверить, имеет ли оно тот же самый математический смысл. Расшифруем правую часть, используя запись тензоров с помощью диад:

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bw}) = \left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j\right)\mathbf{w}\right).$$

Осуществим отображение вектора $\mathbf{w}$ в новый вектор с помощью оператора $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_j)\, \mathbf{u}_j\right).$$

Следующим шагом является отображение полученного вектора $\mathbf{B}\mathbf{w}$ с помощью оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_j)(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}_i)\, \mathbf{p}_i.$$

Мы пришли к одному и тому же математическому выражению в результате преобразования левой и правой частей равенства, что и требовалось установить.

Следствием рассмотренной формулы является тот факт, что при проведении выкладок можно не уточнять в математических формулах место расположения скобок:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\, \mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{w}.$$

Неважно, действуем ли мы вначале оператором $\mathbf{B}$ на вектор $\mathbf{w}$ и после этого оператором $\mathbf{A}$ на полученный вектор или осуществляем вначале произведение тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и применяем его для преобразования вектора $\mathbf{w}$, на результат это не влияет.

$$\boxed{(\mathbf{A}\mathbf{B})\, \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})}$$

Чтобы убедиться в справедливости заключенной в рамку формулы, достаточно расшифровать конкретный вид правой и левой ее частей с помощью диад и выполнить операцию произведения тензоров. Легко проверить, что в обоих случаях мы получим выражение

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} \sum_{k=1}^{N_C} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{h}_k)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{s}_k.$$

$$\boxed{\operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}}$$

Докажем вначале справедливость первого равенства. Рассмотрим для этого второе выражение в данной цепочке равенств. Подставим в него представление тензора $\mathbf{A}$ в виде суммы диад:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}}.$$

Используя определение транспонированного тензора, преобразуем рассматриваемое выражение:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{q}_i\otimes\mathbf{p}_i\right).$$

Определение следа тензора позволяет нам получить окончательную запись:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{p}_i.$$

Но это не что иное, как первое выражение в цепочке равенств.

Осталось убедиться в эквивалентности третьего выражения первым двум. Представим для этого тензоры $\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}$ с помощью диад:

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_A}\mathbf{p}_j\otimes\mathbf{q}_j\right).$$

Здесь векторы $\mathbf{i}_i$ образуют ортонормированную тройку. Используя определение операции скалярного умножения, перепишем рассматриваемое выражение:

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N_A}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{i}_i)(\mathbf{q}_j\cdot\mathbf{i}_i).$$

Используя свойства векторов $\mathbf{i}_i$, преобразуем его:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}\cdot\mathbf{A} &= \sum_{j=1}^{N_A}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{i}_i)(\mathbf{q}_j\cdot\mathbf{i}_k)(\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_i) = \\ &= \sum_{j=1}^{N_A}\left(\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{i}_i)\,\mathbf{i}_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{3}(\mathbf{q}_j\cdot\mathbf{i}_k)\,\mathbf{i}_k\right).\end{aligned}$$

Поскольку формулы представления векторов $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{q}_j$ с помощью тройки векторов $\mathbf{i}_i$ имеют вид

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{i}_i)\,\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{q}_j = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{q}_j\cdot\mathbf{i}_i)\,\mathbf{i}_i,$$

приходим к искомому равенству:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_i.$$

Оно означает эквивалентность третьего выражения первым двум.

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \\ = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{gathered}}$$

Используя определения математических операций, нетрудно убедиться, что любое из математических выражений в данной цепочке равенств дает в итоге одно и то же скалярное значение:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{u}_j)(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{v}_j).$$

Рассмотрим в качестве примера второе выражение. Подставим в него математическую запись тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с помощью диад. В результате получим представление

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j\right)^{\mathrm{T}}\right).$$

Используя определение транспонированного тензора, запишем рассматриваемое математическое выражение в форме равенства

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{u}_j\right)\right),$$

которое с помощью определения операции умножения тензоров приводится к виду

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{v}_j)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{u}_j\right).$$

Определение следа тензора дает нам окончательный вид рассматриваемого выражения:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{u}_j)(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{v}_j),$$

что и требовалось показать.

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

Расшифруем левую и правые части равенства, используя представление тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с помощью диад. Левая часть при этом примет вид

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \left(\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Осуществив произведение тензоров в математическом выражении, получаем формулу

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)\, \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{v}_j\right)^{\mathrm{T}},$$

которая с помощью определения транспонированного тензора может быть представлена в окончательном виде:

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j)\, \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{p}_i.$$

Для преобразования правой части равенства воспользуемся определением транспонированного тензора.

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{u}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{p}_i\right).$$

Затем осуществим умножение тензоров:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}_i)\, \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{p}_i.$$

В итоге для правой и левой частей равенства получены одинаковые математические выражения, что и требовалось установить.

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{CA}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{CA}^{\mathrm{T}} = \mathbf{BC} \cdot \mathbf{A}}$$

Данная цепочка равенств доказывается аналогичным образом. Как и в рассмотренных ранее случаях, подставим в математические выражения тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, записанные в виде суммы диад. Используем далее определение операций умножения, скалярного умножения и понятие транспонированного тензора. В результате для каждого выражения в цепочке равенств получим одно и то же скалярное выражение:

$$\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}\sum_{k=1}^{N_C}(\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{h}_k)(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{u}_j)(\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{s}_k).$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0 \quad \textit{при условии}\\ \mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{B}=-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\end{gathered}}$$

Для доказательства этого равенства воспользуемся свойством скалярного умножения тензоров:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$

От транспонированных тензоров можно перейти в данной формуле к использованию самих тензоров, применяя для этого условие симметричности $\mathbf{A}$ и антисимметричности $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Перенося выражение правой части равенства в левую часть, получаем окончательную формулу

$$2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0.$$

Следовательно, скалярное умножение симметричного тензора на антисимметричный дает нуль.

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{w}\cdot\mathbf{B}\mathbf{f}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{f}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\otimes\mathbf{w}}$$

Подставим в математические выражения представление тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде суммы соответствующих диад и используем определение операций умножения тензоров, скалярного умножения и понятие транспонированного тензора. Левая часть цепочки равенств примет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{w}\cdot\mathbf{B}\mathbf{f} &= \left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\right)\mathbf{w}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{v}_j\right)\mathbf{f}=\\ &= \sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\cdot\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_j)\,\mathbf{u}_j=\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i)(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_j)(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{u}_j).\end{aligned}$$

Второе выражение в цепочке равенств имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{f} &= \mathbf{w}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{v}_j\right)\mathbf{f} = \\
&= \mathbf{w}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{q}_i\otimes\mathbf{p}_i\right)\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_j)\,\mathbf{u}_j = \\
&= \mathbf{w}\cdot\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_j)(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{p}_i)\,\mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_j)(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{p}_i)(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i).
\end{aligned}$$

Третье выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{w}\cdot\mathbf{f} &= \left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{v}_j\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\right)\mathbf{w}\cdot\mathbf{f} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{v}_j\otimes\mathbf{u}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{f} = \right. \\
&= \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i)(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{p}_i)\,\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}_i)(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{p}_i)(\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{f}).
\end{aligned}$$

Аналогичный результат получается при подробной расшифровке четвертого выражения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} &= \left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{v}_j\right)\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{q}_i\otimes\mathbf{p}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N_B}\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{v}_j\right)\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{u}_j)\,\mathbf{q}_i\otimes\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{u}_j)(\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{f}).
\end{aligned}$$

Используя свойства скалярного умножения и свойства транспонированных тензоров, нетрудно установить, что пятое математическое выражение эквивалентно четвертому:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\otimes\mathbf{w} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{f}\otimes\mathbf{w}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f}.$$

Таким образом, показано, что все математические выражения в рассматриваемой цепочке равенств дают при расшифровке одно и то же скалярное значение, что и требовалось установить.

$$\boxed{\mathbf{Aw}\cdot\mathbf{f} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\otimes\mathbf{w}}$$

Данные равенства являются частным случаем рассмотренной ранее цепочки равенств при использовании единичного тензора в качестве тензора $\mathbf{B}$.

$$\boxed{\mathbf{Q}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{Q}\,\mathbf{f} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{f}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}$$

Данное равенство является следствием доказанного ранее равенства

$$\mathbf{Aw}\cdot\mathbf{Bf} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf},$$

в которое в качестве тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ необходимо подставить тензор $\mathbf{Q}$ и использовать условие его ортогональности. Геометрический смысл рассматриваемого равенства сводится к следующему. При преобразовании векторов с помощью ортогонального тензора сохраняется значение скалярного произведения между векторами.

$$\boxed{(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}}$$

Обозначим тензором $\mathbf{X}$ левую часть рассматриваемого равенства:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

Наша задача показать, что она равна правой части. Умножим для этого справа на обратный тензор к тензору $\mathbf{X}$ левую и правую части равенства (3.4):

$$\mathbf{I} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{-1}.$$

Расмотрим далее транспонированные тензоры. Естественно, что единичный тензор совпадает с транспонированным тензором. Поэтому основное внимание уделяется преобразованию правой части полученного равенства:

$$\mathbf{I} = \Big((\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{-1}\Big)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}.$$

Умножим обе части равенства справа на тензор $\mathbf{A}$, получим

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Возьмем транспонированные к обоим частям равенства тензоры

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{-1}$$

и обратные к ним

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{X}. \tag{3.5}$$

Мы пришли к искомому выражению. Осталось только использовать принятое в литературе обозначение $\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}$ для тензора $\mathbf{X}$ и с помощью равенств (3.4) и (3.5) записать окончательный результат:

$$\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}}$$

Для доказательства справедливости этого равенства используем тензор $\mathbf{X}$, определенный следующим образом:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{AB})^{-1}. \tag{3.6}$$

Обратный к нему тензор представляет собой произведение тензоров и $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{AB}.$$

Умножим справа обе части полученного равенства последовательно на тензор $\mathbf{B}^{-1}$ и тензор $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

После этого умножим обе части равенства слева на тензор $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}. \tag{3.7}$$

Сравнивая значения тензора $\mathbf{X}$, определяемые формулами (3.6) и (3.7), убеждаемся в справедливости доказываемого равенства.

Свойства симметричного тензора

Покажем, что тензор $\mathbf{A}$ имеет три действительных собственных числа. В частном случае они могут совпадать друг с другом. Кроме этого, докажем, что тензор имеет по крайней мере три собственных вектора, которые образуют ортонормированную тройку векторов. Как уже отмечалось ранее, собственные числа тензора $\mathbf{A}$ должны удовлетворять кубическому уравнению с действительными коэффициентами (3.3). Следовательно, существует по крайней мере одно действительное собственное число α_1. Пусть ему соответствует собственный вектор $\mathbf{e}_1$ единичной длины:

$$\alpha_1\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1, \qquad |\mathbf{e}_1| = 1.$$

Возьмем два ортогональных вектора единичной длины $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. При этом выберем их таким образом, чтобы получить ортонормированную тройку векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. Выясним, чему равно скалярное умножение векторов $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{k}_i$, где индекс i принимает значение 1 или 2. Используя информацию о том, что вектор $\mathbf{e}_1$ является собственным вектором тензора $\mathbf{A}$, и ортогональность векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{k}_i$, получаем

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}_i \cdot \alpha_1\mathbf{e}_1 = 0.$$

С другой стороны, симметричность тензора $\mathbf{A}$ и свойства скалярного умножения дают нам возможность записать в иной форме рассматриваемое выражение:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_1 = 0.$$

Векторы $\mathbf{A}\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{A}\mathbf{k}_2$ лежат в плоскости, нормалью которой является вектор $\mathbf{e}_1$. В той же плоскости лежат векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Поэтому $\mathbf{A}\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{A}\mathbf{k}_2$ можно представить линейной комбинацией векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Из этого следует, что для нахождения оставшихся двух собственных чисел и собственных векторов достаточно решить двумерную задачу. Рассмотрим ее.

Ищем новое собственное число α_2 и новый собственный вектор $\mathbf{e}_2$ в виде $\mathbf{e}_2 = x^1\mathbf{k}_1 + x^2\mathbf{k}_2$. Уравнение

$$\alpha_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2$$

принимает вид

$$\alpha_2 x^1\mathbf{k}_1 + \alpha_2 x^2\mathbf{k}_2 = x^1\mathbf{A}\mathbf{k}_1 + x^2\mathbf{A}\mathbf{k}_2.$$

Осуществив скалярное умножение левой и правой частей равенства на векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_2\, x^1 &= a^{11}x^1 + a^{12}x^2, \\ \alpha_2\, x^2 &= a^{21}x^1 + a^{22}x^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $a^{ij} = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{k}_j$. Из теории систем линейных уравнений следует, что число α_2 должно быть корнем уравнения

$$\alpha_2{}^2 - (a^{11} + a^{22})\,\alpha_2 + a^{11}a^{22} - a^{21}a^{12} = 0.$$

Дискриминант его

$$D = (a^{11} + a^{22})^2 - 4a^{11}a^{22} + 4a^{21}a^{12} = (a^{11} - a^{22})^2 + 4a^{21}a^{12}.$$

Симметричность тензора $\mathbf{A}$ означает равенство $a^{21} = a^{12}$. Следовательно, дискриминант не может быть отрицательным, т. е.

$$D = (a^{11} - a^{22})^2 + 4\,(a^{21})^2 \geq 0$$

и решение системы (3.8) существует.

Используем одно из решений системы (3.8) в качестве искомого числа α_2 и искомого вектора $\mathbf{e}_2$. При этом выберем в качестве $\mathbf{e}_2$ вектор единичной длины. Покажем, что вектор единичной длины $\mathbf{e}_3$, ортогональный векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, тоже является собственным. Для этого рассмотрим результаты скалярного умножения векторов $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_2$. Повторяя выкладки, описанные выше, убеждаемся в справедливости равенств

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

т. е. направление вектора $\mathbf{A}\mathbf{e}_3$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}_3$. Отличаться они могут только длиной. Обозначим отношение модулей векторов $|\mathbf{A}\mathbf{e}_3|$ и $|\mathbf{e}_3|$ числом α_3. Но это означает выполнение условия

$$\alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3,$$

что и требовалось установить. Тот факт, что некоторые или все числа α_1, α_2, α_3 могут быть нулевыми, не отразится на алгоритме построения ортонормированной тройки векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Вывод. Симметричный тензор имеет три действительных собственных числа и по крайней мере одну ортонормированную тройку собственных векторов.

Следует обратить внимание на то, что диады

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{E}_4 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{E}_5 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, & \mathbf{E}_6 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{E}_7 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{E}_8 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, & \mathbf{E}_9 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3
\end{array}$$

образуют ортонормированный векторный базис в девятимерном векторном пространстве тензоров второго ранга. Коэффициенты в разложении $\mathbf{A}$ по этому базису вычисляются по формуле

$$a^i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_i.$$

Векторы $\mathbf{e}_1$ являются собственными векторами тензора $\mathbf{A}$. Это означает, что скалярное умножение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j = 0$$

при условии $i \neq j$. При совпадении индексов получаем равенства:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \alpha_i \mathbf{e}_i = \alpha_i.$$

Следовательно, разложение тензора $\mathbf{A}$ по базису $\mathbf{E}_i$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \, \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \, \mathbf{E}_5 + \alpha_3 \, \mathbf{E}_9.$$

Вывод. Симметричный тензор $\mathbf{A}$ *определяется выражением*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

где α_i *— его собственные числа,* $\mathbf{e}_i$ *— ортонормированная тройка собственных векторов.*

<u>Пояснение</u>. В симметричных моделях механики сплошной среды используются меры деформации и тензоры напряжений, которые являются симметричными тензорами. Их собственные числа часто называют главными компонентами тензоров. В свою очередь, об ортогональной тройке собственных векторов принято говорить как о тройке векторов, определяющих направление главных осей.

Используя представление тензора $\mathbf{A}$ с помощью собственных векторов, получаем равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{A} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \operatorname{tr} (\mathbf{A}^2) &= (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2, \\ \operatorname{tr} (\mathbf{A}^3) &= (\alpha_1)^3 + (\alpha_2)^3 + (\alpha_3)^3. \end{aligned}$$

Вычисленные с их помощью инварианты тензора имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ I_2(\mathbf{A}) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \\ I_3(\mathbf{A}) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_2. \end{aligned}$$

Свойства тензора
$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \quad \det \mathbf{B} \neq 0$

Тензор $\mathbf{A}$ является симметричным. В этом легко убедиться с помощью простой проверки:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}.$$

Все собственные числа α_i тензора $\mathbf{A}$ отличны от нуля. Докажем это. Предположим обратное. Пусть число α_i равно нулю. Подставим его в уравнение для нахождения собственных чисел (3.3). Получим равенство

$$I_3(\mathbf{A}) = 0.$$

Определение третьего инварианта и свойства определителей позволяют записать равенство

$$I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \det(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = (\det \mathbf{B})^2.$$

Поскольку $\det \mathbf{B} \neq 0$, получаем неравенство

$$I_3(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, предположение о равенстве нулю числа α_i было неверным.

Все собственные числа α_i тензора $\mathbf{A}$ положительны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим значение выражения $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i$. Поскольку $\mathbf{e}_i$ является собственным вектором тензора $\mathbf{A}$, удовлетворяется равенство

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot (\alpha_i \mathbf{e}_i) = \alpha_i \, (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = \alpha_i \, |\mathbf{e}_i|^2.$$

Но, с другой стороны, справедливо условие

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i = |\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i|^2 \geq 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \alpha_i \, |\mathbf{e}_i|^2 \geq 0,$$

которое при ненулевом значении числа α_i и векторе единичной длины $\mathbf{e}_i$ возможно только при условии

$$\alpha_i > 0.$$

Вывод. Тензор $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ *при условии* $\det \mathbf{B} \neq 0$ *является симметричным. Все три его собственных числа положительны. Для тензора* $\mathbf{A}$ *определена операция возведения в степень* p*:*

$$\mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\,p} \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

где p — произвольное действительное число, α_i, $\mathbf{e}_i$ — собственные числа и ортонормированная тройка собственных векторов тензора $\mathbf{A}$. У тензора $\mathbf{A}$ имеется обратный тензор $\mathbf{A}^{-1}$, который имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i{}^{-1}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Экспоненциальная и логарифмическая функции определяются выражениями

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \exp \alpha_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \qquad \ln \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \ln \alpha_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Пояснение. В моделях механики сплошной среды предполагается существование взаимно-однозначного отображения между текущими $\mathbf{x}$ и отсчетными $\mathbf{x}_0$ векторами, определяющими положение точек среды в пространстве в текущий и начальный моменты времени. С помощью этого отображения вводится понятие деформационного градиента $\mathbf{F}$, который является тензором второго ранга. Тензор $\mathbf{F}$ используется для нахождения левого тензора растяжений $\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{0,5}$ и имеет простой физический смысл. Собственные числа тензора $\mathbf{V}$ являются кратностями удлинения среды в направлениях, которые определяют собственные векторы этого тензора.

Рассмотрим, что происходит с точками сферы единичного радиуса при отображении векторов $\mathbf{x}_0$, определяющих положение точек в пространстве, в новые векторы с помощью тензора $\mathbf{A}^{0,5}$. Для этого представим $\mathbf{x}_0$ в виде разложения по собственным векторам $\mathbf{e}_i$ тензора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{3} x_0^i\, \mathbf{e}_i.$$

Уравнение сферы единичного радиуса имеет вид

$$\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{3} (x_0^i)^2 = 1. \tag{3.9}$$

С помощью тензора $\mathbf{A}^{0,5}$ рассматриваемые точки поверхности отображаются в точки, положение которых в пространстве определяется вектором $\mathbf{x}$ с помощью преобразования:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{0,5}\, \mathbf{x}_0.$$

Это означает, что уравнение (3.9) можно переписать в виде

$$\mathbf{A}^{-0,5}\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}^{-0,5}\,\mathbf{x} = 1.$$

Расшифруем это равенство, используя представление тензора $\mathbf{A}^{0,5}$ с помощью векторов $\mathbf{e}_i$ и разложение $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i{}^{-0,5}x^i\,\mathbf{e}_i\cdot\sum_{j=1}^{3}\alpha_j{}^{-0,5}x^j\,\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i{}^{-1}(x^i)^2 = 1.$$

В итоге получили формулу эллипсоида.

Вывод. Тензор $\mathbf{A}^{0,5}$ *отображает множество точек, лежащих на поверхности единичной сферы во множество точек поверхности эллипсоида, главные диаметры которого имеют значения* $2\sqrt{\alpha_i}$, *а направление главных осей определяется собственными векторами* $\mathbf{a}_i$.

<u>Пояснение</u>. В моделях механики сплошной среды левый тензор растяжений $\mathbf{V}$ отображает множество точек сферы малого радиуса во множество точек эллипсоида. Именно этот факт позволяет говорить о физическом смысле тензора $\mathbf{V}$. Под кратностями удлинений среды понимается отношение главных диаметров эллипсоида к диаметру сферы. Главные оси эллипсоида показывают направления, вдоль которых происходит соответствующее удлинение.

Ортогональный тензор

$$\boxed{\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0}$$

В приведенной в рамке формуле использованы две ортонормированные тройки векторов $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_i^0$. Покажем, что записанный с их помощью тензор является ортогональным. Для этого рассмотрим произведение $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$. Воспользовавшись определением транспонированного тензора и правилом умножения тензоров, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0\right)^{\mathrm{T}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i^0\otimes\mathbf{n}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

В результате имеем единичный тензор. Это означает, что транспонированный тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ является одновременно и обратным к тензору $\mathbf{Q}$. Следовательно, он ортогонален.

Необходимо отметить свойство тензора $\mathbf{Q}$. С его помощью ортонормированная тройка векторов $\mathbf{n}_i^0$ отображается в ортонормированную тройку $\mathbf{n}_i$. Следует это из правила действия тензора на вектор:

$$\mathbf{Q}\mathbf{n}_i^0 = \left(\sum_{j=1}^{3} \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j^0\right)\mathbf{n}_i^0 = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{n}_j^0 \cdot \mathbf{n}_i^0)\, \mathbf{n}_j = \mathbf{n}_i.$$

Вывод о том, что векторы $\mathbf{n}_i$ действительно представляют собой ортонормированную тройку, следует из свойства ортогонального тензора сохранять скалярное произведение векторов:

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \mathbf{Q}\mathbf{n}_i^0 \cdot \mathbf{Q}\mathbf{n}_j^0 = \mathbf{n}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0 = \delta^{ij},$$

где δ^{ij} — символы Кронекера.

Свойства тензора поворота

Докажем, что собственные числа тензора поворота могут иметь значения, равные только единице или минус единице. Пусть α_i и $\mathbf{e}_i$ — собственное число и собственный вектор тензора поворота $\mathbf{R}$:

$$\alpha_i \mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{e}_i.$$

Поэтому выполняется равенство

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \alpha_i \mathbf{e}_i = \alpha_i.$$

Но вычислить значение величины $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_i$ можно, используя свойство скалярного умножения и ортогональность тензора:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_i = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = {\alpha_i}^{-1}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = {\alpha_i}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\alpha_i = {\alpha_i}^{-1},$$

т. е.

$$\alpha_i = \pm 1.$$

Проверим, что по крайней мере одно из чисел α_i равно единице. Подставим собственное число 1 в уравнение (3.2). Убедимся, что интересующее нас равенство

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0$$

действительно выполняется. Свойство определителей и ортогональность тензора позволяют преобразовать левую часть рассматриваемого равенства:

$$\det(\mathbf{R}-\mathbf{I}) = \det[\mathbf{R}(\mathbf{I}-\mathbf{R}^{\mathrm{T}})] = \det\mathbf{R}\,\det(\mathbf{I}-\mathbf{R}^{\mathrm{T}}). \tag{3.10}$$

В определении тензора поворота говорится о требовании выполнения условия

$$\det\mathbf{R} = 1.$$

Учитывая его и то, что определитель тензора равен определителю транспонированного тензора, получаем

$$\det\mathbf{R}\,\det(\mathbf{I}-\mathbf{R}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{I}-\mathbf{R}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{I}-\mathbf{R}) = -\det(\mathbf{R}-\mathbf{I}).$$

В результате проделанных преобразований приходим к выводу, что

$$\det(\mathbf{R}-\mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R}-\mathbf{I}).$$

Это возможно в том, и только в том случае, когда выполняется равенство (3.10), что и требовалось доказать.

Вывод. Одно из собственных чисел тензора поворота всегда равно единице. Прямая, направление которой в пространстве определяется собственным вектором, соответствующим этому числу, называется осью вращения.

Следует отметить, что двух других действительных собственных чисел у тензора поворота может не быть.

Тензор поворота

$$\mathbf{R} = \cos\theta\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3$$

Важной особенностью приведенной записи является то, что она показывает в явном виде, как происходит поворот. Вращение векторов, на которые действует тензор $\mathbf{R}$, осуществляется около оси, ориентацию которой в пространстве задает вектор $\mathbf{n}_3$. Поворот вокруг этой оси осуществляется на угол θ.

Чтобы убедиться, что $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор, умножим его на транспонированный тензор $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \Big(\cos\theta\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\Big)$$
$$\Big(\cos\theta\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_1) + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\Big).$$

Осуществив перемножение и сгруппировав вместе слагаемые с одинаковыми диадами, получаем в результате единичный тензор

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3 = \mathbf{I}.$$

Следовательно, транспонированный тензор $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ является одновременно и обратным тензором к тензору $\mathbf{R}$. Прямым вычислением легко проверить, что определитель тензора $\mathbf{R}$ равен единице:

$$\det\,\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Это означает, что он является поворотом, и это требовалось установить.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{R} - 1)}$$

Данная формула является следствием рассмотренной выше формулы. Чтобы убедиться в ее справедливости, достаточно использовать вид тензора поворота и определение следа тензора. Они позволяют записать интересующее нас выражение:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{R} = \cos\theta\,(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_3 = 2\cos\theta + 1.$$

Полярное разложение обратимого тензора

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\,\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0, \quad \textit{где} \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0,$$

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{3}{\lambda_i}^2\,\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}{\lambda_i}^2\,\mathbf{n}_i^0\otimes\mathbf{n}_i^0$$

При анализе свойств тензоров, заданных выражением $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ с условием $\det\mathbf{B} \neq 0$, говорилось, что их собственные векторы можно представить ортонормированной тройкой векторов и что все их собственные числа положительны. Это означает, что тензоры $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ можно записать в виде

$$\mathbf{V}^2 = \sum_{i=1}^{3}{\lambda_i}^2\,\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i, \quad \mathbf{U}^2 = \sum_{i=1}^{3}(\lambda_i^0)^2\,\mathbf{n}_i^0\otimes\mathbf{n}_i^0,$$

где λ_i, λ_i^0, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_i^0$ — собственные числа и собственные векторы тензоров $\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$. При этом из $\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ можно извлечь квадратные корни. В результате получим

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^0\, \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0.$$

Обратные к ним тензоры имеют вид

$$\mathbf{V}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1}\, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{U}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^0)^{-1}\, \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0.$$

Обозначим символом $\mathbf{R}$ тензор поворота

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0.$$

Непосредственная проверка приводит к выводу, что при условии $\lambda_i = \lambda_i^0$ представление тензора $\mathbf{F}$ в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

дает нам выражение

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0$$

и обеспечивает требование выполнения равенств

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F},$$

что и требовалось установить.

Свойства функции $\exp \mathbf{A}$

Рассмотрим экспоненциальную функцию от транспонированного тензора. Воспользовавшись правилом возведения в степень транспонированного тензора $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^k = (\mathbf{A}^k)^{\mathrm{T}}$ для каждого из слагаемых ряда в определении экспоненциальной функции, получаем первое свойство:

$$\exp(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = (\exp \mathbf{A})^{\mathrm{T}}.$$

Это означает, что экспоненциальная функция симметричного тензора $\mathbf{A}$ является симметричным тензором $\exp \mathbf{A} = (\exp \mathbf{A})^{\mathrm{T}}$.

Определим, чему равно произведение функций $\exp \mathbf{A} \exp(-\mathbf{A})$. Согласно правилу вычисления экспоненциальной функции распишем это произведение:

$$\exp \mathbf{A} \exp(-\mathbf{A}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathbf{A}^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k!\, n!} \mathbf{A}^{k+n}.$$

Осуществив замену переменной $p = k + n$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k!\, n!} \mathbf{A}^{k+n} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{(p-n)!\, n!} \mathbf{A}^p = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{p!\,(-1)^n}{(p-n)!\, n!} \right) \frac{1}{p!} \mathbf{A}^p.$$

Возведение нуля в любую положительную целую степень равно нулю. Поэтому выполняется равенство

$$0 = (1-1)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!\,(-1)^n}{(p-n)!\, n!}\,.$$

В результате мы приходим к формулировке второго свойства экспоненциальной функции:

$$\exp \mathbf{A} \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

Для антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ выполняется равенство

$$\exp \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \exp \mathbf{A} \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

Это означает, что функции $\exp \mathbf{A}$ антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ представляет собой ортогональный тензор.

Таблица основных формул

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{w} = \mathbf{A}\,(\mathbf{Bw}) \tag{3.11}$$

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{3.12}$$

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \operatorname{tr}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}^{\mathrm{T}}) = \\ = \operatorname{tr}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{3.14}$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{BC} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \\ = \mathbf{CA}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{CA}^{\mathrm{T}} = \mathbf{BC}\cdot\mathbf{A} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \text{ при условии } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tag{3.17}$$

$$\mathbf{Aw}\cdot\mathbf{Bf} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Aw}\cdot\mathbf{f} = \\ = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\otimes\mathbf{f} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\otimes\mathbf{w} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{Q}\,\mathbf{f} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{f} \text{ при условии } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.19}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \tag{3.20}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{3.21}$$

Если тензор имеет вид $\mathbf{A} = \alpha_1\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + \alpha_3\,\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, ($\delta_{ij}$— символы Кронеккера), то α_i и $\mathbf{e}_i$ — собственные числа и собственные векторы $\mathbf{A}$,

$$I_1(\mathbf{A}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\; I_2(\mathbf{A}) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,\; I_3(\mathbf{A}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_2, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{A}^p = {\alpha_1}^p\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + {\alpha_2}^p\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + {\alpha_3}^p\,\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3, \text{ при } \alpha_i > 0, \quad i = 1,\,2,\,3. \tag{3.23}$$

$$\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \text{ где } \mathbf{Q} = \mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1^0 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2^0 + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3^0 \text{ при условии} \\ \mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{n}_i^0\cdot\mathbf{n}_j^0 = \delta_{ij}. \tag{3.24}$$

$$\mathbf{R} = \cos\theta\,(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_2) + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3 \\ \text{является тензором поворота при условии } \det\mathbf{R} = 1. \tag{3.25}$$

$$\text{Угол поворота определяется из формулы: } \cos\theta = \frac{1}{2}\,(\operatorname{tr}\mathbf{R} - 1). \tag{3.26}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{VR} = \mathbf{RU} = \lambda_1\,\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1^0 + \lambda_2\,\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2^0 + \lambda_3\,\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3^0, \\ \text{где } \mathbf{R} = \mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1^0 + \mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2^0 + \mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3^0, \quad \mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{n}_i^0\cdot\mathbf{n}_j^0 = \delta_{ij}, \\ \mathbf{V} = (\mathbf{FF}^{\mathrm{T}})^{0,5} = \lambda_1\,\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1 + \lambda_2\,\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2 + \lambda_3\,\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3, \\ \mathbf{U} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{0,5} = \lambda_1\,\mathbf{n}_1^0\otimes\mathbf{n}_1^0 + \lambda_2\,\mathbf{n}_2^0\otimes\mathbf{n}_2^0 + \lambda_3\,\mathbf{n}_3^0\otimes\mathbf{n}_3^0. \tag{3.27}$$

Глава 4

Элементы тензорного анализа

Тензорный анализ изучает дифференциальные операторы на алгебре тензорных полей. Рассмотрим формулировку основных понятий и вывод основных формул тензорного анализа, используемых в механике сплошной среды. Как и в предыдущей главе, для записи тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ будет использоваться то же самое представление:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{C} = \sum_{k=1}^{N_C} \mathbf{h}_k \otimes \mathbf{s}_k,$$

с помощью векторов $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{s}_i$.

В литературе для обозначения производных от скалярных, векторных и тензорных функций по скалярным, векторным и тензорным аргументам обычно используются записи в виде двух строчек, разделенных чертой. В верхней строчке имеется указание на функцию, от которой берется производная, в нижней — на аргумент. При этом в числителе и знаменателе присутствуют знаки частного или полного дифференциалов. В качестве примера можно привести выражения

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\,\xi}, \qquad \frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{b}}, \qquad \frac{d\,\alpha}{d\,\mathbf{A}}, \qquad \frac{d\mathbf{A}}{d\,\mathbf{B}}\,.$$

Однако, для получения более компактной математической записи могут быть использованы и более короткие обозначения:

$$d_\xi\mathbf{A}, \qquad d_\mathbf{b}\,\mathbf{a}, \qquad d_\mathbf{A}\alpha, \qquad d_\mathbf{B}\mathbf{A}\,.$$

Аналогичным образом для компактной записи частных производных могут использоваться обозначения:

$$\partial_\xi\mathbf{A}, \qquad \partial_\mathbf{b}\,\mathbf{a}, \qquad \partial_\mathbf{A}\alpha, \qquad \partial_\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,.$$

4.1. Определения математических операций

Дифференцирование тензорной функции по скалярному аргументу

$$\mathbf{A}(\xi + \Delta\xi) - \mathbf{A}(\xi) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\Delta\xi + o(\Delta\xi)$$

Операция дифференцирования тензорной функции по скалярному аргументу вводится аналогично операции дифференцирования скалярной функции по скалярному аргументу. Производной $d_\xi\mathbf{A}$ от тензорной функции $\mathbf{A}$ по скалярному аргументу, вычисленной для значения аргумента, равного ξ, называется тензор, связывающий с точностью до величин второго порядка малости приращение тензорной функции $\mathbf{A}(\xi+\Delta\xi)-\mathbf{A}(\xi)$ с приращением скалярного аргумента $\Delta\xi$.

Дифференцирование векторной функции по векторному аргументу

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\Delta\mathbf{b} + o(\Delta\mathbf{b})$$

Производной $d_\mathbf{b}\,\mathbf{a}$ от векторной функции $\mathbf{a}$ по векторному аргументу, вычисленной для значения аргумента, равного $\mathbf{b}$, называется тензор, связывающий с точностью до величин второго порядка малости приращение векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})-\mathbf{a}(\mathbf{b})$ с приращением векторного аргумента $\Delta\mathbf{b}$.

Дифференцирование скалярной функции по векторному аргументу

$$\alpha(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \alpha(\mathbf{b}) = \frac{d\alpha}{d\mathbf{b}}\cdot\Delta\mathbf{b} + o(\Delta\mathbf{b})$$

Производной $d_\mathbf{b}\alpha$ от скалярной функции α по векторному аргументу, вычисленной для значения аргумента, равного $\mathbf{b}$, называется вектор, связывающий с точностью до величин второго порядка малости приращение скалярной функции $\alpha(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})-\alpha(\mathbf{b})$ с приращением векторного аргумента $\Delta\mathbf{b}$.

Дифференцирование скалярной функции по тензорному аргументу

$$\alpha(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) - \alpha(\mathbf{A}) = \frac{d\alpha}{d\mathbf{A}} \cdot \Delta\mathbf{A} + o(\Delta\mathbf{A})$$

Производной $d_{\mathbf{A}}\alpha$ от скалярной функции α по тензорному аргументу, вычисленной для значения аргумента, равного $\mathbf{A}$, называется тензор, связывающий с точностью до величин второго порядка малости приращение скалярной функции $\alpha(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})-\alpha(\mathbf{A})$ с приращением тензорного аргумента $\Delta\mathbf{A}$.

Дифференцирование тензорной функции по тензорному аргументу

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{B}} \Delta\mathbf{B} + o(\Delta\mathbf{B})$$

Производной $d_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ от тензорной функции $\mathbf{A}$ по тензорному аргументу, вычисленной для значения аргумента, равного $\mathbf{B}$, называется тензор четвертого ранга, связывающий с точностью до величин второго порядка малости приращение тензорной функции $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}(\mathbf{B})$ с приращением тензорного аргумента $\Delta\mathbf{B}$.

4.2. Часто используемые равенства

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi} \otimes \mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi}}$$

Для доказательства этого равенства воспользуемся определением производной от тензорной функции по скалярному аргументу. Она должна определяться из условия

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} \Delta\xi = \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i(\xi + \Delta\xi) \otimes \mathbf{q}_i(\xi + \Delta\xi) - \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i(\xi) \otimes \mathbf{q}_i(\xi) + o(\Delta\xi)\,. \quad (4.1)$$

Воспользуемся формулами, связывающими значения векторных функций $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ с точностью до величин второго порядка малости при значениях аргумента, равных $\xi + \Delta\xi$ и ξ:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(\xi + \Delta\xi) &= \mathbf{p}_i(\xi) + \frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi} \Delta\xi + o(\Delta\xi), \\ \mathbf{q}_i(\xi + \Delta\xi) &= \mathbf{q}_i(\xi) + \frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi} \Delta\xi + o(\Delta\xi). \end{aligned}$$

В итоге выражение (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\Delta\xi \;&=\; \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{p}_i(\xi)+\frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi}\,\Delta\xi\Big)\otimes\Big(\mathbf{q}_i(\xi)+\frac{d\mathbf{q_i}}{d\xi}\,\Delta\xi\Big)-\\ &\qquad -\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i(\xi)\otimes\mathbf{q}_i(\xi)+o(\Delta\xi)\;=\\ &=\;\Big(\sum_{i=1}^{N_A}\frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi}\otimes\mathbf{q}_i+\sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi}\Big)\,\Delta\xi+o(\Delta\xi),\end{aligned}$$

из которого следует справедливость доказываемой формулы.

$$\boxed{\frac{d}{d\xi}\Big(\alpha\mathbf{A}\Big)=\frac{d\alpha}{d\xi}\,\mathbf{A}+\alpha\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}}$$

Производная в левой части рассматриваемого равенства с точностью до величин второго порядка малости определяется выражением

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\alpha\mathbf{A}\Big)\,\Delta\xi=\alpha(\xi+\Delta\xi)\,\mathbf{A}(\xi+\Delta\xi)-\alpha(\xi)\,\mathbf{A}(\xi)+o(\Delta\xi)\,. \tag{4.2}$$

Поскольку выполняются связи

$$\begin{aligned}\alpha(\xi+\Delta\xi)\;&=\;\alpha(\xi)+\frac{d\alpha}{d\xi}\,\Delta\xi+o(\Delta\xi),\\ \mathbf{A}(\xi+\Delta\xi)\;&=\;\mathbf{A}(\xi)+\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\Delta\xi+o(\Delta\xi),\end{aligned}$$

правая часть выражения (4.2) может быть представлена зависимостью

$$\begin{aligned}&\alpha(\xi+\Delta\xi)\,\mathbf{A}(\xi+\Delta\xi)-\alpha(\xi)\,\mathbf{A}(\xi)=\\ &=\;\Big(\alpha(\xi)+\frac{d\alpha}{d\xi}\,\Delta\xi\Big)\Big(\mathbf{A}(\xi)+\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\Delta\xi\Big)-\alpha(\xi)\,\mathbf{A}(\xi)\;+o(\Delta\xi)=\\ &=\;\Big(\frac{d\alpha}{d\xi}\,\mathbf{A}+\alpha\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\Big)\,\Delta\xi+o(\Delta\xi),\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\alpha\mathbf{A}\Big)\,\Delta\xi=\Big(\frac{d\alpha}{d\xi}\,\mathbf{A}+\alpha\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\Big)\Delta\xi+o(\Delta\xi).$$

Полученное равенство подтверждает справедливость выделенной в рамке формулы, что и требовалось установить.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{B}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{B}}{d\xi} \\ &\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\Big) = \frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \\ &\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\Big) = \frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{b}\otimes\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \end{aligned}}$$

Помещенные в рамку формулы доказываются точно так же, как и рассмотренное выше равенство. Они являются следствием определения производных от тензорных и скалярных функций и связей между значениями функций при значениях аргументов $\xi + \Delta\xi$ и ξ.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \mathbf{A} = \text{const} \\ &\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \mathbf{b} = \text{const} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi} + \frac{d\mathbf{B}}{d\xi} \\ &\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}+\mathbf{B}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi} + \frac{d\mathbf{B}}{d\xi} \end{aligned}}$$

Проверка справедливости этих равенств не составляет труда.

$$\boxed{\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}^{-1}\Big) = -\mathbf{A}^{-1}\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{A}^{-1}}$$

Производная от единичного тензора равна нулю. При этом единичный тензор можно представить как произведение интересующего нас тензора $\mathbf{A}$ на обратный к нему:

$$\frac{d\,\mathbf{I}}{d\,\xi} = \frac{d(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})}{d\xi} = \mathbf{0}.$$

Раскроем в этой формуле производную от произведения тензоров. В результате придем к следующему выражению:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{d\xi} = \mathbf{0}.$$

После умножения слева полученного равенства на тензор на $\mathbf{A}^{-1}$ приходим к зависимости

$$\mathbf{A}^{-1}\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{A}^{-1} + \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{d\xi} = \mathbf{0},$$

что и требовалось установить.

$$\boxed{\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}}$$

Производная от единичного тензора равна нулю. При этом единичный тензор можно представить как произведение ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ на транспонированный к нему:

$$\frac{d\,\mathbf{I}}{d\,\xi} = \frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})}{d\xi} = \mathbf{0}.$$

Как и в рассмотренном ранее случае, раскроем в этой формуле производную от произведения тензоров:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\,\frac{d\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}{d\xi} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

Полученная формула может быть представлена в виде равенства

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}},$$

где символом $\mathbf{W}$ обозначено выражение

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

$$\boxed{\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{b} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\xi}}$$

Воспользуемся зависимостями, связывающими с точностью до величин второго порядка малости значения векторных функций при значениях аргумента, равных $\xi + \Delta\xi$ и ξ:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i(\xi + \Delta\xi) &= \mathbf{p}_i(\xi) + \frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi}\,\Delta\xi + o(\Delta\xi),\\
\mathbf{q}_i(\xi + \Delta\xi) &= \mathbf{q}_i(\xi) + \frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi}\,\Delta\xi + o(\Delta\xi),\\
\mathbf{b}(\xi + \Delta\xi) &= \mathbf{b}(\xi) + \frac{d\mathbf{b}}{d\xi}\,\Delta\xi + o(\Delta\xi).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

По определению производная, стоящая в левой части рассматриваемого равенства, определяется из условия

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\,\Delta\xi = \Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\Big|_{\xi+\Delta\xi} - \Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\Big|_{\xi} + o(\Delta\xi) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\right)\Big|_{\xi+\Delta\xi} - \left(\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\right)\Big|_{\xi} + o(\Delta\xi).$$

Здесь для упрощения математической записи использовано следующее обозначение. В формуле, внизу у каждой вертикальной черты выписан аргумент, для которого вычисляются значения функций, стоящих в круглых скобках перед этой вертикальной чертой. Подставляя в математическое выражение значения векторных функций, определенных для аргумента $\xi + \Delta\xi$ с помощью формул (4.3), и группируя слагаемые при одинаковых степенях $\Delta\xi$, получаем равенство

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\,\Delta\xi \;&=\; \left[\sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i\Big)\frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi} + \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi}\Big)\,\mathbf{p}_i\right]\Delta\xi \,+ \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\frac{d\mathbf{b}}{d\xi}\cdot\mathbf{q}_i\Big)\,\mathbf{p}_i\,\Delta\xi + o(\Delta\xi)\,.\end{aligned}$$

Его можно записать в виде зависимости

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\,\Delta\xi \;&=\; \left[\sum_{i=1}^{N_A}\Big(\frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi}\otimes\mathbf{q}_i\Big)\,\mathbf{b} + \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{p}_i\otimes\frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi}\Big)\,\mathbf{b}\right]\Delta\xi \,+ \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i\Big)\frac{d\mathbf{b}}{d\xi}\,\Delta\xi + o(\Delta\xi)\,,\end{aligned}$$

которая принимает окончательный вид

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}\mathbf{b}\Big)\,\Delta\xi = \Big(\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{b} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\xi}\Big)\,\Delta\xi + o(\Delta\xi)\,.$$

Полученное выражение приводит к выводу о справедливости рассматриваемой формулы.

$$\boxed{\frac{d}{d\mathbf{c}}\Big(\alpha\mathbf{a}\Big) = \mathbf{a}\otimes\frac{d\alpha}{d\mathbf{c}} + \alpha\,\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}}}$$

Производная от векторной функции по векторному аргументу, стоящая в левой части рассматриваемого уравнения, вычисляется с помощью равенства

$$\frac{d}{d\mathbf{c}}\Big(\alpha\mathbf{a}\Big)\,\Delta\mathbf{c} = \alpha(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})\,\mathbf{a}(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) - \alpha(\mathbf{c})\,\mathbf{a}(\mathbf{c}) + o(\Delta\mathbf{c})\,.$$

Воспользовавшись связями между значениями функций при значениях аргументов $\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}$;

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) \;&=\; \alpha(\mathbf{c}) + \frac{d\alpha}{d\mathbf{c}}\cdot\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c}),\\ \mathbf{a}(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) \;&=\; \mathbf{a}(\mathbf{c}) + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c}),\end{aligned}$$

преобразуем рассматриваемое выражение:

$$\frac{d}{d\mathbf{c}}\Big(\alpha\mathbf{a}\Big)\,\Delta\mathbf{c} = \Big(\frac{d\alpha}{d\mathbf{c}}\,\cdot\Delta\mathbf{c}\Big)\,\mathbf{a} + \alpha\,\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c})\,.$$

Правило действия диады на вектор позволяет представить его в виде

$$\frac{d}{d\mathbf{c}}\Big(\alpha\mathbf{a}\Big)\,\Delta\mathbf{c} = \Big(\mathbf{a}\otimes\frac{d\alpha}{d\mathbf{c}}\Big)\,\Delta\mathbf{c} + \alpha\,\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c})\,,$$

что и требовалось доказать.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}}}$$

Производная от векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b})$ по аргументу $\mathbf{b}$ определяется обычным образом:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}) + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\Delta\mathbf{b} + o(\Delta\mathbf{b}). \tag{4.4}$$

В свою очередь приращение функции $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{c})$ определяется зависимостью

$$\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c}). \tag{4.5}$$

Подставляя приращение $\Delta\mathbf{b}$ из равенства (4.5) в формулу (4.4) получаем выражение

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}) + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c}) + o(\Delta\mathbf{b}).$$

Поскольку величины второго порядка малости относительно приращения $\Delta\mathbf{b}$ являются одновременно величинами второго порядка малости относительно приращения $\Delta\mathbf{c}$:

$$o(\Delta\mathbf{b}) = o\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c}\right) = o(\Delta\mathbf{c}),$$

то выполняется условие

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}}\,\Delta\mathbf{c} + o(\Delta\mathbf{c}),$$

что и требовалось установить.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{a}} = \mathbf{I}}$$

Рассмотрим функцию $\mathbf{b}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Ее особенностью является свойство, что приращение аргумента $\Delta\mathbf{a}$ является одновременно и приращением функции $\Delta\mathbf{b}$:

$$\Delta\mathbf{b} = \Delta\mathbf{a}.$$

Это означает, что указанные приращения связаны друг с другом с помощью единичного тензора

$$\Delta\mathbf{b} = \mathbf{I}\,\Delta\mathbf{a}.$$

Следовательно, для рассматриваемой функции выполняется зависимость

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}} = \mathbf{I},$$

что и требовалось доказать.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}}\right)^{-1}, \quad \textit{где}\ \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b}),\ \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})}$$

Для доказательства помещенного в рамку равенства воспользуемся формулой вычисления производной от сложной функции

$$\frac{d\mathbf{a}(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}(\mathbf{b})}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}}\,.$$

Но левая часть выписанного выражения представляет собой единичный тензор. Поэтому выполняется зависимость

$$\mathbf{I} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}}\,. \tag{4.6}$$

Умножив правую и левую части формулы (4.6) справа на тензор $(d_{\mathbf{a}}\mathbf{b})^{-1}$, получаем искомое равенство.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\cdot\mathbf{a} = 0 \quad \textit{при}\ \ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{const}}$$

В формуле, помещенной в рамку, нет тензоров. Однако она часто используется для осуществления выкладок в механике сплошной среды. Равенство доказывается с помощью формул векторного анализа. Производная от постоянной функции равна нулю:

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\Big) = 0.$$

Используя правило дифференцирования векторов, получаем

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\xi} = 0.$$

Поскольку от перемены мест сомножителей при скалярном умножении векторов результат не меняется, приходим к равенству

$$2\,\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из данного свойства следует, что производная от вектора фиксированной длины по скалярному аргументу всегда ортогональна этому вектору.

4.3. Математические операции, используемые в механике сплошной среды

В механике сплошной среды используются векторы $\mathbf{x}$, определяющие положение частиц среды в текущий момент времени t, и векторы $\mathbf{x}_0$, определяющие положение частиц среды в отсчетный момент времени t_0. Множество точек трехмерного евклидова пространства, занимаемых частицами (точечными массами) сплошной среды в текущий момент времени, называется *актуальной конфигурацией* сплошной среды. Множество точек трехмерного евклидова пространства, занимаемых частицами сплошной среды в отсчетный момент времени, называется *отсчетной конфигурацией* сплошной среды. Полагается существование непрерывной дифференцируемой зависимости между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}).$$

В формулах механики сплошной среды точки, поставленные над скалярными, векторными или тензорными функциями, обозначают частные производные по времени от этих функций. При этом считается, что аргументами указанных функций являются время t и вектор положения в евклидовом пространстве рассматриваемой частицы среды в отсчетный момент времени $\mathbf{x}_0$. По своему физическому смыслу соответствующие величины определяют скорость изменения параметров состояния в рассматриваемой частице среды.

Обозначение производной по времени в отсчетной конфигурации

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}, \qquad \dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}, \qquad \dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}$$

Для записи уравнений механики сплошной среды необходимо использовать понятия градиентов в актуальной и отсчетной конфигурациях. Определяются они как частные производные по вектору, задающему положение частиц среды в соответствующей конфигурации.

Определение градиентов скалярной и векторной функции в актуальной

$$\operatorname{grad} \alpha = \frac{\partial \alpha(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \operatorname{grad} \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} parttitle,$$

и отсчетной конфигурациях

$$\operatorname{Grad} \alpha = \frac{\partial \alpha(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}, \qquad \operatorname{Grad} \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}$$

Важную роль играют также понятия дивергенции векторных и тензорных величин в актуальной и отсчетной конфигурациях. С их помощью удается связать значения величин на границе рассматриваемого объема среды со значениями величин внутри него.

Определение дивергенции вектора в актуальной и отсчетной конфигурациях

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{a}), \qquad \operatorname{Div} \mathbf{a} = \operatorname{tr}(\operatorname{Grad} \mathbf{a})$$

Для того чтобы пояснить этот момент, воспользуемся формулами дифференциальной геометрии

$$\int\limits_S \cos \alpha_i \, dS = 0, \qquad \int\limits_S \Delta x_i \, \cos \alpha_j \, dS = \delta_{ij} V, \tag{4.7}$$

где V и S — соответсвенно объем и ограничивающая его поверхность в пространстве, положение частиц среды в котором в текущий момент времени определяется вектором $\mathbf{x}$ (актуальная конфигурация), α_i — угол между внешней нормалью к поверхности S и вектором единичной длины $\mathbf{i}_i$, δ_{ij} — символы Кронеккера, Δx_j — компоненты вектора $\Delta\mathbf{x}$, получаемые при использовании для записи вектора $\Delta\mathbf{x}$ ортонормированной тройки векторов $\mathbf{i}_i$.

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\diamond = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \mathbf{i}_i.$$

Символом $\mathbf{x}$ обозначен вектор, определяющий положение в пространстве текущей точки на элементе dS поверхности S. Символ $\mathbf{x}^\diamond$ использован для обозначения вектора, определяющего положение некоторой фиксированной точки в рассматриваемом пространстве.

Запишем формулы (4.7) в более удобном для нас виде. Осуществим для этого следующие преобразования. Учитывая, что внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S можно представить с помощью выражения

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \mathbf{i}_i,$$

где $n_i = \cos\alpha_i$, перепишем первое равенство в (4.7) в нужном нам виде:

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\int\limits_S \cos\alpha_i \, dS \right) \mathbf{i}_i = \int\limits_S \sum_{i=1}^{3} \cos\alpha_i \, \mathbf{i}_i \, dS = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_S \mathbf{n} \, dS = 0. \tag{4.8}$$

Теперь необходимо привести к более удобному виду второе выражение в (4.7). Умножим левую и правую его части на тензор $\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ и просуммируем по индексам i и j:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int\limits_S \Delta x_i \, \cos\alpha_j \, \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \, dS = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} V \, \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j.$$

Принимая во внимание значения символов Кронеккера и свойства диад, преобразуем равенство:

$$\int\limits_S \left(\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \, \mathbf{i}_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{3} \cos\alpha_j \, \mathbf{i}_j \right) = V \sum_{i=1}^{3} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i.$$

Воспользуемся тем, что величины Δx_i и n_i имеют смысл компонентов векторов $\Delta\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{i}_i$. Используя запись единичного тензора с помощью ортонормированной тройки векторов, получим нужное нам равенство

$$\int\limits_S \Delta\mathbf{x}\otimes\mathbf{n}\,dS = V\,\mathbf{I}. \tag{4.9}$$

С помощью зависимостей (4.8) и (4.9) можно установить геометрический смысл дивергенции вектора.

Геометрический смысл дивергенции вектора

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\int\limits_V dV}, \qquad \operatorname{Div}\mathbf{a}(\mathbf{x}_0^\diamond) = \lim_{\delta_0\to 0}\frac{\int\limits_{S_0} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_0\,dS_0}{\int\limits_{V_0} dV_0}$$

В приведенных в рамке формулах использованы следующие обозначения: V — область, содержащая точку $\mathbf{x}^\diamond$; S — замкнутая поверхность, ограничивающая область V; δ — наибольшее расстояние от точки, положение которой определяется вектором $\mathbf{x}^\diamond$, до точек поверхности S. Величины, помеченные индексом "ноль" имеют тот же смысл, но относятся к случаю использования для записи выражений отсчетной конфигурации.

Рассмотрим доказательство формул, выделенных в рамке. Обозначим символом A точку в пространстве, положение которой в рассматриваемой области, имеющей объем V, задает вектор $\mathbf{x}^\diamond$. С точностью до величин второго порядка малости значение вектора $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ в окрестности точки A определяется по формуле

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}.$$

Это означает, что числитель в рассматриваемом пределе имеет вид

$$\int\limits_S \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}\,dS \approx \int\limits_S \Big[\mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\Big]\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\int\limits_S \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}\,dS \approx \int\limits_S \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\cdot\mathbf{n}\,dS + \int\limits_S \operatorname{grad}\mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\;\cdot\mathbf{n}\otimes\Delta\mathbf{x}\,dS$$

и вынесем за знак интеграла независимые величины:

$$\int_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS \approx \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) \cdot \int_S \mathbf{n}\, dS + \operatorname{grad} \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) \cdot \int_S \mathbf{n} \otimes \Delta\mathbf{x}\, dS.$$

Формулы (4.8) и (4.9) позволяют нам представить рассматриваемое выражение в виде

$$\int_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS \approx \operatorname{grad} \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond) \cdot \mathbf{I}\, V.$$

Согласно определению в правой части равенства стоит дивергенция вектора $\mathbf{a}$, умноженная на объем V:

$$\int_S \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS \approx \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\, V.$$

Это означает, что в предельном переходе получается требуемое выражение.

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\int\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\int\limits_V dV} \approx \lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond)\, V}{V} = \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}^\diamond).$$

Аналогичным образом доказывается формула в отсчетной конфигурации.

Связь между поверхностным и объемным интегралами

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS, \qquad \int_{V_0} \operatorname{Div} \mathbf{a}\, dV_0 = \int_{S_0} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_0\, dS_0$$

Пусть рассматривается конечный объем V и ограничивающая его поверхность S. Чтобы убедиться в справедливости первого равенства, выделенного в рамке, разобьем объем V на малые составляющие его объемы ΔV_k с ограничивающими их поверхностями ΔS_k.

$$V = \sum_k \Delta V_k.$$

Для каждого из них с точностью до величин второго порядка малости выполняется равенство:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x})\, \Delta V_k \approx \int_{\Delta S_k} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, d\Delta S_k.$$

Суммирование по индексу k дает приближенное значение интегралов в интересующем нас равенстве. В предельном переходе получается искомое тождество. При этом следует учесть, что интегрирование по всем поверхностям ΔS_k приведет нас внутри объема V к интегрированию по границам соприкасающихся друг с другом малых объемов и будет осуществляться два раза, причем направление нормалей будет задаваться противоположными векторами. В результате они дадут нулевой вклад в сумму поверхностных интегралов. Поэтому в конечном выражении сохранится только интеграл по поверхности S, ограничивающий объем V. Естественно, что все рассуждения остаются справедливыми и при использовании отсчетной конфигурации.

Определение дивергенции тензора в актуальной и отсчетной конфигурациях

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} (\operatorname{grad}\mathbf{p}_i)\,\mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\,,$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} (\operatorname{Grad}\mathbf{p}_i)\,\mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{tr}(\operatorname{Grad}\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i$$

Понятие дивергенции тензора вводится более сложной формулой, чем это делалось при определении понятия дивергенции вектора. Однако ее геометрический смысл остается прежним. Используя понятие дивергенции можно установить связь между интегралом по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, и интегралом по этому объему. Это свойство имеет важное значение в механике сплошной среды. Оно позволяет установить зависимость между внешними воздействиями на границу рассматриваемого тела и состоянием материала внутри него.

Геометрический смысл дивергенции тензора

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS}{\int\limits_V dV}, \qquad \operatorname{Div}\mathbf{A}(\mathbf{x}_0^\diamond) = \lim_{\delta_0\to 0} \frac{\int\limits_{S_0} \mathbf{A}\mathbf{n}_0\,dS_0}{\int\limits_{V_0} dV_0}$$

Докажем первую формулу, выделенную в рамке. Вторая доказывается аналогичным образом. Действие тензора $\mathbf{A}$ на вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ поверхности S определяется с помощью векторов $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{q}_i$, которые входят в математическую запись диад тензора $\mathbf{A}$. С точностью до величин второго порядка малости они определяются выражениями

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) \approx \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}, \qquad \mathbf{q}_i(\mathbf{x}) \approx \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x},$$

и тензор $\mathbf{A}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \;&\approx\; \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\Big)\otimes\Big(\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\Big) \approx \\ &\approx\; \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond) + \sum_{i=1}^{N_A}\Big(\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\otimes\operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x} + \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\otimes\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\Big).\end{aligned}$$

Это означает, что числитель в рассматриваемом пределе имеет вид

$$\begin{aligned}\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS \;&\approx\; \int\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond)\,\mathbf{n}\,dS + \\ &+ \int\limits_S \sum_{i=1}^{N_A}\Big[\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\otimes\operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x} + \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\otimes\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\Big]\,\mathbf{n}\,dS.\end{aligned}$$

Тензор является линейным оператором, отображающим векторное пространство на себя. Воспользовавшись определением тензора, расшифруем результат его действия на вектор $\mathbf{n}$ во втором слагаемом:

$$\begin{aligned}\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS \;&\approx\; \int\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond)\,\mathbf{n}\,dS + \\ &+ \int\limits_S \sum_{i=1}^{N_A}\Big[\Big(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\Big)\,\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \Big(\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\cdot\mathbf{n}\Big)\operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\Big]\,dS.\end{aligned}$$

Преобразуя математические выражения, стоящие под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \operatorname{grad}\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\cdot\mathbf{n}\otimes\Delta\mathbf{x}\,,\\ &\Big(\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\cdot\mathbf{n}\Big)\operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Delta\mathbf{x} = \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Big[\Big(\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\cdot\mathbf{n}\Big)\,\Delta\mathbf{x}\Big] = \\ &\qquad\qquad = \operatorname{grad}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\,\Big[\Big(\Delta\mathbf{x}\otimes\mathbf{n}\Big)\,\mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond)\Big]\,,\end{aligned}$$

приходим к зависимости

$$
\begin{aligned}
\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS \ &\approx \ \int\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond)\, \mathbf{n}\, dS + \\
&+ \int\limits_S \sum_{i=1}^{N_A} \Big\{ \Big(\operatorname{grad} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \cdot \mathbf{n} \otimes \Delta\mathbf{x} \Big)\, \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \\
&\qquad + \operatorname{grad} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) \left[\Big(\Delta\mathbf{x} \otimes \mathbf{n} \Big)\, \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \right] \Big\}\, dS.
\end{aligned}
$$

Вынесем за знак интеграла независимые от вектора $\mathbf{x}$ величины:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS \ &\approx \ \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond) \int\limits_S \mathbf{n}\, dS + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_A} \left[\operatorname{grad} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \cdot \left(\int\limits_S \mathbf{n} \otimes \Delta\mathbf{x}\, dS \right) \right] \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{grad} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) \left[\left(\int\limits_S \Delta\mathbf{x} \otimes \mathbf{n}\, dS \right) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \right].
\end{aligned}
$$

Формулы (4.8) и (4.9) позволяют нам представить рассматриваемое выражение в виде

$$
\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS \approx \sum_{i=1}^{N_A} \Big[\operatorname{grad} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \cdot V\, \mathbf{I} \Big]\, \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{grad} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) \Big[V\, \mathbf{I}\, \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \Big],
$$

т. е. справедливо равенство

$$
\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS \approx \Big[\sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{tr}\Big(\operatorname{grad} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \Big)\, \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond) + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{grad} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^\diamond)\, \mathbf{q}_i(\mathbf{x}^\diamond) \Big]\, V.
$$

Но это не что иное, как выполнение с точностью до величин второго порядка малости условия

$$
\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS \approx \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond)\, V,
$$

т. е.

$$
\lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS}{\int\limits_V dV} \approx \lim_{\delta\to 0} \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond)\, V}{V} = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}^\diamond),
$$

что и требовалось показать.

Связь между поверхностным и объемным интегралами

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV = \int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS, \qquad \int\limits_{V_0} \operatorname{Div}\mathbf{A}\,dV_0 = \int\limits_{S_0} \mathbf{A}\mathbf{n}_0\,dS_0$$

Доказательство выделенных в рамке равенств осуществляется точно так же, как и доказательство аналогичных формул с дивергенцией вектора.

4.4. Часто используемые равенства в механике сплошной среды

Прежде чем рассмотреть равенства, используемые при осуществлении выкладок в механике сплошной среды, сделаем следующее пояснение. Состояние сплошной среды в каждой ее частице определяется набором параметров. Эти параметры меняются во времени. Поэтому каждый из параметров состояния является функцией текущего времени t и вектора $\mathbf{x}_0$, определяющего положение частицы в отсчетный момент времени t_0. Можно перейти от описания процессов в отсчетной конфигурации к описанию процессов в актуальной конфигурации (к аргументам t и $\mathbf{x}$). В обоих случаях подразумевается зависимость от двух аргументов у всех используемых величин. Поэтому при дифференцировании по вектору мы будем использовать символ частной производной, подразумевая, что это один из двух аргументов переменных среды.

В дальнейшем изложении будет использовано общепринятое обозначение для тензора $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0} = \operatorname{Grad}\mathbf{x}\,,$$

который в механике сплошной среды называется <u>*градиентом деформации*</u>. Скорость частиц сплошной среды $\mathbf{v}$ определяется как производная $\partial_t\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\,t}\,.$$

Важную роль в механике играет градиент скорости точек в актуальной конфигурации $\operatorname{grad}\mathbf{v}$. Симметричная часть этого тензора называется <u>*тензором скоростей деформации*</u>:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\mathbf{v} + \operatorname{grad}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right).$$

$$\boxed{\operatorname{Grad}\alpha = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\operatorname{grad}\alpha,}$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим связь между малым приращением значения скалярной функции α и приращением векторного аргумента

$$\Delta\alpha \approx \frac{\partial\alpha(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}.$$

Изменение значения аргумента в актуальной конфигурации $\Delta\mathbf{x}$ связано с изменением аргумента в отсчетной конфигурации $\Delta\mathbf{x}_0$ с точностью до величин второго порядка малости простым соотношением

$$\Delta\mathbf{x} \approx \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0}\,\Delta\mathbf{x}_0.$$

В результате приращение функции определяется формулой

$$\Delta\alpha \approx \frac{\partial\alpha(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0}\,\Delta\mathbf{x}_0,$$

которое с учетом правил скалярного умножения принимает вид

$$\Delta\alpha \approx \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial\alpha(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}_0.$$

Согласно определению градиента скалярной функции получаем выражение

$$\operatorname{Grad}\alpha = \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0}\right)^{\mathrm{T}} \operatorname{grad}\alpha,$$

что и требовалось показать.

$$\boxed{\operatorname{Grad}\mathbf{a} = (\operatorname{grad}\mathbf{a})\,\mathbf{F}}$$

Используя определение градиента вектора, запишем рассматриваемое равенство через производные от вектора по вектору. При этом следует принять во внимание аргументы тензорных функций $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$:

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}_0} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0}\,.$$

Справедливость этой формулы следует из правила дифференцирования сложной функции.

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0}{|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|}, \qquad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}}{|\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}|}}$$

Выделенные в рамку формулы связывают внешние нормали поверхностей S и S_0, ограничивающих объемы V и V_0, которые занимают частицы среды в отсчетной и актуальной конфигурациях. Полагаем, что поверхности S и S_0 гладкие и что предел, получаемый при сравнении расстояний между близкорасположенными частицами среды

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}_0 \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{x}|}{|\Delta\mathbf{x}_0|} = \lambda > 0, \tag{4.10}$$

больше нуля. При вычислении предела рассматривается множество частиц среды, которые в отсчетный момент времени располагаются на произвольно выбранной гладкой кривой на поверхности S_0. Сравниваются две частицы. Одна из них фиксирована. В качестве второй выбирается последовательность частиц. При этом каждая последующая частица в этой последовательности должна располагаться на рассматриваемой кривой и находиться ближе к первой, чем предыдущая частица в этой последовательности. Расстояние между рассматриваемыми частицами в предельном переходе стремится к нулю. Существование ненулевого предела (4.10) означает, что можно ввести понятие кратности удлинения λ материала вдоль произвольно выбранного направления.

Пусть вектор $\boldsymbol{\tau}_0$ является касательным вектором к гладкой поверхности S_0, проведенным к точке A на этой поверхности. Следовательно, скалярное умножение вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ на вектор нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности S_0 в рассматриваемой точке A равно нулю:

$$\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0. \tag{4.11}$$

Пока речь шла о величинах в отсчетной конфигурации. Для того чтобы перейти к актуальной конфигурации, необходимо вспомнить, что касательный вектор к поверхности определяется как предел:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \lim_{\Delta\mathbf{x}_0 \to 0} \frac{\Delta\mathbf{x}_0}{|\Delta\mathbf{x}_0|},$$

где вектор $\Delta\mathbf{x}_0$ соединяет две точки на кривой, лежащей по поверхности S_0, причем начало этого вектора находится в точке A.

Перепишем формулу (4.11) с учетом условия (4.10) и определения касательного вектора:

$$\mathbf{n}_0 \cdot \lim_{\Delta\mathbf{x}_0 \to 0} \frac{\Delta\mathbf{x}_0}{|\Delta\mathbf{x}_0|} = \lim_{\Delta\mathbf{x}_0 \to 0} \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \Delta\mathbf{x}_0}{|\Delta\mathbf{x}_0|} = 0.$$

Разделив правую и левую части равенства на ненулевое число λ, получим зависимость

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}_0\to 0}\frac{\mathbf{n}_0\cdot\Delta\mathbf{x}_0}{\lambda\,|\Delta\mathbf{x}_0|}=\lim_{\Delta\mathbf{x}_0\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{x}_0|\;\mathbf{n}_0\cdot\Delta\mathbf{x}_0}{|\Delta\mathbf{x}|\,|\Delta\mathbf{x}_0|}=0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{n}_0\cdot\lim_{\Delta\mathbf{x}_0\to 0}\frac{\Delta\mathbf{x}_0}{|\Delta\mathbf{x}|}=0. \tag{4.12}$$

Поскольку в актуальной конфигурации касательный вектор к поверхности S определяется выражением

$$\boldsymbol{\tau}=\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\frac{\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}$$

и выполняется зависимость $\Delta\mathbf{x}=\mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_0$, равенство (4.12) можно представить в виде

$$\mathbf{n}_0\cdot\lim_{\Delta\mathbf{x}_0\to 0}\frac{\mathbf{F}^{-1}\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}=\mathbf{n}_0\cdot\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\frac{\mathbf{F}^{-1}\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}=\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}=0.$$

Свойства скалярного умножения позволяют записать его в нужной нам форме:

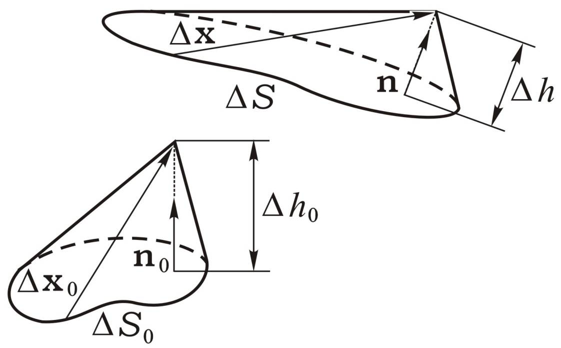
$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\cdot\boldsymbol{\tau}=0.$$

Это означает, что вектор $\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0$ ортогонален касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ к поверхности S в актуальной конфигурации. Поскольку это справедливо для любого произвольно выбранного вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ в отсчетной конфигурации и соответствующего ему вектора $\boldsymbol{\tau}$ в актуальной конфигурации, приходим к выводу, что вектор $\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0$ направлен по нормали к поверхности S. После его нормировки получаем искомое выражение для вектора нормали.

Следует отметить, что в рамках, как правило, приводятся пары формул, сформулированные с использованием операторов в актуальной и отсчетной конфигурациях. Мы будем рассматривать доказательство только одной из них. Второе равенство можно доказать аналогичным способом.

$$\boxed{\mathbf{n}\,dS=J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0}$$

Рассмотрим конус малого размера в отсчетной конфигурации и соответствующую ему геометрическую фигуру в актуальной конфигурации. Она тоже является конусом, поскольку мы имеем дело с линейным преобразованием, осуществляемым с помощью тензора $\mathbf{F}$. С его помощью плоскость основания преобразуется в новую плоскость, в которой находится основание соответствующего конуса в актуальной конфигурации.



Иллюстрация, поясняющая вывод формулы связи нормали с элементом поверхности в актуальной и отсчетной конфигурациях

Пусть вектор $\Delta\mathbf{x}_0$ соединяет точку в основании конуса с его вершиной в отсчетной конфигурации. Высота конуса в этом случае определяется проекцией вектора $\Delta\mathbf{x}_0$ на нормаль $\mathbf{n}_0$ к поверхности S_0:

$$\Delta h_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \Delta\mathbf{x}_0.$$

Поэтому объем конуса ΔV_0 вычисляется по формуле

$$\Delta V_0 = \frac{1}{3}\,\Delta h_0\,\Delta S_0 = \frac{1}{3}\,(\mathbf{n}_0 \cdot \Delta\mathbf{x}_0)\,\Delta S_0, \tag{4.13}$$

где ΔS_0 — площадь основания.

В актуальной конфигурации объем конуса ΔV вычисляется по аналогичной формуле:

$$\Delta V = \frac{1}{3}\,\Delta h\,\Delta S = \frac{1}{3}\,(\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{x})\,\Delta S,$$

где Δh и ΔS — соответственно высота и площадь основания конуса в актуальной конфигурации. Учитывая формулы связи нормалей в отсчетной и актуальной конфигурациях, получаем

$$\Delta V = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0}{|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|} \cdot \Delta\mathbf{x}\right)\Delta S.$$

Используя связь между векторами $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\mathbf{x}_0$ и правила скалярного умножения, преобразуем зависимость:

$$\Delta V = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0}{|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|} \cdot \mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_0\right)\Delta S = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_0}{3\,|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|}\,\Delta S = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \Delta\mathbf{x}_0}{3\,|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|}\,\Delta S.$$

Умножим правую и левую части этого равенства на выражение $\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,\Delta S_0$, получим

$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,\Delta S_0\,\Delta V = \frac{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0}{3\,|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|}\,(\mathbf{n}_0\cdot\Delta\mathbf{x}_0)\,\Delta S_0\,\Delta S.$$

На основании формул вычисления объема конуса (4.13) и записи вектора нормали в актуальной конфигурации преобразуем равенство:

$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,\Delta S_0\,\Delta V = \mathbf{n}\,\Delta V_0\,\Delta S.$$

В полученном выражении осталось только использовать обозначение

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta V_0}\,,$$

чтобы получить искомое математическое выражение, правильность которого требовалось установить.

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{grad}(\alpha\beta) = \beta\operatorname{grad}\alpha + \alpha\operatorname{grad}\beta\\ \operatorname{Grad}(\alpha\beta) = \beta\operatorname{Grad}\alpha + \alpha\operatorname{Grad}\beta\end{array}}$$

Определим приращение произведения скалярных функций $\alpha\beta$ при переходе от точки пространства, положение которой определяет вектор $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$, относительно точки пространства, положение которой определяет вектор $\mathbf{x}$.

$$\alpha(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \left(\alpha(\mathbf{x}) + \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\cdot\Delta\mathbf{x}\right)\left(\beta(\mathbf{x}) + \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right) + \ldots =$$

$$= \alpha(\mathbf{x})\,\beta(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\cdot\Delta\mathbf{x}\right)\beta(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})\left(\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right) + \ldots$$

Тремя точками в выписанном выражении обозначены члены второго порядка малости. Сгруппируем слагаемые в правой части равенства:

$$\alpha(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\,\beta(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\,\beta(\mathbf{x}) +$$

$$+\left(\beta(\mathbf{x})\,\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}} + \alpha(\mathbf{x})\,\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\right)\Delta\mathbf{x} + \ldots$$

В соответствии с определением градиента скаляра приходим к выводу:

$$\operatorname{grad}(\alpha\,\beta) = \beta\,\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}} + \alpha\,\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\,.$$

Осталось только вспомнить, что градиентом скаляра в актуальной конфигурации является его производная по вектору $\mathbf{x}$.

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{grad}(\alpha\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\otimes\,\operatorname{grad}\alpha\; + \alpha\,\operatorname{grad}\mathbf{a} \\ \operatorname{Grad}(\alpha\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\otimes\,\operatorname{Grad}\alpha\; + \alpha\,\operatorname{Grad}\mathbf{a}\end{gathered}}$$

Рассмотрим приращение векторной функции $\alpha\mathbf{a}$ при переходе от точки пространства, положение которой определяет вектор $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, относительно точки пространства, положение которой определяет вектор $\mathbf{x}$.

$$\alpha(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \;=\; \left(\alpha(\mathbf{x}) + \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\cdot\Delta\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right) + \ldots =$$

$$= \alpha(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\cdot\Delta\mathbf{x}\right)\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right) + \ldots$$

Воспользовавшись определением тензора второго ранга перепишем данное равенство:

$$\alpha(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \;=\; \alpha(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) +$$

$$+\left(\mathbf{a}(\mathbf{x})\otimes\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\right)\Delta\mathbf{x} + \alpha(\mathbf{x})\,\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x} + \ldots$$

В соответствии с определением градиента вектора получаем выражение

$$\operatorname{grad}(\alpha\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\otimes\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}} + \alpha\,\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,,$$

что и требовалось установить.

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\operatorname{grad}\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b} + (\operatorname{grad}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{a} \\ \operatorname{Grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\operatorname{Grad}\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b} + (\operatorname{Grad}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{a}\end{gathered}}$$

Определим приращение результата скалярного умножения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ при переходе от одной к другой близкорасположенной точке в пространстве.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \;=\; \left(\mathbf{a}(\mathbf{x})+\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right)\cdot\left(\mathbf{b}(\mathbf{x})+\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right)+\ldots=$$

$$=\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x})+\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x})+\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x}\right)+\ldots$$

Воспользовавшись правилами скалярного умножения, перепишем равенство:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x})+$$

$$+\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}+\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}+\ldots$$

Но это означает, что градиент скалярного умножения векторов определяется формулой

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\;+\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{a},$$

что и требовалось доказать.

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{a})=\operatorname{grad}\alpha\cdot\mathbf{a}+\alpha\operatorname{div}\mathbf{a}\\ \operatorname{Div}(\alpha\,\mathbf{a})=\operatorname{Grad}\alpha\cdot\mathbf{a}+\alpha\operatorname{Div}\mathbf{a}\end{gathered}}$$

В соответствии с определением дивергенции вектора справедлива следующая запись:

$$\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{a})=\operatorname{tr}\Big(\operatorname{grad}(\alpha\,\mathbf{a})\Big).$$

Распишем в выписанном равенстве градиент от произведения скалярной функции на вектор:

$$\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{a})=\operatorname{tr}\Big(\mathbf{a}\otimes\operatorname{grad}\alpha\;+\alpha\operatorname{grad}\mathbf{a}\Big).$$

Определение следа тензора позволяет получить окончательное выражение:

$$\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\alpha\;+\alpha\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{a}).$$

Это не что иное, как интересующее нас выражение, правильность которого требовалось установить.

$$\boxed{\mathrm{Div}\,(J\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}) = 0, \qquad \mathrm{div}\,(J^{-1}\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}) = 0}$$

Для доказательства первого равенства воспользуемся формулой (4.8), осуществив в ней переход от актуальной конфигурации к формулировке равенства в отсчетной конфигурации:

$$\int\limits_S \mathbf{n}\,dS = \int\limits_{S_0} J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0 = 0. \tag{4.14}$$

Устремим объем пространства V_0, который ограничивает поверхность S_0, к нулю. При этом он сжимается в точку, положение которой определяется в отсчетной конфигурации вектором $\mathbf{x}_0$. Согласно геометрическому смыслу дивергенции и условию (4.14) получаем окончательное выражение:

$$\mathrm{Div}\,(J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}) = \lim_{\delta_0\to 0} \frac{\int\limits_{S_0} J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0}{\int\limits_{V_0} dV_0} = 0.$$

Первое равенство доказано. Справедливость второго равенства доказывается аналогичным образом.

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{b} + \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{b}) \\ \mathrm{Div}\,(\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathrm{Div}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{b} + \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\,\mathrm{Grad}\,\mathbf{b})\end{gathered}}$$

Для доказательства первой формулы, выделенной в рамке, воспользуемся определением дивергенции вектора:

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathrm{tr}\,\Big(\mathrm{grad}\,(\mathbf{A}\mathbf{b})\Big) \tag{4.15}$$

и определением тензора второго ранга:

$$\mathrm{grad}\,(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathrm{grad}\left(\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{q}_i)\,\mathbf{b}\right) = \mathrm{grad}\left(\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i\right).$$

Преобразуем в этой формуле правую часть, расписав в виде суммы двух слагаемых выражение градиента произведения скалярной функции на вектор:

$$\mathrm{grad}\,(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N_A}\mathbf{p}_i\otimes\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i)\,+\sum_{i=1}^{N_A}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i)\,\mathrm{grad}\,\mathbf{p}_i.$$

В правой части равенства можно представить в виде суммы двух слагаемых градиент скалярного умножения двух векторов:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{A}\mathbf{b}) \;=\; & \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{q}_i \;+ \\ & + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \left(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}} \;\mathbf{b} + \sum_{i=1}^{N_A} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i) \operatorname{grad}\mathbf{p}_i.\end{aligned}$$

Подставим полученное математическое выражение в рассматриваемое нами равенство (4.15):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) \;=\; & \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{q}_i\right) \;+ \\ & + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \left(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}} \;\mathbf{b}\right) + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i) \operatorname{grad}\mathbf{p}_i\right)\end{aligned}$$

и воспользуемся определением следа тензора:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) \;=\; & \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \cdot \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{q}_i \;+ \\ & + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \cdot \left(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i\right)^{\mathrm{T}} \;\mathbf{b} + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N_A} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i) \operatorname{grad}\mathbf{p}_i\right).\end{aligned}$$

Правила скалярного умножения позволяют переписать данное равенство в новом виде:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) \;=\; & \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{q}_i \;+ \\ & + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{b} \cdot \left(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i\right) \;\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{N_A} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}_i) \operatorname{tr}\left(\operatorname{grad}\mathbf{p}_i\right).\end{aligned}$$

Вынеся вектор $\mathbf{b}$ за знак суммы во втором и третьем слагаемых, получаем зависимость

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_A} \left(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i\right) \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{q}_i \operatorname{tr}\left(\operatorname{grad}\mathbf{p}_i\right)\right),$$

которая имеет вид равенства

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\operatorname{grad}\mathbf{b}) + \mathbf{b}\cdot\operatorname{div}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},$$

что и требовалось доказать.

$$\boxed{\operatorname{Div}(J\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{b}) = J\operatorname{div}\mathbf{b}}$$

Для доказательства этого равенства воспользуемся геометрическим смыслом дивергенции вектора:

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_S \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\int\limits_V dV} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS + \ldots$$

Перейдем в правой части равенства к интегрированию по поверхности в отсчетной кофигурации:

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S_0}\mathbf{b}\cdot\ J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0 + \ldots$$

Воспользуемся свойствами скалярного умножения

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S_0} J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_0\,dS_0 + \ldots$$

и представим правую часть равенства как значение интеграла, получаемого при осуществлении предельного перехода при сжатии области ΔV_0 к рассматриваемой точке пространтсва и отклонений второго порядка малости от него:

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta V}\left(\lim_{\delta_0\to 0}\frac{\int\limits_{S_0} J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_0\,dS_0}{\int\limits_{V_0} dV_0}\right)\Delta V_0 + \ldots$$

Используя геометрический смысл дивергенции вектора в отсчетной конфигурации, приходим к требуемому равенству:

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V}\ \operatorname{Div}(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}) + \ldots$$

Осталось только осуществить предельный переход $\delta_0 \to 0$ сжатия области ΔV_0 к точке пространства и вспомнить геометрический смысл переменной J:

$$J = \lim_{\delta_0\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta V_0}\,.$$

$$\boxed{\operatorname{Div}\left(J\,\mathbf{A}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right) = J\operatorname{div}\mathbf{A}}$$

Для доказательства справедливости этого равенства повторим выкладки, использованные при доказательстве связи между дивергенциями векторов в отсчетной и актуальной конфигурациях. Вначале воспользуемся геометрическим смыслом дивергенции тензора в актуальной конфигурации:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS}{\int\limits_V dV} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S}\mathbf{A}\mathbf{n}\,dS + \ldots$$

Перейдем в правой части равенства к интегрированию по поверхности в отсчетной кофигурации:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S_0} J\mathbf{A}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0 + \ldots$$

Представим правую часть равенства как значение интеграла, получаемого при осуществлении предельного перехода при сжатии области ΔV_0 к рассматриваемой точке пространства и отклонений второго порядка малости от него:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta V}\left(\lim_{\delta_0\to 0}\frac{\int\limits_{S_0} J\mathbf{A}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0}{\int\limits_{V_0} dV_0}\right)\Delta V_0 + \ldots$$

Используя определение дивергенции вектора в отсчетной конфигурации, приходим к зависимости

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V}\operatorname{Div}\left(J\mathbf{A}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right) + \ldots$$

Осуществив предельный переход $\delta_0 \to 0$ сжатия области ΔV_0 к точке пространства и вспоминая геометрический смысл переменной J, получаем искомое равенство, справедливость которого требовалось доказать.

$$\boxed{\dot{J} = J\,\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = J\operatorname{tr}\mathbf{D} = J\operatorname{div}\mathbf{v}}$$

Продифференцируем по времени градиентдеформации

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i^0.$$

В результате получаем выражение, состоящее из трех слагаемых:

$$\dot{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{\lambda}_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0 + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \dot{\mathbf{n}}_i \otimes \mathbf{n}_i^0 + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \dot{\mathbf{n}}_i^0.$$

Поскольку обратный тензор к градиенту деформации имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i,$$

то их скалярное умножение представляется формулой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \ &= \ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_j} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0) \cdot (\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j^0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (\dot{\mathbf{n}}_i \otimes \mathbf{n}_i^0) \cdot (\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j^0) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (\mathbf{n}_i \otimes \dot{\mathbf{n}}_i^0) \cdot (\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j^0). \end{aligned}$$

Воспользовавшись определением скалярного умножения, получаем зависимость

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \ &= \ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_j} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) (\mathbf{n}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (\dot{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{n}_j) (\mathbf{n}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) (\dot{\mathbf{n}}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0), \end{aligned}$$

которая после осуществления скалярного умножения векторов приводит к равенству

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_j} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) (\mathbf{n}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}.$$

В результате доказанным становится первое равенство в рассматриваемой формуле:

$$J \, \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\dot{}}.$$

Для доказательства второго равенства необходимо воспользоваться определением понятия тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \Big(\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \Big).$$

Преобразуем в нем выражение $\operatorname{grad}\mathbf{v}$, воспользовавшись физическим смыслом величины $\mathbf{v}$ и связью между градиентами в отсчетной и актуальной конфигурациях:

$$\operatorname{grad}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial t}\right)\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial t}\right)\mathbf{F}^{-1}.$$

Порядок дифференцирования по вектору $\mathbf{x}_0$ и скаляру t можно поменять. Используя определение градиента деформации, получим равенство

$$\operatorname{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial t}\right)\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{F}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial t}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^{-1}.$$

Воспользовавшись формулами тензорной алгебры, нетрудно вычислить след градиента скорости движения точек континуума в отсчетной конфигурации:

$$\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v}) = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v})^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}.$$

Следовательно,

$$J\operatorname{tr}\mathbf{D} = J\,\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}.$$

Правая часть этого равенства, как было показано выше, равна производной по времени в отсчетной конфигурации от величины J. Таким образом, справедливо утверждение

$$\dot{J} = J\operatorname{tr}\mathbf{D},$$

которое и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь доказательство последнего равенства. Согласно определению дивергенции вектора в актуальной конфигурации имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v}).$$

В приведенных выше выкладках было установлено, что след градиента скорости $\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v})$ равен выражению $\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$, т. е.

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}.$$

Воспользовавшись проведенными ранее выкладками, приходим к выводу о справедливости равенства

$$\dot{J} = J\operatorname{div}\mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.

$$\boxed{\frac{1}{J}\,(J\alpha)^{\boldsymbol{\cdot}} = \left.\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,t}\right|_{\mathbf{x}} + \,\mathrm{div}\,(\alpha\,\mathbf{v})}$$

Для доказательства этого равенства распишем производную по времени от произведения двух скалярных величин в виде суммы двух слагаемых. В формуле используются производные по времени, взятые в отсчетной конфигурации:

$$\frac{1}{J}\,(J\alpha)^{\boldsymbol{\cdot}} \;=\; \frac{1}{J}\,\frac{\partial}{\partial\,t}\Big(J(t,\mathbf{x}_0)\,\alpha(t,\mathbf{x}_0)\Big) = \frac{\alpha}{J}\,\frac{\partial\,J(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\alpha(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\,t} =$$

$$= \;\frac{\alpha\,\dot{J}}{J} + \frac{\partial\,\alpha(t,\mathbf{x})}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\alpha(t,\mathbf{x})}{\partial\,\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\,t}\,.$$

Выражение $\dot{J}/J$ равно $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$. Учитывая определение градиента в актуальной конфигурации и физический смысл скорости движения точек континуума, получаем связь

$$\frac{1}{J}\,(J\alpha)^{\boldsymbol{\cdot}} = \alpha\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \,+\, \left.\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,t}\right|_{\mathbf{x}} + \,\mathrm{grad}\,\alpha\cdot\mathbf{v}.$$

Используя формулу представления дивергенции произведения скалярной величины на вектор $\alpha\,\mathbf{v}$ в виде суммы двух слагаемых

$$\mathrm{div}\,(\alpha\,\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\,\alpha\cdot\mathbf{v} + \alpha\,\mathrm{div}\,\mathbf{v},$$

убеждается в справедливости рассматриваемого равенства.

Таблица основных формул

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{d\mathbf{p}_i}{d\xi} \otimes \mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{p}_i \otimes \frac{d\mathbf{q}_i}{d\xi} \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\alpha\mathbf{A}\Big) = \frac{d\alpha}{d\xi}\,\mathbf{A} + \alpha\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} \tag{4.17}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{AB}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{B}}{d\xi} \tag{4.18}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\Big) = \frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \tag{4.19}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\Big) = \frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{b}\otimes\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} \tag{4.20}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{A}^{-1}\Big) = -\mathbf{A}^{-1}\,\frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{A}^{-1} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi}\,\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1} \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\mathbf{Ab}\Big) = \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}\,\mathbf{b} + \mathbf{A}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\xi} \tag{4.23}$$

$$\frac{d}{d\mathbf{c}}\Big(\alpha\mathbf{a}\Big) = \mathbf{a}\otimes\frac{d\alpha}{d\mathbf{c}} + \alpha\,\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}} \tag{4.24}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{c}} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\,\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{c}} \tag{4.25}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}}\right)^{-1}, \ \text{где } \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b}),\ \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}) \tag{4.26}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\xi}\cdot\mathbf{a} = 0 \ \text{ при } \ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{const} \tag{4.27}$$

$$\operatorname{grad}\alpha = \frac{\partial\alpha(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}, \qquad \operatorname{grad}\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \tag{4.28}$$

$$\operatorname{Grad}\alpha = \frac{\partial\alpha(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\mathbf{x}_0}, \qquad \operatorname{Grad}\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}(t,\mathbf{x}_0)}{\partial\mathbf{x}_0} \tag{4.29}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{a}), \qquad \operatorname{Div}\mathbf{a} = \operatorname{tr}(\operatorname{Grad}\mathbf{a}) \tag{4.30}$$

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = \int\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS, \qquad \int\limits_{V_0} \operatorname{Div}\mathbf{a}\,dV_0 = \int\limits_{S_0} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_0\,dS_0 \tag{4.31}$$

Таблица основных формул

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} (\operatorname{grad}\mathbf{p}_i)\,\mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i \tag{4.32}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_A} (\operatorname{Grad}\mathbf{p}_i)\,\mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^{N_A} \operatorname{tr}(\operatorname{Grad}\mathbf{q}_i)\,\mathbf{p}_i \tag{4.33}$$

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV = \int_S \mathbf{A}\mathbf{n}\,dS, \qquad \int_{V_0} \operatorname{Div}\mathbf{A}\,dV_0 = \int_{S_0} \mathbf{A}\mathbf{n}_0\,dS_0 \tag{4.34}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}_0} = \operatorname{Grad}\mathbf{x} \tag{4.35}$$

$$\operatorname{Grad}\alpha = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\operatorname{grad}\alpha \qquad \operatorname{Grad}\mathbf{a} = (\operatorname{grad}\mathbf{a})\,\mathbf{F} \tag{4.36}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0}{|\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0|}, \qquad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}}{|\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}|} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{n}\,dS = J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{n}_0\,dS_0 \tag{4.38}$$

$$\operatorname{grad}(\alpha\beta) = \beta\operatorname{grad}\alpha + \alpha\operatorname{grad}\beta \tag{4.39}$$

$$\operatorname{Grad}(\alpha\beta) = \beta\operatorname{Grad}\alpha + \alpha\operatorname{Grad}\beta \tag{4.40}$$

$$\operatorname{grad}(\alpha\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\otimes\operatorname{grad}\alpha + \alpha\operatorname{grad}\mathbf{a} \tag{4.41}$$

$$\operatorname{Grad}(\alpha\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\otimes\operatorname{Grad}\alpha + \alpha\operatorname{Grad}\mathbf{a} \tag{4.42}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\operatorname{grad}\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b} + (\operatorname{grad}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{a} \tag{4.43}$$

$$\operatorname{Grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\operatorname{Grad}\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b} + (\operatorname{Grad}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{a} \tag{4.44}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{a}) = \operatorname{grad}\alpha\cdot\mathbf{a} + \alpha\operatorname{div}\mathbf{a} \tag{4.45}$$

$$\operatorname{Div}(\alpha\,\mathbf{a}) = \operatorname{Grad}\alpha\cdot\mathbf{a} + \alpha\operatorname{Div}\mathbf{a} \tag{4.46}$$

$$\operatorname{Div}(J\,\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}) = 0, \qquad \operatorname{div}(J^{-1}\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}) = 0 \tag{4.47}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\operatorname{div}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{b} + \operatorname{tr}(\mathbf{A}\operatorname{grad}\mathbf{b}) \tag{4.48}$$

$$\operatorname{Div}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\operatorname{Div}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{b} + \operatorname{tr}(\mathbf{A}\operatorname{Grad}\mathbf{b}) \tag{4.49}$$

$$\operatorname{Div}(J\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{b}) = J\operatorname{div}\mathbf{b} \tag{4.50}$$

$$\operatorname{Div}(J\,\mathbf{A}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}) = J\operatorname{div}\mathbf{A} \tag{4.51}$$

$$\dot{J} = J\,\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = J\operatorname{tr}\mathbf{D} = J\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{4.52}$$

$$\frac{1}{J}\,(J\alpha)^{\cdot} = \left.\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,t}\right|_{\mathbf{x}} + \operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{v}) \tag{4.53}$$

Список литературы

1. *Математическая энциклопедия* / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия, 1985. Т. 5. 1248 с.

2. *Физическая энциклопедия* / Гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. Т. 5. 760 с.

3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1974. 832 с.

4. *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 276 с.

5. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

Учебное издание

Свистков Александр Львович

Термодинамика сплошной среды. Операторная школа тензорного исчисления

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Шумилова*
Корректор *Е. В. Пирожкова*
Компьютерная верстка: *А. Л. Свистков*

Объем данных 1,1 Мб
Подписано к использованию 21.05.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15