МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. И. Яковлев, Е. Н. Остапенко

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МЕХАНИКИ

Основы классической механики

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки магистров
«Механика и математическое моделирование»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК [51+531/534](091)
ББК 22.1г+22.2г
Я474

Яковлев В. И., Остапенко Е. Н.

Я474 История и методология механики. Основы классической механики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. И. Яковлев, Е. Н. Остапенко; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 6,45 Мб; 218 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/yakovlev-ostapenko-istoriya-i-metodologiya-mekhaniki-osnovy-klassicheskoj-mekhaniki.pdf. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3336-4

Изложена история становления классической механики в XVII–XVIII вв.

Издание предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры укрупненной группы направлений подготовки высшего образования 01.00.00 «Математика и механика», а также для всех, кто интересуется историей механики и математических наук.

Отзывы и замечания можно направлять по адресу mpu@psu.ru.

УДК [51+531/534](091)
ББК 22.1г+22.2г

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кабинет истории математики и механики механико-математического факультета МГУ (рец. – зав. кабинетом, д-р физ.-мат. наук, профессор ***С. С. Демидов*** и ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук. ***В. Н. Чиненова***);

профессор кафедры «Динамика и прочность машин» ПНИПУ, д-р физ.-мат. наук, доцент ***И. Э. Келлер***

ISBN 978-5-7944-3336-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ **4**

ГЛАВА 1. НАУЧНАЯ РЕВОЛЮЦИЯ XVII ВЕКА **5**
1.1. От возрождения к научной революции 5
1.2. Механика Г. Галилея 18
1.3. Кинематические законы И. Кеплера 29
1.4. Идеи механики Р. Декарта 39
1.5. Новые физические теории 49
1.5.1. Законы удара тел 51
1.5.2. Теория колебаний маятников 64
1.5.3. Закон всемирного тяготения и центральные силы 77
1.6. Новые математические методы 86

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ **124**
2.1. И. Ньютон и Г.В. Лейбниц 124
2.2. Математические работы Г.В. Лейбница 137
2.3. «Начала» И. Ньютона 144
2.4. Идеи динамики Г.В. Лейбница 159
2.5. Работы Якоба и Иоганна Бернулли 169
2.6. Механика П. Вариньона 191

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ **215**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ **216**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга задумана как учебное пособие по курсу «История и методология механики» для студентов, магистрантов, аспирантов механико-математических, физических, технических специальностей и направлений университетов.

Учебное пособие является логическим продолжением учебных пособий:

Яковлев В.И., Остапенко Е.Н. История и методология механики. Математика и механика Древнего мира: учеб. пособие / В.И. Яковлев, Е.Н. Остапенко; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2018 г. – 124 с.

Яковлев В.И., Остапенко Е.Н. История и методология механики. Механика и математика Средневековья: учеб. пособие / В.И. Яковлев, Е.Н. Остапенко; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2018 г. – 134 с.

Данная книга – о истории становления классической механики.

Первая глава посвящена научной революции XVII в. В ней рассматриваются положения механики Г. Галилея, взгляды и кинематические законы И. Кеплера, идеи механики Р. Декарта, а также новые физические теории и математические методы.

Во второй главе излагаются идеи и методы механики и современной математики, заложенные в работах И. Ньютона, Г.В. Лейбница, Якоба и Иоганна Бернулли, П. Вариньона и других ученых XVII–XVIII вв.

ГЛАВА 1
НАУЧНАЯ РЕВОЛЮЦИЯ XVII ВЕКА

1.1. От возрождения к научной революции

Абстрактные философские, религиозные теории устройства Вселенной, причин и свойств движения, покоя земных и небесных тел на протяжении столетий пополнялись разнообразными эмпирическими фактами и их теоретическими обоснованиями. Однако начатое только в конце Средневековья возрождение, развитие научного и культурного наследия Античности в XVII веке привело к достаточно радикальным переменам во многих сферах политической жизни, экономики, науки и техники многих европейских народов. И хотя французское слово «revolution» (революция) переводится как «переворот, полная перемена, вращение, полный оборот», многие перемены в содержании научных теорий не обязательно носили характер переворотов. Переворотом можно считать массовое признание в качестве истин некоторых взглядов, экспериментальных и теоретических методов исследования, которые до XVII века носили вторичный, гипотетический характер или вообще отсутствовали; признание новых и отказ от устаревших.

У историков науки существуют разные точки зрения на процесс возникновения наук и отдельных научных теорий. Одни убеждены в том, что научных революций не бывает, что сокровища современной науки являются плодом длительного эволюционного процесса представлений, оценок, мнений о свойствах окружающего нас Мира. Другие считают, что эволюционные процессы накопления и использования научной информации непременно проходят стадии быстрых революционных переворотов сначала во взглядах ученых, а затем и в массовом сознании.

Если обратиться к истории механики и математических наук, то в этой сфере пути от заблуждений к убеждениям были разными. Очевидно, что понятия числа, геометрической фигуры, начиная со времен древних цивилизаций, постепенно эволюционировали, но не стали принципиально иными в наши дни. Однако наши представления о причинах и свойствах движения тел существенно отличаются от аристотелевых. Более того, наши представления имеют вид достаточно стройной математической теории, чего не было до XVII века. И эти перемены наступили в достаточно короткий промежуток времени. Поэтому представление о революционности некоторых этапов развития науки вполне оправданно.

Важно отметить, что революционным переворотам всегда предшествует довольно длительный период появления, критического осмысления, отвержения или принятия новых задач, истин, аргументов, методов и инструментов исследования. Более 20 веков представления об устройстве Вселенной покоились на гипотезе о Земле как о центре Мира и после «Алмагеста» Клавдия Птолемея имели вид достаточно развитой математической теории. Коперник не первым высказал мысль о том, что центром Мира является Солнце. Но ни один из его предшественников не предложил новой теории устройства Солнечной системы. Поэтому, вспоминая имена предшественников и отдавая дань их прозорливости, мы должны считать Коперника главным революционером новой астрономии. Он убедил, привлек внимание к новой теории своих замечательных последователей: Бенедетти, Бруно, Галилея, Кеплера, Декарта, Ньютона.

Новая астрономия не только описывала картину звездного неба, но была и теорией движения небесных тел. Как двигаются небесные тела, почему они двигаются именно так? Может, круговое движение планет связано с притяжением Солнца, может, все тела обладают свойством притяжения. Но тогда какова причина этого феномена, с какой скоростью двигается планета, а может, есть какой-то общий закон движения планет? Это уже вопросы механики. И они тесно связаны с проблемами, которые пытались разрешить оксфордские и парижские номиналисты. Но начиная с XVII века ответы на эти вопросы носили не только качественный, философско-физический, но и количественный, математический характер. И новые математические законы, устанавливающие положение тела в зависимости от изменяющегося момента времени, уже явно приближали время появления новых математических понятий: координат, переменной величины, функции, уравнения с переменным неизвестным.

К началу XVII века достаточно устоявшимися в механике были представления о том, что причиной движения тела являются либо действие на него другого тела (действие силы), либо внутреннее свойство сохранения движения (инертность):

– причиной падения тел является их тяжесть;

– в процессе движения тела испытывают сопротивление среды;

– быстрота движения (скорость) может быть переменной;

– движение брошенного тела происходит по некоторой кривой;

– тела могут иметь разный удельный вес;

– условием равновесия рычага является уравнение равенства произведений весов на плечи или весов на их перемещения;

– законы движения земных и небесных тел едины;

– вечный двигатель не возможен.

К этому следует добавить гидростатические законы Архимеда и арабских ученых, описания специализированных механизмов, машин и орудий, использовавшихся для добычи и переработки ископаемых, строительства зданий, гидротехнических сооружений, морских и речных судов, для ведения войн, обработки земли, производства продуктов питания, тканей, обуви, посуды и украшений, производства и обработки металлов.

Томас Гоббс   Пьер Гассенди   Рене Декарт

Рис. 1

В качестве философско-физической основы объяснения сущности основных явлений и процессов чаще всего использовалась модифицированная древнегреческая идея атомизма, основными выразителями которой к середине XVII века стали англичанин Томас Гоббс (1588–1679), французы Пьер Гассенди (1592–1655) и Рене Декарт (1596–1650). Именно они стали родоначальниками новой механистической философии, использующей в качестве основы для научного объяснения доктрину вещества и движения. Все они считали, что каждое явление природы обусловлено размером, формой и движением мельчайших, невидимых частиц. У каждого было свое представление о свойствах атомов и пространства. У Гассенди – твердые и неделимые атомы могут перемещаться в пустоте (вакууме). У Декарта – атомы могут делиться, но пустоты не существует, материя плотно заполняет пространство.

Важнейшую роль в понимании земных и небесных процессов (движений), в развитии понятия «время» сыграло изобретение часов. Часы стали материальным носителем, выразителем времени как некоторого фундаментального свойства реальности, прибором для численного измерения времени. Появившиеся в эпоху Возрождения механические часы позволяли измерять, а значит, и сравнивать продолжительности любых процессов, в частности движений. Появилась возможность экспериментального определения продолжительности движения, быстроты изменения положения (скорости) не только медленных астрономических движений, но и быстрых земных (падение камня, полет снаряда, качание маятника или люстры, соударение тел).

Время процесса (жизни) как непрерывно увеличивающаяся (изменяющаяся) величина выражается числом. В античности число ассоциировалось с отрезком постоянной длины, имеющим геометрический смысл неизменного расстояния в пространстве. В новой механике к геометрическому представлению отрезка (числа), как расстояния в пространстве, добавляются революционно новые физические смыслы интервала времени, величины скорости, ускорения, силы, массы и др. И эта величина может быть переменной!

Если раньше отрицательное число воспринималось как «долг», «недостача», то сейчас это еще и время истории, время того, что было до точки (момента) отсчета, до начала движения, это сила сопротивления, это ускорение замедления движения. Понятие отрицательного числа приобретает вполне реальное содержание. Наука о движении тел перестает быть только философской, физической, но становится и математической. Физические свойства движения планет, падения, соударения, колебаний тел ученые XVII века выражают не только словесно, но и в виде математических отношений, пропорций, уравнений.

Уникальной особенностью науки XVII века было повышенное внимание к проблемам астрономии, физики, математики, медицины и биологии представителей государственной и национальной элиты большинства развитых стран Европы. Представители знатных дворянских родов, как правило хорошо образованные, были заражены модой на изучение трудов их научных предшественников и современников, во многих странах возникали научные кружки и сообщества любителей наук. Первые научные сообщества, получившие название «академия», появились в Италии.

Рис. 2. Марсилио Фичино

В 1459 г. во Флоренции известный итальянский философ и гуманист **Марсилио Фичино** (1433–1499) создал первую академию по образцу афинской академии Платона. Она так и называлась – «Платоновская академия» и пользовалась особым покровительством правителя города Лоренцо Медичи, по прозвищу Великолепный. После смерти М. Фичино академия прекратила свое существование, но ненадолго.

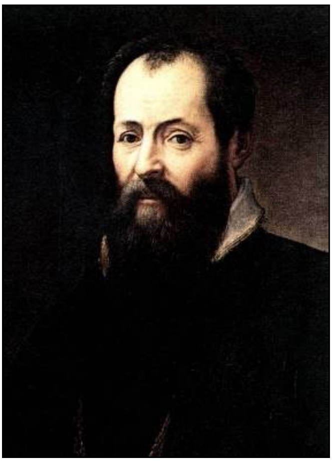


Рис. 3. Джорджо Вазари

Уже в середине XVI века по проекту **Джорджо Вазари** (1511–1574), итальянского живописца, архитектора и историка искусства, была создана Флорентийская академия, имевшая статус государственной и официально финансировавшаяся из казны Великого герцогства Тосканского. Среди членов этой академии, возможно, был и Галилей – по крайней мере, именно здесь состоялся его научный дебют, когда он выступил с лекциями о топографии Дантова ада.

Аналогично появились Академия тайн природы (Неаполь, 1560), Академия Деи Линчеи («рысьеглазых», Рим, 1603), Академия Дель Чименто («опытных знаний», Флоренция, сер. XVII в.), Одним из первых академиков-«рысьеглазых» был Г. Галилей, членами Академии опытных знаний – Э. Торричелли, В. Вивиани, Дж. Борелли.

Однако уже с середины XVII века в некоторых странах Европы шел процесс огосударствления научной деятельности. Передовые государственные деятели, осознав практическую ценность научных исследований, превращали научную работу в престижный вид государственной службы, создавали благоприятные моральные и материальные условия для творческой деятельности ученых, защищали их авторские, а значит, и государственные права. Именно в этом русле развивался процесс организации научных обществ в Англии, Франции, Пруссии, России в XVII в.

Бурные политические события истории XVI–XVIII веков косвенным образом способствовали повышению престижа ученых, распространению научных знаний. Интерес к научной деятельности, статус ученого, профессора университета были весьма высоки. Многие европейские монархи, будучи высокообразованными людьми, стремились приближать к себе видных ученых, назначали их на важные государственные посты, прислушивались к их советам. Так при дворе английского короля Генриха VIII (1509–1547) находились многие ученые. Одним из его ближайших советников был знаменитый гуманист Томас

Мор (1478–1535), которого король сделал лордом-канцлером. Однако, когда взгляды короля и Мора разошлись, последний был казнен. Дочь Генриха VIII, королева Елизавета I (1558–1603), покровительствовала интеллектуалам, своим придворным врачом она назначила выдающегося физика, заложившего основы учения о магнетизме, Уильяма Гильберта (1544–1603).

Занявший после Елизаветы I престол Яков I (1603–1625) всячески способствовал продвижению известного философа Френсиса Бэкона (1561–1626): от должности адвоката до поста генерального прокурора, члена тайного совета, лорда-хранителя печати, лорда-канцлера, присвоил ему титулы виконта и барона. Эта блестящая государственная карьера не помешала Ф. Бэкону стать автором целого ряда популярных сочинений: «Опыты или наставления нравственные и политические» (1597), «О значении и успехе знания ...» (1612), «Новый органон» (1620), «О достоинстве и приумножении наук» (1623), «Новая Атлантида» (1627). Впрочем, жизнь Ф. Бэкона завершилась столь же драматично, как и Т. Мора.

История Лондонского Королевского общества начинается с небольшого кружка ученых, интересовавшихся натуральной философией. Начиная с 1640 г. Уилкинс, Годдард, Энт, Глиссон, Меррет, Фостер, Гаак (инициатор встреч) и другие изредка собирались у кого-нибудь дома или в таверне около колледжа, основанного лордом-мэром Лондона Томасом Грешемом (1519–1579), для обсуждения вопросов физики, анатомии, геометрии, астрономии, механики, навигации, химии, физиологии, ..., новых книг, новых экспериментов. В конце 40-х гг., после переезда некоторых ученых из Лондона в Оксфорд, там также возник научный кружок, в работе которого участвовали еще Уоллис, Бойль (с 1654) и его ассистент Гук. В 1659 г. оба кружка объединились и заседания уже проводились в Грешемовском колледже, профессорами которого в то время были Кристофер Рен и Лоуренс Рук. После очередного доклада Рена (28 ноября 1660 г.) двенадцать наиболее активных членов (Броункер, Бойль, Морей, Рен, Уилкинс, Рук и др.) решили ввести порядок в заседания, сделать их регулярными, а для этого организовать специальный колледж для проведения физико-математических экспериментов (по образцу итальянских академий). Тогда кружок состоял из 55 членов, а к марту 1661 г. их количество увеличилось до 73.

Внук Якова I – Карл II, ставший королем в 1660 г., также покровительствовал развитию наук и 15 июля 1662 г. подписал хартию, в которой лондонское общество получило название «Лондонское Королевское общество для развития знаний о природе» («Royal Society of London for Improving Natural Knowledge»). Однако реальная деятельность Общества началась с марта 1661 г., с начала выборов (ежемесячных) президента Общества. Первым главой Общества стал Роберт Морей, переизбиравшийся на этот пост еще девять раз, пять раз избирался Уилкинс, по разу – Бойль и Броункер. Первым президентом, утвержденным Карлом II, стал лорд Уильям Броункер.

Рис. 4

Финансовая независимость Общества обеспечивалась за счет достаточно высоких членских взносов, что, однако, не повлияло на бурный рост численности его членов (в год организации – около ста человек, через десятилетие – почти двести). Каждый член Общества мог по своему усмотрению избирать тему и предмет своего исследования. Было решено учредить должность куратора Общества, которому в обязанность вменялись организация заседаний, подготовка демонстрационных экспериментов, соответствующих установок и приборов. Первым куратором стал Роберт Гук (1635–1703), выдвинувший свою программу деятельности Общества, направленную на практическое исследование научных результатов. Эта программа была утверждена в 1663 г. во второй хартии, установившей герб Королевского общества с девизом «*Nullius in Verba*» («*Ничто словесно*» – перефразировка одной из строк Горация).

Броункер был президентом до 1677 г. и способствовал повышению авторитета Общества не только как видный математик, но и как государственный деятель (с 1662 г. он был канцлером королевы, а с 1664 г. – комиссаром Адмиралтейства). С марта 1664 г. Общество начало издавать журнал «Philosophical Transactions».

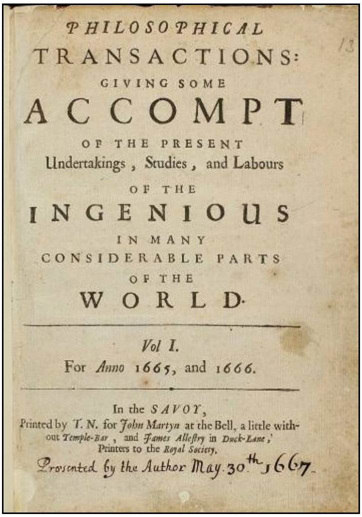


Рис. 5. Журнал «Philosophical Transactions», 1665–1666, Vol. 1

Первым из двух (по хартии) секретарей Общества в 1662 г. был избран Генри Ольденбург (Henry Oldenburg, 1618–1677), сыгравший, наряду с Гуком, важнейшую роль на начальном этапе его формирования. Авторитет Лондонского Королевского общества был очень велик, его членами являлись многие выдающиеся ученые Европы: Х. Гюйгенс (с 1663), И. Ньютон (с 1672), Г.В. Лейбниц (с 1673), И. Бернулли (с 1712), Мопертюи, А. Клеро, Ж.Д. Кассини, Д. Бернулли, Кениг и др.

Уже тогда имела место финансовая благотворительность с целью развития наук. Так, в декабре 1666 г. некий сэр Джон Кутлер обратился к Р. Гуку с предложением выплачивать ему (Гуку) 50 фунтов в год за публикацию его открытий и иных научных результатов. Откликнувшись на эту инициативу, 17 января 1667 г. Гук дал Королевскому обществу следующее обязательство: «*Тщательно обсудив то, что сэр Джон Кутлер, рыцарь и баронет, определил платить мне пятьдесят фунтов в год в течение моей жизни, я обязался и предпринял читать в Грешемовском колледже или в каком-либо ином месте, где будет устроено собрание Королевского общества, по шестнадцати лекций в год для распространения знаний по искусствам и природе… Настоящим еще раз возобновляю мое обещание и предпринимаю чтение лекций по тем частным вопросам, по каким укажет упомянутое Общество. В свидетельство чего я подписываюсь и ставлю мою печать*». Так было положено начало изданию «Кутлеровских лекций». Неизвестно, сдержал ли свое обещание Кутлер, но Гук свое обещание выполнил.

Благоприятный интеллектуальный климат к середине XVII в. сложился в Голландии. Амстердам, как некогда Венеция, превратился в центр европейского книгопечатания и книжной торговли. Здесь жили и работали знаменитый чешский ученый и педагог Ян Амос Коменский, математики Григорий Сен-Венсан, Франц ван Схоутен (учитель Х. Гюйгенса), Ян де Витт, Иоганн Гудде (был бургомистром Амстердама), философы Барух Спиноза и Джон Локк.

Декарт, проживший в Голландии более 20 лет, познакомился с отцом Х. Гюйгенса – Константином в доме известного арабиста и профессора математики Лейденского университета Якоба Голиуса. Константин Гюйгенс был не только видным государственным деятелем (как и его отец Христиан, а позднее и его старший сын Константин, он занимал пост секретаря принца Оранского, к концу жизни стал председателем государственного совета), но и известным поэтом, даровитым художником и музыкантом, говорил на многих европейских языках, был любителем и знатоком математики и физики. Знаменитый геометр, Ян де Витт был действующим политиком (лидером республиканской партии, фактическим руководителем Республики Соединенных провинций (Нидерландов)). Лейденский университет (основан в 1575 г.) был одним из самых известных университетов Европы. В разные годы в нем учились или преподавали Стевин, Скалигер, Снеллиус, Схоутен (опубликовал сочинения Виета и «Геометрию» Декарта), отец и сын Гюйгенсы, с'Гравесанде.

Важнейшим научным центром Европы второй половины XVII века становится Франция, где стихийный процесс создания научных кружков, обществ, академий развивался по итальяно-английскому сценарию. Главой Парижского научного общества до 1648 г. был монах Марен Мерсенн (1588–1648) – незаурядный человек, он поддерживал переписку со многими европейскими учеными. После смерти Мерсенна, его дело продолжил королевский библиотекарь Пьер де Каркави (1600–1684). Все члены Общества регулярно собирались на «ассамблеи» в парижском доме высокопоставленного судебного чиновника герцога Абера де Монмора (1600–1679). Наиболее деятельными участниками встреч были Гассенди, Сорбиер, Роберваль, Мариотт, Дезарг, Э. Паскаль. Желанным гостем Общества был Х. Гюйгенс, посещавший Париж в 1655 и 1660 гг.

Активную роль в организации Парижской академии наук сыграл генеральный контролер финансов, т.е. фактический руководитель финансовой политики короля Людовика XIV (1643–1715), Жан Баптист Кольбер, объявивший об ее учреждении в 1666 г. В отличие от Французской академии (основана Ришелье для создания Словаря французского языка, 1635) и Академии словесности (образована Кольбером для исследований по истории и археологии, 1663), Парижская академия наук была организована для работ в области физико-математических, естественных наук и их приложений. Ее штат включал 130 членов, 50 ассоциированных иностранных членов, 160 корреспондентов и 2-х постоянных секретарей.

С 1669 г. Академия наук получила покровительство короля. Главным отличием Парижской, или Королевской, академии наук от Лондонского Королевского общества было то, что она с самого основания находилась под управлением государства: существовала не на личные средства ее членов, а благодаря государственной финансовой поддержке. Ее члены получали государственные пенсии, результаты их деятельности оценивались, исходя из практической полезности проведенных исследований. Виднейшими членами начального этапа Парижской академии наук были Х. Гюйгенс (приехал в Париж в 1666 г. по приглашению Кольбера), Д. Кассини, Рёмер, Роберваль и Мариотт.

Незадолго до учреждения Парижской академии наук (в январе 1665 г.) в Париже начал издаваться «Journal des Sçavans» («Журнал ученых»). Это было частное издание, не связанное с Парижской академией наук, а предназначенное для публикации рецензий на выходящие книги. Однако высокое качество публикуемых в «Journal des Sçavans» материалов вскоре обеспечило ему европейскую популярность и способствовало повышению авторитета французской науки. Публикация трудов первых членов Парижской академии наук осуществлялась частным образом, но позднее началось регулярное издание в Париже и Амстердаме мемуаров, статей и научных обзоров в сборниках «Histoire de l'Academie royale des sciences» («История Королевской академии наук»), ставших наряду с «Philosophical Transactions», «Acta eruditorum», «Miscellanea Berolinensia» и «Комментариями Петербургской императорской академии наук» главными научными трибунами XVII–XVIII вв.

1.2. Механика Г. Галилея

Научные заслуги Г. Галилея в механике больше связаны с проблемами «земной механики», с развитием идей Архимеда, Буридана, Орема, Тартальи, Бенедетти, Гвидо Убальдо, Стевина, хотя широкую известность в научных кругах XVII века он приобрел как изобретатель телескопа и первооткрыватель лунных гор, звездного строения Млечного пути, четырех спутников Юпитера, фаз Венеры, пятен на Солнце и других небесных чудес. Имя Галилея стоит в ряду виднейших ученых благодаря его вкладу в формирование нового научного мировоззрения, естествознания, что составило фундамент многих разделов современной теоретической физики и механики. Развитию и критическому осмыслению взглядов Галилея, его вклада в механику посвящены работы его научных последователей – Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Вариньона, Мопертюи, Эйлера, Даламбера, Лагранжа и историков науки. Галилей оказался не только продолжателем создания теории равновесия тел, но и одним из первых творцов теории их движения – основ новой механики.

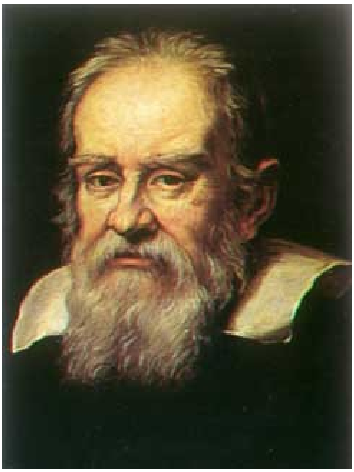


Рис. 6. Г. Галилей

Галилео Галилей родился 15 февраля 1564 г. в итальянском городе Пиза в знатной, но обедневшей многодетной семье (было шесть детей). Его отец – Винченцо Галилей (ок. 1520–1591) получил хорошее образование, был музыкальным теоретиком (автором нескольких научных трактатов по теории музыки), композитором, увлекался игрой на лютне, математикой, знал несколько языков. Отличался независимостью взглядов, что унаследовал и его сын Галилео. Любопытно, что два из наиболее известных сочинений Галилея-отца были написаны в форме диалога и назывались «Диалог об античной и современной музыке» и «Беседы о труде мессерера Джозеффо Царлино». И два главных трактата Галилея-сына также были написаны в форме диалога и назывались «Диалог о двух системах мира» и «Беседы и математические доказательства». Винченцо известен и как экспериментатор, пытавшийся установить зависимость высоты звука от степени натяжения струны (от величины веса груза, подвешенного к струне).

До 17 лет Галилео получал домашнее образование под руководством отца и домашних учителей, некоторое время учился в школе монастыря св. Марии в Валломброзо. В 1581 г. поступил в Пизанский университет (хотя семья уже жила во Флоренции), чтобы стать врачом, но вскоре интерес к медицине пропал, и он стал сначала самостоятельно, а потом под руководством О. Риччи (друга отца и ученика Н. Тарталья) изучать математику. Однако знакомство с математикой не сводилось только к изучению трудов Архимеда и других античных ученых. Галилей знакомился с трудами по механике, астрономии, физике. По легенде, в 1582 г., наблюдая за качанием люстры в кафедральном соборе, Галилео сделал свое первое открытие – время колебания не зависит от амплитуды (величины отклонения от положения равновесия). Время колебания Галилео отсчитывал по своему пульсу. Этот факт (изохронность колебаний маятника) за 600 лет до Галилея был известен арабскому ученому Ибн-Юнису (950–1009), но сочинения этого ученого в Европе тогда ещё не были известны.

В 1584 г., не получив докторской степени, Галилей покинул университет и вернулся во Флоренцию. Здесь он увлекся литературной деятельностью, написал свою первую научную статью – «Маленькие весы» (1586, посвящена гидростатическим весам для определения удельного веса тел), получил доказательства некоторых теорем для определения центров тяжестей тел. Рукописи этой и других статей, распространенные среди знакомых, создали ему славу достойного математика. Галилей пытался занять пост профессора математики в одном из университетов. В 1589 г. по протекции Гвидо Убальдо он получает эту должность (с очень скромным жалованием) в Пизанском университете. В его обязанности входило преподавание геометрии Евклида и астрономии Птолемея (однако он уже был сторонником теории Коперника).

В пизанский период своей научной карьеры (до 1592) Галилей знакомится с трудами Д. Бенедетти (в частности, с трактатом «Различные размышления о математике и физике»), в которых приводится критика взглядов Аристотеля на природу и свойства движения, и пишет трактат «О движении» (1590). Галилей повторяет некоторые выводы Бенедетти, утверждает, что действие и противодействие тел равны, получает некоторые правила равновесия тел на наклонной плоскости и делает попытку определения скорости падающего тела (в том числе и в опытах по бросанию тел с Пизанской башни).

В 1592 г. Галилей переезжает в Падую, заняв (вновь с помощью Гвидо Убальдо) кафедру математики в местном университете. Кроме математики, он преподавал здесь механику и астрономию. Падуанский период (18 лет) был самым плодотворным в его жизни. В Падуе был изобретен пропорциональный циркуль, получен квадратичный закон зависимости пути от времени при падении тел, найдена траектория (парабола) движения снаряда, построены первые телескопы и сделаны революционные астрономические открытия, написаны два руководства по фортификации и трактаты по теории простых машин.

Галилей женился (брак был неофициальным) на Марине Гамба, и у них родились две дочери (Вирджиния (1600) и Ливия (1601)) и сын Винченцо (1606).

Открытие квадратичного закона падения тел часто увязывается с известными результатами средневековых оксфордских и парижских философов – «калькуляторов», «номиналистов». Однако эти профессора-философы рассуждали о движении вообще, а не о свободном падении тел. Их идея о пропорциональной зависимости скорости от времени (в нашей интерпретации), как и арифметическая прогрессия Н. Орема (последовательные пути, проходимые за равные промежутки времени, составляют прогрессию: 1, 3, 5, 7, …), были известны Галилею, но он изначально придерживался не их мнения, а ошибочно считал, что скорость пропорциональна пройденному пути. Удивительно, но этот ошибочный посыл и дальнейшие ошибки в доказательстве привели Галилея к правильному результату: путь падающего тела пропорционален квадрату времени падения (1604). Гении совершают только гениальные ошибки.

Не менее любопытно и доказательство того, что траекторией движения снаряда является парабола (1609). К этому выводу Галилей пришел двумя путями: теоретическим (исходя из принципа независимости вертикального и горизонтального движений, законов падения и движения по инерции) и экспериментальным. И если описание опытов по отвесному падению тел (с Пизанской башни) больше напоминает теоретические рассуждения, то проведение экспериментов по скатыванию бронзовых шаров с наклонной плоскости не вызывают никаких сомнений. Описание опытной установки, результатов проведенных экспериментов и соответствующих теоретических выводов детально изложено в сохранившихся и исследованных историками механики рукописях Галилея.

Свойство выпуклых прозрачных стекол увеличивать изображение было обнаружено вскоре после изобретения производства стекла. В частности, еще Роджер Бэкон упоминал, что это свойство может использоваться для улучшения зрения. Развитие мореплавания и открытие первых оптических свойств и законов привело к изобретению первых зрительных (подзорных) труб. Одна из первых труб была создана в 1608 г. в Голландии Хансом Липперсхеем. Но уже в следующем году Галилей активно взялся за создание своих труб с 3-кратным, затем 10-кратным, а позднее и 30-кратным приближением. В январе 1610 г. он направил свой телескоп (так в 1611 г. была названа одна из труб Галилея) на небо и открыл секрет фаз Луны, обнаружил, что на Луне есть горы, на Солнце – пятна, что Млечный путь – это множество звезд, что Юпитер окружен четырьмя спутниками и много других удивительных явлений.

Понимая всю важность своих открытий, Галилей в том же 1610 г. издает 29-страничную книгу «Звездный вестник», сразу ставшую научной сенсацией и убедительным доказательством справедливости теории Коперника и Бруно. «Звездный вестник» принес её автору европейскую славу. Желая угодить правителю Тосканы герцогу Козимо II Медичи, Галилей назвал открытые им спутники Юпитера в честь четырех братьев Медичи («Медичийские звезды»). Летом 1610 г. Галилей оставил должность профессора Падуанского университета, вернулся во Флоренцию, став придворным математиком и философом великого герцога Тосканского и первым математиком Пизанского университета (без обязательства читать лекции).

Бремя обрушившейся на Галилея славы привлекло к нему внимание многих ученых, государственных деятелей, высших представителей церковной иерархии. В 1611 г. он посетил Рим, познакомился с папой и некоторыми кардиналами. Был принят в число членов «Академии деи Линчеи». Но уже в конце 1612 г. у Галилея появились церковные недоброжелатели, число которых постепенно увеличивалось. В доносах в Ватикан Галилей обвинялся в ереси. В феврале 1616 г. комиссия римских теологов приняла решение о недопустимости учения Коперника и, по поручению папы Павла V, Галилей был жестко предупрежден: ему запрещалось излагать принципы новой астрономии. Печальная судьба Джордано Бруно была весьма поучительной, и Галилей согласился.

В 1613 г. Галилей выпустил книгу «Письма о солнечных пятнах», в 1623 – «Пробирных дел мастер», в 1624 – «Письма к Инголи». Первую из своих важнейших научных книг Галилей писал более шести лет. В 1630 г. работа над ней была завершена, а в 1632 она была издана во Флоренции по названием «Диалог Галилео Галилея Линчео, Экстраординарного математика Пизанского университета и Главного Философа и Математика Светлейшего Великого Герцога Тосканского, где в четырехдневных беседах ведется обсуждение двух Основных Систем Мира, Птолемеевой и Коперниковой, и предлагаются неокончательные философские и физические аргументы как с одной, так и с другой стороны». Книга была написана на итальянском языке в форме беседы между тремя венецианскими патрициями – Сальвиати, Сагредо и Симпличио, каждый из которых был убежденным сторонником одной из точек зрения.

Устами Сальвиати (своего единомышленника) Галилей анализирует основные положения физики Аристотеля и показывает их несостоятельность. Он утверждает:

– законы земных и небесных явлений имеют единую природу;

– инерционное движение является круговым, падающее на Землю тело обладает двумя независимыми движениями: вертикальным к Земле и вращательным «вместе» с Землей;

– среда может только препятствовать движению тел (но не вызывать его);

– никаким экспериментом нельзя отличить события на покоящемся корабле от событий на равномерно и прямолинейно двигающемся корабле;

– все тела удерживаются на Земле тяготением;

– при падении тела путь пропорционален квадрату времени, а скорость изменяется непрерывно (а не скачками, как считали номиналисты);

– колебания маятника изохронны.

Одним из критериев истинности физической теории Галилей считает ее наглядность и простоту. И его теория отвечала этому критерию. В поисках аргументов в защиту теории Коперника Галилей внес значительный вклад в формирование новых физических представлений. Этот вывод не могут поколебать даже некоторые его ошибочные заключения об инерционности круговых движений, о причинах океанских (морских) приливов и отливов, о «центростремительной» природе притяжения тел к вращающейся Земле.

После выхода в свет «Диалога» Галилея вызвали в Рим на суд инквизиции. Этот приказ был неожиданным, так как книга была одобрена для издания тройной цензурой, папа Урбан VIII был лично знаком с автором. Но папский гнев вылился в то, что Галилей предстал перед судом инквизиции по обвинению в нарушении предостережения, которое было ему сделано в 1616 г. 13 февраля 1633 г. 69-летний Галилей прибыл в Рим, где был подвергнут допросам. На следующий день после последнего допроса (21 июня), на котором он согласился отречься от своих взглядов, был оглашен окончательный вердикт. Галилей на коленях произнес свое отречение, был признан не еретиком, а «сильно заподозренным в ереси» (еретиков сжигали на костре, а этот приговор сохранял жизнь) и приговорен к тюремному заключению.

После короткого тюремного заключения, последние годы жизни Галилей провел на собственной вилле в Арчетри (близ Флоренции) под домашним арестом и присмотром инквизиции. В 1634 г. скончалась его старшая дочь. В 1637 г. он ослеп, но продолжал работать. Здесь он написал свое второе важнейшее сочинение «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению синьора Галилео Галилея Линчео, философа и первого математика светлейшего великого герцога Тосканского с приложением о центрах тяжести различных тел», продолжив развивать новые механические идеи. Книга была издана в Лейдене (Голландия) в 1638 г.

Как и «Диалог», «Беседы» написаны в форме дискуссии тех же героев – Сальвиати, Сагредо и Симпличио. Две новые науки – это сопротивление материалов, которому посвящены первые две главы, и кинематика равноускоренного движения, которой посвящены третья и четвертая главы. Уже после смерти Галилея (8 января 1642 г.) в переиздания книги были включены еще две главы, посвященные общему учению о пропорциях и теории удара.

Главным вопросом «науки, касающейся сопротивления твердых тел разрушению» был: почему тела при растяжении и изгибе сопротивляются разрушению? Конечно, этот непростой вопрос не получил простого ответа, но многие соображения автора на эту тему оказались полезными для дальнейшего изучения физических свойств деформируемых тел, включая численные значения напряжений и деформаций. Так, он утверждает, что прочность бруса пропорциональна площади его поперечного сечения и не зависит от его длины. Прочность стержня прямоугольного сечения пропорциональна его ширине и квадрату высоты, а для стержня круглого сечения она пропорциональна кубу его диаметра. Он исследовал изгиб консоли, изгиб балки, лежащей на двух опорах, прочность полых балок.

Размышления Галилея о свойствах падающих тел (3–4 главы) показывают, что он полностью отвергает известные утверждения Аристотеля о невозможности пустоты, о скорости падения, зависящей от веса тела и обратно пропорциональной плотности среды. Галилей описывает достаточно убедительные мысленные и реальные эксперименты, где сравнивает падение, скатывание по наклонной плоскости, качания подвешенных на одинаковых тонких нитях свинцового и пробкового шаров (первый в сто раз тяжелее второго). И все опыты показывают, что скорость вертикального падения не зависит от веса тела (после ста колебаний оба шара продолжали двигаться синхронно), что период (T) колебаний маятника не зависит от его веса, а зависит от длины (l) нити подвеса («*…длины маятников обратно пропорциональны квадратам чисел их качаний, совершаемых* *в течение определенного промежутка времени*» [1, с. 65]). Перейдя от частоты колебаний к периоду, вывод Галилея можно записать в виде пропорции $l \sim T^2$, которую Гюйгенс позднее записал в виде равенства $T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{g}$.

Вывод о независимости сугубо кинематических характеристик падения тела от физических свойств (вес тела, плотность среды) позволил Галилею исследовать падение (траекторию, скорость, ускорение) известными геометрическими методами. Он повторяет абстрактные философские результаты «калькуляторов-номиналистов» (конфигурацию качеств и мертонское правило Н. Орема), но с точным указанием физического смысла (время, путь, скорость, ускорение) понятий и результатов. Философские рассуждения его предшественников о причинах и свойствах движения вообще получили ясный физический смысл применительно к движению тел.

Важно отметить, что в «Беседах» Галилей убедительно отвергает свое предыдущее утверждение о пропорциональности скорости и пути. Он геометрически, используя чертежи, доказывает, что скорость пропорциональна времени, а пройденный путь – квадрату времени. Это означает, что если за равные промежутки времени скорость возрастает как ряд чисел 1, 2, 3, 4, …, то проходимые при этом (за те же промежутки времени) пути относятся как 1, 3, 5, 7, …(за первую секунду – 1, за две секунды – 1 + 3, за три – 1 + 3 + 5, за четыре – 1 + 3 + 5 + 7, …). Формально это было получено еще Н. Оремом, но физическая сущность этого результата впервые была установлена Г. Галилеем.

Рассуждая о свойствах движения тел по наклонным плоскостям, Галилей формулирует задачу, которая привлекла всеобщее внимание только более чем через полвека. Задача состояла в определении траектории, по которой должно двигаться тело, падающее из некоторой точки A в точку B, чтобы достичь B за наименьшее время. Галилей не дал точного ответа, но

И. Бернулли, вернувшись к этой задаче в 1690-х гг., получил решение, положившее начало развитию вариационного исчисления. Чуть позже эта задача была решена Лейбницем, Я. Бернулли, Лопиталем, Гюйгенсом и Ньютоном.

В заключительной главе первого издания «Бесед» даются четкие формулировки принципов независимости и сложения движений, принципа инерции, приводятся способ нахождения ускорения свободного падения и вывод закона движения снаряда. Впервые закон параболического движения был изложен в «Диалоге», затем был получен учеником Галилея Б. Кавальери («Зажигательное зеркало», Болонья, 1632). Что же касается ускорения свободного падения g (в трактовке Галилея – конечная скорость, приобретенная в конце первой секунды падающим грузиком, пролетевшим высоту h), то автор для него получает выражение $g = 2h$ (в современной трактовке). И если все тела падают с одинаковыми скоростями, то и изменение скорости в единицу времени (g) одинаково для всех тел. Эта величина постоянна и одинакова для всех земных тел. Формула Галилея использовалась вплоть до XIX века для опытного определения g.

Следует особо подчеркнуть, что Галилей был первым, кто ясно сформулировал свойство инертности тел. Он утверждал, что это свойство сохранения скорости присуще самой природе тел, а для ее изменения необходимо внешнее воздействие. Чтобы заставить двигаться покоящееся тело, чтобы изменить скорость (ускорить, замедлить) движения тела, необходимо подействовать на него другим телом (приложить к нему силу). Движение по инерции – это движение свободного тела, на которое не действуют другие тела (не действуют внешние силы или их действие равно нулю). Однако для Галилея скорость – это только число. Непонимание векторной природы этого понятия приводило к тому, что круговое движение планет он также считал инерционным. Однако его аргументы в пользу этого ошибочного утверждения убедительно свидетельствуют о ясном понимании физического свойства инертности тел.

Галилея можно считать пионером механики как науки о движении тел. Однако он был автором и нескольких сочинений по статике («Краткое наставление по военной архитектуре», «Трактат о фортификации», «Механика», «Рассуждение о телах, пребывающих в воде…»). Его статические взгляды и интересы были вполне традиционными: понятие тяжести, момента силы, принцип виртуальных скоростей, принцип равенства моментов. Как и С. Стевина, Г. Убальдо, его внимание привлекли задачи равновесия тела на наклонной плоскости. Им получены соответствующие условия равновесия тела и высказано утверждение о равенстве силы действия тела на плоскость и силы противодействия со стороны плоскости. Но для него покой – это состояние, предшествующее началу движения. Движение начинается в связи с «отменой» статической силы, освобождением импетуса тяжелого тела. Ускорение начавшегося движения пропорционально «отменяемой» статической силе, которую Галилей считает пропорциональной величине скорости.

Динамические же концепции Галилея значительно отличались от традиционных и поэтому привлекли внимание многих ученых. Их широкому распространению способствовала слава известного ученого (изобретателя телескопа, первооткрывателя ранее неизвестных небесных явлений), судьба узника инквизиции, издание «Диалога» и «Бесед», переводы его трудов на французский язык, их популяризация Мерсенном, Гассенди, его современниками и последователями. Следующим революционным шагом в формировании не только новой механики, но и нового мировоззрения стало научное творчество Иоганна Кеплера и Рене Декарта.

1.3. Кинематические законы И. Кеплера

Важнейшим достижением астрономии и механики начала XVII века было открытие И. Кеплером законов движения планет. Впервые в истории мировой науки было дано не только качественное, но и количественное, с использованием мер времени и пути, описание законов движения планеты – математические (функциональные) выражения, позволяющие не предсказывать, а вычислять ее положение.

Рис. 7. Иоганн Кеплер

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 г. в г. Вейль (юго-запад Германии, Швабия). По житейским представлениям, вся его жизнь, начиная с рождения (родился недоношенным, болезненным), была непрерывной чередой драматических событий: болезней, бедственного материального положения, ранней потери отца, религиозных гонений, потери нескольких детей. Но все это, однако, не помешало ему стать одним из самых выдающихся ученых своего времени.

Дед Кеплера был бургомистром г. Вейля. Отец (Генрих Кеплер) покинул семью (стал наемным солдатом армии испанского короля, сражавшейся в Нидердандах), когда Иоганну было 3 года. В 1588 г. он окончательно оставил семью, но вскоре заболел и умер. К этому моменту Кеплеру удалось получить хорошее образование, звание бакалавра, а с сентября следующего года он стал студентом факультета искусств Тюбингенского университета.

В те годы учеба в университетах состояла из двух этапов: первые два года студент учился на факультете искусств (по окончании которого сдавал магистерский экзамен), а далее мог учиться еще три года на специализированном факультете. В августе 1591 г. Кеплер получил степень магистра, наивысшую похвалу от университетского сената и далее поступил на теологический факультет. Именно здесь, под руководством профессора Михаэля Местлина, Кеплер познакомился с астрономическими теориями Птолемея и Коперника, получил основательное математическое образование, изучая труды Евклида, Аполлония, Архимеда. Однако, проучившись еще почти три года, официально окончить университет он не смог. В 1594 г. (по направлению сената) он вынужден был переехать в г. Грац для работы учителем математики в протестантской школе.

Зарплата была мизерной, и Кеплер, кроме преподавания, занялся составлением астрологических календарей. Первый же календарь вскоре полностью подтвердился, создав Кеплеру славу знаменитого предсказателя. И несмотря на достаточно трезвое и скептическое отношение к астрологии, Кеплер впоследствии занимался составлением астрологических прогнозов на протяжении всей жизни, так как часто это было единственным источником семейных доходов.

Свойственные Кеплеру научный темперамент и страсть к познанию нового проистекали из его природной одаренности, хорошего образования и убежденности в существовании некоторого, пока еще не открытого, тайного принципа, познав который, можно понять и сформулировать законы природы, устройства мироздания, связь человеческой судьбы с космическими явлениями. Увлеченный поиск доказательств справедливости теории Коперника привел Кеплера к очень важному, восхитившему его открытию: математические отношения размеров правильных многогранников определяют всю геометрию Солнечной системы. Это было подтверждением и следствием древней пифагорейской мысли о том, что «все есть число».

В 1596 г. в Тюбингене Кеплер издал книгу «Предвестник космографических сочинений, содержащий Космографическую тайну относительно удивительных отношений между Небесными Орбитами, а также истинные и должные основания для их Числа, Величины и Периодических движений». Со времен Античности были известны правильные многогранники («платоновы тела»): тетраэдр (четырехгранная пирамида), куб (шестигранник), октаэдр (восьмигранник), додекаэдр (двенадцатигранник) и икосаэдр (двадцатигранник) и только шесть планет. И вот что он пишет в этой книге: *«…орбита Земли есть мера всех вещей; опиши вокруг нее додекаэдр, и круг, содержащий его, будет Марсом (то есть орбитой Марса); опиши вокруг Марса тетраэдр, и круг, содержащий его будет Юпитером; опиши вокруг Юпитера куб, и круг, содержащий его, будет Сатурном. Теперь впиши в орбиту Земли икосаэдр, и круг, содержащийся в нем, будет Венерой; впиши внутрь Венеры октаэдр, и круг, содержащийся в нем, будет Меркурием. Теперь ты знаешь число планет»* [13, с. 105].

Таким образом, «платоновы тела» наделялись таинственным свойством, определяющим размеры Солнечной системы. Кеплера даже не смутило то, что его расчетные данные планетных орбит несколько отличались (но были очень близки!) от полученных Коперником. Особенно это касалось радиуса орбиты Меркурия. Установить единый математический порядок стало целью ученого. Кроме этого, Кеплер пришел к выводу о том, что и периоды обращения планет вокруг Солнца не произвольны, а непосредственно связаны с расстояниями от планет до светила, что отношения радиусов орбит равны квадратному корню из отношения периодов движения планет.

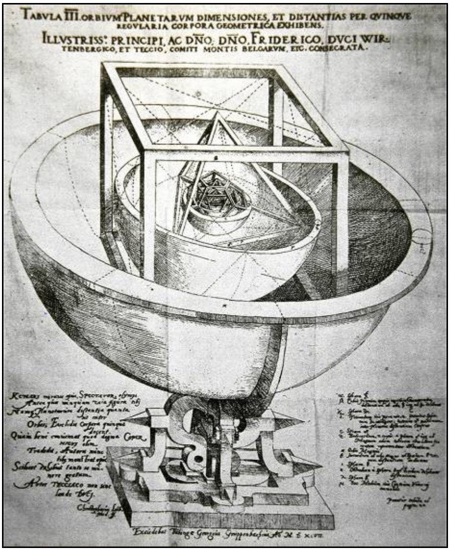


Рис. 8. «Небесный кубок» Кеплера

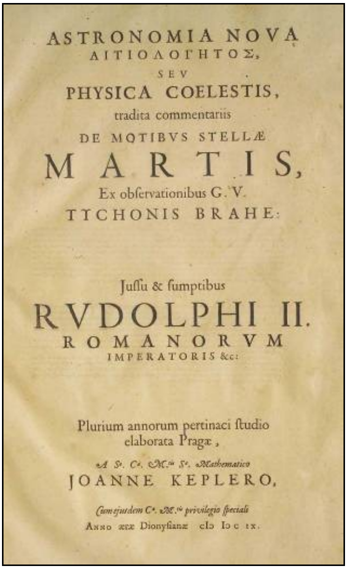
Идея гармонии Вселенной, гармонии, выражаемой свойствами геометрических тел, красной нитью проходит через все творчество Кеплера. Логика Творца, создателя Вселенной, соответствует логике человека, логике и свойствам геометрических конструкций – такова глубинная мысль Кеплера. И для ее подтверждения Кеплеру нужны были фактические, опытные данные. Свою книгу Кеплер разослал многим ученым, в числе которых были Тихо Браге и Галилео Галилей.

В 1597 г. Кеплер женился, появились первые дети, но двое из них умерли вскоре после рождения. По причине религиозных преследований Кеплер был вынужден покинуть г. Грац.

1 января 1600 г. он переехал в Прагу, став ассистентом знаменитого Тихо Браге – придворного математика и астронома императора Священной Римской империи Рудольфа II. Здесь ему было поручено вести расчеты, связанные с составлением таблиц положений планет в зависимости от времени. В октябре 1601 г. Браге скончался, но перед смертью он завещал Кеплеру стать попечителем его астрономических инструментов, рукописей и завершить составление таблиц, названных позднее «Рудольфинскими» (в честь императора). Кеплер стал придворным математиком и астрономом, в его распоряжении оказались журналы многолетних наблюдений Браге, в частности таблицы движения Марса, содержащие все необходимые Кеплеру данные.

Воспользоваться этими данными для установления законов движения планет было очень непросто, но Кеплеру это удалось. В 1609 г. в Гейдельберге он издал трактат «Новая астрономия, причинно обоснованная, или физика неба, изложенная в исследованиях движения планеты Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге», где содержались два закона движения планет. Третий закон Кеплер опубликовал в «Гармонии мира» (1619). Суть этих законов сводится к тому, что планеты 1) двигаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, 2) с постоянной секторной скоростью, так что 3) квадраты периодов обращения планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. К этому следует добавить, что термин «фокус» (focus), в современном его смысле, введен Кеплером в 1604 г. в работе «Ad vitellionen paraliponena, qnibus astronomiae pars eptica traditur».

Очевидно, что эти законы Кеплера не соответствуют представлениям, изложенным в его первой книге, но многолетний кропотливый труд по осмыслению причин и свойств движения планет, огромный объем вычислений привели его к выводам, согласующимся с таблицами и астрономическими наблюдениями Браге. Прежняя гипотетическая картина гармонии мира была заменена реальной, более совершенной. И не менее важным было то, что новая картина Солнечной системы была написана языком геометрии, а законы движения планет имели математическое выражение. Описывая не только геометрию, но и кинематику Солнечной системы, они позволяли вычислять положения планет в любой момент времени. Это было блестящим подтверждением гипотезы Коперника, началом новой астрономии, новой механики движения небесных тел, началом математики переменных величин.



ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEU
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

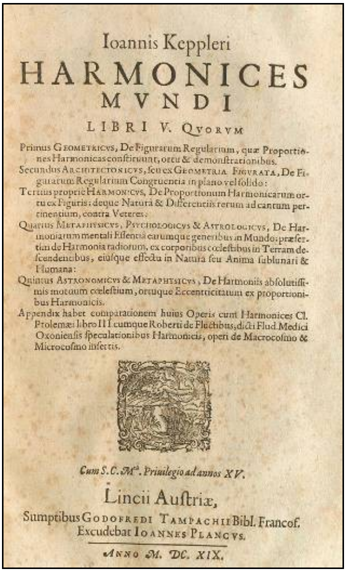
Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S. C. M.tis S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejuſdem C. M.tis privilegio ſpeciali
Anno æræ Dionyſianæ CIↃ IↃ C IX.

Рис. 9. «Новая астрономия». Титульный лист



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas conſtituunt, ortu & demonſtrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, ſeu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel ſolido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Eſſentiâ earumque generibus in Mundo; præſertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœleſtibus in Terram deſcendentibus, eiuſque effectu in Natura ſeu Anima ſublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis abſolutiſſimis motuum cœleſtium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud Medici Oxonienſis ſpeculationibus Harmonicis, operi de Macrocoſmo & Microcoſmo inſertis.

Cum S. C. M.tis Privilegio ad annos XV.

Lincii Auſtriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Рис. 10. «Гармония мира» Титульный лист

1611 год стал трагическим для семьи ученого. Его жена заразилась тифом и умерла, трое детей заразились оспой, умер любимый сын. После отречения от престола и кончины императора Рудольфа Кеплеру пришлось искать новое пристанище. В 1612 г. для него была учреждена должность математика провинции Верхней Австрии, и Кеплер с семьей переехали в г. Линц. В 1613 г. Кеплер вновь женился (вторая жена была почти вдвое моложе его). Как и годы, проведенные в Праге, 14 лет линцкого периода были очень продуктивны. В Линце были написаны «Новая стереометрия винных бочек» (1615), «Гармония мира» (1619), «Краткий очерк коперниканской астрономии» (1618–1621), «Тысяча логарифмов» (1624) и завершена работа над составлением «Рудольфинских таблиц» (1627), у него родились еще семь детей, из которых пятеро умерли в раннем возрасте.

В 1628 г. Кеплер снова (как и прежде, по причине мизерной оплаты) был вынужден сменить место жительства. Семья переехала в г. Саган – центр небольшого силезского герцогства, вотчину Альбрехта Валленштейна – командующего императорской армией. Кеплер стал его придворным астрологом, но вскоре новая должность, по той же причине, перестала устраивать Кеплера, и в ноябре 1630 г. он отправился в г. Регесбург на встречу с императором Фердинандом II. Здесь Кеплер тяжело заболел и скончался 15 ноября 1630 г.

Законы Кеплера по своему содержанию являются физическими, опытными. Они описывают кинематические свойства движения планет. Но получить их мог только математик, знакомый с работами Аполлония, Евклида, Архимеда. Формулировка этих законов была триумфом не только их автора, но и всей Математики, еще раз подтвердившей свою полезность не только в земных человеческих заботах, но и в описании космических процессов. Это было подтверждением единства Природы, универсальности ее законов для земных и неземных явлений, что имело важное философско-методологическое значение.

Без открытия Кеплера, давшего понимание того, как двигаются планеты, было бы невозможно обсуждение вопроса, почему они двигаются именно так. Вихревая теория (эфира) Декарта, пытавшегося ответить на этот вопрос, оказалась несостоятельной. Ответ на этот вопрос дал закон всемирного тяготения, полученный Ньютоном из законов Кеплера и математических соображений. Законы Ньютона и Кеплера стали основой для построения математических моделей небесной механики, а далее и всей классической механики как теории математического моделирования движения тел.

При выводе второго закона Кеплеру необходимо было определить площадь эллиптического сектора, описываемого («выметаемого») радиус-вектором $\rho = SM$ (рис. 11) (расстояние от Солнца S до планеты M).

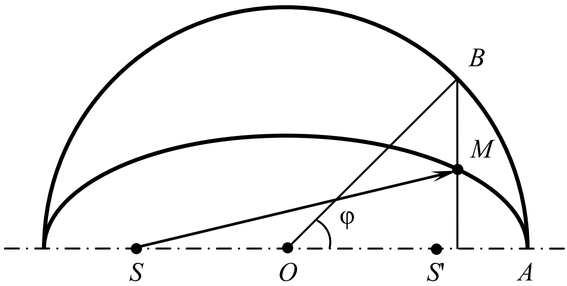


Рис. 11. Траектория планеты (эллипс *AM*)

Для этого он воспользовался методом неделимых, известным со времен Демокрита и Архимеда. Роль неделимого играла длина радиус-вектора $\rho = SM$, направленного от Солнца S к планете M, величина которого, в современной интерпретации, выражается формулой $\rho = c\cos\varphi + \alpha$, где $c = SO$ – расстояние от фокуса эллипса (Солнца) до центра описанной около него окружности, φ – угол между радиусом OB описанной окружности и большой полуосью эллипса, $\alpha = OA$ – большая полуось эллипса (радиус описанной окружности). Это выражение позволяет получить знаменитое «уравнение Кеплера» $kt = \varphi - e\,sin\,\varphi$ (e – эксцентриситет эллипса), определяющее положение планеты в каждый момент времени.

Современное уравнение Кеплера выражает функциональную зависимость положения (φ) планеты от времени (t). Однако понятия функции во времена Кеплера еще не существовало. В соответствии с традицией средневековой физики время он представлял не как непрерывную переменную, а как последовательность временных интервалов. Поэтому полученное им уравнение выражало зависимость φ_k от t_k и, по сути, представляло собой систему алгебраических уравнений.

Далее этот метод Кеплер использовал в своей «Новой стереометрии винных бочек» для определения объемов пространственных тел – 92 видов тел вращения (бочек). Эти результаты привлекли внимание профессора Болонского университета, ученика и друга Галилея, Ф.Б. Кавальери и его ученика Б. Кастелли. В изданном в 1635 г. трактате «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» Кавальери дал обоснование использования метода неделимых для определения площадей фигур и объемов тел. Под неделимыми он понимал параллельные хорды плоской фигуры или части параллельных плоскостей, пересекающих тело. Он показал, что определение площадей и объемов сводится к нахождению площади криволинейной трапеции или, в современной трактовке, к вычислению определенного интеграла.

Развитие этого метода в сочинениях Ж.П. Роберваля, П. Ферма, Э. Торричелли, Д. Уоллиса (Валлиса), Джеймса и Дэвида Грегори, Григория Сен-Венсана, Б. Паскаля привело к созданию интегрального исчисления. С именем Кеплера связывают и появление в математике понятия «среднее арифметическое».

Физические представления Кеплера во многом совпадали со взглядами известного английского физика Уильяма Гильберта (1544–1603), изложенными им в большом трактате «О магните, магнитных телах и большом магните – Земле» (Лондон, 1600), где развиваются идеи его итальянских современников Джован Батисты Порты (1538–1615) и Паоло Сарпи (1552–1623). Проведя многочисленные опыты, Гильберт установил магнитные свойства железных тел и пришел к выводу о том, что Земля является большим магнитом. Будучи сторонником гелиоцентрической системы Коперника, Гильберт утверждал, что все тела Вселенной обладают магнитными свойствами и что Земля, как и все планеты, движется вокруг Солнца в результате их магнитного взаимодействия, притяжения. Магнитными свойствами взаимодействия Земли и Луны он объяснял и морские приливы и отливы, а величину магнитного взаимодействия тел выражал через расстояния между ними. Аналогичных взглядов придерживался и Кеплер, уточнив, что величина взаимодействия Солнца и планеты обратно пропорциональна их относительному расстоянию.

В своих трактатах Кеплер не только выражает убежденность в справедливости позиции Коперника, но высказывает идею существования мирового эфира, транспортирующего некоторые свойства тел, говорит о существовании у тел свойства инерции. Причина суточного вращения Земли, по Кеплеру, достаточно проста: природа всегда выбирает наиболее простые пути, и ей проще вращать Землю, чем весь небосвод. Идея простоты, рациональности, оптимальности устройства природы высказывалась и до Кеплера. В механике эта идея позднее укоренилась в виде принципов экстремальности или стационарности некоторой характеристики (время, путь, «действие», энергия, кривизна траектории) для истинного движения тела из множества возможных.

Все тела природы движутся, и скорость Вселенной во много раз больше скорости Земли. Суточное движение планет не постоянно в течение года. Материя всегда стремится к покою, и ее движение свидетельствует о наличии у нее врожденных «двигательных способностей». В «Новой астрономии» автор утверждает, что родственные тела (планеты, Солнце) взаимно притягиваются. Это притяжение объединяет и связывает тела. Если из пушки выстрелить на восток и на запад, то из-за вращения Земли дальности полета снарядов будут разными. Таковы некоторые воззрения Кеплера, отражающие научную картину мира в Европе начала XVII века и получившие развитие в трудах Декарта, Ферма, Роберваля, Уоллиса, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница и их научных преемников.

1.4. Идеи механики Р. Декарта

Эстафету разрушения аристотелевской картины мира продолжил выдающийся французский философ, математик, механик, физик и физиолог **Рене Декарт** (Descartes, латинизированое имя – **Картезий**, Cartesius). Декарт родился 31 марта 1596 г. в городке Ла Э (ныне департамент Эндр и Луара) в обедневшей дворянской семье. Его отец – Иоахим Декарт – был советником парламента Бретани, мать умерала, когда Рене исполнился один год, и его воспитанием занималась бабушка по материнской линии. Рене рос болезненным, но очень способным ребенком. В 1606 г. отец привез его в Анжу для поступления в королевский коллеж Ла Флеш. Здесь Рене жил и учился до лета 1615 г. Ла Флеш, принадлежавший ордену иезуитов, был открыт в бывшем королевском замке Шато Нэф (дар Генриха IV) за два года до появления в нем Декарта и пользовался репутацией одного из лучших учебных заведений. Здесь давали прекрасное классическое образование, изучали естественные и точные науки, обучали фехтованию, верховой езде и правилам хорошего тона.

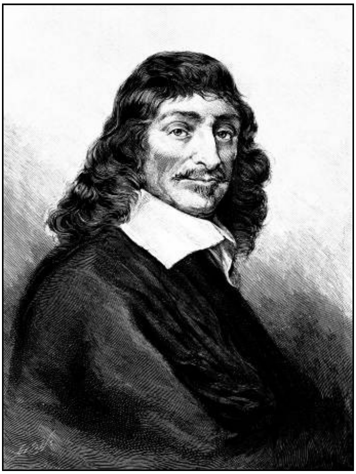


Рис. 12. Рене Декарт

После коллежа Рене два года провел в Париже, где вновь встретился со своим старшим приятелем по Ла Флешу, а теперь священником – Мареном Мерсенном (1588–1648), который уже был известен как большой знаток математических и естественных наук. В 1616 г. Декарт получил степень бакалавра права в университете Пуатье, а в 1618 г. отправился в Голландию (стал солдатом армии принца Морица Оранского), где поступил в военную школу для иностранцев в г. Бреда. Здесь судьба свела его с Исааком Бекманом (1588–1637), медиком по образованию, но увлеченным ученым, замечательным математиком и философом. Мерсенн и Бекман сыграли важную роль в научной судьбе Декарта.

В 1619 г. Декарт участвовал в походе армии герцога М. Баварского в Германии. Оставив военную службу, с 1623 по 1625 г. путешествовал по Италии (Лорето, Рим, Венеция, Турин, Пьемонт) и Швейцарии, а в 1625 г. обосновался в Париже. Здесь он вновь встретился с Мерсенном и стал активным членом его научного кружка. Декарт был поглощен научными планами, связанными с опровержением философии Аристотеля. Он пришел к убеждению, что необходимо подвергать сомнению все бездоказательные, неочевидные постулаты прежней науки, заменяя их неопровержимыми истинами. Он был увлечен поиском некоторого фундаментального принципа, из которого, как следствие, можно было бы получить ответы на все вопросы. Парижская суета утомляла Декарта, отвлекала от главного дела жизни, и в конце 1628 г. он переехал в Голландию.

К тому времени Голландия уже была одним из интеллектуальных центров Европы. Здесь жили многие ученые, процветало свободомыслие, а Амстердам стал центром книгопечатания и книготорговли. Скромные средства материнского наследства (имение в Пуату) позволили Декарту полностью посвятить себя научной деятельности. В Голландии Декарт, часто меняя место жительства, прожил более двадцати лет. Здесь были написаны и опубликованы его основные сочинения: «Мир или трактат о свете» (1633, опубликована в 1664), «Рассуждения о методе» (1637), «Диоптрика» (1637), «Начала философии» (1644).

В 1634 г. Декарт познакомился с Еленой Янс. Некоторое время они жили вместе. Официально отношений с ней Декарт не оформил и знакомить со своими друзьями тоже не счел нужным. В 1635 г. Елена родила дочь Франсину, которую Рене очень любил, но, к сожалению, она рано умерла. Декарт впоследствии говорил, что большего горя ему в жизни испытывать не доводилось. В 1649 г. по приглашению шведской королевы Кристины Декарт переехал в Стокгольм, где скончался 11 февраля 1650 г. Через 17 лет прах Декарта был перевезен во Францию.

Как уже отмечалось, во многих странах Европы в первой половине XVII века существовали научные кружки. Во Франции они были в Лиможе, Каоре, Дижоне, Провансе (кружок Пейреска – одного из наиболее известных просветителей Европы, в доме которого нашел убежище Т. Кампанелла), Париже (кружки де Ту, братьев дю Пюи, монаха Мерсенна и герцога де Монмора), участниками которых, как правило, были просвещенные священники, государственные чиновники, профессора коллежей и университетов, ученые-любители. Эти кружки были не только дискуссионными клубами, они пропагандировали, популяризировали новые научные идеи, теории и формировали научные интересы своих членов.

Рис. 13. Марен Мерсенн

Кружок **Марена Мерсенна** объединял любителей физико-математических наук. Мерсенн известен нам как исследователь «чисел Мерсенна», играющих важную роль в теории чисел, криптографии и генераторах псевдослучайных чисел. Также он принимал участие во многих исследованиях, научных дискуссиях, проводил опыты по изучению сопротивления твердых тел, истечения жидкостей, колебаний упругих тел, как математик занимался исследованиями по теории музыки. Мерсенн одним из первых оценил скорость звука, описал две схемы зеркального телескопа (рефлектора), которые позже воплотил в практику Ньютон. Мерсенн также издал «Механику» Галилея на французском языке (1634), редактировал труды Евклида, Архимеда и других античных классиков.

Но еще более важной была организаторская деятельность Мерсенна. Научная периодика тогда еще не существовала, и его оживленная переписка (на латыни) с Галилеем, Кавальери, Декартом, Бекманом, Э. Паскалем (отцом), Робервалем, Торричелли, Ферма, К. Гюйгенсом (отцом), Гассенди и многими другими (известно 78 респондентов) объединяла действующих ученых, значительно способствовала быстрому прогрессу физико-математических наук, а ныне представляет большой исторический интерес. Особенно важным общение с Мерсенном было для Декарта и Ферма. Мерсенн не только сообщал Декарту о новейших научных идеях и достижениях, но также защищал его от клерикальных нападок и помогал в издании трудов. А об открытиях Ферма мы знаем практически только из его переписки с Мерсенном, изданной посмертно.

Существенное влияние на формирование научных интересов и взглядов Декарта оказал **Исаак Бекман** (Beeckman, 1588–1637) – голландский математик и механик, учившийся в Сомюрском и Лейденском университетах у **В. Снеллиуса** (1580–1626) и С. Стевина, доктор медицины (1618). В 1618–1619 гг. Бекман был помощником ректора в школе г. Вера, где он принимал участие в астрономических наблюдениях знаменитого астронома

Ф. ван Ласберга. С 1619 по 1620 г. работал помощником ректора в Утрехте. С 1620 по 1627 г. преподавал в латинской школе г. Роттердама, где основал технический колледж («Collegium Mechanicum»). С 1627 г. вплоть до своей смерти в 1637 г. был ректором латинской школы в Дордрехте, где среди его учеников был будущий знаменитый государственный деятель и ученый **Ян де Витт** (1625–1672).

Рис. 14. Ян де Витт

Рис. 15. В. Снеллиус

Бекман был известным ученым, он вел научную переписку, к нему в Дордрехт приезжали Рене Декарт (1628, 1629), Пьер Гассенди (1629), Марен Мерсенн (1630), но не публиковал своих научных сочинений. И только его переписка с Декартом, Мерсенном и обнаруженный в 1905 г. в библиотеке Миддельбурга (родина Бекмана) Корнелием де Ваардом «Журнал» (был издан в 1939–1953 гг. в Гааге в 4 томах) – дневник, раскрывающий основные научные взгляды Бекмана, позволяют судить о его естественнонаучных взглядах: это идеи отсутствия пустоты и существования всемирного эфира, сохранения движения материи (формулировка закона инерции), коперниканский взгляд на устройство солнечной системы с кеплеровским объяснением движения планет; теория падения тел (независимо от Галилея открыл законы скоростей и расстояний для падения тел); корпускулярная теория света; теория абсолютно неупругого удара тел; парадоксы гидростатики и их объяснение механикой Стевина (действие насоса объяснял не «боязнью пустоты», а действием атмосферного давления); с помощью опытов определил изохронность звуковых колебаний и установил обратную пропорциональность частоты колебаний и длины струны.

Во время непродолжительной дружбы с Декартом в г. Бреда Бекман делился с ним своими взглядами, они оба мечтали «о совместном, по воле Бога, проникновении в самый центр научного пространства» [1, с. 67]. Но этим мечтам не суждено было сбыться. Позднее все свои научные открытия Декарт считал только личной заслугой. Бекман умер в возрасте 48 лет от туберкулеза легких. В год его смерти Декарт издал свой главный математический труд «Геометрия». Его научные изыскания получили всеобщее признание.

Для всего творчества Декарта характерно стремление проникнуть в суть вещей, узнать некий фундаментальный принцип, из которого бы все остальное вытекало как необходимое следствие. И его методологический принцип – сомневаться в уже известном и искать самоочевидные фундаментальные истины – оказался эффективным средством для достижения целей, одна из которых – построение новой механики, основанной на понятии количества движения. Декарт писал, что физические идеи «позволяют достичь знаний очень полезных в жизни и вместо умозрительной философии, преподаваемой в школах, можно создать практическую, при помощи которой, зная силу и действие огня, воды, воздуха, звезд, небес и всех прочих окружающих нас тел, так же отчетливо, как мы знаем различные ремесла наших мастеров, мы могли бы, наравне с последними, использовать и эти силы во всех свойственных им применениях и стать, таким образом, как бы господами и владетелями природы» [1, с. 68].

Статическая концепция Декарта ясно свидетельствует о преемственности идей Стевина, в частности его принципа возможных перемещений (скоростей, работ). В работе «Объяснение приспособлений, с помощью которых можно малой силой поднимать большие тяжести», приложенной к письму К. Гюйгенсу (5 октября 1637 г.), Декарт пишет: «*Объяснение всех этих приспособлений основано на одном принципе, состоящем в том, что одной и той же силой можно поднять, например, груз в 100 фунтов на высоту 2 фута или груз в 200 фунтов на высоту в 1 фут...*» [1, с. 70]. Из дальнейших рассуждений автора видно, что под силой он понимает, в зависимости от содержания задачи, либо момент силы, либо работу силы в их нынешнем понимании.

Термином «работа» Декарт не пользовался. Бекман также называл это словом «*cracht*», являющимся фламандским эквивалентом немецкого слова «*krafft*», т.е. «сила». Хотя термин «работа» впервые встречается в книге «Причина движущих сил» (1615) последователя Стевина французского инженера-механика (строителя фонтанов) **Саломона де Ко** (Salomon de Caus, 1576–1630).

Рис. 16. Саломон де Ко

Динамические воззрения излагаются Декартом в трех его главных сочинениях – «Мир», «Рассуждения о методе», «Начала философии». В частности, в «Началах философии» принцип сохранения работ Декарт распространяет на изучение движения тел и формулирует принцип сохранения количества движения. В письме к де Бону (30 апреля 1639 г.) он пишет: «*Я утверждаю, что существует известное количество движения во всей сотворенной материи, которое никогда не возрастает и не убывает. Таким образом, когда одно тело приводит в движение другое, оно столь же теряет в своем движении, сколько отдает*» [6, с. 143] Обоснованием этого принципа он считал неизменность божественной воли.

Основные положения картезианской философии естествознания:

– Вселенная заполнена непроницаемой материей (пустоты нет);

– материя и пространство тождественны;

– Бог неизменен, поэтому количество движения материи постоянно.

По Декарту, в мире существуют законы сохранения, относящиеся к миру в целом, взаимодействия же составных частей мира должны подчиняться законам (правилам) природы, которые нельзя приписывать непосредственно действию Бога.

«*Первое правило состоит в том, что каждая часть материи по отдельности всегда продолжает оставаться в одном и том же состоянии до тех пор, пока встреча с другими частями не вызовет изменений этого состояния*» [1, с. 69]. Таким образом, автор формулирует закон инерции и использует понятие «состояние», обобщающее прежние понятия «покой» и «движение». В «Началах философии» Декарт дополняет этот закон вторым: «*Всякое движущееся тело стремится продолжать свое движение по прямой*» [1, с. 69]. Оба правила-закона являются следствием неизменности «количества движения материи», под которым Декарт понимал величину, пропорциональную «количеству материи» и скорости. Кроме этого, он считал, что не существует абсолютной системы отсчета, а следовательно, и абсолютного движения или покоя, эти понятия относительны.

Следует иметь в виду, что у Декарта нет современного понятия массы тела (количества материи), скорость он определяет только величиной (без учета направления движения), поэтому его понятие количества движения отлично от современного. Тяжесть тела он понимает не как результат притяжения Земли, а как результат вихревого движения тончайшей и невидимой небесной материи – эфира. Вихревое движение эфира вокруг Земли, считает Декарт, создает центростремительную силу (это термин появился позднее у Гюйгенса), толкающую все тела к ее центру, точнее – к оси суточного вращения Земли. Эту идею далее поддерживал и экспериментально подтверждал (вращение воды в стакане) Х. Гюйгенс. Но несомненно, что открытие двух фундаментальных законов (инерции и сохранения количества движения) оказало важнейшее влияние на все последующее развитие механики.

Знакомство с эпистолярным наследием Декарта убеждает, что принцип сомнений он применял не только в научной работе, но и в оценке творчества своих оппонентов, тщательно защищая личные взгляды и авторитет. Это ярко подтверждается его заочной (через переписку с Мерсенном, Кавендишем, К. Гюйгенсом, Мореном) полемикой с Галилеем, Робервалем, Боном по поводу большинства актуальных в тот период вопросов механики: принципах равновесия тел, свойствах инерции, притяжении, колебаниях и ударе тел.

В качестве примера приведем полемику Декарта с Р. Робервалем. В «Трактате о механике...» (1636), посвященном статике и развивающем идеи Стевина, Архимеда, Гвидо Убальди, Люка Валера, Роберваль обращает внимание на направленность действия силы. В частности, указывает, что «*линия действия свободного тяжелого тела проходит через центр его тяжести и... центр земли*» [1, с. 70]. Ассоциация взаимодействия тел с направленными отрезками позволяет ему заменять сложную систему взаимодействий тел более простой. Для этого он пользуется аксиомой о переносе силы вдоль линии ее действия («*В какую бы точку линии действия ни была приложена сила, она тянет и толкает одинаково*» [1, с. 70]) и законом сложения сил («правило параллелограмма»), вошедшими в современную статику. Закон сложения сил Роберваль совмещает с принципом виртуальных работ. Декарт, ссылаясь на свою работу «Ecrit de Statique», возражает Робервалю: «*...он говорит о времени или о скорости там, где я говорю о пространстве, что является очень большой ошибкой, которую я объяснял ранее*» [1, с. 71].

В своей полемике по проблемам механики Декарт:

– признает относительность покоя и движения и существование у тел инерционных свойств (более того, в письме Мерсенну он указывает и меру инертности: «*...можно сказать по этому поводу, что чем больше материи вмещает тело, тем больше у него натуральной инерции*» [1, с. 71]);

– пытается понять физическую сущность удара тел и различает ударные силы и силы давления;

– отвергает идею наличия у всех тел свойства взаимного притяжения, взаимодействия, высказанную Робервалем в работе 1644 г. и в письме Ферма (1636) как развитие философии Аристарха Самосского;

– вводит понятие центра качаний (d'agitation) для тел, совершающих чисто вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Отвечая на возражения Декарта, Роберваль подвергает критике метод определения этой точки, предложенный Декартом, и предлагает свой метод определения аналогичной точки, названной им центром удара (percussion). Однако взаимные упреки не способствовали решению проблемы и оставили ее открытой. И только решение Х. Гюйгенсом, а позднее Я. и И. Бернулли, Лопиталем, Германном задачи о центре колебаний стало импульсом для создания теории механических колебаний и привело к пополнению арсенала механики новыми понятиями (в том числе осевого момента инерции тела) и принципом построения динамических уравнений движения, ставшим прообразом принципа Даламбера.

Декарт не был чьим-либо сторонником, скорее он был оппонентом своих предшественников и современников. Оригинальность его мысли, математическая стройность и ясность, философская общность и глубина быстро завоевали популярность в научных кругах, оказали значительное влияние на форму и содержание математических и естественнонаучных концепций XVII века. Однако век картезианства оказался коротким. Провозглашая новую концепцию «практической» философии, сам Декарт во многом оставался поборником «умозрительной» науки. Это подтверждается как содержанием его научного творчества, посвященного формулировке принципов устройства мира, движения и взаимодействия тел, так и его оценкой творчества Галилея и других современников. Ньютонианская философия естествознания, развивавшая идеи Галилея, Кеплера, Декарта, уже к началу XVIII века получила более широкое распространение как наиболее стройная, обоснованная и эффективная в практических приложениях.

1.5. Новые физические теории

В построении теории движения планет важную роль играло представление о существовании между телами силы притяжения. Идеолог науки нового времени, основоположник индуктивного метода исследования Френсис Бэкон, даже критикуя главное сочинение У. Гильберта «О магните» (1600), безусловно, находился под его влиянием. Не вызывает сомнения и влияние физических идей У. Гильберта на творчество Кеплера, Галилея, Декарта и их современников.

К задаче о движении планет в первой половине XVII века добавились задачи о падении тел, движении жидкости в некотором канале, соударении тел, колебаниях маятников. Их решение требовало новых физических гипотез и математических методов. И для этого нужны были не только качественные, физические меры движения тел и декларирование их свойств, но и точные количественные меры и выражение законов движения в виде определенных соотношений между мерами, в частности, в форме равенств – уравнений.

Так, определение понятия скорости тела как пути, проходимого им в единицу времени, позволило Галилею сформулировать законы падения в виде пропорций: скорость падения пропорциональна времени; путь падения пропорционален квадрату скорости. Оптические законы движения света (движение света ассоциировалось с движением шарика – световой частицы), его преломления при переходе границы двух сред разной плотности, установленные Героном, Птолемеем, ал-Хайсамом, Кеплером, Галилеем, Торричелли, Снеллиусом, Декартом, Ферма, также имели ясное математическое выражение. Для закона преломления это было $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$, где α и β – углы падения и преломления, а v_1 и v_2 – скорости света в первой и второй среде соответственно.

Изучение Галилеем, Торричелли, Марци, Декартом, Уоллисом, Реном, Гюйгенсом, Мариоттом, Ньютоном колебаний маятников, соударения тел, движения жидкости привели к установлению многих новых понятий и законов, определяющих период колебаний маятника, сохранение высоты центра тяжести системы тел, скорости идеальной жидкости, вытекающей из сосуда (формула Торричелли $v=\sqrt{2gh}$), сохранение и изменение количества движения, равенство действия и противодействия тел, величину силы взаимного притяжения тел (закон всемирного тяготения) и другие соотношения физических величин. Все физические законы имели математические представления в виде некоторых равенств или функций времени, положения, скорости.

Понятия переменной величины, бесконечно малой, функции, определенного интеграла, геометрических координат, их математические и физические свойства становятся неотъемлемой частью и основой математики переменных величин, описывающей законы движения тел, открытые в XVII веке.

1.5.1. Законы удара тел

Галилей раньше других заинтересовался феноменом удара тел, чему и посвящена шестая глава его «Бесед» (опубликована в 1718 г.). Он начал не с теоретических построений, а с экспериментальных попыток определения величины ударной силы. Мысленные и натурные эксперименты с весами, блоками, забиванием свай не привели к желаемому результату, но убедили, что сила удара зависит от скорости и веса тела, а эффект ее действия многократно превосходит давление «мертвого груза», ударная сила может быть сколь угодно большой. Метод и цели Галилея были восприняты его учеником Э. Торричелли (1608–1647) в опубликованных им популярных лекциях «Об ударе» и чешским ученым Й.М. Марци, издавшим в Праге трактат «О соотношении движений или правила соударений» (1639).

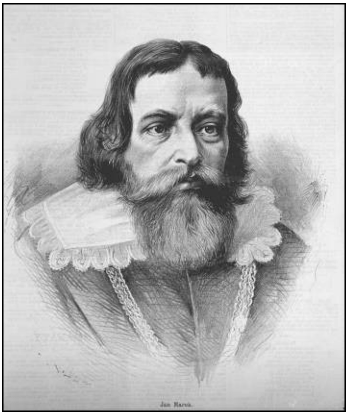


Рис. 17. Й.М. Марци

Йоханнес Маркус Марци (1595–1667) – чешский физик, математик (выпускник 1625 г., профессор с 1630 г., ректор с 1662 г.)

Пражского университета. Физические исследования Марци были посвящены механике и оптике. В трактате «О соотношении движений…» впервые различаются три вида сталкивающихся тел – жесткие, мягкие и упругие. Рассматривая центральный удар упругих шаров, автор считает ударный импульс (меру «мощности или качества перемещения») пропорциональным весу и скорости, экспериментально показывает независимость постударных скоростей от размеров тел. Опыты с подвешенными шарами привели его к выводам: 1) если движущееся тело сталкивается с равными ему по весу и по материалу покоящимся телом, то само оно остается в покое, другое же тело воспринимает его движение; 2) если два равных тела с равными, но произвольными скоростями сталкиваются, то оба отталкиваются друг от друга после удара с равными, но произвольными скоростями. В 1648 г. Марци открыл дисперсию света, первым высказал идею о волновой природе света, объяснил радугу и окрашенность тонких пленок. Работы Марци, в том числе по математике и медицине, долгое время были мало известны.

Философский гений Декарта не позволял ему доверять только экспериментальным фактам. Поэтому свои рассуждения («правила удара») в «Началах философии» он заканчивает заявлением: «*Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам*» [1, с. 77]. Но опыты противоречили декартовым правилам удара. И причина его заблуждений, как позднее заметил Христиан Гюйгенс, состояла не в ошибочности принципа сохранения количества движения, а в непонимании (или неумении записать) того, что количество движения имеет не только величину, но и направление. Это заблуждение вылилось у Декарта в ошибочное правило сложения количеств движения тел.

Научные интересы Гюйгенса, внесшего наиболее значительный вклад в теорию удара, формировались под влиянием Кеплера, Галилея, Торричелли и Декарта. Принимая научную эстафету от Декарта, он, тем не менее, пошел своим собственным путем. Изучение явлений природы, процессов движения и взаимодействия тел экспериментальными и математическими методами, а не поиск их причин и философские размышления, стали основным содержанием его научного наследия. Высокий авторитет Гюйгенса в европейском научном сообществе второй половины XVII века во многом определил дальнейший прогресс таких разделов механики, как теория удара, теория колебаний, теория притяжения, теория центральных сил, способствовал ускорению внедрения идей математического моделирования и созданию универсальной физико-математической теории движения и равновесия тел – теоретической механики.

Рис. 18. Христиан Гюйгенс

Христиан Гюйгенс родился 14 апреля 1629 г. в семье Константина Гюйгенса (1596–1687). Отец Гюйгенса был блестяще образованным человеком, влиятельным государственным чиновником (секретарем сначала принца Фредерика-Генриха, а затем Вильгельма II Оранского, к концу жизни стал председателем государственного совета), ценителем живописи, литератором, музыкантом (композитором и исполнителем), ученым, знатоком многих европейских языков. После переезда в Голландию Декарт познакомился с Константином Гюйгенсом (они были ровесниками), поддерживал с ним дружеские отношения, приезжая в Гаагу, останавливался в доме Гюйгенсов.

Мать Христиана умерла, когда ему было восемь лет, в семье было пять детей (Константин, Христиан, Людвиг, Сусанна, Филипс). Начальным образованием (латынь, греческий, французский, итальянский языки, математика, механика, география, музыка) Христиана занимались отец и дед (тоже Христиан Гюйгенс). В 1645 г. Христиан поступил в известный тогда Лейденский университет, где изучал математику под руководством знаменитого Франца ван Схоутена (1581–1646). Сын Схоутена – Франц ван Схоутен-младший (1615–1661) также был известным математиком – приверженцем метода неделимых Кавальери, издателем книг Евклида, Виета, «Геометрии» Декарта (на латыни). После смерти отца он занял его университетскую кафедру и до конца своих дней поддерживал дружеские отношения с Христианом.

В результате знакомства с отцом и сыном Схоутенами Христиан увлекся математикой, изучал работы Евклида, Аполлония, Архимеда, Виета, Галилея, Ферма, Декарта, начал переписываться с Мерсенном, который сформулировал для него несколько интересных задач, в частности задачу об определении центра качаний. В 1647 г. Мерсенн писал Гюйгенсу: «*Я молю бога хранить Вас весь этот год в превосходном здравии, а также чтобы Вы стали Аполлонием и Архимедом наших дней или даже грядущего века*» [14, с. 245]. Эти слова оказались пророческими. С 1647 г. Христиан учился в «Оранской коллегии» в г. Бреда, а с 1650 по 1666 г. жил в доме родителей в Гааге. В этот период он активно занимался научными проблемами и обрел репутацию одного из самых знаменитых ученых Европы.

Круг интересов Гюйгенса в этот период был очень широк. Он занимается механикой, математикой, оптикой и изготовлением оптических приборов, шлифованием линз. В 1655 г. они с братом Константином построили телескоп, который был лучшим в Европе, с его помощью Христиан открыл спутник Сатурна, позднее названный Титаном, кольца Сатурна. В том же году он побывал в Париже, где познакомился со многими французскими учеными (Гассенди, Робервалем, Буйо и др.) и сдал в университете Анжера экзамены на степень доктора права. В 1656 г. Гюйгенс увлекся созданием механических часов, точнее – использованием в конструкции часов маятника для равномерного отсчета времени. В следующем году часы были созданы, а еще через год в Гааге увидела свет его книга «Часы».

В 1659 г. вышла книга «Система Сатурна», а следующие полтора года были заняты путешествием по Европе. Гюйгенс посетил Антверпен, Брюссель, Амстердам, дважды – Лондон и Париж, где выступил с докладом о результатах своих работ. Расширяется круг его знакомств, его встречают как знаменитого ученого, с ним лично желают познакомиться королевские особы (Анна Австрийская, королева Мария-Тереза, король Людовик XIV).

В 1661 г. Гюйгенс описал устройство воздушного (вакуумного) насоса. Эту заслугу обычно приписывают его ученику и ассистенту Дени Папену (1647–1714), позднее переехавшему в Англию и ставшему ассистентом Бойля, однако сам Папен относил ее на счет Гюйгенса. В 1663 г. его избирают первым иностранным членом Лондонского королевского общества, а в 1666 г. министр Кольбер приглашает его в Париж. Гюйгенса избирают Почетным членом только что созданной Академии наук, он становится ее фактическим президентом и следующие 15 лет живет во французской столице.

В 1681 г., по причине религиозных преследований, Гюйгенс вынужден был покинуть Францию и вернуться на родину в фамильный дом в Гааге. Здесь он продолжил свои занятия механикой, астрономией, оптикой («Трактат о свете», 1690), космологией («Космотеорос», 1698), пытался построить планетарий, вел обширную научную переписку, продолжая играть важную роль в научной жизни Европы. Летом 1689 г. 60-летний Гюйгенс встречался с 46-летним Ньютоном, где они оба выступали на заседании Лондонского королевского общества. По иронии судьбы Гюйгенс, установивший законы двойного преломления света, излагал свою ошибочную теорию тяготения, а Ньютон, открывший закон всемирного тяготения, докладывал о своих ошибочных оптических результатах (измерениях при двойном преломлении света).

Христиан Гюйгенс скончался 8 июля 1695 г. в возрасте 66 лет.

Знакомясь с биографиями Галилея и Гюйгенса, легко заметить, что между ними было много общего: оба родились в интеллигентных семьях, получили прекрасное образование, с почтением относились к творчеству Архимеда и были его продолжателями, занимались математикой, механикой, оптикой, созданием телескопов, астрономией, изготовлением часов. Поэтому не удивительно, что вскоре Гюйгенс стал преемником и продолжателем многих идей и взглядов своего знаменитого предшественника.

Первая работа Гюйгенса («О плавающих телах», 1650) продолжала исследования Архимеда о квадратуре круга и по гидростатике. Здесь он получает закон Архимеда исходя из утверждения, что механическая система находится в равновесии, если ее центр тяжести занимает наинизшее положение. В 1652 г., знакомясь с декартовой теорией удара тел, а позднее и с книгой Й.М. Марци, Гюйгенс обнаружил некоторые спорные утверждения и несоответствие опытным данным.

Внимание к задаче об ударе тел объяснялось не только утилитарными потребностями техники (например, ковка, чеканка монет), но и тем, что это один из важнейших способов взаимодействия тел природы. Через четыре года он подготовил рукописный трактат «О движении тел под действием удара». Трактат впервые был опубликован в 1703 г. уже после смерти автора, но его главные результаты были получены гораздо раньше. Частично они изложены в письмах Схоутену (1654), Робервалю

(1656), Слюзу, докладывались Гюйгенсом в Лондонском королевском обществе (1661), в Парижской академии наук (1668), опубликованы в «Journal des Sçavants» (1669).

В этом трактате Гюйгенс указал суть ошибки Декарта (он не учитывал направление скорости) и фактически изложил теорию абсолютно упругого удара. Эта теория включала пять гипотез, тринадцать предложений и две леммы, характеризующие состояние механики середины XVII века. Здесь приводятся закон инерции и принцип относительности движения, определяются абсолютно упругий и прямой удары, описываются авторские представления о физических последствиях соударения тел (4-я и 5-я гипотезы): 4) если большее тело соударяется с меньшим, находящимся в покое, то оно сообщает последнему некоторое движение и, следовательно, теряет несколько в своем движении; 5) если при соударении двух твердых, движущихся навстречу друг другу тел, обнаруживается, что одно из них сохранило свое движение, то и другое не выигрывает и не теряет ничего в движении.

Результаты Гюйгенса представлены тринадцатью предложениями-теоремами, доказательство которых проводится в строгих геометрических традициях с широким привлечением мысленных экспериментов с шарами, подвешенными на нитях. Основные результаты теории Гюйгенса состоят в следующем:

«*Если с покоящимся телом соударяется одинаковое с ним тело, то ударившее тело приходит в состояние покоя, а покоившееся тело приходит в движение со скоростью ударившегося о него*» [1, с. 82].

«*Если два одинаковых тела соударяются с разными скоростями, то они при ударе обмениваются скоростями*» [1, с. 82].

«*Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара*» [1, с. 82].

«*При соударении двух тел сумма произведений из их величин на квадраты их скоростей остается неизменной до и после* *удара; при этом отношение величин и скоростей должны быть выражены числами и отрезками*» [1, с. 83].

Эта теорема впервые использует введенное Лейбницем в 1695 г. понятие «живой силы» ($m\upsilon^2$), позднее названное кинетической энергией ($T = \frac{m\upsilon^2}{2}$) и играющее важную роль в современной физике и механике. Гюйгенс постоянно оперирует понятием «величина тела». Это еще не ньютоновская масса, но в статье, опубликованной в «Journal des Sçavans» (1669), он пишет: *«...я рассматриваю тела из одного и того же вещества или же принимаю, что величина тел определяется их весом*» [1, с. 83]. В этой же статье у Гюйгенса есть еще один результат, не попавший в мемуар 1703 г.: «*Кроме того, я заметил удивительный закон природы, который я могу доказать для сферических тел и который, по-видимому, справедлив и для всех других тел, твердых (упругих) и пластичных при прямом и при косом ударе: общий центр тяжести двух, трех или скольких угодно тел продолжает двигаться равномерно в ту же сторону по прямой линии как до, так и после удара*» [1, с. 83].

Галилея в явлении удара интересовала величина ударного импульса. Декарт, Роберваль, Гюйгенс, Мариотт сосредоточили свое внимание на последствиях удара, на попытке определения постударных скоростей соударяющихся тел. В 1666 г. Лондоское королевское общество объявило конкурс на решение задачи об ударе тел, на который представили свои работы Д. Уоллис, К. Рен и Х. Гюйгенс.

Джон Уоллис (Валлис, John Wallis, 1616–1703) – выпускник Кембриджского университета, профессор геометрии и хранитель архива Оксфордского университета (с 1649 г. до конца жизни), один из первых членов Лондонского королевского общества.

Уоллис обладал уникальными способностями. Не получив систематического математического образования, благодаря самообразованию, он удивлял своих знакомых умением извлекать в уме квадратные корни из больших чисел. После окончания университета стал священником, получил степень магистра, блестяще знал латинский и греческий языки, изучал труды Декарта и старших современников.

Рис. 18. Джон Уоллис

После реставрации монархии (1660) Уоллис завоевал доверие нового короля Карла II, который назначил его придворным священником. В этот же период Уоллис участвовал в создании Лондонского Королевского общества и стал одним из первых его членов. Прижизненное собрание научных трудов Уоллиса вышло в 1693–1699 гг. После кончины 8 ноября 1703 г. он был похоронен в церкви св. Марии в Оксфорде.

Уоллис основательно изучил работы (многие перевел и издал) античных ученых, Торричелли, Кавальери, Декарта, был первым английским математиком, начавшим заниматься анализом бесконечно малых. В «Арифметике бесконечных» (1656), сыгравшей важную роль в предыстории интегрального исчисления, Уоллис, независимо от Ферма и Роберваля, фактически вычислил определенные интегралы от степеней с любыми рациональными показателями и некоторых других алгебраических функций. Он первым рассматривал интеграл как предел отношения числовых последовательностей. В «Трактате о конических сечениях» (1656) Уоллис показывает преимущества аналитического метода Декарта. В более поздних трактатах Уоллис построил график функции $y = \sin x$, высказал идею геометрического представления комплексных чисел, ввел знак ∞ для бесконечности, понятия «интерполяция», «мантисса», «непрерывная дробь», занимался приближенными вычислениями, логарифмами, биномом, позднее получившим имя Ньютона, методом бесконечно малых. Его высокий авторитет в среде английских ученых XVII века повлиял на формирование научных интересов И. Барроу и И. Ньютона.

В 1669–1671 гг. Уоллис опубликовал трехтомный трактат «Механика или геометрический трактат о движении», наиболее полно отражавший состояние механики доньютоновского периода. Трактат начинается двадцатью двумя определениями основных механических понятий. Здесь, по-видимому, впервые делается попытка явного определения скорости.

«*Скорость есть свойство движения, отражающееся в сравнении длины и времени; а именно, она определяет, какая длина в какое время проходится*». «*Равномерная скорость – та, которая в одинаковое время проходит равную длину*». «*Бóльшая скорость – та, которая в одинаковое время проходит бóльшую длину или одинаковую длину в меньшее время; притом бóльшая в таком отношении, в каком указанная длина больше или время меньше. Меньшая (скорость) – наоборот*» [1, с. 84].

Очевидно, что приведенные определения отличаются от современных своей абстрактностью, но в них уже содержатся элементы нынешних представлений. До Уоллиса попытки определения скорости, с современной точки зрения, либо были неудачными, либо совсем не предпринимались ввиду «очевидности» этого понятия. Но «очевидность», как правило, была индивидуальной и не способствовала ни прояснению сущности, ни закреплению этого понятия в механике. И. Ньютон также не определял понятие скорости, возможно, имея в виду данное Уоллисом.

К понятию силы Уоллис относится в духе декартовских традиций, дав ее определение ее как произведение веса на путь, проходимый точкой приложения веса. Но иногда пользуется и представлениями Галилея: сила измеряется произведением веса на скорость точки ее приложения. Это понятие силы позволяет автору сформулировать свой принцип механики, похожий на принцип возможных перемещений: «*Величины опускания различных грузов стоят друг к другу в таком же отношении, в каком произведения весов на высоты падения; поднятия определяются совершенно также.... Говоря в совершенно общей форме, продвижения вперед и отходы назад, обусловленные действием движущих сил, определяются произведениями сил на длину продвижения вперед или отходя назад, измеряемую по линии направления силы*» [1, с. 85]. Говоря о силах в машинах, Уоллис различает движущие силы, измеряемые «моментом», и сопротивление, измеряемое «импедиментом».

Свои законы удара, позднее вошедшие в упомянутый трактат, Уоллис впервые сформулировал в 1668 г., участвуя в конкурсе Лондонского королевского общества. При этом он исходил из принципов своей механики, представляющих причудливую смесь схоластической динамики и статики в стиле Стевина или Декарта: если сила v перемещает вес P за время T на расстояние L, то сила mv переместит вес mP за время nT на расстояние nL так, что отношение $\frac{vT}{PL}$ остается постоянным. Или еще: если сила v перемещает вес P со скоростью C, то сила mv переместит вес P со скоростью mC или вес mP со скоростью C. Как бы мы ни оценивали сейчас эти идеи Уоллиса, но это уже были принципы, положенные в основу построения новой науки о движении. Эти принципы позволили автору получить верные законы абсолютно неупругого удара, они давали возможность проводить расчеты характеристик движения. Но главное – сомнительность происхождения этих принципов, их субъективность послужили основой для поиска новых, более совершенных подходов.

Вклад в теорию удара К. Рена является развитием взглядов Гюйгенса и Уоллиса. **Кристофер Рен** (Christopher Wren, 1632–1723) – английский архитектор (перестраивал центр Лондона после пожара 1666 г.), математик, профессор Оксфордского университета, один из деятельных членов Лондонского королевского общества.

Рис. 19. Сэр Кристофер Рен

Он был автором работ о спрямлении дуги циклоиды, квадратуре и кубатуре образованных ею площадей и тел вращения, о колебаниях маятников, о силах, удерживающих планеты на их орбитах, по вопросам кораблестроения, о сопротивлении жидкости движению плавающих в ней тел, о механике весел и парусов. Его сочинение по теории удара, опубликованное в 1668 г., было посвящено решению задачи соударения упругих шаров, двигающихся по одной прямой, и описанию многих экспериментов, которые он проводил вместе с Р. Гуком.

Вскоре после лондонского конкурса появился «Трактат об ударе или столкновении тел» (1673) Э. Мариотта. Французский аббат **Эдм Мариотт** (Edme Mariotte, 1620–1684) был известным механиком, физиком, одним из основателей и первых академиков Парижской академии наук.

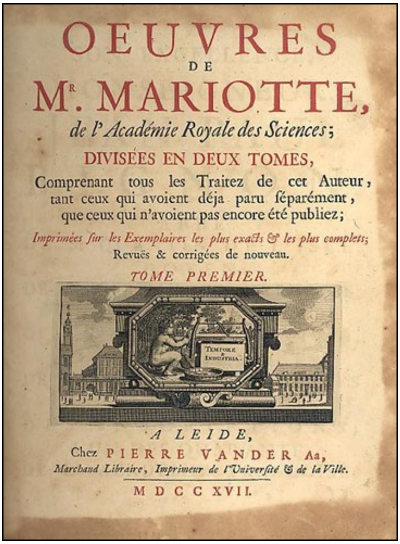


Рис. 20. «Трактат об ударе или столкновении тел».
Титульный лист

В 1676 г. он установил закон изменения объема данной массы газа от давления при постоянной температуре (закон Бойля–Мариотта), предсказал разнообразные применения этого закона, в частности расчет высоты местности по данным барометра.

Он экспериментально подтвердил формулу Торричелли относительно скорости истечения жидкости, исследовал высоту подъема фонтанов, составил таблицы зависимости высоты подъема от диаметра отверстия, экспериментально изучал столкновение упругих тел, колебания маятника, решал задачу изгиба консольной балки прямоугольного сечения, установил закон растяжения стержня, ранее открытый Р. Гуком, доказал увеличение объема воды при замерзании, изучал радугу, дифракцию света, показал отличие между тепловыми и световыми лучами. Изготовил немало различных физических приборов. В частности, им была создана лабораторная установка, состоящая из одинаковых соприкасающихся шаров, подвешенных на нитях одинаковой длины и находящихся (в состоянии покоя) на одной прямой.

Названный трактат (переиздавался в 1679 и 1684 гг.) повторял результаты Марци, Гюйгенса, Уоллиса и Рена, подводил под них обширную экспериментальную базу и связывал изучение удара с колебанием тел (соударяются шары, совершающие колебательное движение, упругость тел поясняется на примере колебаний струны). Мариотт разрешил давний спор Декарта и Роберваля о центре качаний или удара тел (доказал совпадение этих точек для случая треугольника, качающегося около одной из сторон) и, возможно, впервые обратил внимание на то, что количество движения должно определяться не весом, а количеством вещества в теле. Он пишет: «*Под весом тела здесь понимается не свойство, заставляющее (тело) двигаться к центру Земли, а его объем с определенной плотностью или концентрацией частей его материи, который, очевидно, и является причиной тяжести*» [1, с. 86]. Таким образом, Мариотт фактически вводит понятие массы (не определяя его) за пятнадцать лет до его появления в «Началах» Ньютона. Именно здесь, в «Началах», Ньютон сделал следующий важный шаг в создании теории удара тел и всей современной механики.

Дальнейшее развитие теории удара в «Началах» Ньютона, публикациях Лейбница, Якоба, Иоганна, Даниила Бернулли, Германна, Мопертюи, Эйлера, Даламбера, их современников стало важнейшей составляющей формирования идеологии современной механики.

1.5.2. Теория колебаний маятников

История изобретения точных механических часов связана с именами Галилея и Гюйгенса. Идея использования часов для определения долготы места имела огромное значение для мореплавания. В 1612, 1616, 1630 гг. Галилей пытался вступить в переговоры с испанским правительством о передаче своего открытия – измерителя времени. Попытки были безуспешными, поэтому в 1636 г. он обратился с этим предложением к Генеральным штатам Нидерландов, которые приняли предложение и назначили комиссию для его рассмотрения. Комиссия указала на некоторые недостатки часов Галилея (он их признал справедливыми, но преодолимыми) и постановила отправить ему в дар золотое колье стоимостью 500 флоринов. Однако Генеральный инквизитор Флоренции запретил переговоры и Галилей вынужден был отказаться как от дара, так и от продолжения переговоров, которые с голландской стороны поддерживались Константином Гюйгенсом – отцом Христиана. Галилей планировал сделать часы с маятником, гирями, пружиной и надеялся, что работы по созданию часов продолжит его сын Винченцо. Но этим планам не суждено было сбыться. Установлено, что такие часы впервые были построены самим Вивиани.

Рис. 21. В. Вивиани

Рис. 22. Оригинальный рисунок маятниковых часов Галилея, сделанный В. Вивиани (ок.1637)

Через 15 лет после смерти Галилея о создании собственных часов сообщил Х. Гюйгенс. Он заменил «крючковый» спуск, предложенный Галилеем, анкерным и сконструировал свои часы. Изобретение Гюйгенса имело большой успех, 16 июня 1657 г. оно было защищено патентом Генеральных штатов, в 1658 г. в Гааге вышла книга «Часы», а вскоре в Схевенингене (близ Гааги) и Утрехте были построены первые башенные маятниковые часы.

Но изохронность колебаний маятника в часах Христиана была недостаточной и он продолжил теоретические расчеты. В 1673 г. в Париже вышла его главная книга – «Маятниковые часы или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам», в которой собраны и обобщены его основные механико-математические результаты. Трактат сразу привлек внимание изобретателей часов, геометров и механиков, в частности, И. Ньютона. В нем впервые приводится теория эволют и эвольвент, формулируются начала теории колебаний весомых тел (часть вторая – «О падении весомых тел и их движении по циклоиде», часть четвертая –

«О центре качания») и приводятся (без доказательства) 13 теорем о центробежной силе.

Центральные части книги достаточно независимы (это развитие идей предшественников), но все они объединены единой задачей (о колебании маятника) и единым методом исследования (геометрия Евклида). Гюйгенсу удалось показать, что период колебаний маятника будет независим от амплитуды и движения маятника будут равномерными, если его центр тяжести будет двигаться не по окружности, а по циклоиде. Для реализации такого движения Гюйгенс установил вблизи точки подвеса маятника ограничители определенной конфигурации («щеки»), формы которых давала его теория эволют.

Как можно себе представить эволюту и эвольвенту? Возьмем некоторую плоскую фигуру, на которую намотана нить постоянной длины (один ее конец закреплен). Кривую, описывающую границу фигуры, обозначим A и будем называть эволютой. Если сейчас натянутую за свободный конец нить сматывать (наматывать) на фигуру, то ее конец опишет некоторую кривую B, которая и называется эвольвентой. И задача определения формы «щеки» сводилась к определению эволюты к эвольвенте, являющейся циклоидой. Гюйгенсу удалось найти метод построения уравнения эволюты по известному алгебраическому уравнению эвольвенты (обе – циклоиды).

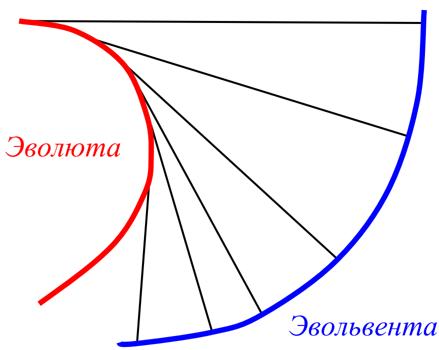


Рис.23. Эволюта и эвольвента

Как продолжатель работ Галилея и Торричелли, в этом трактате Гюйгенс приводит аксиомы (закон инерции; независимость вертикального движения, вызванного весом, и произвольного равномерного движения, составляющих сложное, т.е. реальное движение) и первые одиннадцать теорем («предложений», во второй части), обобщающие результаты Галилея в задаче о колебаниях маятника (считается, что колебания происходят в вертикальной плоскости, под действием тяжести, по траектории, являющейся предельным положением ломаной).

Остановимся на некоторых из теорем Гюйгенса.

Предложение 1. «*Скорость свободно падающего тела возрастает в равные времена на одинаковые величины. Равным образом и пути, проходимые в одинаковые времена, начиная от начала движения, возрастают на одинаковые величины*» [1, с. 92].

При доказательстве этой теоремы автор предполагает, что вес является единственной причиной падения тел. В этом случае любые два тела постоянного веса в равные промежутки времени (от начала движения) будут проходить равные пути. Обобщая эту мысль Галилея–Гюйгенса, мы приходим к заключению Ньютона: сила является единственной причиной неравномерного движения тел. По Ньютону, вес – одна из движущих сил, падение – одно из движений, в процессе которого меняется количество движения. Падение (изменение количества движения) является следствием действия силы (причины движения), а всякое следствие пропорционально его причине. Таким образом, обобщение Ньютона: «изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» [1, с. 92], – ставшее его вторым законом, становится не просто логичным, а очевидным.

Предложение 3. «*Если при свободном падении взять два произвольных промежутка времени (оба от начала движения), то пути, пройденные за эти промежутки времени, относятся как квадраты времен или так же, как квадраты приобретенных конечных скоростей*» [1, с. 92].

Предложение 4. «*Если тело начнет подниматься вверх со скоростью, приобретенной в конце свободного падения, то оно в одинаковые времена будет проходить вверх те же пути, которые проходило раньше в обратном направлении, и тело поднимется до той же высоты, с которой оно падало; кроме того, в равные времена скорость будет убывать на равные величины*» [1, с. 92].

При доказательстве этой теоремы использовался «энергетический принцип» (для двух тел), ранее встречавшийся в работах Торричелли («De Motu gravium», 1644) и Роберваля, который Гюйгенс обобщил на систему тел: «*Система весомых тел, движущихся под влиянием силы тяготения, не может двигаться так, чтобы общий центр тяжести тел поднялся выше первоначального положения*» [1, с. 93].

Предложение 6. «*Скорости, приобретаемые весомыми телами при падении по наклонным плоскостям разного наклона, одинаковы, если высоты наклонных плоскостей равны*» [1, с. 93].

Предложения 7–10 посвящены адаптации полученных результатов на случай движения по ломаной или произвольной кривой, расположенных в вертикальной плоскости.

Предложение 11. «*Если тело падает вдоль какой-нибудь поверхности и потом меняет направление движения и поднимается по той же или по симметричной и симметрично расположенной поверхности, то при падении и поднятии одинаковые пути проходятся в одинаковые времена*» [1, с. 93].

Итак, для равномерности часового хода, траектория движения маятника должна быть некоторой кривой, симметричной относительно вертикальной оси. Далее Гюйгенс рассматривает циклоиду, образованную точкой окружности колеса, катящегося по прямой. Доказав в предложениях 12–20 свойства циклоиды и движения по ней, он устанавливает, что искомая траектория движения маятника – это циклоида с вертикальной осью и вершиной, обращенной вниз (предложения 25–26).

Третья часть «Маятниковых часов» излагает теорию эволют и эвольвент, четвертая часть «О центре качания» посвящена изложению начал теории колебаний, механики системы точек и тел. Свою теорию Гюйгенс начинает с истории возникновения проблемы центра качания (задача была сформулирована Мерсенном, ее пытались решить Декарт, Оноре Фабри и др.) и определений:

«*1. Под маятником мы будем понимать любую, обладающую весом фигуру (линию, плоскость или тело), так подвешенную, что она может совершать колебательные движения вокруг некоторой точки или, вернее, вокруг горизонтальной оси.*

2. Горизонтальную ось, вокруг которой надо мыслить колебания маятника, мы будем называть осью колебаний.

3. Под простым маятником мы будем понимать нить или линию, не гнущуюся и невесомую и несущую на нижнем конце прикрепленный груз. Вес этого груза как бы сосредоточен в одной точке.

4. Под сложным маятником мы будем понимать тело, состоящее из нескольких грузов, сохраняющих неизменное расстояние как друг от друга, так и от оси колебаний. Таким образом, всякое подвешенное тяжелое тело может быть названо сложным маятником, так как оно может быть мысленно разделено на любое число частей.

5. Изохронными назовем маятники, совершающие колебания через подобные дуги в одинаковые времена.

(«Через подобные дуги» означает при равных амплитудах. В этом случае центральные углы равны и дуги подобны независимо от длины маятника (радиуса). Фактически речь идет о движении разных точек совершающего колебания стержня).

6. Под плоскостью колебаний будем понимать плоскость, проходящую через центр тяжести подвешенной фигуры перпендикулярно к оси колебаний.

7. Линией центра фигуры будем называть прямую, проведенную через центр тяжести фигуры и через ось колебаний, перпендикулярно к этой оси.

8. Отвесной линией будем называть линию, проведенную от оси колебаний в плоскости качаний перпендикулярно к плоскости горизонта.

9. Центром качаний любой фигуры назовем ту точку оси фигуры, расстояние от которой до оси колебаний равно длине простого маятника, изохронного с подвешенной фигурой.

10. Любую линию, проходящую через центр тяжести фигуры, назовем осью тяжести.

11. Назовем колебания плоской фигуры или плоской кривой плоскими, если ось колебаний лежит в плоскости фигуры или линии.

12. Назовем колебания плоской фигуры или плоской линии боковыми, если ось колебаний расположена перпендикулярно к плоскости фигуры или кривой.

13. Если говорят, что надо веса помножить на прямые линии, то это означает, что перемножаются числа или отрезки прямых, которые выражают величину весов или их отношение друг к другу» [1, с. 94].

Далеко не все из введенных понятий вошли в современную теорию колебаний, некоторые получили иное название. Простой и сложный маятники ныне называются соответственно математическим и физическим, иначе определяются плоские колебания, нет необходимости в понятиях боковых колебаний, линии центра фигуры. Но именно здесь начинается формирование языка одного из важнейших разделов теоретической механики. Понятийный аппарат теории Гюйгенса продолжают две гипотезы.

1. «*Если любое число весомых тел приходит в движение φφ благодаря их тяжести, то общий центр тяжести этих тел не может подняться выше, чем он был в начале движения*» [1, с. 95].

2. Сопротивление воздуха и другие помехи движению отсутствуют.

Первая из гипотез уже использовалась при доказательстве Предложения 4 второй части и здесь поясняется на уровне человеческого опыта и здравого смысла. Гюйгенс считает эту гипотезу чрезвычайно важной и перспективной: «*Эта моя гипотеза применима также и к жидкостям. И при помощи ее можно доказать не только все теоремы Архимеда о плавании тел, но и много других теорем механики. И если бы изобретатели новых машин, напрасно пытающиеся построить вечный двигатель, пользовались этой моей гипотезой, то они легко бы сами сознали свою ошибку и поняли, что такой двигатель нельзя построить механическими средствами*» [1, с. 95].

Теория включает 24 теоремы-предложения, посвященные способам нахождения центра качания, и две теоремы, позволяющие определить единицу длины и ускорение свободного падения тел. Это первая попытка строгого геометрического изложения механики системы тел применительно к задаче о колебаниях. Здесь впервые используются (но не определяются) понятия связи, осевого момента инерции, доказывается теорема о моменте инерции относительно оси, параллельной данной, вычисляются осевые моменты инерции и центры качаний круга, прямоугольника, равнобедренного треугольника, параболы, кругового сектора, окружности, правильного многоугольника, пирамиды, конуса, шара, цилиндра, параболического и гиперболического коноидов, половины конуса, находится ускорение свободного падения.

Следует заметить, что обозначение g для ускорения свободного падения впервые было введено И. Бернулли. Для широты Парижа, из расчетов Гюйгенса, следует $g = 9{,}799\,\text{м/с}^2$ (нынешнее значение $g = 9{,}809\,\text{м/с}^2$).

Предложение 1 устанавливает правило нахождения координат центра тяжести системы тел. Следующее предложение уточняет это правило для случая n равных тел. Третья теорема, говоря современным языком, доказывает, что при перемещении тел системы сумма работ их весов равна работе общего веса всех тел на соответствующем перемещении центра тяжести. Четвертое предложение устанавливает, что наибольшая высота центра тяжести системы тел не изменится, если тела будут в какой-то момент освобождены от связей между ними. Центральное место в теории занимает Предложение 5, дающее формулу для определения положения центра качания или приведенной длины физического маятника.

В современных курсах теоретической механики эта формула получается из сравнения дифференциальных уравнений колебаний математического $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}sin\varphi=0$ и физического $\ddot{\varphi}+\frac{mlg}{J}sin\varphi=0$ маятников (φ – угол отклонения от вертикали; g – ускорение свободного падения; l – расстояние от оси вращения до центра тяжести; m – масса; J – осевой момент инерции). Сопоставляя эти равенства легко заметить, что физический маятник будет вести себя как математический маятник длиной

$$l_{np}=\frac{J}{ml}. \tag{1}$$

Это и есть формула для определения приведенной длины (l_{np}) физического маятника. По аналогии с математическим период малых колебаний физического маятника будет определяться равенством

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}}. \tag{2}$$

Однако Гюйгенс пришел к этому результату совсем иначе. Впервые эту задачу Гюйгенс получил от Мерсенна в сентябре 1646 г. (в письме его отцу). По свидетельству самого Гюйгенса, до 1665 г. ни он, ни Мерсенн, ни Декарт, ни Роберваль не дали удовлетворительного решения этой проблемы, ставшей актуальной в связи с работами по конструированию часов. С 1661 г. колебаниями маятника (в том числе сложного) заинтересовались представители Лондонского Королевского общества. Правда, их интерес был связан не с созданием маятниковых часов, а с идеей установления с помощью маятника универсальной меры длины («естественного стандарта») и с намерениями определить силу сопротивления воздуха. К этому времени Гюйгенс окончательно определился со своими естественнонаучными принципами, стал одним из искуснейших геометров Европы, и ему нужно было предложить способ регулирования колебаний маятника. Чисто инженерная проблема требовала математического решения.

Приводимое здесь доказательство заслуживает воспроизведения хотя бы для того, чтобы показать, как в механику вошло понятие осевого момента инерции. Оно не копирует, но в точности следует умозаключениям Гюйгенса. При этом используются современные обозначения.

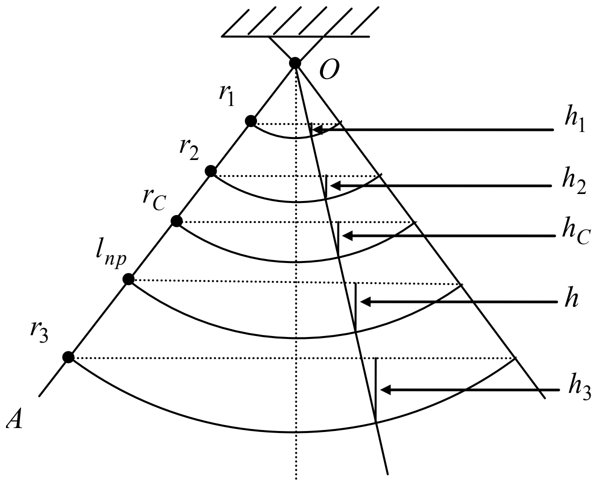


Рис. 24

Пусть физический маятник (рис. 24) – невесомый стержень OA с тремя грузами, расположенными на заданных расстояниях r_k, где m_k – масса груза r_k, υ_k – скорость груза r_k, r_C – положение центра тяжести грузов, h_k, h_C, h – «одновременные» отрезки перпендикуляров к хордам в сегментах траекторий. Стержень OA

совершает колебания, грузы, и их центр тяжести описывают дуги радиусов r_k и r_C. Допустим, что существует математический маятник длиной l_{np} и массой $m = m_1 + m_2 + m_3$, совершающий колебания, изохронные с нашим стержнем. Пересечем все дуги произвольной прямой, проходящей через O. Все грузы, их центр тяжести и математический маятник окажутся на этой прямой в один и тот же момент t, и у них будут скорости $\upsilon_k, \upsilon_C, \upsilon$ (υ_C и υ – скорости центра масс и математического маятника).

Все сегменты подобны, поэтому

$$\frac{h_k}{h} = \frac{r_k}{l_{np}}; \qquad \frac{h_C}{h} = \frac{r_C}{l_{np}}. \tag{3}$$

Точки движутся по окружностям, т.е.

$$\frac{\upsilon_k}{\upsilon} = \frac{r_k}{l_{np}}; \qquad \frac{\upsilon_C}{\upsilon} = \frac{r_C}{l_{np}}. \tag{4}$$

В соответствии с Предложением 3 второй части

$$\frac{h_k}{h} = \frac{\upsilon_k^2}{\upsilon^2}; \qquad \frac{h_C}{h} = \frac{\upsilon_C^2}{\upsilon^2}. \tag{5}$$

Третье предложение-теорема четвертой части с точностью до замены весов массами приводит к равенству:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k h_k = m h_C.$$

Подставляя в полученное равенство $h_C = \frac{r_C}{l_{np}} h$ (из (3)) и $h_k = \left(\frac{r_C}{l_{np}}\right)^2 h$ (из (5) и (4)), получим:

$$\frac{\sum_{k=1}^{3} m_k r_k^2}{l_{np}^2} h = m \frac{r_C}{l_{np}} h,$$

а после преобразований и выражение для приведенной длины

$$l_{np} = \frac{\sum_{k=1}^{3} m_k r_k^2}{m\, r_C},$$

которое полностью совпадает с формулой (1). Числитель этой формулы ($J = \sum m_k\, r_k^2$) позднее (у Эйлера) получил название осевого момента инерции.

Следующие предложения-теоремы развивают полученный результат для конкретных примеров тел. В том числе доказывается и аналог теоремы о моменте инерции относительно оси, параллельной оси вращения (Предложение 9), показывается, что $l_{np} > r_C$, устанавливаются правила вычисления разности $l_{np} - r_C$ (Предложение 18) и возможности перемены мест подвеса и центра качания (Предложение 20). Без определения и названия, но с указанием правила для их вычисления («*...длины каких-либо двух маятников относятся между собой как квадраты времен, потребных для одного колебания, вследствие этого они обратно пропорциональны квадратам чисел, которые указывают, сколько колебаний происходит за определенный промежуток времени*») используется понятие периода и частоты колебаний (Предложение 25).

Более чем через 150 лет этот результат повторил и придал ему современную форму член Берлинской академии наук (с 1834), профессор Берлинского университета Якоб Штейнер (1796–1863). Если воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера $J = J_C + ml^2$, где J_C – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, то легко установить, что $l_{np} = l + \frac{J_C}{m\,l}$, т.е. l_{np} больше l.

1.5.3. Закон всемирного тяготения и центральные силы

Поиски причин тяжести тел, изучение свойств равновесия и движения притягивающихся тел имели важное значение в истории теоретической механики. Без преувеличения можно утверждать, что эти вопросы занимали умы всех выдающихся геометров XVII века. Кеплер, установив неравномерность движения планет, естественно, задался вопросом о причинах этого явления. Его объяснения причин движения планет были традиционными – действие «душ светил», магнитные силы взаимодействия Солнца и планет, распространяющиеся как свет и обратно пропорциональные расстоянию. Движение Луны он объяснял («Тайна Вселенной», 1596) земным притяжением, а земные приливы и отливы – притяжением Луны.

Большое внимание вопросу о причинах тяжести тел уделял Декарт. По его представлениям, причиной тяжести была центростремительная сила, возникающая в результате вихревого движения «эфира» в части пространства, занимаемого телом.

Но уже Галилей изменил акцент в проблеме тяготения: от поиска причин притяжения – к изучению свойств движения тяжелых тел. Этот взгляд на проблему тяжести, притяжения, тяготения тел стал определяющим в работах Гюйгенса и Ньютона.

Рис. 25. Измаэль Бульо

Французский астроном **Измаэль Бульо** (1605–1694), которого Ньютон называл в «Началах» своим предшественником (как и Борелли), в «Популярной астрономии» (1645) утверждал, что если Солнце и планеты взаимодействуют как свет, то Кеплер ошибается в выражении этой силы. Если бы эта сила, подобно свету, распространялась от одной поверхности сферы к другой, то и менялась бы она по величине обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца (плотность распределения лучей обратно пропорциональна квадрату радиуса, площади поверхности сферы).

Джованни Альфонсо Борелли (1608–1679) в книге «Теория медичийских планет, выведенная из физических причин» (1666) утверждал, что каждая планета двигается под действием трех сил: силы «естественного» стремления планеты к Солнцу (направлена к Солнцу); силы солнечного света, заставляющая планеты вращаться, и силы отталкивания планеты от Солнца, которая является следствием вращения планет по кругам, что планеты стремятся к Солнцу по той же причине, по которой тяжелые тела стремятся к Земле.

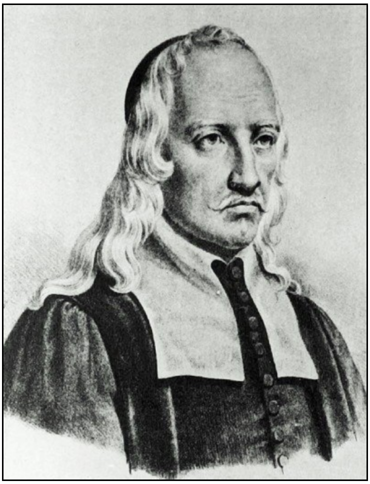


Рис. 26. Джованни Альфонсо Борелли

Равенство первой и третьей сил обеспечивает планете движение по орбите. Первая сила предполагалась одинаковой для всех планет, а третья – обратно пропорциональной расстоянию Солнце-планета. Он сравнивал движение планет с движением камня на краю пращи и считал, что «инстинкт», заставляющий планету стремиться к Солнцу, уравновешивается тенденцией тела удаляться от центра, говоря современным языком, – центробежной силой (термин введен Х. Гюйгенсом).

Идея всеобщего взаимодействия (притяжения) тел была высказана Робервалем в 1644 г. в трактате «Система мира по Аристарху...». Комментируя этот трактат, Декарт писал, что Роберваль «*предполагает, что вся мировая материя и каждая из ее частей имеют определенное свойство, в соответствии с которым вся материя объединяется и группируется в одно протяженное тело, все части которого имеют наклонность и делают усилия к соединению одних с другими, притягиваясь взаимно одно к другому для того, чтобы быть связанными так тесно, как только это возможно. Что все и каждая из частей земли, воды и воздуха также имеют очень похожее свойство, в соответствии с которым они также взаимно притягиваются одна к другой и делают усилия для соединения*» [1, с. 88]. Позднее, в 1669 г., Роберваль писал: «*Я всегда по возможности буду стараться подражать Архимеду, который именно в связи с тяжестью выдвигает в качестве принципа или постулата постоянный и во все минувшие до сей поры столетия засвидетельствованный факт: существуют тяжелые тела,..... Я построю, как и он, свои рассуждения о механике, не затрудняя себя вопросом, что же такое в конце концов начала и причины тяжести, и довольствуясь тем, что буду следовать истине,…*». [1, с. 88].

В 60–80-х гг. проблема тяготения захватила умы английских ученых. Важным достижением этого периода было распространение на тяготение статуса силы, до того рассматриваемой только в статике как эффективность действия одного тела на другое.

Роберт Гук (Hooke, Хук, 1635–1703) – английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и экспериментатор, архитектор – был одним из ярчайших представителей науки XVII века, одним из создателей и деятельных членов Лондонского королевского общества, профессором Грешемовского колледжа Лондонского университета (1664). После окончания в 1653 г. школы (изучал древние языки, геометрию Евклида, освоил игру на органе) Гук поступил в колледж Церкви Христа Оксфордского университета, где познакомился с Р. Бойлем, стал его ассистентом и членом «невидимого коледжа», в 1662 г. получил степень магистра искусств.

Рис. 27. Роберт Гук

Но еще ранее он изобрел весьма удачный воздушный насос, опубликовал трактат о капиллярных движениях жидкостей, придумал пружинный привод механизма карманных часов (впоследствии это породило спор о приоритете с Гюйгенсом). В январе 1665 г. Гук был пожизненно избран куратором экспериментов Королевского общества и в том же году издал свой первый большой трактат «Микрография», в котором не только описал устройство микроскопа, но и привел описание большого количества экспериментов, связанных с исследованием растений, насекомых и животных. Гук сделал важные открытия, касающиеся отдельных органов, клеточного строения тканей, выдвинул оригинальные идеи о природе света и тяготения, придумал вычислительную машину, позволяющую выполнять любые арифметические действия, усовершенствовал прибор для изучения магнитного поля Земли.

Во второй половине 1670-х Гук увлекся проблемой упругости тел и сформулировал свой знаменитый закон («закон Гука»), касающийся удлинения проволоки: относительное удлинение пропорционально величине силы, обратно пропорционально сечению проволоки и зависит от того, из какого материала она изготовлена. Он утверждал, что закон справедлив только в случае малых деформаций.

Вскоре после избрания И. Ньютона (1672 г.) членом Лондонского королевского общества между ним и Гуком установились неприязненные отношения, причиной которых были споры, связанные либо с приоритетами в научных открытиях (когда их взгляды совпадали), либо с разной трактовкой природных явлений. Приоритетные споры касались создания телескопа-рефлектора, закона всемирного тяготения. Споры по существу явлений были о фигуре кривой, которую будет описывать падающее тело, о физической природе света. В то же время Гук долгие годы поддерживал дружеские и творческие отношения с К. Реном, Э. Галлеем и многими другими видными учеными.

В последние годы жизни Гук заинтересовался устройством мускулов и начал придумывать их механические модели, получил степень доктора медицины, занялся изучением янтаря и причинами землетрясений. Последним изобретением больного и почти ослепшего Гука был морской барометр.

Первое выступление Гука в Лондонском королевском обществе, посвященное притяжению тел, состоялось 21 марта 1666 г. Гук утверждал: «*Представляется, что тяготение является одним* *из наиболее общих действующих принципов мира...*» [1, с. 89]. Далее Гук провел ряд экспериментов, стараясь доказать, что движение по кругу состоит из прямолинейного движения по касательной и другого движения, направленного к центру вращения. В первой из «кутлеровских лекций», опубликованной под названием «Движение Земли» (1674), Гук излагает свой взгляд на устройство Вселенной и, в частности, утверждает, что все небесные тела действуют с притягивающей силой, направленной к их центрам, и степень притяжения уменьшается по мере удаления тел. В 1680 г. Гук уточнил: «*... Я предполагаю, что притяжение всегда действует в отношении, обратном квадрату расстояния*» [1, с. 89].

Из дневниковых записей Гука (ноябрь 1675) известно, что он изучал «Маятниковые часы» Гюйгенса, где были приведены законы центробежного движения. С 1679 г., сменив Ольденбурга на посту секретаря Королевского общества, он вел переписку с Ньютоном по поводу закона всемирного тяготения, а в 1680-е годы этой проблемой активно заинтересовались К. Рен, Э. Галлей, Х. Гюйгенс и многие видные геометры Европы. В частности, Эдмунд Галлей в 1683 г. вывел из третьего закона Кеплера закон обратных квадратов для силы тяготения, но ему не удалось получить из него эллиптическую траекторию планет. Появление теории всемирного притяжения становилось неизбежным. В 1687 г. «Начала» Ньютона сделали неизбежность реальностью.

Эта теория важна не только сама по себе (в ее философском, мировоззренческом, физическом, математическом содержании), но для формирования механики чрезвычайно важен и сам исторический процесс ее создания – формирование основных понятий, принципов и свойств движения и равновесия тел, технических и природных процессов на основе единых физических представлений методами математического моделирования.

Понятие количества движения, до Декарта остававшееся весьма аморфным, в его работах, в названных работах Роберваля, Уоллиса, Гюйгенса приобретает определенность. В «кутлеровских лекциях» (1680–1681) Гук относит к важнейшим параметрам движения количество движения, качество движения и силу. «*Под количеством движения*, – пишет Гук, – *я понимаю только степень скорости, присущей в определенном количестве вещества. Под качеством движения я понимаю его модификации в теле, простое оно или сложное, преломленное или отраженное, прямое или наклонное и так далее. Под силой я понимаю действие, или эффект, который она производит на другие тела, вибрируя или двигая их*» [1, с. 90]. Эти определения количества движения и силы гораздо ближе к ньютоновым, чем к декартовским. Ближе не только по годам, но и по существу.

Круговое движение планет, маятников происходит по наблюдаемым, известным траекториям. Первые попытки объяснения причин кругового движения тел, как известно, предпринимались еще в Древней Греции. К середине XVII века прежние метафизические объяснения теряют былую популярность и заменяются либо вихревой теорией Декарта, либо идеей взаимного притяжения тел. Как уже отмечалось, Борелли в 1666 г. высказал мысль о том, что в процессе движения планеты по орбите сила притяжения к Солнцу уравновешивается некоторой силой отталкивания от Солнца, вызванной вращательным движением планеты по орбите.

Изучая колебания маятника, Гюйгенс установил, что эти движения происходят под действием тяжести, но в процессе движения возникает некоторая дополнительная сила, натягивающая нить даже при движении в горизонтальной плоскости. Некоторые теоремы об этой силе, названной Гюйгенсом центробежной, он сообщил в 1669 г. Лондонскому королевскому обществу в виде анаграммы. В 1673 г. тринадцать теорем (без доказательств) были опубликованы в пятой части «Маятниковых часов». И только в 1703 г. появилось посмертное сочинение «О центробежной силе», в котором раскрывается смысл этого понятия и приводятся доказательства (основная часть сочинения была написана в 1659 г.). После издания «Маятниковых часов»

Гюйгенс послал этот трактат Гуку и Ньютону (через секретаря Королевского общества Ольденбурга).

Идея центробежной силы заинтересовала Гука и Ньютона как возможность определения противоположной силы – силы центростремительной или силы гравитационного притяжения планеты к Солнцу. В связи с развитием дифференциального исчисления эта идея получила дальнейшее развитие в трудах Лейбница, Лопиталя, Вариньона, И. Бернулли. Позднее центробежные силы стали атрибутом теоретической механики как разновидность сил инерции, породивших длительные споры о их реальности и позволивших, по предложению Даламбера, описывать динамические процессы статическими уравнениями.

Из введения и первых пяти предложений-теорем «Маятниковых часов» следует, что при круговом движении центробежная сила пропорциональна весу (величине) тела, квадрату скорости и обратно пропорциональна радиусу окружности. В Предложении 6 используется (но не определяется и не вводится обозначение) понятие угловой скорости тела и показано, что при горизонтальном вращении точки по окружности радиуса $R = g$ *(радиус равен численной величине ускорения свободного падения)* с угловой скоростью $\omega = 1$ на нее будет действовать центробежная сила, равная весу. Следующие девять теорем посвящены силам инерции, возникающим при движении точки по конической поверхности. И последние две теоремы устанавливают величину силы натяжения нити маятника (движение в вертикальной плоскости) в его нижнем положении B (в случае начала движения с уровня точки подвеса C и из верхней точки D) (см. рис. 28).

Из того, что центробежная сила натягивает нить маятника так же, как и сила тяжести, Гюйгенс делает вывод об аналогичности и реальности этих сил. Возможно, А.К. Клеро в 1742 г. первым обратил внимание на фиктивный характер центробежной силы. Но наиболее четко это было высказано через 150 лет Герцем: «*Заставим вращаться камень, привязанный к нити; как известно, таким образом мы прикладываем к камню некоторую*

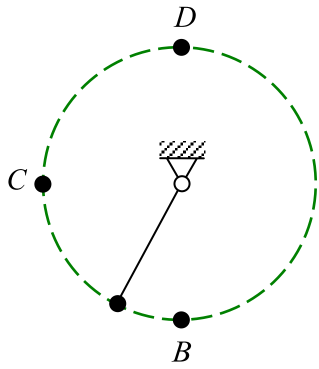


Рис. 28

силу; эта сила последовательно удаляет камень с прямолинейной траектории и если мы изменим эту силу, массу камня и длину нити, то убедимся, что движение камня происходит в соответствии со вторым законом Ньютона. Но третий закон требует существования реакции, противоположной силе действия нашей руки на камень. На вопрос, касающийся этой реакции, отвечает хорошо известное утверждение: камень действует на руку силой инерции и эта сила инерции в точности противоположна приложенной нами силе. Можно ли так утверждать? Разве то, что мы называем силой инерции или центробежной силой, не есть инерция тела? Можем ли мы, не нарушая ясности представлений, дважды учитывать действие инерции: первый раз в связи с наличием массы и второй раз как силу. В наших законах движения сила была причиной движения, существующей до движения. Можем ли мы, не запутывая наши представления, говорить о силе, порождаемой движением, являющейся следствием движения? Можем ли мы делать вид, что в наших законах уже определили нечто касающееся природы этих новых сил? Можем ли мы делать вид, что имеем право приписывать им свойства сил только потому, что им предоставлено название силы? На все эти вопросы следует открыто ответить – нет; и нам ничего не остается, кроме следующего *объяснения: представление силы инерции в качестве силы непригодно; это название, как и название живой силы, является пережитком истории и причины полезности больше служат подтверждением бездоказательности использования этого названия. Но что становится, таким образом, требованием третьего закона, кому нужна сила, действующая со стороны неодушевленного камня на руку и кто не удовлетворен наличием только реальной силы, а не простым названием?*» [1, с. 100].

1.6. Новые математические методы

Философские и физические воззрения, технические проблемы и формирующиеся математические теории определяют форму и содержание механики на всех этапах ее становления. Это утверждение, вполне очевидное в XXI веке, показалось бы странным в долагранжевский период истории науки. И странность заключалась бы в искусственности вычленения задач и методов механики из общности математических проблем и теорий. В Парижской академии наук и тех, кого мы называем основоположниками теоретической механики, и творцов новых разделов современной математики именовали одинаково – геометры. И все они занимались созданием новых математических идей и теорий для нужд решения сугубо практических, прикладных задач. Поэтому обособление истории теоретической механики от истории математики представляется искусственным и не очень оправданным. Теоретическая, а возможно точнее математическая, механика формировалась параллельно с новыми разделами математики.

Фактически до начала XVIII века основным математическим инструментом механики была геометрия, достаточно развитая еще в древнегреческий период. Работы по статике, кинематические исследования движения земных и небесных тел, первые работы по динамике опирались на достижения геометрии Евклида и Аполлония. Но это была, если так можно выразиться, «статическая геометрия». С конца XVI века, начиная с Кеплера, Галилея, Декарта, основными проблемами натуральной философии становятся задачи исследования механического движения тел (движение планет, комет, снарядов падение тел, влияние на движение тел внешних факторов, удар тел, колебания маятников, движение жидкостей и т.д.). Назрела необходимость в создании «геометрии движения».

Важнейшие достижения математики XVII века традиционно связываются с именами Декарта, Ферма, Ньютона, Лейбница. Однако не следует забывать о «классиках второго эшелона» – о достаточно многочисленном научном сообществе ученых, чьи имена по тем или иным причинам менее известны, но чьи результаты были питательной почвой для работ научных лидеров.

Когда Галилей покинул Пизанский университет, его профессорскую кафедру занял его ученик **Бенедетто Кастелли** (1577–1644), ставший на долгие годы его другом и помощником. Кастелли был известен не только своими трудами по гидравлике и гидростатике, но и как учитель двух выдающихся ученых – Торричелли и Кавальери.

Рис. 30. Б. Кастелли

Бонавентура Франческо Кавальери (1598–1647) окончил Пизанский университет, с 1629 г. был профессором Болонского университета. Как ученик Б. Кастелли, он был хорошо знаком и вел переписку с Галилеем. В математике он известен как автор работ по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике, но главным его трудом был трактат «Геометрия, развитая новым способом, при помощи неделимых непрерывного» (1635) и его продолжение «Шесть геометрических этюдов» (1647).

Рис. 29. Б.Ф. Кавальери

В первом из трактатов дано обоснование использования метода неделимых для определения площадей фигур и объемов тел. Под неделимыми он понимал параллельные хорды плоской фигуры или части параллельных плоскостей, пересекающих тело. Его обоснования не были достаточно строгими, но это были уже первые интегральные методы. Он показал, что определение площадей и объемов сводится к нахождению площади криволинейной трапеции или, в современной трактовке, к вычислению определенного интеграла. Во втором из трактатов Кавальери фактически показал, что $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Однако еще ранее этот результат был получен Робервалем.

Жиль Персон де Роберваль (Роберваль, Giles Personier или Personne, 1602–1675) родился в деревне Роберваль (близ г. Бове). Это был выдающийся французский математик, механик и физик XVII века, имевший очень непростой характер. В 32 года он стал профессором математики знаменитого Королевского коллежа (Коллеж де Франс) в Париже, был активным участником кружка Мерсенна (с 1628) и одним из первых академиков (с 1666) Парижской академии наук.

Роберваль занимался проблемами бесконечно малых, пределами, проблемой квадратуры круга и вычислением длин линий, площадей фигур, объемов различных тел (фактически вычислял определенные интегралы, используя свой метод, аналогичный «методу неделимых» Ф.Б. Кавальери), нашел метод построения касательных, рассматривая кривые как результат перемещения точки, которое складывалось из более простых движений – по касательной и по нормали. Известно, что Роберваль и Декарт скептически относились друг к другу. Декарт критиковал методы и взгляды Роберваля и Ферма. Роберваль отвечал взаимностью.

Роберваль известен как последовательный сторонник механики Архимеда, один первых продолжателей идей статики С. Стевина. В «Трактате о механике» (1636) он явно указывает на необходимость учета направления действия силы. Силу он ассоциирует с направленным отрезком, вводит аксиому о переносе силы вдоль ее линии действия и закон сложения сил, расположенных под углом друг к другу («правило параллелограмма»), который совмещает с аналогом принципа виртуальных работ («энергетический принцип» или о высоте центра тяжести системы тел). Изучая задачу удара тел, Роберваль использовал понятие количества движения, пытался установить центр удара системы тел. Вслед за Галилеем он установил, что траекторией брошенного тела является парабола. Предвосхищая идею всемирного тяготения, он утверждал, что все тела взаимно притягиваются.

В истории механики известны **«весы Роберваля»** – двухчашечные весы для взвешиваний, описанные им в 1675 г. Весы традиционно имели в своей основе коромысло, однако Робервалю первому пришла в голову идея поместить коромысло не над, а под чашами весов. Чаши опирались на два стержня, входящих в систему шарнирно взаимосвязанных рычагов. Во время колебаний при взвешивании система рычагов имела форму параллелограмма, а при равновесии приобретала форму прямоугольника. При этом показания весов не зависели от того, в каком месте на чаше расположен груз. Впервые парадоксальность действия весов была объяснена только Л. Пуансо («Начала статики», 1803).

Рис. 31. Весы Роберваля

К сожалению, большинство работ Роберваля по механике не были опубликованы. Мы знаем о них только по его переписке с Мерсенном, Гюйгенсом, Ферма, Декартом, Мариоттом и другими известными учеными.

Эванжелиста Торричелли (1608–1647) получил известность как ученик и секретарь Галилея, успешно продолживший его работы в области механики. Но еще более он знаменит как автор концепции атмосферного давления, математик и физик. Торричелли изучал математику под руководством Б. Кастелли. После смерти Галилея, будучи его преемником, стал профессором кафедры математики и философии Флорентийского университета. В математике Торричелли развил «метод неделимых» и применил его (несколько позже Роберваля) для квадратуры циклоиды и для решения задач на проведение касательных. Вслед за Декартом нашел длину дуги логарифмической спирали. При исследовании семейства парабол открыл понятие огибающей.

Рис. 32. Э. Торричелли

В сочинениях по механике, «Трактат о движении» (1640), «О движении свободно падающих и брошенных тяжёлых тел» (1641), Торричелли развил идеи Галилея о движении, сформулировал принцип движения центров тяжести тел, решил ряд задач баллистики. Он использовал кинематические представления, в частности принцип сложения движений, а в понимании движения по инерции продвинулся дальше Галилея.

В 1641 г. Торричелли сформулировал закон вытекания жидкости из отверстий в стенке открытого сосуда и вывел формулу («формула Торричелли») для определения скорости вытекания. Фактически это исследование стало основой теоретической гидравлики, построение которой сто лет спустя продолжил Д. Бернулли. В историю физики имя Торричелли вошло как имя первооткрывателя существования атмосферного давления и конструктора первого ртутного барометра. Он также занимался изготовлением линз, телескопов и микроскопов, усовершенствовал артиллерийский угломер.

Блез Паскаль (Blaise Pascal, 1623–1662), как и Торрчилелли, прожил очень короткую жизнь. Но за отпущенные ему судьбой 39 лет он вошел в историю не только Франции, но и мировой математики, механики, физики, философии, как один из основателей математического анализа, теории вероятностей, проективной геометрии, как автор основного закона гидростатики и изобретатель первых образцов вычислительной машины, как мыслитель и автор проекта городского транспорта, как классик французской литературы.

Рис. 33. Б. Паскаль

Он родился в семье чиновника (председателя налогового управления г. Клермон–Ферран) Этьена Паскаля. Мать Блеза умерла, когда ему было три года, оставив сиротами еще и двух дочерей – Жильберту (старшая) и Жаклин (младшая). В 1631 г. семья переехала в Париж. Отец Блеза решил самостоятельно заниматься образованием сына по разработанной им системе. Этьен Паскаль был большим любителем математики (его имя носит кривая «улитка Паскаля», которую он первым исследовал), участником кружка Мерсенна, дружил с Дезаргом и другими учеными, входил в комиссию по определению долготы, созданную Ришелье. Поэтому понятно, что наряду с традиционным гуманитарным образованием (латинский и греческий языки, литература, история) он стремился дать сыну основательное математическое и естественнонаучное образование.

Блез был вундеркиндом и очень рано проявил интерес к книгам Евклида, Архимеда, Аполлония, Паппа, Дезарга, проводил простейшие физические опыты. С 14 лет он начал участвовать в заседаниях кружка Мерсенна. В 1640 г. семья Паскалей переезжает в Руан (по месту службы отца), и в этом же году вышел его первый трактат «Опыт о конических сечениях», посвященный развитию работ Дезарга. Через 15 лет Паскаль подготовил к изданию «Полный труд о конических сечениях», который был задуман как продолжение его первого сочинения, но новая книга так и осталась в рукописи. В 1675 г. с ней успел познакомиться Лейбниц, позже она была утеряна.

Рис. 34. Суммирующая машина Паскаля

Отцу Паскаля приходилось выполнять многочисленные вычисления, связанные со сбором пошлин и налогов. Это подтолкнуло Блеза к идее создания вычислительного устройства («суммирующей машины»), которое бы ускорило и облегчило рутинный счет. Первый образец машины был изготовлен в 1645 г. Машина Паскаля выглядела как ящик, наполненный связанными друг с другом шестеренками. Складываемые либо вычитаемые числа вводились соответствующим поворотом колес, принцип работы основывался на счете оборотов. Изобретенный Паскалем принцип связанных колес почти на три столетия стал основой создания большинства механических арифмометров.

В 1646 г. Паскаль увлекся опытами с «трубкой Торричелли» и в следующем году опубликовал трактат «Новые опыты, касающиеся пустоты». В «Рассказе о великом эксперименте равновесия жидкостей» (1648) Паскаль показал, что есть возможность «*узнать, находятся ли два места на одном уровне, то есть одинаково ли они удалены от центра земли, или которое из них расположено выше, как бы ни были они далеки друг от друга*», что все явления, приписываемые ранее «боязни пустоты», на самом деле являются следствием давления воздуха, что давление воздуха есть частный случай равновесия жидкостей и давления внутри них. Развивая результаты исследований Стевина и Галилея в области гидростатики в «Трактате о равновесии жидкостей» (1653, опубликован в 1663), Паскаль подошел к установлению закона распределения давления в жидкостях и формулирует идею гидравлического пресса.

В парижском светском обществе в ту эпоху были распространены азартные игры, в частности, связанные с бросанием «костей» (кубиков с цифрами на гранях). Попытки построения теории выигрыша (получения наибольшего количества очков за серию бросаний) привели Ферма, Паскаля, а позднее Гюйгенса к формулировке основ теории вероятности выигрыша. Этой теме были посвящены сочинения Паскаля «О расчетах в азартных играх» (1657), где вводится понятие математического ожидания, и «Трактат об арифметическом треугольнике» (издан в 1665 г.), где исследуются свойства «треугольника Паскаля» и его применение к подсчету числа сочетаний.

Во второй половине 1650-х гг., обратившись к задаче Мерсенна о циклоиде, Паскаль находит метод определения площади и центра тяжести сегмента, объемов и центров тяжести тел вращения циклоиды. Результаты Паскаля (использование треугольника, состоящего из отрезка касательной, Δy и Δx) привлекли внимание Уоллиса, Рена, Гюйгенса, Лейбница и стали важным звеном в теории «геометрии бесконечно малых».

Известность Паскалю принесла книга «Мысли о религии и других предметах», изданная его друзьями уже посмертно. Книга, вошедшая в классику французской литературы, была посвящена его сокровенным мыслям о человеческих бедах и радостях, о взаимоотношении Бога и Человека, апологетике христианства в янсенистском понимании. Эта книга многократно издавалась на многих языках (в том числе, на русском) и была особо ценима Л.Н. Толстым. Издание полного собрания сочинений Паскаля («Oeuvresde B. Pascal») было завершено французским математиком и механиком Ш. Боссю в 1819 г.

Николаус Меркатор (Кауфман,1620–1687) родился в Швейцарии, окончил (1641) университет в г. Росток. Позже жил в Лейдене, с 1648 г. учился и работал в Копенгагенском университете. В копенгагенский период жизни Меркатор публикует работы по сферической тригонометрии (таблицы логарифмов, синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов с интервалом в 1^0, а также изложение способов решения треугольников с использованием логарифмических функций), по географии и астрономии, предлагает новую версию календаря. С 1655 по 1657 г. он работал в Париже, в 1660 г. переехал в Лондон (возможно, по приглашению Кромвеля), где прожил до 1682 г. В Лондоне Меркатор публикует труд «Hypothesis astronomicanova» (1664), где развивает идеи Кеплера. Вероятно, читая именно эту книгу Меркатора, Ньютон узнал об утверждении Кеплера об эллиптической форме орбит планет.

Одной из самых больших проблем той эпохи была потребность точного определения времени на кораблях, находящихся в море. Меркатор изобрел морской хронометр, часы с маятником, который позволял часам идти точно даже в условиях морской качки. За это изобретение он был избран членом Королевского общества (1666). Меркатор занимался переводами математических трудов, был знаком и имел много общих интересов с Р. Гуком, вел переписку с И. Ньютоном, обсуждая, среди прочего, движение Луны.

Как математик, Меркатор получил известность как один из первых исследователей бесконечных рядов. В частности, он открыл и опубликовал в книге «Logarithmotechnia» (1668) разложение функции $y = \frac{1}{1+x}$ в бесконечный ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ и логарифмической функции в степенной ряд $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$. В этой книге он одним из первых, наряду с итальянским математиком Пьетро Менголи, использовал термин «натуральный логарифм».

В 1682 г. Меркатор по приглашению министра Жана-Батиста Кольбера возвращается во Францию для разработки гидротехнических сооружений в Версале. Но этот проект не имел успеха. Николаус Меркатор умер в Версале 14 января 1687 г.

Рис. 35. Пьетро Менголи

Пьетро Менголи (1625–1686) родился в Болонье, окончил университет (был учеником Кавальери), где с 1650 г. занимал должность профессора.

Область его научных интересов – теория рядов. Его работы подготовили логическое обоснование концепций предела, площади и интеграла. Он первым начал суммировать бесконечные ряды, не являющиеся геометрической прогрессией, показал расходимость гармонического ряда, доказал свойства предела суммы и произведения. Установил, что каждый ряд, члены которого стремятся к нулю, является сходящимся. Ввел логарифмические ряды. Менголи известен как автор работ «Новые арифметические квадратуры или о сложении дробей», «Царский путь в математику через арифметику, алгебру и планиметрию», в которых близко подходит к понятию предела.

Пребывание Декарта в Голландии было плодотворным и для этой страны. Декарт поддерживал отношения со многими учеными, и в частности с профессором Лейденского университета Францем ван Схоутеном (1615–1660). Схоутен поддерживал переписку, встречался со многими известными (Гюйгенс, Лейбниц) и молодыми (Генрих фон Гейрат, Иоганн Гудде) учеными, он известен как автор сочинения «Математические этюды», издатель (с комментариями и дополнениями) трудов Виета и «Геометрии» Декарта, учитель Яна де Витта.

Выпускник Лейденского университета **Ян де Витт** (Johande Witt, 1625–1672) был известным голландским математиком и государственным деятелем. С 1653 по 1672 г., как лидер республиканской партии, он занимал пост Великого пансионария провинции Голландия и был фактическим правителем Республики Соединенных провинций (Нидерландов).

В математике его работы относятся главным образом к аналитической геометрии. В дополнение ко второму латинскому изданию «Геометрии» Декарта, подготовленному Схоутеном в 1659 г., было помещено его сочинение «Начала кривых линий». Здесь излагается теория конических сечений, основанная на особом способе их построения на плоскости – вращением и скольжением отрезков. С помощью этого механического способа Витт строит эллипс, параболу и гиперболу.

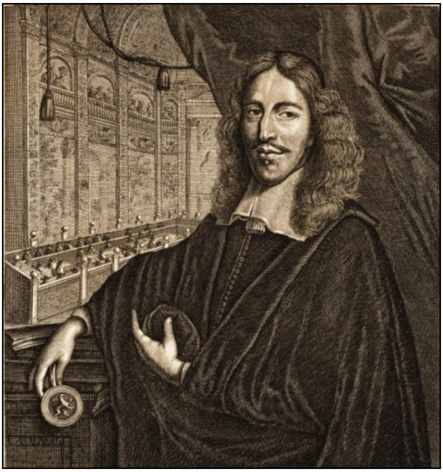


Рис. 36. Ян де Витт

Определение координат у Витта было таким же, как у Ферма и Декарта. Он избегал отрицательных координат и применял преобразование координат. Упомянутое сочинение Витта можно считать первым самостоятельным курсом аналитической геометрии. Кроме того, он занимался вопросами, связанными с расчетом касс страхования жизни и пожизненных рент. Преследуя практическую цель, он строит соответствующую математическую модель и создает математические методы решения поставленных задач.

Иоганн Гудде (Johannes Hudde, 1628–1704) родился в Амстердаме, где впоследствии стал известным математиком, автором трудов по алгебре и исчислению бесконечно малых.

По свидетельству Лейбница, И. Гудде ранее Меркатора нашел разложение $\ln(1+x)$ в ряд и ранее Ньютона формулу интерполирования. Гудде опубликовал два дополнения к «Геометрии» Декарта, в которых впервые изложил известное правило отыскания кратных корней уравнения и, исходя из этого, открыл формальную процедуру для многочленов, по существу тождественную с нахождением производной. Он указал, что данное им правило можно применить как к определению касательной, так и к решению задач на максимум и минимум.

Рис. 37. Иоганн Гудде

При этом сам Гудде нашел, например, максимальную ширину декартова листа. Гудде впервые стал обозначать (1657) одинаковыми буквами (символами) как положительные, так и отрицательные коэффициенты уравнения. Ему принадлежит один из приемов исключения неизвестного (1659) из системы двух уравнений с двумя неизвестными, он занимался также разложением многочлена на линейные и квадратные множители. Его метод решения кубических уравнений обычно излагается в курсах высшей алгебры.

Бельгийский математик и юрист **Рене-Франсуа Валтерде Слюз** (1622–1685) окончил Лувенский университет, был священником, в 1674 г. был избран членом Лондонского Королевского общества. Он является автором трактата «Отыскание середины» (1659; расширенное издание – в 1668), где изложен один общий геометрический метод построения касательных к алгебраическим кривым.

Рис. 38. Рене-Франсуа Валтерде Слюз

Его метод касательных, которым он владел уже 1652 г., а позднее усовершенствовал, в кратком изложении был опубликован в 1673 г. в журнале Королевского общества («Philosophical Transactions»). Поэтому его можно считать одним из предшественников Ньютона и Лейбница по созданию математического анализа. Он также изучал свойства циклоиды, переписывался с Б. Паскалем, Дж. Уоллисом, Х. Гюйгенсом, Г. Ольденбургом и другими известными учеными.

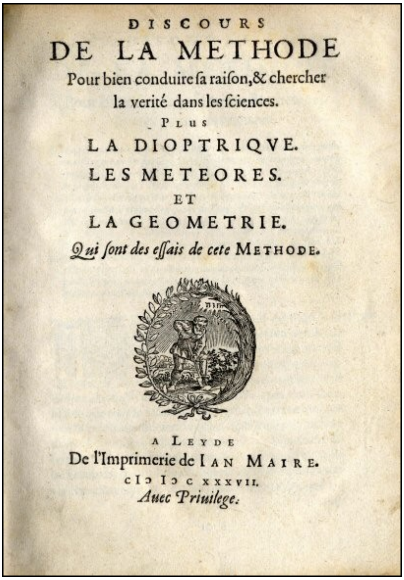
Понятие «величина» до XVII века ассоциировалось с конкретным количеством, размером, числом, постоянной величиной. Поэтому появление в математике «переменной величины» поначалу казалось парадоксальным. Однако скоро, получив конкретные ассоциации с понятиями времени, меняющегося положения двигающейся точки (тела) в пространстве, она стала естественной и привычной. Развивая известную мысль Ф. Энгельса («*Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошло движение и диалектика*»), можно утверждать, что математика переменных величин, возникшая для нужд решения задач механики, очень скоро стала поворотным пунктом и главным теоретическим инструментом дальнейшего развития теоретической механики. А первой предпосылкой для возникновения новой механики стала аналитическая геометрия Р. Декарта и П. Ферма.

Идеи картезианской философии, быстро захватившие умы современников Декарта, постепенно утратили свою актуальность, став достоянием истории философии. Эта судьба постигла и некоторые его физические законы и представления, его классификацию алгебраических кривых, но некоторые его принципиальные математические идеи получили достойное признание и развитие. Они изложены в «Рассуждениях о методе» (1637), точнее, в третьей части этого сочинения, названной «Геометрия» и состоящей из трех книг.

Первая из книг «Геометрии» Декарта начинается с разъяснений общих принципов и правил составления уравнений геометрических кривых: «*Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заметить зависимость между ними, так чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, слу-*

жащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому» [1, с. 72–73].

Описанная здесь технология построения уравнений далее стала использоваться не только в геометрии, но и для формирования математического аппарата всех остальных наук, и в первую очередь механики в трудах Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Вариньона, Бернулли. Это определялось важнейшей ролью геометрических методов в решении задач механики той эпохи.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Auec Priuilege.

Рис. 39. «Рассуждения о методе». Титульный лист

Второй важнейшей идеей геометрии Декарта стало использование для описания движения координатных осей. Птолемей положение планет на сфере определял по долготе и широте, которые можно считать прообразом координат. Позднее Николь Орем, Тарталья также пользовались некоторыми аналогами координат точки, графического представления движения и скорости. Однако явно эта идея впервые встречается у Декарта.

На протяжении всей истории человечества, но особенно со времен Пифагора, геометрия была важнейшей составляющей математики. Геометрические образы (отрезки, линии, фигуры, тела) и геометрические методы (построения) долгие годы использовались в арифметике (для записи чисел, вычислений), были главными при решении алгебраических задач, уравнений, но вот настало время использования алгебраических методов для решения геометрических задач. Созданная Декартом геометрия не теряла своей главной ценности – наглядности, но при этом приобретала наглядность и алгебраические уравнения, описывающие геометрические кривые и поверхности. Это стало возможным после введения понятий переменной величины, функции и системы координат.

Переменная величина у Декарта – это либо текущая координата точки, двигающейся по кривой, либо переменный элемент множества чисел, соответствующих точкам координатного отрезка. Оси координат у Декарта не равноправны: одна ось главная, другая – вспомогательная, расположенная под некоторым (не обязательно прямым) углом к главной оси. Геометрическое место точек, описываемое плоской кривой, он записывает в виде алгебраического уравнения, связывающего координаты текущей точки кривой.

Таким образом, кривая задается алгебраическим уравнением, которое определяет связь (зависимость) между координатами или задает одну из координат как функцию другой.

Эти идеи оказались исключительно перспективными, но Декарту необходимо было решить несколько сложных проблем. Одна из них состояла в следующем: если число можно ассоциировать с длиной отрезка, квадрат числа – с квадратом (площадью), построенным на отрезке, куб числа – с соответствующим кубом (объемом), то каким будет геометрический образ числа в 4, 5, … n-й степени?

Другая проблема состояла в том, что со времен Аристотеля существовало правило, согласно которому все операции можно проводить только с однородными величинами. Складывать, умножать, вычитать, делить можно только длины, или только площади, или только объемы, а например, складывать длину с объемом, или делить площадь на объем нельзя. Именно поэтому скорость никогда не представлялась как отношение пути ко времени. Она выводилась из отношения путей, пройденных за равное время, или из отношения времен, затраченных на прохождение одинаковых путей.

Выход, найденный Декартом, оказался гениально простым. Он показал, что любое количество или число можно ассоциировать с отрезком прямой. По существу, он установил изоморфизм между областью отрезков и полуполем действительных чисел $R+$. Для этого Декарт изобразил угол ABC (рис. 40), пересеченный параллельными прямыми AC и DE. Из подобия ΔABC и ΔDBE: $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}$, или $AB\cdot BE=BC\cdot BD$. Если $AB=1$, то $BE=BC\cdot BD$ и при $BC=BD=x$ мы получаем $BE=x^2$, т.е. представление x^2 в виде отрезка. Очевидно, что при $BD=x^3$, $BC=x$ мы получим представление в виде отрезка BE величины x^4.

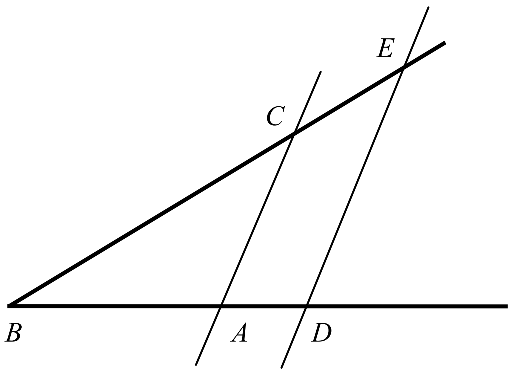


Рис. 40

Для определения операций над отрезками Декарт использует тот же рисунок. Очевидно, что суммы и разности отрезков являются отрезками. Из $BE = BC \cdot BD$ следует, что и произведение отрезков (BC и BD) является отрезком (BE) и их отношение $\left(\frac{BE}{BC}, \frac{BE}{BD}\right)$ – также отрезок. Отрезком является и квадратный корень из положительного числа. Это иллюстрирует рис. 41 Используя известное свойство треугольников $\frac{1}{x} = \frac{x}{a}$, можно построить $x = \sqrt{a}$.

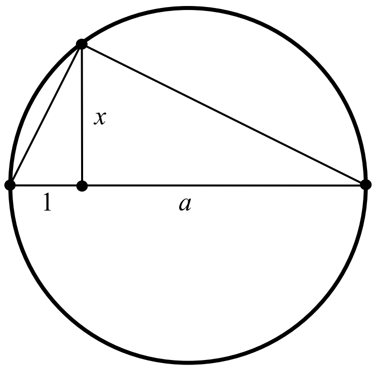


Рис. 41

Заметим, что обозначения Декарта вполне современны: известные величины и константы он обозначает первыми буквами латинского алфавита ($a, b, c, \ldots$), неизвестные – последними (x, y, z), привычное нам a^2 – $a \cdot a$, многочлен n-й степени с целыми коэффициентами (в соответствии с убыванием степени неизвестного) – $P_n(x)$, уравнение – $P_n(x) = 0$. Продолжая отождествление величин с отрезками, приходим к выводу, что каждому отрезку x и многочлену $P_n(x)$ можно поставить в соответствие другой отрезок $y = P_n(x)$, который уже определяется первым или является функцией отрезка x.

Этот подход позволял иначе интерпретировать алгебраические уравнения. Так, равенство $ax+by+c=0$ уже можно представлять не как геометрическую сумму трех отрезков (ax, by, c), а как уравнение прямой, текущая точка которой имеет координаты x, y. И, с другой стороны, появилась возможность не только рисовать кривые, но и записывать их в виде уравнений. Такая форма представления геометрических мест точек (кривых) далее стала называться аналитической, а все развитие этой теории, по предположению С.Ф. Лакруа (1765–1843), в конце XVIII века получило название аналитической геометрии.

Отождествление произвольной кривой (линии) с траекторией движущейся по ней точки позволило Декарту классифицировать все кривые по признаку их построения. Кривые, которые можно построить с помощью некоторого шарнирного механизма (например, циркуля), он называл геометрическими, а остальные – механическими. Все геометрические кривые можно описать алгебраическим уравнением $P(x, y)=0$, поэтому позже их стали называть алгебраическими, а механические кривые Лейбниц позднее стал называть трансцендентными.

Алгебраические кривые далее исследовали Дж. Уоллис, Н. Меркатор, Дж. Грегори, Ян де Витт, И. Ньютон, который в работе «Перечисление кривых третьего порядка» (1704) впервые использовал равноправные и ортогональные оси координат и предложил принятую ныне классификацию кривых в соответствии со степенью уравнения, а не в зависимости от числа звеньев шарнирного механизма, как это делал Декарт.

Основные идеи своей геометрии Декарт изложил на примере решения задачи Паппа о построении геометрического места точек, обладающих определенным свойством. Получив уравнение искомой кривой, он показывает, что оно может быть представлено в виде $P(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=0$, где x_k – корни уравнения $P(x)=0$, и, утверждает, что это уравнение имеет столько корней, какова его степень. Впервые эта теорема была доказана в 1629 г. учеником С. Стевина Альбером Жираром (1595–1633), далее она обобщалась на случай многочлена с произвольными коэффициентами. Позднее доказательства этой теоремы, получившей название основной теоремы алгебры, приводили К. Маклорен (1698–1746), Л. Эйлер, Ж.Л. Даламбер, П. Лаплас, Ж.Л. Лагранж. Окончательное доказательство было получено К.Ф. Гауссом в 1797 г.

Рис. 42. Пьер Ферма

Говоря о выдающихся достижениях Декарта в математике, механике, натуральной философии, не следует забывать о том, что они были подготовлены трудами его великих предшественников, они питались и поддерживались взглядами и идеями его современников (Мерсенна, членов его кружка, Бекмана). К числу последних относился французский ученый **Пьер Ферма** (1601–1665), работавший юристом, советником Тулузского парламента (суда), все свободное время, как и его старший соотечественник Франсуа Виет, отдававший занятиям математикой, физикой и оставивший глубокий след в науке.

Ферма не публиковал при жизни своих результатов, и о них узнавали только из его писем Б. Паскалю, Р. Декарту, Д. Уоллису, Ф.Б. де Бесси (1605–1675), М. Мерсенну, П. де Каркави, Ж.П. Робервалю, П. Гассенди, Ф.Б. Кавальери, Э. Торричелли, Х. Гюйгенсу и др. Эта переписка становилась достоянием научной общественности, но задачи, методы, идеи Ферма не получили должного признания его современников. Труды Ферма впервые были опубликованы его сыном в трактате «Разные сочинения» (1669). Это было уже посмертное издание.

П. Ферма известен как автор знаменитой теоремы («великая теорема Ферма») о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n целое число, большее двух, не имеет решения в целых положительных числах. Более трехсот лет поиск доказательства этой теоремы не давал покоя математикам всего мира, пока в 1995 г. это доказательство не получил англичанин **Эндрю Вайлс** (Andrew John Wiles, род. 1953 г.).

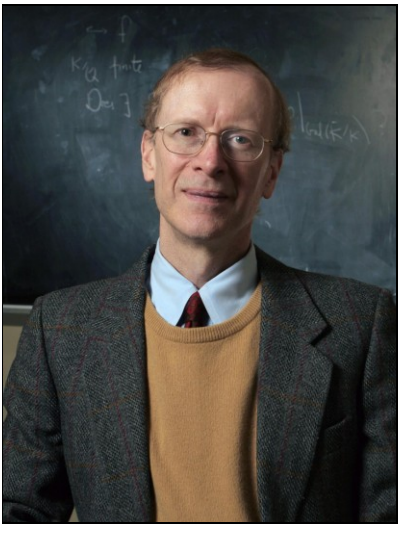


Рис. 43. Эндрю Вайлс

Ныне Ферма считается одним из основоположников теории чисел, теории вероятностей, дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии. Его оптический принцип (луч света движется из одной точки в другую так, что время этого движения минимально) стал одним из истоков вариационного исчисления. В работе «Введение к теории плоских и пространственных мест», написанной в 1636 г., Ферма, независимо от Декарта, вводит прямолинейные координаты и показывает, что в этой системе координат прямые линии соответствуют уравнениям первой степени, коническим сечениям – второй степени. Координатные оси Ферма, так же как и Декарт, считает неравноправными. Одна ось (абсцисс) считается главной, на ней от выбранного начала откладываются отрезки, соответствующие одной переменной. Отрезки второй переменной откладываются из концов первых под выбранным для данной задачи углом (чаще всего прямым). Преобразованием координат Ферма исследует общие виды уравнений первой и второй степени и приводит их к привычным ныне каноническим выражениям, записанным, как правило, относительно ортогональных осей:

$$y = mx, \quad xy = k^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 \pm a^2 y^2 = b^2$$

(для прямой, проходящей через начало координат; для гиперболы, отнесенной к асимптотам; для окружности с центром в начале координат; для параболы, отнесенной к диаметру и касательной в его конце; для эллипса (гиперболы) относительно сопряженных диаметров).

Исследования в том же направлении опубликовали англичанин Дж. Уоллис («Трактат о конических сечениях», 1655), голландец Ян де Витт («Основы кривых линий», 1659), француз Г. Лопиталь («Аналитический трактат о конических сечениях», 1707). В 1704 г. Ньютон издал «Перечисление кривых третьего порядка», где введены равноправные и ортогональные оси координат, в основу классификации кривых положена степень их алгебраического уравнения. Для приведения уравнений кривых к каноническому виду автор использовал линейные преобразования координат.

Во всех работах по аналитической геометрии, изданных в XVII веке, речь шла об исследовании плоских кривых. Первым, кто воспользовался пространственной системой прямоугольных координат для описания поверхностей и кривых, был французский математик и механик, член Парижской академии наук (с 1699 как ассистент, с 1716 как академик) **Антуан Паран** (Antoine Parent, 1666–1716). В 1700 г. он получил уравнение сферы и ее касательной плоскости. А первое крупное исследование пространственных кривых было проведено и опубликовано семнадцатилетним французом Алексисом Клеро (1713–1765) в 1731 г. («Исследования о кривых двоякой кривизны»). Следующий важный вклад в развитие и систематизацию идей аналитической геометрии сделал Л. Эйлер, посвятивший этим проблемам второй том «Введения в исчисление бесконечно малых» (1748).

В XVII веке, с внедрением и укоренением символьных обозначений, продолжалось развитие алгебраических исследований. Как уже упоминалось, алгебраическая символика формировалась на протяжении многих столетий (Диофант, арабские математики, Л. Пачоли (ок. 1445–1517), Н. Шюке (ок. 1445–1500) и другие), но решающий шаг (введение буквенных коэффициентов) был сделан французом Ф. Виетом (1540–1603) в работе «Введение в аналитическое искусство» (1591). Следующий шаг в создании алгебраической символики, был сделан Декартом и Ферма. В результате алгебра приобрела характер символьного исчисления. Это позволило построить общую теорию алгебраических уравнений, внести вклад в развитие геометрической алгебры (теории операций над отрезками) и теории конических сечений, в которых прежде доказательства сводились к построению с помощью циркуля и линейки.

Во второй четверти XVII века, в связи с исследованиями свойств движения тел, все большую актуальность приобретает задача нахождения касательной к кривой. Это было связано с представлением о том, что движение точки по ее траектории в каждый момент направлено по касательной к траектории точки или что скорость точки направлена по касательной к ее траектории в данный момент времени. Кинематическое представление произвольной кривой как траектории произвольной точки привело к новому пониманию касательной как предельному положению секущей, проведенной через две бесконечно близкие точки. Прежде касательной называлась прямая, лежащая по одну сторону от кривой и имеющая с ней одну общую точку. Новое понимание касательной было связано с осознанием физического свойства движения тел (точек), выражаемого законом инерции.

Первые задачи на определение касательных и нормалей к кривым были решены Ж.П. Робервалем, Г. Галилеем, Э. Торричелли, Р. Декартом, П. Ферма, И. Гудде. Интерес к нахождению касательных возрос из-за осознания связи между задачами нахождения касательных и определения экстремальных (наибольших, наименьших) значений функций.

В 1638 г. Ферма сообщил в письме Декарту способ нахождения экстремального значения функции $y = f(x)$. Суть метода состояла в следующем. Если при $x = x_1$, $y = f(x_1)$ имеет максимальное значение, то для всех $x \neq x_1$, $f(x) < f(x_1)$. Считая, что $x = x_1 + h$, а $f(x) = f(x_1) \pm Ph + Qh^2 \pm \ldots$, из последнего неравенства получаем $\pm P + Qh \pm \ldots < 0$. Величина $h > 0$ может быть выбрана сколь угодно малой, поэтому полученное неравенство возможно только при $P = 0$ или при выполнении условия $P = \left.\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|_{h=0} = 0$. Например, для функции $y = x^2$ $P = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$. И из равенства $\left.(2x_1 + h)\right|_{h=0} = 0$ получаем экстремальную точку $x_1 = 0$.

Метод, предложенный Ферма для нахождения касательных, может пояснить рис. 44. Для малой дуги строится ΔMNP, позднее названный характеристическим, подобный ΔSMR. Из подобия треугольников следует, что $SR=\dfrac{MR\cdot MP}{PN}=\dfrac{f(x)\cdot h}{f(x+h)-f(x)}$, если M – текущая точка кривой $y=f\left(x\right)$, а $h=RQ=MP$ – приращение аргумента.

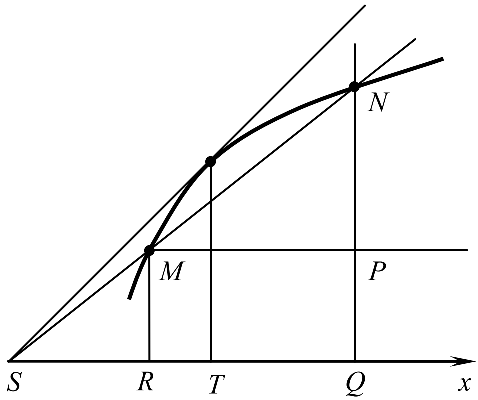


Рис. 44

Переходя от секущей SMN к касательной, полагая $h=0$, Ферма находит проекцию касательной на ось x (подкасательную) $\tau_x=\dfrac{y}{y'}$, где τ_x и y' – «предельные» значения, соответственно, SR и $\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$.

В системе координат с началом в точке S это уравнение задает прямую $y=y'\cdot\tau_x=kx$, где $k=y'\big|_{x=ST}$, $\tau_x=ST=x$. Распространив свой метод на случай неявного задания функции $f\left(x,y\right)=0$, он получил выражение, которое сейчас можно было бы представить в виде: $\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Метод Ферма дальше использовался Р.Ф. де Слюзом (1622–1685), Х. Гюйгенсом, И. Барроу, Д. Грегори.

Метод «интегральных сумм», использовавшийся Ферма и позднее Паскалем для квадрирования (определения площади криволинейной трапеции) кривых, был также геометрическим по форме. Однако в роли неделимых у них использовались не элементы меньшей размерности, как у Кавальери, а бесконечно малые элементы той же размерности, что и измеряемое тело. Если речь идет об измерении (определении) длины линии, то неделимым будет ее бесконечно малый отрезок; если мы находим площадь фигуры, то неделимым будет бесконечно малый элемент ее поверхности. При нахождении объема тела неделимым будет бесконечно малый пространственный элемент этого тела.

Кроме задач на нахождение касательных и квадратур кривых (вычисление длины, площади) к середине века появились задачи смешанного типа – «обратные задачи на касательные» и задачи «на спрямление кривых», решение которых выявило взаимную зависимость, обратимость операций, лежащих в основе методов решения задач на нахождение касательных и на вычисление квадратур. Это обнаружили П. Менголи (1625–1686), Э. Торричелли, Дж. Грегори, И. Барроу, Р. Декарт, Д. Уоллис.

С современной точки зрения была установлена зависимость между операциями дифференцирования и интегрирования функций, в то время как сами эти понятия еще не были ясно осознаны. Они сводились к использованию понятия бесконечно малых геометрических величин. «Геометрия бесконечно малых» была предысторией дифференциального и интегрального исчисления Лейбница, теории флюксий и квадратур Ньютона и всего математического анализа. Это была не классическая геометрия покоя, а геометрия движения. Ее создателей, а затем и их последователей, в XVII–XVIII веках называли геометрами. Именно они стали основоположниками дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, аналитической и дифференциальной геометрии, классической и небесной механики, механики сплошных сред.

Важнейшим событием XVII века стало создание основ математического анализа, ставшего важнейшей составляющей математического аппарата классической механики. Идеи математического анализа, в котором функции и их обобщения изучаются методом бесконечно малых, пределов, пронизывают всю современную математику, включая ее приложения. Различают математический анализ в широком и узком смысле. Анализ в широком смысле – это вся совокупность математических дисциплин, представляющих непосредственное развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления (дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление, теории функций действительного, комплексного переменного и так далее). Анализ в узком смысле – это интегральное и дифференциальное исчисление. Его созданию и были посвящены математические исследования И. Кеплера, Г. Сен-Венсана, Р. Декарта, Ф.Б. Кавальери, П. Ферма, Ж.П. Роберваля, Э. Торричелли, Дж. Уоллиса, Н. Меркатора, Б. Паскаля, П. Менголи, Х. Гюйгенса, И. Барроу, Дж. Грегори, И. Ньютона, Г.В. Лейбница, Я. и И. Бернулли.

Общие методы дифференцирования и интегрирования функций, их взаимосвязь, могли быть открыты только теми, кто владел геометрическими методами древних греков, алгебраическими методами Декарта, Ферма и Уоллиса, понятиями функции и бесконечно малой величины, кто нуждался в методах анализа для решения своих прикладных проблем. Честь этого открытия выпала на долю англичанина Исаака Ньютона и немца Готфрида Вильгельма Лейбница.

Теория «флюксий Ньютона тесно связана с работами его учителя И. Барроу, Дж. Грегори и Дж. Уоллиса («Арифметика бесконечных», 1655). **Исаак Барроу** (Isaak Barrow, 1630–1677) родился в Лондоне, окончил Тринити-колледж Кембриджского университета, Оксфордский университет (в 1652 г. получил степень магистра), где изучал древние языки (латинский, греческий, арабский), богословие и естественные науки. Самостоятельно изучал труды Галилея, Бэкона, Декарта.

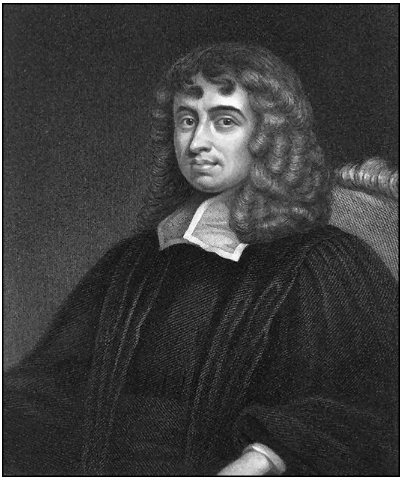


Рис. 45. Исаак Барроу

После окончания учебы четыре года путешествовал по Франции, Италии, Германии, Голландии, Турции (жил в Константинополе и Смирне). После возвращения в Кембридж стал профессором греческого языка, после открытия кафедры математики (льюкасовской) – профессором геометрии и оптики. В 1669 г., став доктором богословия, эту должность он передал своему ученику И. Ньютону. В 1675 г. был назначен вице-канцлером (главой) Тринити-колледжа. Знание языков и интерес к математике позволили ему издать сочинения Евклида, Архимеда, Аполлония и Феодосия со своими комментариями. Барроу внес значительный вклад в создание исчисления бесконечно малых. Разработав способ нахождения касательных, основанный на применении дифференциалов, более общий, чем метод Ферма, стал одним из предшественников Ньютона и Лейбница. Барроу первым осознал, что задача о касательных обратна задаче о квадратурах, однако оставался приверженцем геометрических методов изложения результатов. Важнейшими трудами Барроу признаны «Лекции по оптике»(1669), «Лекции по геометрии» (1670), «Лекции по математике» (1683).

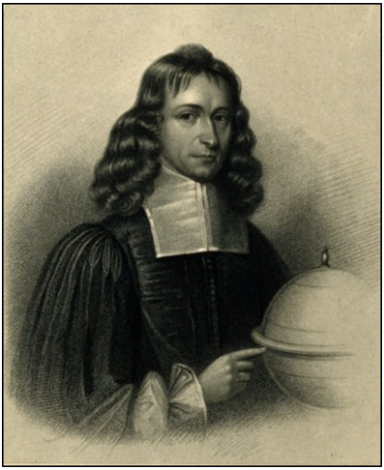


Рис. 46. Джеймс Грегори

Шотландский математик и астроном **Джеймс Грегори** (1638–1675) был профессором университетов Сент-Эндрюса (с 1668) и Эдинбурга (с 1674), членом Лондонского Королевского общества (с 1668), автором одного из первых проектов зеркального телескопа, реализованного позднее Ньютоном. В 1664 г. Грегори побывал в Лондоне, где познакомился с Гуком и другими известными учеными. Во время путешествия по Италии (1664–1668) он познакомился с математическими работами Кавальери, его методом «неделимых» и начал собственные исследования в области применения бесконечно малых. Используя идею функциональной зависимости, Грегори изучил многие виды функций, изложил метод предельного перехода, широко использовал разложение функций в степенные ряды, вывел уравнения некоторых кривых, открыл формулу биноминального ряда, интерполяционную формулу, в 1668 г. получил формулу приближенного интегрирования, в 1743 г. переоткрытую английским математиком Томасом Симпсоном (1710–1761).

Результаты Грегори высоко ценил молодой Ньютон, называя Грегори в числе своих идейных предшественников. Разложение в ряд стало основным методом Ньютона и важной составной частью созданной им теории «флюксий», в которой он использовал обозначение «0» для бесконечно малой, введенное Грегори. Можно предположить, что именно Грегори натолкнул Ньютона на открытие общей формулы бинома и интерполяционной формулы. В свою очередь, Грегори одним из первых оценил значение научных открытий Ньютона (тогда ещё не опубликованных) вел с ним и с его коллегами дружескую переписку, использовал ньютоновские идеи в своем преподавании.

Создание теории «флюксий» было обусловлено потребностью в решении практических задач, в частности проблем небесной механики. Две главные задачи теории состояли в следующем: 1) для данного соотношения между «флюентами» определить соотношение между «флюксиями» (по современной терминологии «флюента» – переменная величина, «флюксия» – скорость изменения «флюенты», т.е. производная); 2) для известного соотношения между «флюксиями» найти соотношения между «флюентами». С современной точки зрения это задачи дифференцирования и интегрирования.

Решение первой из задач Ньютон сводил к замене «флюент» их приближенными значениями. Рассмотрим решение Ньютона на примере уравнения $y = x^2$. Заменяя «флюенты» x и y их приближенными значениями $x + \dot{x}_0$ и $y + \dot{y}_0$, где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ – «флюксии», а $\dot{x}_0$ и $\dot{y}_0$ – «моменты флюент» (бесконечно малые величины), получим $(y + \dot{y}_0) = (x + \dot{x}_0)^2$ откуда, в силу исходного уравнения, пренебрегая малыми второго порядка и сокращая обе части на значок «$_0$», приходим к искомому соотношению $\dot{y} = 2\dot{x}x$ между «флюксиями».

В решении второй задачи Ньютон столкнулся с трудностью, обнаружив, что даже линейное уравнение $P(x,y)\dot{x} + Q(x,y)\dot{y} = 0$ не всегда может быть проинтегрировано в явном виде. Для решения дифференциальных уравнений он пользовался разложением функций в степенные ряды. Эта идея, вошедшая в математику во второй половине XVII века (Н. Меркатор, Дж. Грегори, Дж. Уоллис, Г.В. Лейбниц), оказалась весьма эффективной и получила дальнейшее развитие. Она сводила задачу интегрирования функций к задаче обращения (интегрирования) соответствующих рядов. Так, Меркатор в «Логарифмотехнике» (1668) рассматривал логарифм $\ln(1+x)$ как площадь под гиперболой $y = \dfrac{1}{1+x}$. Действительно,

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots .$$

И ряд в правой части можно рассматривать как последовательное интегрирование ряда, получаемого после деления «по правилам алгебры» 1 на $(1+x)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

В 80–90-е гг. XVII века, пытаясь придать своему исчислению более строгую, чем в методе «флюксий» и рядов, логическую форму, Ньютон начал развивать метод «первых» и «последних» отношений, изложенный им в ряде лемм в «Началах». Здесь основным являлось понятие производной, определяемой как «последнее» отношение исчезающего приращения функции (Δy) к исчезающему приращению аргумента (Δx) или как «первое» отношение возникающего приращения функции к возникающему приращению аргумента.

Ньютону, как и Барроу, была известна геометрическая интерпретация интеграла функции как площади соответствующей криволинейной трапеции, а также то, что производная этой площади по абсциссе является ординатой этой кривой. Понятия определенного интеграла у Ньютона нет, однако есть, хоть и не полная, но достаточно обширная таблица неопределенных интегралов. Большинство положений своего математического анализа он продемонстрировал в процессе решения конкретных задач, оставив своим последователям возможность построения стройной математической теории.

Официальным годом рождения дифференциального исчисления обычно называют 1684 г. – год выхода в лейпцигском журнале «Acta eruditorum» статьи Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов...», где вводятся понятие дифференциала, правила дифференцирования функций (суммы, произведения, отношения), условия их экстремумов и точек перегиба. Свои главные идеи Лейбниц сформулировал между 1673 и 1676 гг. под личным влиянием Гюйгенса, в результате изучения работ Декарта и Паскаля.

Через два года Лейбниц опубликовал статью, посвященную основам интегрального исчисления. Новая математическая теория, удачная символика введенных понятий (дифференциала, интеграла) привлекли внимание континентальных ученых и дальнейшее развитие математического анализа и его приложений в работах Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталя, П. Вариньона и их последователей происходило в русле лейбницевой традиции.

Если подход Ньютона был «кинематическим», основанным на понятии скорости, то Лейбниц излагал свою теорию на основе геометрических представлений о «характеристическом треугольнике», впервые появившихся в работах Паскаля, Снеллиуса и Барроу («Геометрические лекции»). Поясним подход Лейбница на примере той же параболы $y = x^2$ (см. рис. 47).

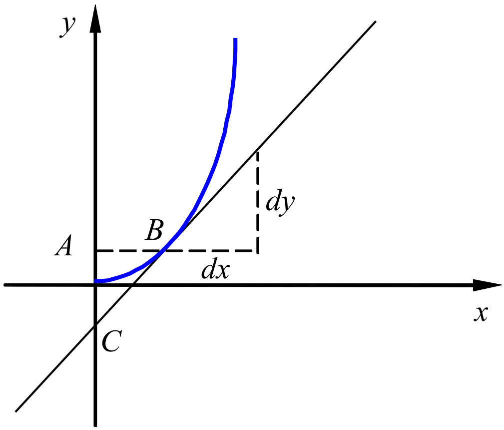


Рис. 47

Треугольник ABC, образованный касательной BC, подкасательной AC и отрезком AB, параллельным оси x, подобен «характеристическому треугольнику» с катетами dx и dy. Таким образом, $dy = \frac{AC}{AB} dx$. Уравнению параболы должна удовлетворять и точка с координатами $(x+dx, y+dy)$, т.е. $y+dy=(x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$. Учитывая, что $y = x^2$, а dx^2 – величина второго порядка малости, получаем $dy = 2xdx$.

Маркиз **Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь** (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, 1661–1704) происходил из знатной и богатой французской семьи. Как внук и сын генерала, он сначала продолжил семейную армейскую традицию, но, дослужившись до чина капитана кавалерии, оставил военную службу. Этому способствовала прогрессирующая близорукость и страстное желание посвятить себя изучению математики, интерес к которой возник еще в пятнадцатилетнем возрасте, а позднее усиливался по мере изучения геометрии, сочинений Паскаля, Лейбница.

Рис. 48. Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь

Рис. 49. Николя Мальбранш

В конце 1691 г. известный философ, физик, геометр, академик Парижской академии наук **Николя Мальбранш** (Nicolas Malebranche, 1638–1715) познакомил Лопиталя с Иоганном Бернулли, приехавшим в Париж. Иоганн тогда уже был большим знатоком математики и то, что он был на шесть лет младше Лопиталя, не помешало стать его учителем. Лекции Бернулли по основам математического анализа пришлись на благодатную почву. Эти лекции Лопиталь положил в основу своего сочинения «Анализ бесконечно малых» (1696), которое принято считать одним из первых учебников по дифференциальному исчислению. Книга неоднократно переиздавалась и переводилась на другие языки.

В этой книге излагается известное «правило Лопиталя» раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, истинным автором которого был И. Бернулли. Несмотря на то, что Лопиталь не претендовал на авторство, неизменно отмечал заслуги Бернулли и Лебница, это обстоятельство стало причиной публичных претензий Иоганна Бернулли к Лопиталю. Впрочем, это был не единственный случай бестактной амбициозности И. Бернулли. Столь же бесцеремонно он отзывался и о работах своего старшего брата Якоба, Б. Тейлора, И. Ньютона и даже своего сына Даниила.

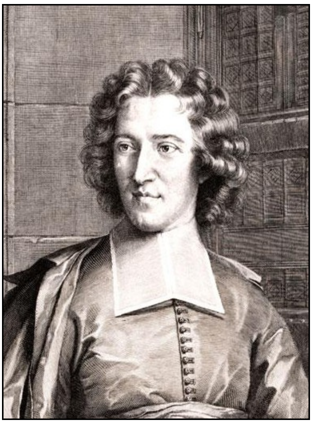


Рис. 50. Ж.-П.-Ж. Биньон

Рис. 51. М. Роль

В 1693 г. Лопиталь стал членом Парижской академии наук. Ему принадлежит решение ряда задач о кривой наименьшего времени ската (о брахистохроне), о кривой, по которой должен двигаться груз, прикрепленный к цепи и удерживающий в равновесии подъемный мост, и др.). На заседаниях Академии он был решительным сторонником нового анализа, против которого выступали академики **Ж. Галуа** (Jean Galois, 1632–1707), **Ж.-П.-Ж. Биньон** (Jean-Paul Bignon, 1662–1743), Гоние, **М. Роль** (Michel Rolle, 1652–1719).

Последний трактат Лопиталя, посвященный коническим сечениям, был издан в 1707 г. (второе издание – в 1720). Незаконченная рукопись этой книги была обнаружена уже после смерти Лопиталя (2 февраля 1704 г.). Решение новых задач, издание его главных трудов поставили в один ряд с самыми известными геометрами той эпохи – Ньютоном, Лейбницем, Якобом и Иоганом Бернулли, Вариньоном.

ГЛАВА 2
ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

2.1. И. Ньютон и Г.В. Лейбниц

Одним из наиболее значительных научных достижений XVII века стало издание «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона (1687). Это, безусловно, выдающееся событие в истории мировой науки было подготовлено многовековой практикой наблюдений, научных экспериментов, многочисленными философскими, физическими и математическим теориями и методами решения конкретных задач. С появлением в свет трактата, основные научные идеи которого в течение нескольких последующих десятилетий стали господствующими в европейском естествознании, начинается новый этап в истории мировой науки – этап математизации наук, формирования научной теории не только ради констатации некоторых мнений, результатов, но и для демонстрации универсального метода решения широкого круга практических задач. Идеи математического моделирования, укоренившиеся в этот период, прежде всего в механике и физике, получили дальнейшее развитие и определили научную картину современного мира.

Исаак Ньютон родился 4 января 1643 г. в небольшом поместье Вулсторп в Линкольншире, в 10 км от г. Грантем. Поначалу ничто не предвещало ему великой судьбы. Он родил хилым, недоношенным ребенком. Его ожидало фермерство – дело деда и отца (Исаак Ньютон-старший умер за три месяца до рождения сына, поэтому сведения о детстве и юношестве Исаака носят отрывочный, противоречивый характер и полны домыслов).

Рис. 52. Исаак Ньютон

Получив начальное образование в сельской школе, Исаак продолжил образование в средней школе г. Грантем, которая имела богатые традиции и хорошую репутацию. По окончании школы в 1661 г. Ньютон становится студентом Тринити-колледжа (Колледж святой Троицы) Кембриджского университета.

Кембриджский университет той поры состоял из нескольких колледжей, самым известным из которых был колледж Святой и Нераздельной Троицы, основанный Генрихом VIII в 1546 г. В нем учились примерно 250 студентов и работали около 70 членов колледжа (магистров) и профессоров, некоторые из последних (от 3 до 5) назначались королем.

Студенты подразделялись на членов общины, пенсионеров, сайзеров и сабсайзеров. Большинство студентов были пенсионерами – выходцами из состоятельных семей. Высшую касту составляли члены общины – очень богатые студенты, за особую плату получавшие некоторые привилегии (обедать за особым столом, пользоваться услугами сайзеров и т.п.). Сайзеры и сабсайзеры были выходцами из бедных семей. Они обязаны были не только учиться, но и прислуживать богатым студентам (будить по утрам, чистить одежду и обувь, прислуживать за столом и т.п.).

Ньютон, будучи выходцем из весьма обеспеченной семьи, почему-то был принят сабсайзером. Трудно сказать, насколько эта роль тяготила Исаака, но известно, что сайзеры и сабсайзеры всегда учились лучше остальных студентов. Некоторые студенты, как и сейчас, оставляли университет, не завершив образование. Это подтверждается следующей исторической справкой: с 1635 по 1670 г. университет закончили 82% сайзеров, 72% пенсионеров и только 49% членов общины (% от числа поступивших).

Особенностью английских университетов является то, что за каждым студентом закрепляется профессор-наставник, называемый тьютором. По свидетельству биографов Ньютона, он вел в Кембридже затворнический образ жизни, общаясь, в основном, только со своим тьютором – профессором греческого языка Бенджамином Пуллейном. Весной 1664 г. Ньютон познакомился с профессором математики Исааком Барроу, который преподавал геометрию Евклида. Эта встреча определила многое в дальнейшей судьбе Исаака. В том же году он получил стипендию колледжа (перестал быть сабсайзером) и был увлечен самообразованием. Он изучал труды по логике, этике, риторике, аристотелевой физике, но особое его внимание привлекли новые идеи, изложенные в сочинениях Кеплера, Галилея, Декарта, Гассенди, Гоббса, Генри Мора, Схоутена, Уоллиса.

В январе 1665 г. Ньютон получил степень бакалавра искусств, а в августе университет, из-за охватившей всю Англию эпидемии чумы, был закрыт, и следующие почти два года Ньютон провел у матери в Вулсторпе. В октябре 1667 г. его избрали младшим, в марте 1668 – старшим членом колледжа, через четыре месяца он получил степень магистра искусств, а в октябре 1669 г. сменил И. Барроу в должности профессора люкасовской (математической) кафедры.

Годы, проведенные в Вулсторпе, по воспоминаниям Ньютона, были самыми плодотворными в его жизни: «*В начале 1665 г. я открыл метод приближенных рядов и правило для сведения любой степени любого бинома к таким рядам. В мае того же года я открыл метод касательных Грегори и Слюза, а в ноябре – прямой метод флюксий и в следующем году, в январе – теорию цветов, а затем, в мае, имел в распоряжении обратный метод флюксий. И в тот же самый год я начал думать о тяжести, простирающейся до орбиты Луны (найдя, как вычислить силу, с которой шар, обращающийся внутри сферы, давит на поверхность сферы); из кеплеровского правила, что периоды планет находятся в полуторном отношении к их расстоянию от центра их орбит, я вывел, что силы, которые удерживают планеты на их орбитах, должны быть обратно пропорциональны квадратам их расстояний от центров, вокруг которых они обращаются: в связи с этим, я сравнил силу, потребную, чтобы удержать Луну на орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и нашел их весьма близко совпадающими. Все это произошло в два чумных года 1665–1666. Ибо в это время я находился в наилучшем для открытий возрасте и думал о математике и философии больше, чем когда-либо позже*» [1, с. 104].

Результаты, полученные Ньютоном в этот период, не были каким-то сверхъестественным озарением. Это были плоды его размышлений, расчетов, критического анализа работ Виета, Галилея, Кеплера, Кавальери, Декарта, Ферма, Уоллиса, Меркатора, Роберваля, Бойля, Гука, Барроу. Ньютон, страстно увлеченный научными проблемами своего времени, был прекрасно осведомлен во всех их тонкостях и деталях. И для решения многих из проблем достаточно было его таланта, упорства и трудолюбия. При этом Ньютон не торопился с публикацией своих результатов. Возможно, это было связано с тем, что он непрерывно увлекался все новыми проблемами, оставляя недописанными, недооформленными свои предыдущие работы, идеи, решения, которые долгие годы и десятилетия оставались в черновиках, и большинство современников знали о них лишь понаслышке.

Став в 26 лет профессором математики, Ньютон занимал эту должность следующие 27 лет. Как профессор Кембриджского университета, он был делегирован в качестве депутата палаты общин английского парламента, однако активного участия в деятельности палаты не принимал. Судя по откликам современников, его лекции не пользовались популярностью у студентов Тринити-колледжа, он не имел любимых учеников, но его кембриджский период был чрезвычайно плодотворен в научном плане.

В 1696 г. Ньютон переехал в Лондон, где по ходатайству его бывшего ученика и влиятельного вельможи Чарльза Монтегю (Монтегю был мужем племянницы Ньютона – Катарины Бартон) получил должность сначала смотрителя, а вскоре – директора Монетного двора. Его зарплата возрастает в 10 раз, он становится важной персоной. В 1699 г. Парижская академия наук избирает его (а также Лейбница (вторично) и братьев Бернулли) своим иностранным членом, в 1703 г. он становится президентом Лондонского королевского общества, членом которого состоял с января 1672 г. В 1705 г. королева Анна возводит его в рыцарское достоинство. В последние годы жизни Ньютон занимался изданием и переизданием ранее написанных трудов.

Ньютон в детстве был болезненным ребенком, но это не помешало ему в добром здравии (за исключением легкого психического расстройства в начале 90-х) прожить долгую жизнь. Скончался Ньютон 31 марта 1727 г. на 85-м году, пережив буржуазную революцию 1640–60-х гг., гражданскую войну, протекторат Кромвеля, реставрацию Стюартов, шесть королей. Он был ниже среднего роста, коренастым, с густой шевелюрой (в старости седых) волос, с живым острым взглядом и постоянно погруженным в размышления (что дало пищу для рассказов о его рассеянности), аккуратным и рациональным во всем. Он не занимался политикой, не был женат и не имел детей, никогда не выезжал из Англии. Наука была главным делом его жизни.

Размышления о свойствах движения тел, чтение «Геометрии» Декарта, «Арифметики бесконечных» Уоллиса, лекции по геометрии Барроу привели Ньютона к своему понятию переменной величины, которую он называл флюентой (от лат. *fluere* – течь). Если некоторое уравнение содержит две флюенты, то, задавая одну из них, вторую можно найти как решение уравнения. Ньютон считал, что любую такую флюенту (функцию) можно разложить в ряд по степеням другой переменной (аргумента). Поэтому методы разложения конкретных функций в степенные ряды, опубликованные ранее Н. Меркатором, Д. Грегори, Д. Уоллисом, привлекли его внимание и стали отправной точкой для собственных изысканий. После того как Ньютон нашел разложение степени бинома, он нашел разложение основных элементарных функций. Для нахождения разложений обратных функций Ньютон придумал свой метод обращения рядов, т.е. преобразования ряда

$$y = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

в ряд

$$x = b_1y + b_2y^2 + \ldots + b_ny^n + \ldots .$$

Его метод позволил получить

$$b_1 = \frac{1}{a_1}; \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}; \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1a_3}{a_1^5}; \ \ldots .$$

Наряду с понятием флюенты важнейшее место в математике Ньютона занимали понятия момента флюенты (бесконечно малое приращение флюенты, соответствующее современному дифференциалу) и флюксии (скорость приращения флюенты, соответствующая современной производной). В ранних рукописях он называл их сначала «движениями», затем «скоростями», а позднее – флюксиями. Первая из основных задач метода флюксий состояла в нахождении производных заданных функций или, пользуясь терминологией Ньютона, в определении соотношения между флюксиями по заданному соотношению между флюентами. Вторая основная задача состояла в определении соотношения между флюентами по известному соотношению между флюксиями. С современной точки зрения эта задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения. Для решения конкретных примеров Ньютон использовал выработанные им правила и специальные таблицы для нахождения производных и интегралов наиболее популярных выражений.

Свои первые математические результаты по теории флюксий Ньютон изложил в рукописи «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», написанной в первой половине 1669 г. Копии рукописи были посланы (через Барроу) Д. Грегори, Р. Слюзу, Д.А. Борелли. Математические приемы, разработанные Ньютоном, далее совершенствовались и усложнялись вместе с расширением круга оптических и механических задач, ради решения которых они создавались. Это были задачи определения скорости движения по заданному закону движения, нахождения пути, пройденного за некоторое время, по известной функции скорости. Дальнейшее изложение теории флюксий было дано в рукописи «Метод флюксий и бесконечных рядов», написанной в 1670–71 гг., в двух письмах Лейбницу, переданных адресату в 1676 г. через секретаря Лондонского научного общества Ольденбурга, и в двух письмах Уоллису (1692). Прочим математическим результатам Ньютон посвятил сочинения «О квадратуре кривых» (1704), «Перечисление кривых третьего порядка» (1704), «Всеобщая арифметика» (1707), «Метод разностей» (1711).

Главный труд Ньютона – «Математические начала натуральной философии» (переиздавался в 1713 и 1724 гг.) посвящен обобщению результатов, полученных в механике до 1684 г., и выводу закона всемирного тяготения. Здесь не только приводятся основные понятия и законы динамики точки, но и решаются многие практически важные задачи: о движении тела в центральном поле сил, об ударе, о движении тела в среде и др. Важное место в творчестве Ньютона занимали его оптические исследования, связанные с созданием телескопа-рефлектора. Их результаты были опубликованы в «Оптике» (1704).

Начиная с конца 1660-х гг. Ньютон занимался модной тогда алхимией. Но у него это был не традиционный поиск «философского камня», реактива для превращения металлов в золото и создания «эликсира жизни», а некоторое магическое искусство, отражающее единство живой и неживой природы, попытка проникновения во внутреннюю структуру материи путем перестановки ее элементов. В 1670-е годы к Ньютону пришло новое увлечение – теология. Изучив многие церковные труды, он начинает заниматься толкованием пророчеств, пытается построить свою историю человечества, хронологию, основанную на высказываниях пророков. Однако в 1680-е годы Ньютон отошел от этих проблем. Проблемы натуральной философии, механики и устройства Вселенной, математические работы вновь оказались в фокусе его интересов.

Диапазон математических проблем XVII века был исключительно обширен. Многие из них были наследием прошлых веков и по-прежнему привлекали внимание ученых, в том числе и Ньютона. Однако проблемы математики переменных величин, особенно со второй половины XVII века, вызывали наибольший интерес. Ньютон не торопился публиковать свои результаты, поэтому его вклад в создание будущего математического анализа в конце этого века не был широко известен. Гораздо больше были известны работы Лейбница, опубликовавшего в 1684 г. в лейпцигском научном журнале «Acta eruditorium» статью «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого вид исчисления». После этой публикации началось регулярное издание статей и книг, посвященных математическому анализу.

Лейбниц и Ньютон знали друг о друге, но никогда не встречались лично. По складу характера, по жизненным устремлениям они были совершенно разными людьми: нелюдимый и погруженный в свои научные размышления Ньютон и жизнелюб, умный и блистательный собеседник, всем интересующийся и фонтанирующий идеями Лейбниц. В конце жизни они оба были втянуты в жесткий приоритетный спор, доказывая (лично и через своих сторонников) право называться единственным основоположником математического анализа. Для Ньютона, с его амбициозным характером, это было не удивительно. Он уже предъявлял претензии к Р. Гуку на свой приоритет в открытии закона всемирного тяготения, оптических законов, создания телескопа. Спор между сторонниками Лейбница и Ньютона порочил всех, и единственным положительным моментом этой затянувшейся дискуссии оказалось то, что она способствовала популяризации новых математических идей. Позднее было установлено, что подходы Ньютона и Лейбница к определению основных понятий были различны, каждый внес свой значительный вклад в основы математического анализа и заслуживает быть первооткрывателем.

Рис. 53. Готфрид Вильгельм Лейбниц

Готфрид Вильгельм Лейбниц родился 3 июля 1646 г. в семье профессора этики Лейпцигского университета Фридриха Лейбница. Отец скончался, когда Готфриду исполнилось семь лет. В связи с этим и в знак признания отцовских заслуг перед университетом Готфрид в 1654 г. был формально зачислен в число его студентов. В 1661 г., окончив школу, Лейбниц становится студентом философского факультета, игравшего в Лейпцигском университете роль подготовительного. В декабре 1662 г. 16-летний Готфрид получает первое ученое звание – бакалавр философии, в 1663 г. он на один семестр переезжает в Йенский университет, где слушает лекции по истории, юриспруденции и математике.

Вернувшись из Йены, Лейбниц продолжил образование на юридическом факультете Лейпцигского университета. В 1664 г. скончалась его мать, и ему предстояло определиться в жизни. В том же году Лейбниц получает степень магистра философии, в следующем – бакалавра юриспруденции и заканчивает университет. Осенью 1666 г., после защиты сугубо юридической диссертации, он становится доктором права и переезжает в Нюрнберг, затем во Франкфурт, а в 1668 г. – в Майнц, на службу к курфюрсту Майнца Бойнебургу. Здесь Лейбниц приобщается к модному тогда научному увлечению алхимией, пишет большой трактат «Новая физическая гипотеза» и начинает работу по усовершенствованию счетной машины Б. Паскаля.

В 1672 г. 26-летний Лейбниц едет с дипломатическим поручением Бойнебурга в Париж, где знакомится с известными французскими учеными и Христианом Гюйгенсом, бывшим тогда академиком Парижской академии наук. Встреча с Гюйгенсом имела для Лейбница огромное значение. Укрепляется интерес к натуральной философии, математике и механике, он начинает изучать труды Гюйгенса, Галилея, Кавальери, Торричелли, Декарта, Роберваля, Мариотта, Паскаля, Уоллиса, Грегори.

В начале 1673 г. Лейбниц едет в Лондон, знакомится с английскими учеными, изучает их работы, докладывает о работе над счетной машиной, его избирают членом Лондонского королевского общества. Личное общение с научными знаменитостями вдохновило Лейбница на решение актуальных задач. Вернувшись в Париж, он увлеченно занимается разработкой нового исчисления бесконечно малых, размышлял над фундаментальными проблемами мироздания и механики.

После смерти Бойнебурга Лейбниц в январе 1676 г. принимает предложение Ганноверского герцога Иоганна Фридриха о переходе к нему на службу. В октябре того же года Лейбниц покидает Париж, вторично едет в Лондон и через Голландию возвращается в Германию. Следующие сорок лет он служил у ганноверских герцогов, занимая должности библиотекаря, советника юстиции и историографа их рода – рода Вельфов, или «Брауншвейгского дома».

История рода была крайне важна для герцогов, претендовавших на английский престол. Герцоги настойчиво требовали от Лейбница подтверждения их принадлежности к императорской фамилии. Ради этого он совершил трехлетнее (1687–1690) путешествие в Италию, собирая и анализируя материалы, касающиеся истории Священной Римской империи, которая во времена Лейбница, по меткому замечанию Вольтера, уже «не была Священной, не была Римской, и не была империей».

В биографиях Ньютона и Лейбница можно усмотреть много общего. Ньютон только на три с половиной года старше Лейбница, они почти ровесники. Оба рано лишились отца, в один год поступили в университет, благодаря природному таланту и упорству их самообразование имело блестящий результат, изучали труды своих (одних и тех же) предшественников, имели общие (включая алхимию и философию) интересы и оставили после себя выдающийся след в мировой науке. Однако на фоне благополучной судьбы Ньютона, пережившего Лейбница более чем на 10 лет, судьба второго складывалась менее удачно.

Всю свою жизнь Лейбниц находился на службе и добросовестно исполнял свои служебные обязанности. Его научные проблемы не интересовали его господ, но он не был свободен в выборе своих занятий. Ньютон сам определял интересные для него проблемы и мог позволить себе целиком сосредоточиться на их решении. У Лейбница ситуация была иной. Он был вынужден постоянно прерывать свои научные поиски ради выполнения служебных обязанностей и разного рода поручений. Вот что он писал в сентябре 1695 г. одному из своих знакомых в Париж:

«*Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю напечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я даже не знаю, за что раньше приняться, и я чувствую, как был прав Овидий, восклицая: изобилие делает меня нищим! Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину…, с тех пор Ольденбург, Гюйгенс и Арно, сами или через своих друзей, побуждали меня издать описание этого искусного устройства, а я все откладывал это, потому что я сперва имел только маленькую модель этой машины, которая годится для демонстрации механику, но не для использования. Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до 12 разрядов. Уже год, как я этого достиг, но рабочие еще при мне, чтобы можно было подготовить другие подобные машины, так как их требуют из разных мест. А прежде всего, я хотел бы закончить свою «Динамику», в которой, полагаю, я наконец нашел истинные законы материальной природы и посредством их могу решать такие задачи о действии тел, для каких недостаточны доселе известные правила. Мои друзья, которые знают о построенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей «Науки о бесконечном», содержащей основы моего нового анализа. К этому надо добавить «Характеристику положения», над которой я работаю, и еще более общие вещи относительно искусства открытия.*

Но все эти работы, за вычетом исторических, идут украдкой. Вы ведь знаете, при дворе ищут и ожидают совсем иного!» [1, с. 143–144].

По инициативе Лейбница в Берлине в 1700 г. было создано научное общество по подобию Лондонского королевского общества и Парижской академии наук. Лейбниц был назначен первым президентом этого общества, но активного участия в его делах не принимал. В 1711–1716 гг. он обсуждал с императором Карлом V и российским царем Петром I идею создания подобных обществ в Вене и Петербурге.

В этот период он, по мере угасающего здоровья, продолжал исследования, вел переписку со своими многочисленными респондентами и даже надеялся получить место при английском королевском дворе, когда ганноверский курфюрст Георг Людвиг стал королем Англии Георгом I. Но заочная ссора с Ньютоном сыграла свою роль: он получил отказ не только от короля, которому он прослужил в Ганновере 16 лет (с 1698 по 1714 г.), но и со стороны английских ученых. Лейбниц оказался в одиночестве, брошенным на произвол судьбы.

14 ноября 1716 г. Лейбниц скончался и был наскоро похоронен на скромном ганноверском кладбище. На могильной плите простая надпись – «Прах Лейбница». На его смерть откликнулась только Парижская академия наук. С «похвальным словом», посвященным памяти Лейбница, выступил секретарь Парижской академии наук Бернар Лебовье де Фонтенель (1657–1757). Когда через десять с половиной лет скончался Ньютон, Англия провожала его как национального героя. Он был погребен в Вестминстерском аббатстве – усыпальнице великих людей Англии. Ему посвящали стихи, ставили памятники. Памятником Лейбницу стали его выдающиеся научные труды.

За семьдесят прожитых лет Лейбниц был дипломатом, политиком, библиотекарем, юристом, занимался физикой, химией, геологией, сконструировал вычислительную машину и ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт. Ему принадлежат философские трактаты («Монадология», «Новые опыты о человеческом разуме», «Теодицея. Рассуждения о благости божией, свободе человеческой и начале зла», «Фрагменты логики», «Исповедь философа» и др.), труды по истории рода Вельфов (со вступления в 748 г. на престол императора Карла Великого до 1005 г.), по основам классической механики и многие математические сочинения.

Он ввел термины: «функция», «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «алгоритм», «абсцисса», «ордината», «координата», «динамика», «живая сила», «действие»; знаки дифференциала, интеграла; логическую символику. Важнейшей заслугой Лейбница было создание дифференциального и интегрального исчисления. И в этом ему активно помогали его младшие современники и последователи – братья Я. и И. Бернулли, Г.Ф. де Лопиталь и другие французские и немецкие математики.

Лейбниц оставил большое не только научное, но и эпистолярное наследие (около 15 000 писем). На протяжении всей творческой жизни Лейбниц вел обширную переписку с учеными разных стран. Но особую роль играла его переписка с Х. Гюйгенсом. Особенно интенсивной она была в последние годы жизни Гюйгенса (1690–1695). В письмах они обсуждали важнейшие научные проблемы, делились мнениями о новейших идеях и публикациях. Лейбниц считал Гюйгенса своим учителем и сравнивал его с Галилеем и Декартом.

2.2. Математические работы Г.В. Лейбница

Свою научную деятельность Лейбниц начинал как философ. Философский стиль мышления был отличительной чертой всего его научного творчества. Как некогда Пифагор, Платон, Аристотель, а в XVII веке – Кеплер, Декарт, Ньютон, он стремился к созданию универсального метода познания, к открытию некого всеобщего закона («всеобщей характеристики»), объясняющего и описывающего все явления природы и общественные процессы. Его идея состояла в замене или подчинении буквенной алгебры более универсальной науке (всеобщей характеристике, общей буквенной науке, науке о формулах, комбинаторному искусству), в которой все логические суждения и доказательства должны были бы сводиться к исчислению, к некоторым формальным операциям над словами и символами, однозначно отражающими понятия, явления и процессы.

Эта метанаука представлялась как некий логико-математический аппарат для выработки суждений, получения доказательств, разрешения споров и разногласий, в котором все сводится к вычислениям по определенным алгоритмам. Важную роль в создании нового исчисления должна была играть символика. Обозначения понятий и операций должны кратко, ясно и однозначно выражать их суть, они должны быть удобными для запоминания и использования (особенно, если алгоритмы вычислений будут механизированы). Эти идеи девятнадцатилетний Лейбниц высказал в «Диссертации о комбинаторном искусстве» (1665), но их воплощение растянулось на всю его жизнь.

После встречи с Х. Гюйгенсом и парижскими математиками («геометрами») Лейбниц увлекся идеями математики бесконечно малых, в частности работами Б. Паскаля, где использовался характеристический треугольник, катетами которого являются приращения абсциссы (Δx) и ординаты (Δy) функции $y = y(x)$ в текущей точке $M(x, y)$. На графике возрастающей функции $y = y(x)$ «треугольник Паскаля» имеет вершины в точках $M(x, y)$, $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $N(x + \Delta x, y)$. Этот треугольник ранее встречается в «Геометрических лекциях» (1670) И. Барроу, а еще раньше – в работах В. Снеллиуса «Tiphys Batavus» (1624) и Б. Паскаля «Трактат о синусах четверти круга» (1658). Лейбниц назвал этот треугольник характеристическим.

С 1673 г. Лейбниц занимался задачами суммирования рядов, нахождения касательных. Постепенно величины Δx и Δy начинают трактоваться не как произвольные (малые) конечные величины, а как бесконечно малые. Лейбниц решает обратные задачи на касательные, на суммирование бесконечно малых разностей, открывает взаимность методов решения задач на касательные и на квадратуры. К осени 1675 г. в его рукописях появляются основные понятия дифференциального и интегрального исчисления, вводятся операции и символы. В 1676–1677 гг. Лейбниц и Ньютон в переписке обменивались своими результатами, а в 1684 г. появилась уже упомянутая короткая статья «Новый метод максимумов…».

Лейбниц не приводит в ней доказательств, он формулирует основные положения будущего дифференциального исчисления. Разности значений аргумента понимаются как мгновенные приращения величин, как бесконечно малые разности и обозначаются dx (от слова *differentia* – разность). Величины dx произвольны (независимы), а величины dy определяются равенством $dy = \frac{ydx}{s_\tau}$, где s_τ – подкасательная кривой в точке $M(x, y)$. Далее сформулированы правила дифференцирования постоянной величины, суммы, разности, произведения, частного, степени, корня переменных величин, приводятся примеры применения «дифференциального алгоритма» при определении касательных и экстремумов, устанавливаются условия существования экстремума функции, точек перегиба, признаки выпуклости и вогнутости кривой, вводится второй дифференциал ddy, решается задача, поставленная перед Р. Декартом его другом **Флоримоном де Боном** (1601–1652).

Ф. де Бон, офицер, чиновник, юрист, страстно любил математику. Одним из первых он осознал и принял новые математические идеи Декарта и его «Геометрию», он первым утверждал, что прямая линия задается линейным уравнением $ax + by = c$. Задача де Бона, которую Лейбниц впервые решил в 1676 г., относится к обратным задачам на касательные. Она сводится к квадрированию кривой, для которой $\frac{y}{s_\tau} = \frac{x - y}{a}$, где $a = const$.

В 1686 г. Лейбниц опубликовал статью «О глубокой геометрии», содержащую основные понятия и правила интегрального исчисления. Под интегралом автор понимал сумму всех дифференциалов dy. Пользуясь представлениями Кавальери, он первоначально записывал интеграл как бесконечную сумму «неделимых» или ординат – $omn\ \ y$ (лат. *summa omnium* – сумма всех). Позднее, используя начальную букву в слове сумма (summa), Лейбниц вместо *omn* стал писать $\int$, а Якоб Бернулли в 1690 г. назвал этот знак термином «интеграл» (Лейбниц – термином «сумма»).

В том же году Лейбниц использует соприкасающуюся окружность для изучения соприкосновения кривых, для определения кривизны кривой. В статье «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов» (1693), он распространил свое исчисление на трансцендентные функции, разлагая их в ряды с неопределенными коэффициентами. В 1695 году были опубликованы правила дифференцирования произвольной показательной функции и формула для вычисления дифференциалов n-го порядка произведения функций.

Формула (теорема) Ньютона–Лейбница $y(x)-y(a)=\int\limits_a^x y'dx$ впервые опубликована в статье «Дополнение измерительной геометрии, или наиболее общее выполнение всех квадратур при помощи движения, а также многообразное построение линии по данному свойству касательных» (1693). В этой статье Лейбниц доказывает теорему Барроу о том, что кривая $y=F(x)$, имеющая в точке x угловой коэффициент касательной $y'=f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$, определяет площадь $F(x)$ криволинейной трапеции под графиком $y'=f(x)$, или $F(x)=\int\limits_0^x f(x)dx$ при $F(0)=0$. Случай, когда $F(0)\neq 0$, Лейбниц обсуждал в следующей статье (1694), где он показал, что для общности решения необходимо добавление произвольной постоянной, определяемой из начальных условий задачи.

В вычислениях Лейбниц чаще пользовался интегралами с переменными верхним и нижним нулевым пределами, поэтому символы $\int$ и dx он считал взаимными операторами, для которых $d\int x = \int dx = d^{-1}dx = x$. Это позволило ему распространить формулу для $d^n(xy)$ и другие результаты на случай $n<0$. При этом порядок дифференцирования считался аналогичным соответствующему показателю степени. До конца жизни Лейбниц продолжал работы по совершенствованию дифференциального и интегрального исчислений, заложив, таким образом, основы будущего математического анализа.

В 1687 г. Лейбниц сформулировал в «Acta eruditorum» задачу о «парацентрической изохроне»: найти кривую, по которой тяжелая точка опускается в равные промежутки времени на равные высоты. Через два года в том же журнале Лейбниц приводит решение своей задачи без подробного описания метода его получения. Исходя из своего принципа сохранения живых сил $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2g(y - y_0)$ и постоянства ускорения $\frac{d\upsilon}{dt} = k$, после исключения времени и интегрирования, он получает квадратно-кубическую параболу $9g^2k^2(x+c)^2 = (3gy - k^2)^3$, где $c = const$ (в современных обозначениях). Автор сохраняет в тайне метод интегрирования и усложняет задачу новым условием: найти кривую, которую должно пройти весомое тело, чтобы его расстояние до фиксированной точки изменялось на равную величину за равное время.

Первым на задачу Лейбница откликнулся Гюйгенс. Это было геометрическое решение. А в мае 1690 г. Я. Бернулли опубликовал в «Acta eruditorum» решение, в котором вывел дифференциальное уравнение искомой кривой и проинтегрировал его. При этом он впервые употребил в печати термин «интеграл» и указал, что из равенства дифференциалов следует равенство интегралов. Это была его первая публикация по применению нового анализа бесконечно малых. Лейбниц опубликовал свое решение в 1694 г., попутно указав Я. Бернулли на некоторые ошибки. Решение Лейбница сводилось к интегрированию уравнения

$$dc = \frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a} dt,$$

где $\frac{dc}{dt} = \upsilon$ – скорость движения. Здесь впервые вместо ddy он вводит обозначение $d^2 y$.

В июньском номере «Acta eruditorum» за 1696 г. И. Бернулли сформулировал свою знаменитую задачу о брахистохроне. Лейбниц не мог не откликнуться на эту задачу и первым прислал ее решение. Кроме самого И. Бернулли решения позднее прислали Я. Бернулли, Лопиталь и Ньютон. В следующем году Лейбниц опубликовал в «Acta eruditorum» свое решение задачи о брахистохроне (траектория – циклоида), отметив особые заслуги Я. Бернулли и Лопиталя в развитии нового анализа и И. Бернулли – в продолжение исследований движения тел, начатых Галилеем.

Задача о брахистохроне стала принципиально новым шагом в истории механики. Условие минимальности времени движения из A в B можно считать произвольным предположением, сделанным И. Бернулли ради усложнения математической проблемы Галилея. Но серьезность отношения к этой задаче ведущих механиков конца XVII века свидетельствует о напряженном поиске некоторого универсального принципа, по сути – философско-метафизического, по форме – математического, который бы своим простым и ясным содержанием охватывал все свойства движения тел. Однако такой принцип уже был известен со времен древнегреческой философии – природа действует наиболее легкими и доступными путями. Проблема состояла в математической формулировке этого положения.

Обобщая известный принцип Герона об отражении света, Пьер Ферма предполагал, что действительный путь распространения света между точками A и B отличается от всех других путей тем, что для его прохождения требуется минимальное (из всех возможных) время. И это условие минимальности времени непрерывного движения стало возможным сформулировать средствами нового математического анализа. Физические воззрения оптико-механической аналогии и последовательное появление математических понятий интеграла, вариации интеграла, скорости-производной, действия позволили получить различные математические выражения принципов, давших новый импульс в формировании в XVIII–XIX вв. математического аппарата теоретической механики.

В работе 1690 г. Я. Бернулли не только дал решение задачи Лейбница, но и предложил свою задачу о форме кривой, по которой расположится подвешенная за концы однородная гибкая нить под действием собственного веса. Впервые об этой задаче упоминали Жирар (1634), указавший, что кривая будет параболой, и Галилей («Беседы», 1638), считавший, что кривая близка к параболе. Правильное решение задачи дали Гюйгенс, Лейбниц и И. Бернулли. Искомую кривую, полученную традиционными геометрическими построениями и отношениями, Гюйгенс назвал «цепной линией». Лейбниц и И. Бернулли нашли уравнение цепной линии с помощью исчисления бесконечно малых. Как и задача о брахистохроне, задача о цепной линии стала впоследствии одной из основных в истории вариационного исчисления. В ее решении условие равновесия тяжелой нити было задано как требование минимальности высоты точек нити и представлено соответствующими интегралами по дуге кривой. Решению задачи о цепной линии Лейбниц посвятил несколько публикаций в «Acta eruditorum» за 1691–1693 гг.

2.3. «Начала» И. Ньютона

Я надеюсь… показать, что значит математика в натуральной философии, и побудить геометров ближе подойти к исследованию природы, а любителей естествознания – сначала выучиться геометрии, чтобы первые не тратили все свое время на бесполезные для жизни человеческой рассуждения, а вторые, старательно выполнявшие до сих пор свою работу превратным способом, разобрались бы в своих надеждах, чтобы философствующие геометры и философы, применяющие геометрию, вместо придумывания всевозможных домыслов, сейчас всюду восхваляемых, укрепляли бы науку о природе высшими доказательствами…

И. Ньютон

Первые попытки количественной оценки движения тел, появившиеся в трудах оксфордских и парижских ученых в Средние века, получили развитие в XVII веке при изучении движения тел (планет, брошенных тел, колебаний маятника, удара тел, течения жидкости). Но решение конкретных задач математическими методами было невозможно без определения и использования количественных характеристик движения. К середине века в качестве общепризнанных мер стали выступать время, пройденный путь, скорость и ускорение движения, масса («величина») тела, сила действия.

Особую роль сыграло введенное Декартом понятие количества движения (произведение «величины тела» на «скорость»). Оно имело простое математическое выражение, вполне определенный физический смысл, с ним можно было совершать математические операции, и это была уже не кинематическая, а динамическая (скорость с учетом массы) характеристика движения тела. После добавления Гюйгенсом, Уоллисом и Реном свойства направленности понятие количества движения оказалось одним из важнейших в механике Ньютона, динамике Лейбница, Бернулли и к началу XVIII века окончательно укоренилось в терминологии механики в качестве одной из основных мер (количественных характеристик) движения.

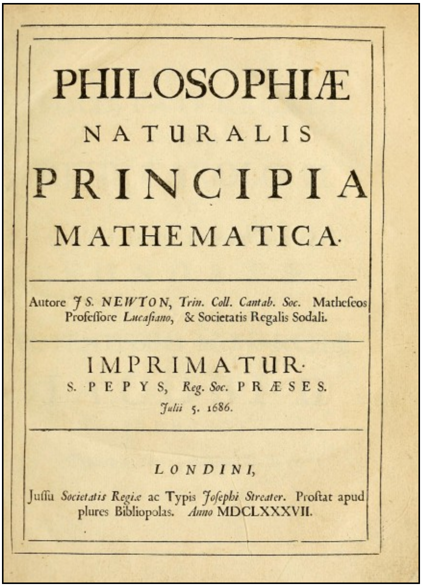


Рис. 54. «Математические начала натуральной философии».
Титульный лист

В 1687 г. Ньютон издал свой знаменитый трактат **«Математические начала натуральной философии»**, ставший итогом более чем двадцатилетних размышлений автора об устройстве мироздания, о возможности строгого обоснования законов природы, законов движения тел математическими средствами. Размышлений, навеянных изучением трудов предшественников и современников. Как некогда Платон, Аристотель, Евклид, Декарт, в этом сочинении Ньютон пытался заложить основы философии естествознания, физики. Однако делал он это языком не философских, а физико-математических понятий. По традиции эпохи он придерживался аксиоматического метода построения теории и геометрических доказательств. А в арсенале математики второй половины XVII века были уже не только методы алгебры и евклидовой геометрии, но и методы «геометрии бесконечно малых», развиваемые Уоллисом, Паскалем, Гюйгенсом, Лейбницем и самим Ньютоном.

«Начала» Ньютона состоят из трех книг, главной из которых автор считал последнюю – «О системе мира», где строится научная картина мира, формулируется закон всемирного тяготения и получено математическое выражение для силы взаимного притяжения тел – «*силы, что движет Мирами*». Рассмотренные здесь задачи движения небесных тел (планет и их спутников) представляли большой интерес и во многом определили бурное развитие небесной механики и астрономии в следующие века.

Первые две книги «Начал», имеющие одинаковое название «О движении тел», являются теоретическим фундаментом третьей. Здесь приведены основы теоретических построений Ньютона. Именно они и имеют для нас наибольшее значение, особенно предварительный раздел («Предисловие автора», «Определения», «Аксиомы или законы движения») первой книги, где приведены основные механические понятия и законы, составившие основу современной классической механики.

На первый взгляд может показаться странным: то, что сейчас в первую очередь ставится в заслугу Ньютону, сам автор не считал самым важным и вынес в предварительный раздел. Но в этом нет ничего удивительного: Ньютон исходил из известных его современникам понятий, законов, естественно, не подозревая о тех далеко идущих последствиях, к которым привели сделанные им уточнения понятий, добавления к законам и их новые формулировки, его собственные взгляды на механику Галилея, Декарта, Уоллиса, Гюйгенса.

Ньютон основательно подошел к построению своей «философии» механики. Однако в «Началах» нет определения одной из основных кинематических характеристик – скорости. Это означает, что сложившееся к тому времени понятие скорости было общепринятым и, с его точки зрения, не нуждалось в определениях. Как уже отмечалось, эти представления о скорости не совпадают с современными. В первом предварительном разделе первой книги даются определения массы, количества движения, инерции, приложенной и центробежной сил.

«*Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее*» [1, с. 110]. С современной точки зрения это определение представляется ущербным, так как масса определяется через плотность, т.е. массу единицы объема. С исторической же точки зрения такое определение массы вполне логично, так как, следуя «корпускулярной философии» Декарта и Бойля, Ньютон считал, что плотность определяется количеством «первоначальных частиц» (атомов). Об этом свидетельствует детальная картина внутреннего строения вещества, описанная им в приложениях к «Оптике» («Вопросы», 1704). Аналогичная точка зрения излагалась и в курсах физики конца XVII – начала XVIII в. В частности, в очень популярном и многократно издававшемся во Франции (с 1671 по 1730) и в Англии (с 1697 по 1718) «Трактате по физике» известного французского профессора, активного популяризатора картезианства Жака Рохо (Jacques Rohault, 1620–1672). Таким образом, по сути, ньютоновская «масса» мало отличается от декартова «количества материи» и лейбницевой «величины тела», использовавшихся учеными до появления «Начал».

«*Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе*» [1, с. 111]. Декарт под количеством движения понимал произведение количества материи на скорость. Определения Ньютона и Декарта формально совпадают. Однако, как и Гюйгенс, Ньютон ясно осознавал векторный характер скорости, а значит, и количества движения, ставшего в его динамике основной мерой движения.

«*Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения*» [1, с. 111]. Ньютон добавляет, что «*эта сила всегда пропорцио-*

нальна массе и если отличается от инерции массы, то только воззрением на нее. Из-за инерции материи ... всякое тело лишь с трудом выводится из состояния покоя или движения. Поэтому "врожденная сила" могла быть весьма вразумительно названа "силой инерции"» [1, с. 111]. Ньютон подчеркивает, что эта сила проявляется как «сопротивление» и как «напор». «*Сопротивление приписывается обыкновенно телам покоящимся, напор – телам движущимся*» [1, с. 111]. То, что Ньютон называет инерцию тел силой, вполне в духе времени. Об этом свидетельствует и лейбницева теория сил. Сам термин «сила» использовался в механике со времен Аристотеля, последовательно принимая различные смысловые оттенки, начиная с простейшего синонима – «величина». Гораздо ближе к современному следующие два определения силы.

«*Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения*» [1, с. 111]. Ньютон подчеркивает, что в отличие от «врожденной силы» «приложенная сила» «*проявляется единственно только в действии и по прекращении действия в теле не остается*». В теле остается только врожденная сила инерции. «*Происхождение приложенной силы может быть различное: от удара, от давления, от центростремительной силы*».

«*Центростремительная сила есть та, с которою тела к некоторой точке, как и к центру, притягиваются, гонятся или как бы то ни было стремятся*» [1, с. 112]. По Ньютону, «*такова сила тяжести, под действием которой тела стремятся к центру Земли; магнитная сила, которою железо притягивается к магниту, и та сила, каковою бы она не была, которою планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и вынуждаются обращаться по кривым линиям. Камень, вращаемый в праще, стремится удалиться от вращающей пращу руки и этим своим стремлением натягивает пращу тем сильнее, чем быстрее вращение, и как только ее пустят, то камень* *улетает. Силу, противоположную сказанному стремлению... я и называю центростремительной*» [1, с. 112].

Ньютон различает три рода величин в центростремительной силе: абсолютную, ускорительную и движущую. «*Абсолютная величина центростремительной силы есть мера большей или меньшей мощности самого источника ее распространения из центра в окружающее его пространство*» [1, с. 112]. «*Ускорительная величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная той скорости, которую она производит в течение данного времени*» [1, с. 112]. «*Движущая величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная количеству движения, которое ею производится в течение данного времени*» [1, с. 112]. «*Эти понятия*, – добавляет Ньютон, – *дóлжно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил*» [1, с. 112].

Отдельное определение центростремительной силы потребовалось в связи с особым характером ее действия. В отличие от «контактных» сил удара, давления, упругости она действует на расстоянии, постоянно меняет свое направление и величину, как следствие изменения скорости. В результате анализа было выяснено, что независимо от происхождения, от природы центростремительной силы ее действие на тело в данной точке может быть измерено либо «ускорительной величиной», т.е. «приложенной» силой, рассчитанной на единицу массы, либо самой «приложенной» силой, названной «действующей величиной». Понятие силы является одним из важнейших в механике Ньютона, целью которой было ***«...по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления»*** [1, с. 112].

Далее Ньютон приводит пояснение понятий времени, пространства, движения – понятий общеизвестных, но в силу того, что они постигаются нашими чувствами, они требуют определений. При этом он делит эти понятия на «абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные».

«*Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.*

Относительное, кажущееся, или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как то: час, день, месяц, год» [1, с. 114].

«*Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.*

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное: так, например, протяженное пространство подземного воздуха или надземного, определяемых по их положению относительно Земли. По виду и величине абсолютное и относительное пространство одинаковы, но численно не всегда остаются одинаковыми» [1, с. 114].

«*Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства. ...время и пространство составляют как бы вместилища самих себя и всего существующего*» [1, с. 114].

«*Место есть часть пространства, занимаемая телом, и по отношению к пространству бывает или абсолютным или относительным*» [1, с. 114].

«*Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве – в смысле порядка положения. По самой своей сущности они суть места, приписывать же первичным местам движения нелепо. Вот эти-то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения*» [1, с. 114].

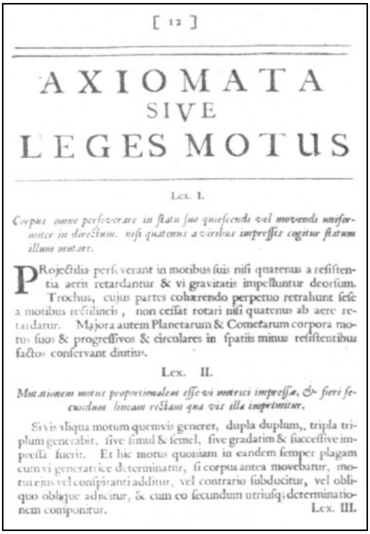
Со времен Ньютона представления о времени – об одной из основных научных и житейских категорий – в классической механике остаются практически неизменными. Определить это понятие через какие-то более ясные и более фундаментальные категории не удается, поэтому, как правило, ограничиваются перечислением установленных свойств: время меняется (течет) непрерывно, всегда и везде одинаково, течет в одном направлении, не зависит от влияния природы, человека или технических средств.

Первая попытка пересмотра сложившихся представлений была связана с появлением теории относительности А. Эйнштейна. В 70-х гг. XX столетия профессор Николай Александрович Козырев (первооткрыватель вулканизма на Луне) в своей теории текущего на планете Земля времени утверждал, что время: 1) обладает направленным ходом и плотностью; 2) поглощается и излучается материальными телами; 3) экранируется, заслоняется (стеклом, металлом) или отражается (зеркалом); 4) не преломляется; 5) не распространяется, как свет, появляется сразу во всей Вселенной; 6) взаимодействуя с веществом звезд, является источником их энергии; 7) не является материальным носителем. Вряд ли эти утверждения можно считать истиной в последней инстанции. Наука о Времени делает следующие шаги, развивающие взгляды Ньютона.

Понятий системы отсчета или инерциальной системы в «Началах» нет, но, по существу, используется координатная система. Роль координат выполняют взаимные расстояния тел или точек. Кроме этого, Ньютон вводит понятие «места», которое, в отличие от «положения» тела (ассоциируется с ориентацией тела в пространстве) и «объемлющей его поверхности», имеет определенную величину.

«*Абсолютное движение есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое; относительное – из относительного в относительное же*» [1, с. 115]. «*По положениям и расстояниям предметов от какого-либо тела, принимаемого за неподвижное, определяем места вообще, затем и о всех движениях судим по отношению к этим местам, рассматривая тела* *лишь как переносящиеся по ним. Таким образом, вместо абсолютных мест и движений пользуются относительными...»* [1, с. 115].

Далее автор говорит о реальности абсолютного места и абсолютного движения и о сложности разграничения абсолютных и относительных понятий. «*Причины происхождения, которыми различаются истинные и кажущиеся движения, суть те силы, которые надо к телам приложить, чтобы произвести эти движения. Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к самому движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено и изменено без приложения сил к этому телу...*» [1, с. 115].


[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

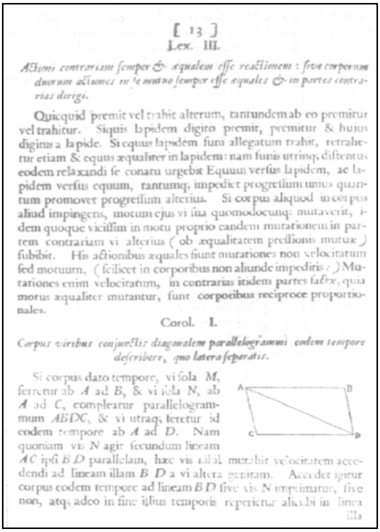
Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.


[13]

Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq; mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.

Si corpus dato tempore, vi ſola M, ferretur ab A ad B, & vi ſola N, ab A ad C, compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab A ad D. Nam quoniam vis N agit ſecundum lineam AC ipſi BD parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD ſive vis N imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

Рис. 55. Законы движения в первом издании «Начал»

Введенные понятия позволили Ньютону сформулировать во втором предварительном разделе «аксиомы или законы движения».

Закон 1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменять это состояние.

Закон 2. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Закон 3. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

После законов идут Следствия:

– правило параллелограмма для сложения сил: «*При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, в течение которого оно описало бы стороны такового при раздельно действующих силах*» [1, с. 116]. По мнению А.Н. Крылова, в современной терминологии – это правило параллелограмма для сложения количеств движения;

– законы сохранения количества движения и скорости центра тяжести (следствие 4): «*Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения; поэтому центр тяжести системы всех действующих друг на друга тел при отсутствии внешних действий и препятствий или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно*» [1, с. 116];

– механический принцип относительности.

Вводная часть «Начал» заканчивается изложением элементов теории удара. Ньютон замечает, что результаты Гюйгенса и Рена верны только для «абсолютно твердых или вполне упругих тел». Результаты же экспериментов самого автора показывают, что скорость тела после удара меньше его скорости до удара. Отношение этих скоростей автор назвал коэффициентом восстановления. Ньютоновская идея введения в теорию удара коэффициента восстановления позднее стала общепринятой, а установленные им значения коэффициента для некоторых соударяющихся тел близки к современным.

В силу научных традиций той эпохи законы не имели математических выражений и формулировались только словесно. Это обстоятельство породило массу вопросов у следующих поколений проницательных читателей. Особенно это касалось второго закона, который многочисленные комментаторы «Начал» упорно интерпретировали формулой $ma = F$, считая, что Ньютон, говоря об изменении движения, имел в виду изменение количества движения, а изменение – это производная по времени от $m\upsilon$, т.е. ma. Если же под изменением автор понимал разность за некоторое время Δt, то тогда под силой понимался импульс силы $F\Delta t$. Но все эти попытки «уточнить Ньютона» бессмысленны. Ньютон пользовался научными категориями своего времени, они были понятны его современникам. И только позднее стало возможным уточнение законов механики до современных представлений.

Ньютон был одним из первооткрывателей законов механики, автором окончательной редакции их текста. Но то, что он не был единственным и самым первым, ни в коей мере не умаляет его заслуг в формировании математической теории движения тел, в ее успешном приложении к решению многих актуальных проблем небесной и земной механики. Законы конкретных движений (движение планет, падение, движение по наклонной плоскости, удар, колебания), открытые его предшественниками и современниками, он обобщил на случай произвольных движений и взаимодействий тел. В этом суть одного из важнейших научных достижений Ньютона.

В отличие от Декарта, стремившегося к построению глобальной научной доктрины устройства Мира, Кеплер, Галилей, Уоллис, Гюйгенс, Ньютон и многие их современники сосредоточили свое внимание на решении конкретных проблем: движения планет и их спутников, движения брошенных тел, соударения и колебаний тел, влияния сопротивления среды .... Идея всеобщего взаимного притяжения тел во второй половине XVII века была если не общепринятой, то хорошо известной. Причина этого взаимодействия и его величина были неизвестны.

На какое-то время ответы на вопросы давала гипотеза эфирных вихрей Декарта. Но даже после дополнительных «реконструкций» последователями Декарта (в том числе Гюйгенсом) она казалась слишком сложной и малоубедительной. Следуя Галилею, Ньютон не обсуждал вопрос о причинах притяжения тел, а ограничился определением величины, т.е. силы этого притяжения. Ведь именно сила, по сложившимся представлениям, и является причиной и источником криволинейного и неравномерного движения.

Вопрос о величине силы притяжения Ньютон решает весьма оригинальным, чисто математическим методом. Движение планеты ассоциируется с круговым движением шарика под действием центростремительной силы (силы притяжения). В соответствии со вторым законом, величина этой силы должна быть пропорциональна изменению количества движения. Если рассматривать движение по окружности как предельное движение по вписанной в окружность ломаной линии (ранее этим пользовался Гюйгенс), то движение по ломаной можно рассматривать как последовательность прямолинейных движений с изменением направления скорости в угловых точках. Проведя через угловую точку ломаной касательную к окружности, можно считать, что шарик, двигавшийся по звену ломаной, в угловой точке ударяется о касательную и продолжает движение в другом направлении (по следующему звену ломаной).

Из законов абсолютно упругого удара и геометрических соображений, после предельного перехода от ломаной к окружности Ньютон получает выражение для центробежной (выталкивающей шарик-планету в наружную сторону орбиты) силы, прекрасно согласующееся с результатом Гюйгенса. Но для удержания шарика на его орбите необходима противоположно направленная и равная по величине центростремительная сила. Далее он показывает, что отношение центростремительных сил планет, в силу третьего закона Кеплера, обратно пропорционально квадратам радиусов орбит. Таким образом получено ядро будущего закона всемирного тяготения.

Говоря современным языком, Ньютон показал, что центростремительное ускорение определяется формулой $a = \frac{\upsilon^2}{R}$. По теории Галилея, тело, падающее с высоты $h = \frac{at^2}{2}$ за одну секунду, должно иметь ускорение $a = 2h$. Проведенные в 1666 г. расчеты по этим формулам показали расхождение результатов. Но после уточнения в 1675 г. Ж. Пикаром величины R (радиуса Земли) Ньютон, узнавший об этом с большим запозданием, получил совпадение расчетов для величины a, подтверждающее верность его вывода о величине силы взаимного притяжения тел.

С более подробным анализом «Начал», биографией и особенностями научного мировоззрения Ньютона можно ознакомиться, обратившись к специализированным монографиям (например, [6, 13]). Однако следует заметить, что «Начала» – это не только один из истоков современной теоретической механики, но и блестящий пример наглядного решения механико-математическими методами огромного количества интересных, практически важных проблем. Задачи, решаемые Ньютоном во всех трех книгах его «Начал», составили фундамент многих самостоятельных разделов современной науки: небесной механики, баллистики, теории колебаний, механики сплошной среды и др. В отличие от механических теорий предшественников механика Ньютона – это первый образец новой механики, построенной на фундаменте собственного понятийного аппарата, единых физических законов, математического аппарата геометрии и исчисления бесконечно малых. Это инструмент для решения многих задач техники и естествознания.

В конце XVII века «Начала» не привлекли к себе особого внимания. Ньютон мало заботился о публикации своих научных результатов, и его имя тогда еще не было столь популярным, как в следующие века. Тираж первого издания книги был невелик. Содержание книги, особенно математические доказательства, было трудным для понимания, так как некоторые идеи Ньютона существенно отличались от ставших к тому времени привычными идей философии Декарта. Но уже в первой трети XVIII века забвение «Начал» сменяется одобрением, переходящим в восторг. Этому способствовали приоритетные споры Ньютона с другими учеными, переиздание (1713, 1726) переработанных «Начал», включение важнейших ньютоновских идей в английский перевод «Трактата по физике» Рохо, издания Гравесанда.

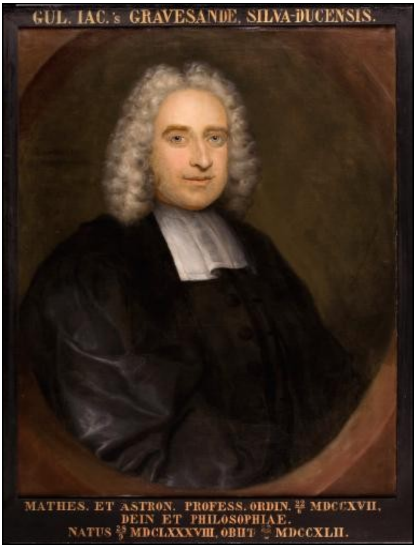


Рис. 56. Вильгельм Якоб Гравесанд

Вильгельм Якоб Гравесанд (1688–1742) – голландский математик, физик, философ, секретарь голландского посольства в Лондоне (1715–1717), профессор Лейденского университета (1717–1742), член Лондонского королевского общества (с 1715). «Началам» он посвятил свои сочинения «Physices elementa mathematica experimentis confirmata, sive introductio ad Philosophiam Newtonianam» (1720) и «Philosphiae Newtonianae institutiones» (Лейден, 1723), «Математические элементы натуральной философии» (1726), в которых подробно изложил содержание «Начал» с минимальным использованием аппарата математики.

Во Франции в поддержку ньютоновской теории выступили П. Мопертюи (1732), Ф.-М. А. Вольтер (1738) и А.К. Клеро. По инициативе Вольтера и маркизы Г.Э. дю Шателе (при участии Клеро) в 1759 г. был осуществлен перевод «Начал» на французский язык. А еще раньше была издана «Механика» (1736) Л. Эйлера, ставшая важным вкладом в развитием механики Ньютона.

Была ли альтернатива ньютоновскому развитию механики на основе понятия количества движения? На вопрос можно ответить утвердительно. Этот, второй, путь формирования механики был наглядно продемонстрирован Лагранжем в его знаменитой «Аналитической механике» через сто лет после выхода «Начал». И этот путь связан с именами Галилея, Декарта, Гюйгенса, Лейбница, И. и Д. Бернулли, Даламбера, Эйлера.

Вывод о сохранении величины, называемой ныне кинетической энергией, для движения точки в центральном поле сил мы видим в «Началах» (Книга первая, предложение XL). Однако ни Ньютон, ни еще ранее Гюйгенс в его теории удара не придавали этому результату особого значения, статуса закона. И только Лейбниц, ссылаясь на авторитет Галилея и Гюйгенса, предложил считать мерой движения тела не декартово количество движения, а величину $m\upsilon^2$, названную им «живой силой». Он же первым сформулировал закон сохранения «живых сил» и дал словесную формулировку теоремы об изменении кинетической энергии. Работы И. и Д. Бернулли укрепили в механике понятие «живой силы» и сделали естественным переход от второго закона к теореме энергии в ее математическом выражении.

Механика Ньютона еще далека от современной классической механики. Но своим творчеством Ньютон подвел итог многовековых поисков всеобщих законов движения и взаимодействия тел, заложив основы дальнейшего развития научного естествознания и техники в русле математического моделирования.

2.4. Идеи динамики Г.В. Лейбница

Бурные политические (буржуазные революции), экономические, научные события XVII века нашли отражение в формировании целого ряда новых философских доктрин, претендовавших на роль теоретической основы нового мировоззрения. Англичане Фрэнсис Бэкон, Томас Гоббс, Джон Локк, Исаак Ньютон, французы Рене Декарт, Пьер Гассенди и Блез Паскаль, нидерландцы Барух Спиноза и Христиан Гюйгенс, немцы Иоганн Кеплер и Готфрид Вильгельм Лейбниц, итальянец Галилео Галилей стали основоположниками естественнонаучных философских течений, захвативших умы просвещенной Европы и получивших дальнейшее развитие в следующих столетиях.

Формирование науки нового времени, естественно, шло в русле популярных философских концепций. Таким образом, теоретическая база новой механики создавалась параллельно с развитием новой математики переменных величин, для утилитарного решения актуальных естественнонаучных и технических проблем и под влиянием философских воззрений ее создателей. Это наглядно подтверждает вклад в механику Лейбница – одного из выдающихся философов конца XVII – начала XVIII века, заложившего основы альтернативного ньютоновскому пути создания теоретической механики.

Лейбница нельзя исключать из списка основоположников теоретической механики еще и потому, что он является одним из родоначальников математики непрерывных величин и теории дифференциальных уравнений, ставших основным аппаратом новой механики. Но его вклад не исчерпывается только этим. Его теории движений и сил, динамическая концепция механики, основанная на понятии «живой силы», начатый им многолетний спор о «живых силах» и борьба с картезианским сохранением количества движения, обсуждение проблем механики с Гюйгенсом, Мальбраншем, Уоллисом, Я. и И. Бернулли, Лопиталем не остались без внимания выдающихся математиков, механиков и астрономов следующего столетия – Клеро, Мопертюи, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа.

Одной из сложностей в изучении научного наследия Лейбница является изменчивость его философской позиции по мере его последовательного проникновения в мир идей Аристотеля, Бэкона, Галилея, Декарта, Гоббса, Гюйгенса. Диапазон этой изменчивости – от принятия концепции до ее полного отвержения, включая попытки примирения, сближения крайностей. Второй особенностью теоретических построений Лейбница является их метафизичность, проистекающая из убежденности в примате мира Идей над миром Природы.

В 1671 г. Лейбниц представил Парижской академии наук эссе «Теория абстрактного движения». Эта была первая часть сугубо философского сочинения «Новая физическая гипотеза», в котором тело представляется как триединство геометрических, механических и физических свойств. Основные идеи этого сочинения состояли в следующем: 1) пространство – бесконечно делимая на реальные части протяженность, в которой существуют и «неделимые» или точки, не имеющие возможности расширяться, но состоящие из частей, между которыми нет расстояний; 2) движение протяженно, непрерывно (Гассенди считал движение дискретной последовательностью «покоев»); 3) покой – это не некоторое его положение в пространстве, а нуль на бесконечности (времени); 4) источником начала и окончания движения является conatus (усилие, напряженность, стремление; понятие конатуса заимствовано у Гоббса), играющий в протяженности движения роль точки пространства, единичного усилия, измеряющегося расстоянием, пройденным за неделимый (понятие заимствовано у Кавальери) отрезок времени; 5) конатус в теле может быть не один, и они могут взаимодействовать; 6) два конатуса могут быть заменены одним; 7) все происходящее имеет причины.

Изучение движения, реальной скорости Лейбниц заменяет изучением тенденции к движению, виртуальной (возможной) скорости. Он формулирует законы соударения тел как правила изменения скорости после удара (игнорируя понятие количества движения), объясняет причину целостности тела взаимодействием конатусов его частей, а давление – «конатусом проникновения» одного тела в другое.

В том же году 25-летний Лейбниц направил Лондонскому Королевскому обществу вторую часть упомянутого сочинения под названием «Теория конкретного движения», где движение тел и их свойства объясняются действием эфира, заполняющего всю Вселенную, пронизывающего все тела природы, имеющего божественное происхождение, порождающего на Земле разнородные элементы (вода, воздух, земля). Солнечный шар испускает свет, принимаемый земным шаром. В соответствии с законами абстрактной теории, оба шара совершают в эфире вращательное движение, обеспечивающее и их целостность, и их взаимную силу сцепления. Гравитация является следствием вращения эфира, и сила притяжения тела, по Лейбницу должна возрастать пропорционально квадрату его расстояния до центра Земли. Автор раскрывает природу тел (жидких, твердых, упругих, мягких, вязких и хрупких), объясняет процесс удара упругих тел по правилам Гюйгенса–Рена, законы отражения и преломления, изохронные колебания маятника, циркуляцию крови и физиологическое действие нервов на мускулы. Таким образом, эфир является и источником тяжести тел, и причиной движения планет, и фактором упругости тел.

Дальнейшие размышления приводят Лейбница к необходимости «*... прибегнуть к силе, являющейся причиной движения и действующей между телами*». «*В природе есть нечто большее чисто геометрического, то есть протяженности и ее изменений. И для лучшего ее понимания необходимо связать несколько высших или метафизических понятий, таких как субстанция, действие и сила; и эти понятия приводят к тому, что все, влачащее жалкое существование, должно действовать взаимно, что все действующее должно испытывать некоторую реакцию и, следовательно, покоящееся тело, приводимое в движение движущимся, изменит его направление и скорость*» [1, с. 125].

Широко используемое Лейбницем понятие «протяженность» постепенно приобретает смысл «величина» тела. И теперь учитываются не столько геометрические размеры, сколько его прочие (индивидуальные) особенности. Внимательный анализ определений протяженности, данных им в разных работах, убеждает в исключительной близости этого понятия ньютоновской массе. Порой, особенно в более поздних работах, он и называл ее массой (*masse*). Но точнее с массой сравнивать лейбницеву «первичную материю» (*materia prima*), наделенную «протяженностью», непроницаемостью и сопротивлением или инерцией (в смысле Кеплера). Все эти свойства считаются однородными и равномерно распределенными в теле. Тем самым Лейбниц вводит характеристики пассивности материи. Пассивность материи, по Лейбницу, необходима, чтобы не допустить всемирного хаоса, неизбежного при отсутствии сопротивления всем причинам движения. (Весьма убедительный аргумент существования свойства инертности тел!).

Понятием, противоположным первичной материи, является «вторичная материя» (*materia secunda*) – материя, наделенная активностью. Понятие «сила», обобщающее первичную и вторичную материю, таким образом, включает «пассивную силу» (массу) и «активную силу», аналогичную душе живых существ и придающую движению реальность. В свою очередь, «активные силы» подразделяются на «простейшие» (*force primitive*), присутствующие в любой материальной субстанции, и «производящие силы» (*force dérivative*), являющиеся результатом взаимодействия тел, «*... что некоторые называют “импетусом”, то есть конатусом или стремлением к определенному движению ...*» [1, с. 126].

Позднее Лейбниц ввел в свою теорию сил еще два понятия – «мертвая сила» и «живая сила». Мертвая сила – это, например, давление, которое или производит движение, или стремится его произвести. Живая сила существует в движении. Но между этими силами есть взаимосвязь: всем телам присуща собственная сила, между движением и покоем нет качественного различия, живая сила возникает из импульсов мертвой силы.

Но что же является мерой живой силы или каково ее математическое выражение? Для Лейбница очевидна невозможность вечного движения, позднее получившая выражение закона сохранения энергии. В соответствии с галилеевым законом, высота h, пройденная падающим телом, пропорциональна квадрату времени движения или квадрату скорости падения тела (так как скорость пропорциональна времени). Это означает, что и для подъема тела на высоту h ему нужно придать импульс, пропорциональный квадрату скорости. Таким образом, мера живой силы должна определяться квадратом скорости тела.

Но Лейбниц не ограничивается только определением живой силы. Он использует это понятие для формулировки общего закона механического движения – принципа сохранения живых сил, впервые изложенного в небольшой (6 страниц) работе «Краткое доказательство удивительной ошибки Декарта и других относительно закона природы, согласно которому, как полагают, Господь всегда сохраняет одно и то же количество движения, но который разрушает механику» (1686) , опубликованной в «Acta eruditorum».

Эта публикация стала отправной точкой в затянувшемся на десятилетия «споре о живой силе» или дискуссии о мерах механического движения. Важность этого события в формировании идеологии новой механики подтверждается составом участников дискуссии: Гюйгенс, Папен, Мальбранш, Арнольд, Германн, И. и Д. Бернулли, Мопертюи, Клеро, Кениг, Вольтер, Эйлер, Даламбер. Суть полемики состояла в определении математического выражения меры движения: использовать современные обозначения, $m\upsilon$ (по Декарту) или $m\upsilon^2$ (по Лейбницу)? Тот или иной ответ на поставленный вопрос не только определял математический облик будущей теории движения тел, круг решаемых ею задач, но и затрагивал фундаментальные философские положения о сущности движения, его причинах, о соотношении физического и метафизического, о познаваемости Природы.

В формулировке Декарта, без определения понятия массы и осознания векторного характера скорости, закон сохранения количества движения был ошибочен. Впервые Лейбниц писал об этом в декабре 1676 г.: «*В физике Декарта имеется большая ошибка; она состоит в том, что его правила движения или законы природы, которые должны быть фундаментом, в большинстве своем ошибочны. Этому есть доказательство. И его великий принцип о том, что количество движения в мире сохраняется, является заблуждением. То, что я говорю, признано наиболее талантливыми людьми Франции и Англии*» [6, с. 474].

В названной работе 1686 г., на смену принципу Декарта, Лейбниц предлагает свой принцип сохранения: «*Разумно говорить, что в природе сохраняется одна и та же сумма движущих сил, что эта сумма не убывает, так как мы никогда не видели, чтобы тело потеряло какую-то силу, которая не трансформировалась бы в другую, и тем более, что эта сумма не возрастает, так как вечное движение нереально и никакая машина, а следовательно и весь мир, не может сохранять свою силу без новых импульсов извне*» [6, с. 474]. Лейбниц принимает идею сохранения в качестве основного принципа механики и ищет истинную величину, определяющую стабильность мира.

Декартово сохранение количества движения связано с идеей единства Бога и «золотым правилом» механики, определяющим условия равновесия рычага (равенство работ сил и, по аналогии, равенство количеств движения до и после удара). До Декарта в «схоластической» механике эквивалентность F и $m\upsilon$ рассматривалась как определение движущей силы. Из этой эквивалентности можно сделать вывод о постоянстве количества движения $m\upsilon$ при постоянстве движущих сил F. То есть постоянная сила движет тело с постоянной скоростью, что противоречит наблюдениям. Возможно, это противоречие и привело к необходимости поиска иной связи между F и $m\upsilon$, – связи, впервые рассмотренной Галилеем, а затем Ньютоном в его втором законе $(F \sim \Delta m\upsilon)$.

Лейбниц апеллирует к галилеевым законам падения тел и гюйгенсовой теореме о сохранении $m\upsilon^2$ до и после удара абсолютно упругих тел. Гюйгенс, естественно, откликнулся на публикацию Лейбница, но его оценка была весьма осторожной. Оспаривая мнение Лейбница о том, что Декарт вывел свой принцип из эквивалентности количества движения движущим силам, Гюйгенс считает, что «*...если допустить эту эквивалентность и таким способом получить его (Декарта) природный закон количества движения, то отсюда не следует, что закон недостаточно доказан или вовсе не доказан. Для утверждения его ошибочности господину Лейбницу необходимы другие доказательства*» [1, с. 128]. И далее считает, что Лейбниц может претендовать только на формулировку своего принципа сохранения движущих сил (без доказательства его справедливости).

Все участники дискуссии о мере движения ссылались на авторитет Декарта, Галилея, Гюйгенса, Лейбница, обсуждали результаты экспериментов (в том числе мысленных) в задачах об ударе и падении тел. И после смерти Лейбница его сторонники (Германн, И. и Д. Бернулли, Бильфингер, Вольф) продолжали спор с картезианцами. Но кроме приверженцев одной меры движения появились ученые, стремившиеся занять какую-то промежуточную позицию. Именно этот дуализм, состоящий в том, что выбор меры движения полностью определяется постановкой задачи, укоренился в механике после издания «Трактата о динамике» (1743) Даламбера и положил конец дискуссии.

Благополучный исход многолетней дискуссии способствовал формированию сторонниками Лейбница новых механических понятий кинетической, потенциальной, полной механической энергии, вошедших в механику только в XIX веке. И. Бернулли, подкрепляя теоретические результаты экспериментами, использовал закон живых сил для решения задач о колебаниях физического маятника, о движении тяжелой точки, об упругом ударе. Д. Бернулли положил этот закон в основу своей знаменитой «Гидродинамики» (1738), а в работе «Замечания о принципе сохранения живых сил, рассматриваемом в общем смысле» (1748), опубликованной в трудах Берлинской академии наук, фактически формулирует закон сохранения механической энергии для системы точек в виде

$$\sum m_k \upsilon_k^2 = -2\sum m_k \int \xi_k dx,$$

где m_k – массы, υ_k – скорости, ξ_k – «ускоряющие силы» точек, сумма правой части – сумма работ сил. При этом утверждается, что живая сила системы точек не изменяется при освобождении точек от связей, именуемых ныне идеальными.

Таким образом, уточнение закона сохранения живой силы стало источником формирования в механике понятия связи и принципа освобождения от связей, положенного позднее в основу механики несвободного движения тел. Утверждение в механике двух выражений меры движения способствовало формированию ее математического аппарата по двум направлениям: с позиций изменения количества движения и с позиций изменения живой силы.

Крайне неоднозначное понятие силы в механике Лейбница, как и в физике Аристотеля, было одним из важнейших. Сила, в переводе с древнегреческого ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$) на латынь – *dynamis*, а *dynamikos* – относящийся к силе или силовой. Поэтому свою механику Лейбниц называл «динамикой». Позднее этим термином стали пользоваться многие ученые (И. Бернулли, Клеро, Монтиньи, Дарси, Куртиврон, Д. Бернулли, Эйлер), а после «Динамики» Даламбера он окончательно укоренился в механике как название теории движения тел под действием сил. Наиболее полно динамические воззрения Лейбница выражены в работах «Динамика сил и законов природы тел» (1691) и «Образец динамики», опубликованной в 1695 г. в «Acta eruditorum».

Одним из важнейших свойств тел природы Лейбниц считает эластичность, объясняемую наличием в них очень «легкой жидкости» («эфира»). И вторым основным постулатом природы, после закона сохранения движущего действия, он называет закон непрерывности, продолжаемости, в соответствии с которым «*все изменения должны происходить непрерывно, но не скачками*» [1, с. 130].

Возвращаясь к понятиям, введенным Лейбницем, следует сказать, что многие из них имели весьма неопределенное содержание и математическое выражение и поэтому не вошли в арсенал классической механики. Однако Лейбниц уверенно пользовался понятием массы, ввел в механику понятие «действия», определение которого, впрочем, недостаточно конкретно. Но если все-таки обратиться к его определениям («... *движущее действие есть то, что получается при умножении формального эффекта на скорость* ...» [1, с. 131], формальный эффект – это произведение массы тела на пройденный путь), то, обозначив «действие» буквой L, можно считать, что $L = m\upsilon s = m\upsilon^2 t$.

Несмотря на некоторую неопределенность понятия действия, оно прочно укоренилось в механике после публикации Вольфа в первом томе (1726) петербургских «Комментариев» и его развития в трудах Мопертюи, Дарси, Эйлера, Лагранжа, Гамильтона, Якоби, Гаусса, где оно рассматривалось не с позиций его стационарности, а как критерий экстремальности движения. Это способствовало появлению нового раздела математики – вариационного исчисления, позволившего сформировать новый взгляд на принципы построения механики и методы решения задач.

Понятие «работы силы», т.е. произведение силы на ее перемещение по линии действия, является одним из старейших в механике, одним из основных в «кинематической статике». Оно использовалось для определения условий равновесия тел и систем тел. Поэтому представляется вполне естественным его использование и в выражении условий, определяющих движения тел. Из законов Галилея $\upsilon = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2$ (в современной трактовке), к которым апеллировал Лейбниц, легко получить равенство

$mh = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg\upsilon^2}{g^2}$, из которого следует выражение $mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2$, устанавливающее связь между работой силы веса (mg) и кинетической энергией $\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)$ двигающейся точки. Именно так Иоганн Бернулли записывал закон сохранения живых сил.

Если в качестве меры механического движения принять кинетическую энергию, а мерой взаимодействия тел считать не силу, а работу силы на некотором перемещении, то и второй закон Ньютона, и теорема об изменении энергии могут быть сформулированы единообразно: изменение меры движения точки равно мере взаимодействия ее с окружающими телами. Современный закон сохранения полной механической энергии, является эффективным методом решения многих задач механики. Его физическая сущность, отличная от ньютоновской связь движения с порождающими его причинами, впервые была сформулирована Лейбницем. Путь формирования механики на основе понятия кинетической энергии («живой силы») был как бы запасным. Для подтверждения своих результатов И. Бернулли показывал, что их можно получить и из второго закона Ньютона. Но после Даламбера, установившего неодинаковость, но равноценность обеих мер движения, Лагранж убедительно показал, что оба пути построения механики имеют право на жизнь.

Как выдающийся математик конца XVII века, Лейбниц не мог оставить без внимания задачи механики, занимавшие умы большинства геометров этого времени. Конкретным задачам статики, кинематики и динамики движения планет, брошенных и падающих тел, центробежным силам и закону всемирного тяготения (его доказательства отличаются от ньютоновых, но результаты совпадают), правилу параллелограмма сложения движений, учету сил трения посвящено значительное количество работ Лейбница, продолжавшего исследования Галилея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли [1].

Открытие Ньютоном и Лейбницем новых принципов натуральной философии и математического анализа стало эпохой в истории механики. Дальнейшее развитие идеологии и методологии теоретической механики шло по пути совершенствования, конкретизации и математизации ее понятийного аппарата, принципов построения и анализа математических моделей движения и равновесия тел. Из разряда философских наук механика окончательно переходит в разряд математических.

2.5. Работы Якоба и Иоганна Бернулли

Значительный вклад в постановку новых и модернизацию уже известных задач, в адаптацию к ним дифференциального и интегрального исчисления внесли известные швейцарские математики и механики братья Якоб и Иоганн Бернулли.

Рис. 57. Якоб Бернулли

Якоб Бернулли (Jakob Bernoulli, 1655–1705) был профессором математики и физики Базельского университета (с 1687), членом Парижской (с 1699) и Берлинской (с 1701) академий наук, одним из основателей математического анализа, вариационного исчисления, аналитической геометрии, комбинаторики, теории вероятностей и теории чисел.

Будучи студентом Базельского университета, Якоб изучал богословие, французский, итальянский, английский, латинский, греческий языки, в 1671 г. получил ученую степень магистра философии. В студенческие годы начал самостоятельное изучение математики. После университета путешествовал по Франции, Италии, Нидерландам, Англии, где познакомился со многими учеными, в частности с Гюйгенсом, Бойлем, Гуком. Вернувшись в Базель, начал читать в университете лекции по физике и математике.

Познакомившись с первой публикацией Лейбница по анализу (1684), начал самостоятельное освоение нового исчисления и приобщил к этому младшего брата, Иоганна. Позднее между Лейбницем и братьями завязалась многолетняя и очень плодотворная переписка. В 1690 г. Якоб решил задачу Лейбница о форме кривой, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки. Лейбниц, исходя из своего принципа сохранения живых сил $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2g(y - y_0)$, и Гюйгенс, используя геометрическое решение, установили, что это полукубическая парабола, но Якоб получил этот результат средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение. Так впервые появился термин «интеграл».

Принцип, заложенный Гюйгенсом в решение задачи о центре колебаний, некоторым ученым казался сомнительным и поэтому Я. Бернулли предложил свое решение, основанное на идее компенсации движущих сил силами инерции, получившей дальнейшее развитие у Германна, Эйлера, Даламбера и благодаря Лагранжу вошедшей в теоретическую механику под названием «принцип Даламбера». Современный вид принцип Даламбера принял после выхода в 1856 г. «Трактата рациональной механики» **Шарль-Эжена Делоне** (1816–1872).

Решение Якобом Бернулли задачи о центре качаний (колебаний), опубликованное в «Acta eruditorum»(1691) и «Мемуарах» Парижской академии наук (1703), сводится к следующему.

Пусть в точках a_1 и a_2 (рис. 58) жесткого невесомого стержня Aa_1, совершающего колебания около неподвижной точки A, укреплены две точечные массы m_1 и m_2. Необходимо найти длину изохронного математического маятника или расстояние $l_0 = Aa_0$ до точки a_0, в которой сосредоточена масса $m_0 = m_1 + m_2$, если $Aa_1 = l_1$, $Aa_2 = l_2$.

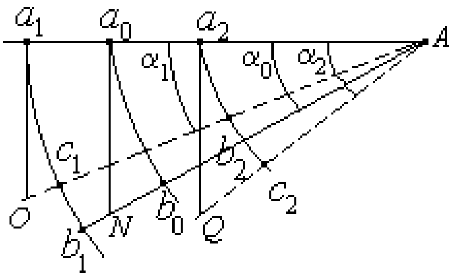


Рис. 58

Если бы стержень свободно падал под действием тяжести грузов m_1 и m_2, то за Δt точки a_1, a_2, a_0 переместились бы в положения O, N, Q, причем $Oa_1 = Na_0 = Qa_2$. Но стержень поворачивается вокруг точки A и через Δt займет положение AN, точка a_1 пройдет путь $a_1b_1 > a_1O$, точка a_0 – путь $a_0b_0 \approx a_0N$, точка a_2 – путь $a_2b_2 < a_2Q$. Пока точка a_1 не достигла положения c_1, все точки «падали» свободно. Но в положении c_1, как говорит Я. Бернулли, «*действие веса точки* a_1 *истощилось*» [1, с. 150] и она продолжает свое движение к точке b_1 за счет веса точки a_2.

За время прохождения точкой a_1 дуги c_1b_1 точка a_2 пройдет меньшую дугу c_2b_2, т.е. точка a_1 действует на a_2 замедляющим образом. Таким образом, точка a_1 своей инерцией (силой инерции) замедляет вращение стержня, а точка a_2 его ускоряет, точка a_0 не вносит никакого вклада, оставаясь в данный момент как бы неподвижной. В таком случае стержень Aa_1 можно отождествлять с рычагом второго рода с точкой опоры в A, находящимся в равновесии под действием сил инерции $m_1c_1b_1$ и $m_2c_2b_2$ грузов m_1 и m_2, направленных в противоположные стороны. Уравнение равновесия рычага

$$m_1l_1 \cdot c_1b_1 = m_2l_2 \cdot c_2b_2 ,$$

из-за малости дуг $c_1b_1 = l_1(\alpha_0 - \alpha_1)$, $c_2b_2 = l_2(\alpha_2 - \alpha_0)$ и углов $\alpha_1 \sim tg\alpha_1 = \dfrac{Oa_1}{l_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{Qa_2}{l_2}$; $\alpha_0 = \dfrac{Na_0}{l_0}$, после преобразований приводит к искомому выражению

$$l_0 = \frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{m_1l_1 + m_2l_2} .$$

Для случая нескольких масс решение будет аналогичным. Кроме идеи сведения изучения движения тела к изучению его равновесия с учетом сил инерции, Я. Бернулли высказал мысль о возможном определении реакции связи. Истинное движение $a_1c_1(a_2b_2)$ он разложил на свободное $a_1O(a_2Q)$ и движение $Oc_1(Qb_2)$ вдоль стержня. Каждому движению он ставит в соответствие силу. Вертикальному движению $a_1O(a_2Q)$, естественно, соответствует сила тяжести, а сила, соответствующая движению вдоль стержня, уравновешивается опорой A. По современным представлениям – реакцией связи.

Ученик Я. Бернулли – академик Петербургской академии наук **Якоб Герман** (Jakob Hermann, 1678–1733) дал иную интерпретацию идеи использования сил инерции. В наиболее известном сочинении «Форономия или две книги о силах и движениях твердых и жидких тел», решая задачу о нахождении центра колебаний физического маятника, он разлагает силу тяжести каждой материальной точки на две составляющие: одна направлена по линии подвеса, другая – перпендикулярно первой. Первая из сил уравновешивается реакцией связи (опора A), вторая – силой инерции, равной массе точки, умноженной на касательное ускорение (по закону ускоряющих сил Ньютона). Это рассуждение относится к каждой точке маятника, т.е. к маятнику в целом, и приводит к следующему принципу: **в каждый момент времени движущие силы (вес), реакции связи и силы инерции уравновешиваются.**

Рис. 59. Якоб Герман

Герман применил этот принцип для решения своей задачи, но не придал ему всеобщего статуса. Это сделал позднее другой академик Петербургской академии наук, ученик И. Бернулли – Леонард Эйлер, использовавший сформулированный принцип (в своей интерпретации) для решения многих задач, в том числе и не связанных с колебаниями. Интерпретация Эйлера была такова.

Пусть тело движется по плоскости под действием силы F, приложенной к центру масс тела. Разложим F на касательную F_τ и нормальную F_n составляющие. Сила F_n уравновесится реакцией плоскости, сила F_τ вызовет ускоренное движение или силу инерции ma. Если силу инерции направить противоположно ускорению a, то можно считать, что она «уравновешивает» F_τ. Иначе говоря, в каждый момент времени F, ma и реакции поверхности уравновешиваются.

Исключительно важен вклад Я. Бернулли в основы механики сплошных сред. Им сформулирована так называемая гипотеза плоских сечений, используемая в теории балок.

Согласно этой гипотезе, поперечные сечения балки, которые до деформации были ортогональны упругой линии, после деформации остаются ортогональными деформированной упругой линии. Во второй половине XX века было теоретически доказано, что для тонких стержней эта гипотеза выполняется с очень высокой степенью точности.

В 1673 г. французский математик и механик, последователь Декарта и критик ньютоновской теории света **Гастон Парди** (Gaston–Ignace Pardis, 1636–1673) сформулировал принцип затвердевания применительно к гибким нитям (подвесным мостам, цепным линиям и т.д.): форма любой выделенной части нити не изменится, если отброшенную часть нити заменить подходящими силами, приложенными к концам выделенной части нити и направленными вдоль касательных к нити в концевых точках. Именно в такой форме принцип был использован Якобом Бернулли в его исследованиях по гибким балкам и нитям. В 1691 г. Я. Бернулли вывел дифференциальные уравнения равновесия гибких нитей при действии произвольной распределенной нагрузки, уравнения изгиба балки (консольной, закрепленной по концам).

Как математик, Якоб Бернулли внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Он решил проблему Лейбница об изохронной кривой, исследовал логарифмическую спираль, ввел полярные координаты. В 1685 г. сформулировал, а в 1687–1689 гг. доказал закон больших чисел (названный так позднее Пуассоном). Его главный труд «Искусство предположений», посвященный теории вероятностей, был опубликован лишь в 1713 г. Умер Якоб Бернулли в Базеле 16 августа 1705 г.

Своим интересом к математическим проблемам Якоб увлек и своего младшего брата **Иоганна Бернулли** (Johann Bernoulli, 1667–1748). В 1683 г. Иоганн поступил в Базельский университет, где последовательно защитил бакалаврскую и магистерскую диссертации. С 1685 г., по совету брата, начал самостоятельно изучать математику, механику (труды древнегреческих ученых, «Геометрию» Декарта, публикации Лейбница) и медицину. В 1690 г. он защитил диссертацию на степень лиценциата медицины и отправился в путешествие в Женеву, Париж, где встретился с известными учеными, в частности с маркизом де Лапиталем, которого познакомил с первыми работами по дифференциальному и интегральному исчислению.

Рис. 60. Иоганн Бернулли I

В 1692 г. Иоганн вернулся в Базель, где продолжил занятия математикой и медициной. В 1694 г. защитил диссертацию на степень доктора медицины, женился и вскоре переехал в г. Гронинген (Нидерланды), где 10 лет работал профессором математики и экспериментальной физики Гроненгенского университета. После смерти Якоба (1705) Иоганн вернулся в Базель и следующие 43 года был профессором математики (8 раз избирался деканом и дважды ректором) Базельского университета.

У Иоганна было 4 дочери и пять сыновей, трое из которых (Николай, Даниил, Иоганн) стали известными математиками и механиками. Любовь к математическим наукам Иоганн Бернулли привил и своему знаменитому ученику Леонарду Эйлеру.

Лейбниц и братья Бернулли были инициаторами решения нескольких задач (о цепной линии, о брахистрохроне, о геодезической, …), привлекших внимание многих европейских ученых (Гюйгенса, Ньютона, Лапиталя, …), ставших своеобразным полигоном для использования нового математического анализа и создания новых разделов математики (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, аналитическая и дифференциальная геометрия, …).

Одной из самых известных задач, сформулированных и решенных И. Бернулли, была задача о брахистохроне (1696), т.е. о линии, по которой тело проходит от одной точки до другой за кратчайшее время. В своем решении Бернулли исходил из принципа Ферма: «*... луч света, проходящий из более редкой среды в более плотную, отклоняется к перпендикуляру таким образом, что за данный промежуток времени луч (который по предположению проходит последовательно от точки, испускающей свет, до освещаемой точки) совершает кратчайший путь*» [1, с. 169].

До Эйлера под синусом угла понималась длина перпендикуляра, опущенного в единичном круге из конца подвижного радиуса на неподвижный. Ферма показал, что синус угла падения относится к синусу угла преломления как разряженности сред, или в обратном отношении их плотностей, или в отношении скоростей луча (точки) в средах. Этот результат был подтвержден Лейбницем (Acta eruditorum, 1682) и Гюйгенсом («Трактат о свете»). Считая, что среда имеет переменную плотность, Бернулли разбивает ее на бесконечно большое количество горизонтальных слоев с постоянной плотностью. При этом луч (шарик), перемещаясь от слоя к слою, будет описывать некоторую ломаную, каждое звено которой является траекторией быстрейшего перемещения точки внутри отдельного слоя (от точки к точке). Эта линия будет траекторией точки, проходящей через среду, с разряженностью пропорциональной скорости вертикального падения точки (с соответствующим ускорением).

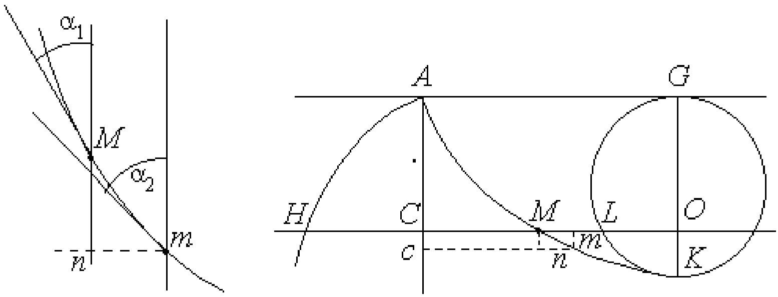


Рис. 61

Пусть точка движется из положения A (рис. 61) по искомой кривой AM, со скоростями, задаваемыми кривой AH, $AC = x$, $CM = y$, $Cc = dx$, $mn = dy$, $Mm = dz$, $CH = t$ (скорость (пропорциональная времени) в положении M), $a = const$ (скорость за время перехода из M в m, т.е. по dz, считается постоянной, равной a), $\sin\alpha_1 \approx dy$, $\sin\alpha_2 \approx dz$. На основании принципа Ферма $\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a}$. Но $dz = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, поэтому полученное равенство приводит к уравнению

$$a^2(dy)^2 = t^2(dx)^2 + t^2(dy)^2,$$

из которого следует дифференциальное уравнение для траектории AM $dy = \frac{tdx}{\sqrt{a^2 - t^2}}$.

По закону Галилея, кривая AH является параболой $t^2 = ax$. В таком случае полученное дифференциальное уравнение принимает вид $dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$. Решение этого уравнения и является искомой кривой AM – брахистохроной.

В таком случае полученное дифференциальное уравнение принимает вид

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx .$$

Решение этого интеграла и является искомой кривой AM – брахистохроной.

Но Бернулли обращает внимание и на то, что брахистохрона является той же самой кривой, которая была получена Гюйгенсом при исследовании колебаний маятника. Это циклоида. Действительно, если считать, что круг GLK диаметром a катится без проскальзывания по линии AG, то можно показать, что точка K его окружности будет описывать кривую (циклоиду) $y = \int\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx + C$, где $x = AC$, $y = CM$. Это совпадение, отмечает автор, «*вытекает только из основного положения Галилея; уже из этого можно было бы заключить, что это положение находится в согласии с природой. Природа всегда действует простейшим образом, – так и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различных услуги*» [1, с. 171].

Отметим, что решение задачи о брахистохроне было чисто кинематическим, основанным на законах Ферма и Галилея, и исходило из идеи нового математического анализа. Оно было традиционным, но сама постановка задачи – определение движения, отвечающего некоторому экстремальному критерию, – оказалась чрезвычайно перспективной. Перспективной и с точки зрения формирования нового раздела математики – вариационного исчисления, как метода постановки и решения экстремальных задач, так и с точки зрения открытия новых принципов движения тел природы. Мысль о том, что «...*природа всегда действует простейшим образом*», стала отправной в поисках критериев движения и равновесия тел (минимум времени, пути, действия, высоты центра тяжести, потенциальной энергии,...), играющих роль законов природы. И аппарат вариационного исчисления, а позднее и теории оптимального управления, стал одним из основных методов аналитической механики.

Важнейшую роль в формировании идеологии и методологии механики сыграли многочисленные работы Иоганна Бернулли, принесшие ему мировую известность. Эти работы начинались как развитие идей математического анализа и динамики Лейбница и вылились в обширный цикл задач, сформулированных Галилеем, Гюйгенсом, Лейбницем, Ньютоном, им самим, как правило, решаемых методами дифференциального и интегрального исчисления (термин И. Бернулли) на основе принципов и законов механики XVII века.

Для истории теоретической механики наиболее интересно сочинение «Рассуждение о законах передачи движения», представленное в 1724 г. на конкурс в Парижскую академию наук. По содержанию этой работы можно судить о состоянии механики в первой трети XVIII века. Вопрос, предложенный для конкурсного решения, состоял в следующем: «*Каковы те законы, согласно которым совершенно твердое движущееся тело приводит в движение другое такое же, находящееся в покое или в движении, тело, которое оно встречает в пустоте или же в среде?*» [6, с. 47]. По-видимому, подобная постановка проблемы свидетельствовала о некотором недоверии принципам механики Декарта, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница и должна была стать стимулом к поиску новых принципов и более убедительных доказательств.

Разъяснение своей позиции («*Философ и геометр, обязанные соблюдать в своих доказательствах ясность и очевидность, должны заботливо избегать какой бы то ни было двусмысленности в выражениях*» [1, с. 156–157]) автор начинает с традиционного определения понятия «твердость»: «*Обычно тело считают твердым, если его части, оставаясь в покое одна относительно другой, таковы, что их связи могут быть разрушены лишь какой-либо внешней силой, и считают, что эта твердость тем более совершенна, чем большую силу необходимо применить, чтобы отделить части этого тела друг от друга. В соответствии с этим понятием, тело будет совершенно твердым, в смысле абсолютного совершенства, когда его части не смогут быть разделены никаким конечным усилием, каким бы большим мы это усилие ни предположили*» [1, с. 157].

Но И. Бернулли не может принять такое определение, считая его нереальным. Он называет его химерой, противоречащей основному закону природы – «*закону непрерывности, в силу которого все, что выполняется, выполняется через бесконечно малые изменения. Здравый смысл, кажется, диктует то, что никакое изменение не может осуществляться скачками: Natura non operatur per saltum, ничто не может перейти от одной крайности к другой, не переходя через все промежуточные ступени*» [1, с. 157]. Мысль о том, что «*Природа ничего не делает скачком*» была одним из основных положений философии Лейбница.

Реальные тела не могут отвечать требованиям «совершенной твердости», они разрушаемы, деформируемы. Но их разрушение не является мгновенным, скачкообразным, оно является непрерывной последовательностью стадий, протекающих некоторое (пусть малое!) время. Поэтому все твердые тела по своим физическим свойствам ассоциируются с телами деформируемыми (мяч, наполненный воздухом; пружина).

В итоге автор приходит к следующему определению: «*...тело будет твердым..., если его чувственные части с тру-*

дом меняют свое положение и если части этого тела, сдвинутые вследствие удара другого тела, в незаметный промежуток времени очень быстрой и упругой пружинистостью приводятся в свое первоначальное положение. Эта упругость совершенна, если все сдвинутые части восстанавливают свое первоначальное состояние; она несовершенна, если некоторые из них в него не возвращаются. Совершенную упругость можно назвать тугостью» [1, с. 157]. Таким образом, понятию «совершенная твердость» соответствует «бесконечная тугость», по Бернулли («*... тело будет бесконечно тугое, если нужно бесконечное давление для конечного сжатия этого тела или если нужно конечное давление для бесконечно малого сжатия его*») [1, с. 157].

В основу теории передачи движения И. Бернулли полагает законы инерции и равенства действия – противодействия абсолютно упругих тел. Обсуждая физическую сущность соударения тел, он предлагает модель трубки, закрытой с одного конца, внутри которой перемещается поршень. Перемещение поршня под действием внешней силы (удара) приводит к увеличению внутреннего давления воздуха, гасящего удар по поршню и далее возвращающего поршень в начальное положение. Это своеобразный аналог пружины, упругие свойства которой определяются ее геометрическими размерами (длиной). И сила пружины по своему действию аналогична силе веса.

Опыты показали, что упругость воздуха пропорциональна его плотности. Для трубки постоянного диаметра это означает, что сила упругости воздуха обратно пропорциональна длине $eA = x$ (рис. 62). Пользуясь законом $d\upsilon = Fdt$, где $dt = \frac{dx}{\upsilon}$, Бернулли получает $d\upsilon = \frac{1}{x}\frac{dx}{\upsilon}$ или $\upsilon d\upsilon = \frac{dx}{x}$ и далее интегрирует это дифференциальное уравнение с учетом начальных условий. Обратим внимание на то, что полученное выражение устанавливает пропорциональность живой силы активной силе и является, говоря современным языком, аналогом теоремы об изменении кинетической энергии.

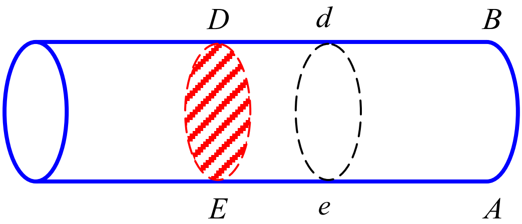


Рис. 62

Поведение поршня в трубке фактически является моделью движения снаряда в стволе пушки. Это обстоятельство позволяет Бернулли дать несколько полезных рекомендаций по поводу свойств пороха и оптимальной длины ствола для получения наибольшей скорости снаряда в момент его вылета.

В третьей главе работы вводятся основные понятия и принцип равновесия, впервые сформулированный автором в письме Вариньону (26 января 1717) и получивший позднее высокую похвалу Лагранжа.

«***Определение I. Виртуальной скоростью*** *я называю ту скорость, которую приобретают две или несколько сил, находящихся в равновесии, когда им сообщают небольшое движение. Или, если эти силы уже находятся в движении, то виртуальная скорость есть элемент скорости, на который увеличивается или уменьшается скорость каждого тела, за бесконечно малое время, если считать направление этого элемента совпадающим с направлением скорости*» [1, с. 158].

Понятие виртуальной скорости является одним из основных в современной аналитической механике. Оно формировалось на протяжении всей истории механики, но впервые получило четкое определение в работах Бернулли. В уже упомянутом письме Вариньону он пишет: «*Представьте себе несколько различных сил, которые действуют по различным* *направлениям, чтобы держать в равновесии точку, линию, поверхность или тело; представьте также, что всей системе этих сил сообщают малое движение или параллельно самой себе по какому-нибудь направлению, или же вокруг какой-нибудь неподвижной точки. Вам будет легко понять, что при этом движении каждая из сил продвинется или отступит по своему направлению, за исключением тех, которые направлены перпендикулярно к направлению малого движения. В этом последнем случае эти одна или несколько сил не продвинутся вперед и не отступят назад, так как эти продвижения или отступления, называемые мною виртуальными скоростями, суть не что иное, как то, на что увеличивается или уменьшается линия направления каждой силы при этом малом движении; эти увеличения или уменьшения можно определить, если из конца линии направления какой-либо силы опустить перпендикуляр на линию направления, взятую в соседнем ее положении после малого движения, на которой он (перпендикуляр) отсечет маленькую часть, которая и будет мерой виртуальной скорости этой силы*» [6, с. 262–263]. Эта конкретизация понятия виртуальной скорости ясно показывает и представление Бернулли о силе как о направленном отрезке («линия направления»), произведение которого на виртуальную скорость характеризует состояние тела. Эта характеристика названа им «энергией».

Дав определения живой силы («*...та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле*») и мертвой силы («*...та, которую получает тело без движения, если оно побуждается и принуждается к движению, или же, которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении*»), автор формулирует основной принцип: «*Два фактора находятся в равновесии, то есть имеют равные моменты, когда их абсолютные силы находятся в обратном отношении к своим виртуальным скоростям, – безразлично, находятся ли действующие одна на другую силы в движении или в покое*» [6, с. 72]. По сути этот принцип – прообраз общего уравнения динамики, сформулированного Лагранжем через 60 лет.

Отметим, что требование равномерности движения в определении живой силы не является обременительным, так как речь идет о бесконечно малом движении, фактически о мгновенной скорости. Бернулли утверждает, что «*это – обычный принцип статики и механики*», поэтому он не нуждается в доказательствах. Однако следует иметь в виду, что этот старейший принцип ранее применялся для изучения только равновесия тел. Но, возможно, именно этот принцип навел Декарта на мысль о законе сохранения количества движения, подтверждающем всеобщность принципа. Для Бернулли же закон Декарта является следствием общего принципа.

Исходя из галилеевых законов падения тел Лейбниц установил, что живая сила тела равна произведению его массы на квадрат скорости. Бернулли приходит к такому же выводу по другим соображениям. Если рассмотреть взаимодействие двух тел A и B, соединенных пружиной (это его модель взаимодействия), то центр тяжести C тел A и B всегда будет покоиться. Это означает, что «живая сила тела B (A) является полным результатом действия части CB (CA) пружины». Результат же действия пружины пропорционален ее удлинению (длине). Если обозначить $f(F)$ – живую силу тела A (B), $a(b)$ – скорость тела A (B), то

$$\frac{f}{F}=\frac{CA}{CB};\ \frac{CA}{CB}=\frac{a}{b}\,.$$

Из закона сохранения количества движения $aA=bB$ (массу тела A (B) Бернулли, как это было общепринято, ассоциирует с самим телом). В таком случае

$$\frac{f}{F}=\frac{a}{b}\cdot\frac{aA}{bB}=\frac{Aa^2}{Bb^2}\,.$$

После введения меры живой силы как произведения массы на квадрат скорости подробно обсуждаются природа и свойства живых сил, способы их измерения, приводится аналог теоремы об изменении кинетической энергии, который используется как метод решения задач, но не объявляется в качестве возможного принципа механики.

Законы соударения тел (определения скоростей после удара) Бернулли получает, основываясь на идее относительности движения в стиле Гюйгенса. Для этого он добавляет достаточно очевидную аксиому («предложение II») о том, что относительные движения тел в результате удара не зависят от движения плоскости, в которой происходит удар (движение). При этом вводится понятие «количество направления», позднее вошедшее в механику как «количество движения центра масс». Полученные результаты, по его мнению, обобщают результаты Гюйгенса в теории удара.

Современное понятие кинетической энергии тела по своей математической форме мало чем отличается от понятия живой силы. Поэтому история формирования понятия живой силы, трансформация его физического содержания не просто любопытна, а является способом освоения понятия кинетической энергии, его роли в современном понимании природы и описании движения тел. Бернулли указывает, что мертвая сила оказывает давление, она производит движение или вызывает «сопротивление препятствия», называемое ныне реакцией связи. Эта реакция связи всегда равна и противоположна действующей силе. Примерами мертвой силы являются силы тяжести, упругости пружины.

Природа живой силы совершенно иная. Эта сила возникает и исчезает не мгновенно, а за некоторое время; она непрерывно производится в теле и может в нем сохраняться после прекращения действия вызвавшей ее причины; «*она эквивалентна той части причины, которая израсходовалась производя ее, ибо всякая действующая причина должна быть равна своему действию, полностью выполненному. Тело, получающее эту силу, если оно не задерживается никаким препятствием, не оказывает никакого противодействия этой силе за исключением того, ко-*

торое зависит от инерции, всегда пропорциональной массе; ...по мере того как тело воспринимает новые доли силы, причина их производящая должна и ньше были втянуты в длительный спор с ним, так как не были полностью разубеждены его рассуждениями» [1, с. 161].

Обращаясь к вопросу о математическом выражении живой силы, И. Бернулли, используя второй закон Ньютона, получает выражения

$$\boxed{\upsilon d\upsilon = pdx}, \qquad \boxed{\frac{1}{2}\upsilon^2 = \int pdx},$$

где p – сила действия пружины, x – ее деформации, υ – скорость поршня. Сравнение и измерение живых сил Бернулли сводит к сравнению и измерению упругих сил соответствующих пружин – сил, пропорциональных удлинению пружин.

Далее он приводит теоретические следствия и экспериментальные доказательства полученных результатов, рассматривает случаи абсолютно неупругого удара шара и поверхности, абсолютно упругого косого удара двух шаров, удары шаров о пружины.

Возвращаясь к законам прямого удара абсолютно упругих тел, Бернулли демонстрирует, как из закона сохранения количества движения до и после удара получить соответствующий закон сохранения живых сил, впервые установленный, но не осознанный Гюйгенсом. Он предлагает считать эти законы единым законом, имеющим разные математические выражения. По-видимому, именно так отнесся к ним Гюйгенс, не придав своему равенству статуса нового закона сохранения – сохранения живой силы как основной меры движения. Для Бернулли законы сохранения, как математический, теоретический аналог философского закона равенства действующих причин и их результатов, являются залогом стабильности природы, ее порядка. Эта мысль чрезвычайно важна для статуса законов сохранения (как основополагающих принципов теории и методов решения задач) в последовательном развитии физики и теоретической механики.

Задачу о движении тела в среде Бернулли сводит к задаче об ударе одним телом нескольких (системы) тел, представляя среду как множество шариков-молекул (отождествляет силу сопротивления среды с суммарной силой последовательных ударов тела о шарики-молекулы). Решение приводит автора к следующим результатам: предлагаемая теория позволяет определить «*абсолютные действия сопротивления среды*»; среда «*оказывает движущимся в ней телам сопротивление, пропорциональное квадратам их скоростей*»; «*можно найти средство точно определить, сколько в действительности тело... потеряет в своей скорости после того, как им будет пройдено данное расстояние*»; «*исследование этого нового вопроса столь же любопытно, сколь и полезно на практике. Оно может привести к законам различных явлений, и тем достойнее было бы в него углубиться, что никто еще этим не занимался*»; «*величина потери скорости зависит и от формы движущегося тела*» и от отношения плотности тела к плотности среды. Сделанные выводы используются для получения расчетных данных движения в воздухе свинцовой пули (коноида), куба, прямого конуса. Выводится закон движения тела по траектории для случая квадратичного закона сопротивления, определяются кривые остаточных скоростей и времен. Задача обобщается для случая сопротивления среды, пропорционального произвольной степени скорости.

Последняя глава книги называется «Новый способ определения центра качания сложного маятника при помощи теории живых сил ...». Задача об определении центра качания физического маятника, сформулированная в первой половине XVII столетия и привлекшая внимание всех видных механиков, наряду с задачами о падении тяжелых тел и ударе стала своеобразным полигоном для формулировки новых принципов механики и проверки эффективности новых методов решения задач. Поэтому обращение И. Бернулли к этой задаче было вполне естественным. Используя принцип сохранения живых сил, И. Бернулли повторяет результат, полученный ранее его братом.

Продолжением «Рассуждения о законах передачи движения» стала работа И. Бернулли «Об истинном значении живых сил и их применении в динамике», где уточняется понятие живой силы: «*Живая сила состоит не в действительной работе, а в способности к действию: она существует и тогда, когда не действует и когда не имеет объекта, на который она могла бы действовать. Так, например, натянутая пружина или же, скажем, тело с установившимся движением имеют в себе способность к действию, хотя бы вне их и не было ничего такого, на чем они могли бы проявить эту способность...*» [1, с. 168]. Он считает, что «*живую силу лучше было бы называть «способностью к действию», вкладывая в нее энергетический, потенциальный смысл. Из живой силы «ничего не может пропасть без того, чтобы мы снова не нашли эту потерю в произведенном действии; ...живая сила всегда сохраняется..., находившаяся до действия в одном или нескольких телах..., после действия обязательно встретится нам в другом теле или в других нескольких телах, если только она не останется неизменной в прежних телах. Это и есть то, что мы называем сохранением живых сил*» [1, с. 168].

Дальнейшее обращение И. Бернулли к идее сохранения живых сил показывает, что сохранение полной механической энергии тел было осознано им не только на физическом уровне, но и получило свое математическое воплощение:

$$PdS = VdV,$$

где P – «ускорительная сила», dS – элемент пройденного пути, V – скорость. Записанное уравнение автор использует для решения нескольких задач и называет очень распространенным принципом динамики, «*в правильности которого никто не сомневается*». Этот принцип далее используется для доказательства уже упоминавшегося принципа Торричелли–Роберваля–Гюйгенса о высоте центра тяжести системы тел: «*В настоящее время я полагаю, что истинность этой аксиомы Гюйгенса до-*

казана и подкреплена теорией живых сил, так что на будущее время она законно должна занять место среди тех предложений динамики, которые считаются наиболее достоверными» [1, с. 168].

К задаче о брахистохроне И. Бернулли возвращался многократно. Искал новые решения, ставил вопрос о единственности решения. Так, в Мемуарах Парижской академии наук за 1706 г. вышла работа «Решение задачи... об изопериметрических», посвященная решению задачи (1697) Я. Бернулли, которая стала примером классической постановки вариационной задачи.

В августе 1697 г. в «Journal des Sçavans» И. Бернулли опубликовал постановку еще одной экстремальной задачи, обсуждавшейся им в переписке с Лейбницем, – о геодезических линиях: найти кратчайшую траекторию между точками на выпуклой поверхности. Задача оказалась непростой. Бернулли опубликовал свое решение только в 1742 г., хотя основная идея метода была высказана в письме Лейбницу в 1715 г. Первым же решение этой задачи опубликовал Эйлер («Комментарии Петербургской академии наук», 1732).

В процессе решения этой задачи И. Бернулли ввел понятия пространственных координат и уравнения поверхности: «*Под данной кривой поверхностью я разумею такую, отдельные точки которой (подобно точкам данной кривой линии) определяются тремя ординатами x, y, z, отношение между которыми выражается данным уравнением; эти же три координаты суть не что иное, как три перпендикулярных отрезка, проведенных из какой-либо точки поверхности к трем плоскостям, данным по положению и взаимно пересекающимся под прямыми углами*» [1, с. 172].

За прожитые 80 лет И. Бернулли внес значительный вклад в развитие новой механики и ее практических приложений (принцип сохранения живых сил, теория удара, внутренняя и внешняя баллистика, гидравлика, теория корабля, ввел обозначение g для ускорения свободного падения). Особо следует отметить вклад

И. Бернулли в формулировку принципа виртуальных скоростей и в формирование современного понятия кинетической энергии – одной из основных мер движения в теоретической механике. Однако трудно дать объективную оценку заслуг И. Бернулли в механике, не обращаясь к его математическому творчеству. Специфика теоретической механики состоит в том, что математические приемы решения задач, математический аппарат механики не есть нечто внешнее для механики, а являются ее составной частью. Поэтому многие работы Бернулли-математика по своей сути имеют механическую направленность.

Это были работы, закладывавшие основы дифференциального и интегрального исчисления (ему принадлежит первое изложение исчисления), теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, аналитической геометрии (в 1715 г. дал определение пространственных координат). Он развил теорию показательных функций, вывел правило раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (носящее имя Лопиталя), разработал методы интегрирования рациональных дробей, вычисления площадей плоских фигур, спрямления некоторых кривых, открыл ряд, родственный ряду Тейлора, дал определение функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных величин.

Его работы вызывали живой отклик не только современников, но и ученых следующих поколений. Он сформировал начальный круг научных интересов Леонарда Эйлера, своих сыновей Даниила и Николая. Даламбер считал, что своим знанием математики и механики он обязан И. Бернулли.

2.6. Механика П. Вариньона

Имя **Пьера Вариньона** (1654–1722) в курсе теоретической механики ассоциируется с теоремой о моменте равнодействующей системы сходящихся сил. Сейчас этот результат представляется практически очевидным, но мнение современников и последователей автора этой теоремы было другим. В 1687 г. это был далеко не очевидный, безусловно, очень важный и, естественно, не единственный результат трактата «Проект новой механики» француза П. Вариньона.

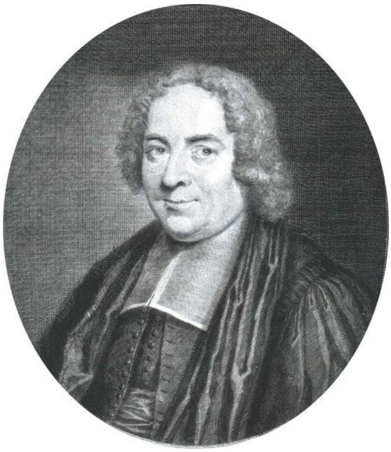


Рис. 63. Пьер Вариньон

Биографические сведения о Пьере Вариньоне достаточно скупы. Он родился в 1654 г. в г. Каэне (Нормандия) в семье архитектурного подрядчика. Поначалу Пьер избрал духовную карьеру и поступил в иезуитский коллеж. Увлеченно занимаясь философией, случайно наткнулся на «Начала» Евклида и эта книга с первых страниц захватила его. Ясность геометрических образов и истин оказалась привлекательнее туманных философских размышлений, и он стал целенаправленно искать книги по математике. После знакомства с работами Декарта выбор в пользу математических наук стал окончательным, несмотря на неодобрительное отношение к этому родителей.

Продолжая образование по классу теологии, Вариньон блистал безукоризненной аргументацией в диспутах, проводимых учащимися по классу философии, среди которых был эрудит Шарль де Костель – будущий аббат **Шарль де Сен-Пьер** (Charle de Saint-Pierre, 1658–1743). Любовь к поиску истины, стремление доказать правоту своих взглядов не только в философии, но и математике, физике сблизили молодых людей. Так было положено начало их многолетней дружбы. Зная о материальных затруднениях Вариньона, Шарль иногда финансово поддерживал друга.

Рис. 64. Шарль де Сен-Пьер

Рис. 65. Бернар де Фонтенель

В 1686 г. друзья переехали в Париж и поселились в небольшом домике в пригороде французской столицы. Будущий секретарь Парижской академии наук **Бернар де Фонтенель** (Bernard de Fontenelle, 1657–1757) позднее вспоминал о том, что часто навещал друзей, порой оставаясь у них на 2–3 дня. Вариньон был полностью погружен в математику, все дни проводил за работой, которая прерывалась далеко за полночь. Он быстро познакомился с видными парижскими учеными, которые признавали его природный математический талант и прекрасную эрудицию, особенно в сфере механики.

Выход «Проекта новой механики» был встречен одобрительно, что позволило автору в 1688 г. стать геометром-пансионером Академии наук и профессором математики Коллежа Мазарини. Эта книга (посвящена Парижской академии наук), ставшая важным событием в истории классической механики и сделавшая Вариньона знаменитым, была второй его публикацией. Первая работа, посвященная полиспастам, была опубликована в том же 1687 г. в периодическом издании П. Белье «Nouvelles de la république des lettres».

В своих математических работах Вариньон всегда стремился к наиболее общим постановкам проблем. Его внимание, естественно, привлекли работы Лейбница, Уоллиса, братьев Бернулли по основам зарождающегося тогда математического анализа. В период выступлений Ролля в Академии с критическими замечаниями в адрес дифференциального исчисления, Вариньон, вместе с Лопиталем, выступал активным сторонником нового анализа и эффективно использовал его применительно к задачам о движении точки в центральном поле сил, внешней баллистики, гидравлики.

В 1690-е гг. Вариньон стал членом редакции «Journal des Sçavants», а с 1704 г. – профессором кафедры греческой и латинской философии в Коллеж де Франс (тогда College Royal). Но интенсивная научная и педагогическая деятельность имели не только положительные последствия. В 1705 г. Вариньон заболел психическим расстройством и следующие три года страдал апатией и нервным истощением (по свидетельству Фонтенеля, во время прогулок по лесу Вариньону казалось, что все листья деревьев покрыты алгебраическими формулами). Однако и в этот период, судя по публикациям, он не прекращал работу.

Вариньон много консультировал ученых, приезжавших к нему из Франции и других стран, будучи корреспондентом Лондонского Королевского общества, Берлинской академии наук, вел активную переписку с крупнейшими математиками и механиками Европы. В последние годы жизни он готовил к публикации свои учебные курсы по математике и трактат по механике, проект которого стал началом его блестящей научной карьеры.

Вариньон умер в 68 лет, в ночь с 22 на 23 декабря 1722 г. По завещанию все бумаги и рукописи после его смерти были переданы секретарю Академии Фонтенелю, который привлек к изучению и изданию научного наследия Вариньона академиков Бофорта и Декамю. Так в 1725 г. появились трактаты «Новая механика или статика, проект которой был опубликован в 1687 г.», «Введение в анализ бесконечно малых», в 1731 г. – «Элементы математики». Это были последние из более 80 работ, написанных Вариньоном за 35 лет плодотворной научной и преподавательской деятельности, поставившей его имя в один ряд с именами самых выдающихся математиков той эпохи.

Следуя традиции своего времени, под статикой или механикой Вариньон понимал, говоря современным языком, теорию механизмов. Вопрос об условиях равновесия механизма (рычага, клина, блока, наклонной плоскости, ...) в этой теории был одним из важнейших. Поэтому проблемы, обсуждаемые в «Новой механике», в большинстве своем являются задачами современной статики.

Одно из основных понятий современной физики и механики – понятие силы прошло многовековой процесс формирования: от осознания фактов взаимодействия тел природы до возможности точного описания этого взаимодействия по величине, направлению и месту приложения. Понятие вектора, возникшее в математике в XIX веке как геометрический образ комплексного числа, безусловно, формировалось и в недрах механики.

Еще в Древней Греции было установлено, что и взаимодействие тел, и их движение всегда имеют некоторую величину и направление. Таким образом, свойства вектора как математического объекта были известны давно, но потребовалось более 20 веков для осознания необходимости расширения понятия числа, для геометризации этого понятия и построения теории векторов. Одним из первых выражением «радиус-вектор» пользовался Даламбер (в работах по небесной механике).

Впервые изображение силы направленным отрезком встречается в главном труде по механике С. Стевина «Начало статики». Здесь мы встречаемся с понятием силового треугольника и законом сложения двух перпендикулярных сил. Далее идея сложения двух сил была использована французским ученым Ж.П. Робервалем в «Трактате по механике грузов, удерживаемых силами на наклонных плоскостях; о силах, поддерживаемых груз, висящий на двух веревках», вышедшем в 1636 г., через два года после издания книги Стевина на французском языке. Роберваль не дает полного определения силы, но определяет линию действия силы, говорит о возможности перенесения силы вдоль линии ее действия и дает доказательства правила сложения сил для случая произвольного угла между ними (правило параллелограмма).

Рис. 66. Бернар Лами

В 1687 г. правило параллелограмма появилось сразу в трех трактатах, в «Началах» Ньютона, в «Проекте» Вариньона, и в «Новом способе доказательства основных теорем механики» Б. Лами. **Бернар Лами** (Bernard Lamy, 1640–1715) неслучайно попал в этот список. Это был видный французский механик, математик, археолог и теолог, автор изданных в Париже книг: «Трактат по механике, о равновесии твердых тел и жидкостей» (1679), «Элементы математики» (1680), «Элементы геометрии» (1685) и др. Следует заметить, что доказательством этого правила также активно занимались **Эренфрид Вальтер фон Чирнхауз** (Ehrenried Walther Tschirnhaus, 1651–1708), **Никола Фатио де Дюилье** (Nicolas Fatio de Duiller, 1664–1753), Гюйгенс, Лейбниц и многие другие ученые.

Рис. 67. Н.Ф. де Дюилье

Рис. 68. Э.В. фон Чирнхауз

По-видимому, каждый из авторов пришел к правилу параллелограмма своим путем, но это совпадение не было случайным. Оно отражало главный итог многовекового развития понятия силы как меры взаимодействия между телами, связанного с общепринятыми ныне свойствами сил: наличие величины, направления, места приложения, правил геометрического сложения и разложения. До векторизации понятие силы, которое в разных ситуациях именовалось «мощность», «импульс», «импетус», «момент», «давление», «притяжение», «отталкивание», «сопротивление», «вес», выражало только интенсивность действия на тело (как кинетическая, потенциальная энергия, мощность).

Поэтому иными (алгебраическими) были правила операций над силами и, как следствие, нельзя было сформулировать правила замены одной системы сил другой (в том числе простейшей), ввести современные понятия момента силы, пары сил, работы, мощности. Введение векторных свойств взаимодействия тел привело к «материализации» абстрактного понятия силы в виде направленного отрезка и построению в XIX веке на этой основе векторного анализа и теоретической механики.

Свой первый трактат Вариньон неслучайно назвал «Проект новой механики». Он планировал продолжить разработку основных идей механики и фактически занимался этим всю свою жизнь. Как уже отмечалось, окончательная редакция трактата под названием «Новая механика или статика, проект которой был опубликован в 1687 г.», была подготовлена к печати и издана в двух томах уже после смерти Вариньона.

Первый том «Новой механики» начинается с основных определений, обозначений и аксиом. Машина или механизм определяется как приспособление для передвижения тел. Силой Вариньон называет то, что приводит машину в движение, или все то, что способно сдвинуть тело при помощи машины или без нее. Силы рассматриваются как геометрические величины (измеряются не фунтами, а футами и туазами), оцениваются по отношению к весу (тяжести) тела и изображаются отрезками (нитями), натягиваемыми рукой в определенную сторону.

Аксиомы сводятся к следующим утверждениям:

1. Действия всегда пропорциональны причинам, или силам, так как последние являются причинами первых.

2. Равные силы, или сопротивления, вызывают равные, или одни и те же, действия, и, следовательно, сила, заменяющая равную себе по величине и имеющая то же направление, вызывает то же самое действие.

3. Когда на тело действуют две равные противоположные силы, оно должно быть неподвижным, т.е. в состоянии покоя. Это же верно, если одна из сил будет силою сопротивления.

4. Если тело под действием двух сил пребывает в покое (без всяких других препятствий), то силы должны быть равны и противоположно направлены. Одна из сил может быть силой сопротивления.

5. Тело, на которое действуют две противоположно направленные силы, будет двигаться в сторону большей силы, как если бы на него действовала одна сила в том же направлении, равная разности этих сил. Одна из сил может быть силой сопротивления (меньшая).

6. Скорости одного и того же тела или тел равной массы относятся как движущие силы, приложенные к телам, вызывающие эти скорости. Если скорости имеют указанное отношение, то они относятся либо к одному телу, либо к телам равной массы.

7. Расстояния, проходимые телом или телами равной массы с постоянной скоростью за равные промежутки времени, относятся как скорости, и, наоборот, скорости пропорциональны расстояниям.

8. Расстояния, проходимые за равные промежутки времени одним телом или телами равной массы, относятся как силы, которые вынуждают их двигаться.

Принцип геометрического сложения сил выделен Вариньоном в особую аксиому, названную «Основным принципом»: каково бы ни было число действующих на тело (предполагается в одной точке) сил, направленных произвольным образом, это тело либо совсем не будет двигаться, либо будет двигаться по единственному пути вдоль линии, которая будет такой же, как если бы на тело действовала лишь одна сила в этом направлении и равная результирующей всех этих сил.

Отметим, что, говоря о величине силы, эквивалентной заданной системе сил, Вариньон не определяет ее, но постулирует лишь сам факт эквивалентности, т.е. возможности замены нескольких сходящихся сил одной результирующей. А сам принцип сложения и разложения сил (леммы I и II) Вариньон доказывает в несколько этапов. Идея доказательства правила параллелограмма для двух сходящихся сил, изображаемых отрезками AB и AC, сводится к утверждению, что перемещение тела, на которое подействовали две силы, произойдет по некоторому отрезку AD, по которому оно передвигалось бы под действием одной результирующей силы.

По существу, рассуждение идет о сложении двух перемещений, или скоростей, с которыми двигалось бы тело в первое мгновение под влиянием каждой из сил в отдельности. Согласно 6, 7 и 8-й аксиомам, сила, скорость и путь, проходимый телом под действием силы, находятся в прямой пропорциональной зависимости друг от друга. Если 7-я аксиома не вызывает вопросов, то 6-я и 8-я требуют комментариев. Возможно, что автор имеет в виду силы импульсного характера и соответствующие им мгновенные скорости, возможно, говоря о скорости, он подразумевает величину ее изменения, возможно, это дань популярному еще тогда картезианству.

Важные свойства силового параллелограмма устанавливаются в следствиях лемм I и II. Например, показывается пропорциональность составляющих и их результирующей двум сторонам и диагонали (соответственно) параллелограмма, построенного из любой точки диагонали AD силового параллелограмма, подобного ему. Автор приводит геометрическое построение для нахождения результирующей многих сходящихся сил. Фактически он находит замыкающую сторону их силового многоугольника и указывает на возможность переноса отрезка, изображающего силу в твердом теле, по его линии или по линии действия силы.

Лемма XVI, называемая теперь «теоремой Вариньона», состоит в следующем. Если выбрать произвольную точку S и построить три треугольника с вершинами в этой точке, на двух сторонах параллелограмма $ABCD$ и на его диагонали AD, то сумма (если точка S лежит вне угла BAC) или разность (если точка S лежит внутри основного угла BAC) площадей треугольников, построенных на сторонах, равна площади диагонального треугольника SAD. Доказательство этого положения сводится к тому, что указанным свойством обладают высоты трех треугольников, имеющих общее основание AS. Если точка S лежит на диагонали или на ее продолжении, то площади треугольников, построенных на сторонах AB и CD, равны.

Далее вводится понятие момента силы относительно точки S как произведение силы на «плечо» (кратчайшее расстояние от точки S до линии действия силы). В таком случае можно дать иную формулировку теоремы Вариньона (чего он не сделал): момент равнодействующей двух сходящихся сил относительно некоторой точки плоскости сил равен алгебраической сумме моментов составляющих относительно той же точки. Первая теорема трактата, называемая теперь «теоремой о трех силах», доказывается пока для частного случая.

Техника веревочных машин, а также действие ветровой нагрузки на парус – вот две технические предпосылки, под влиянием которых в XVII веке возникла идея веревочного многоугольника Вариньона. Форма невесомой нерастяжимой веревки, закрепленной по краям и несущей в некоторых точках один, два и более грузов, напоминала форму паруса, вздутого ветром (в профиле). Аналогия становилась еще более убедительной, когда число грузов увеличивалось бесконечно или, попросту, веревка становилась весомой, с равномерно распределенным по ее длине весом. Задача о равновесии такой веревки аналогична задаче о равновесии тяжелой цепи, закрепленной по концам. Вероятно, метод графической статики – оперирование двумя взаимными плоскими многоугольниками – стал следствием размышлений ученого над этой аналогией.

Последовательно, от простого случая двух параллельных, направленных в одну сторону сил до любой плоской системы сил, не приводящей к паре, Вариньон доказывает справедливость оперирования двумя взаимными фигурами – веревочным многоугольником, напоминающим веревку, в узлах которой приложены силы по различным направлениям, и силовым многоугольником. Большое внимание Вариньон уделяет учению о равновесии сил в блоках, полиспастах и вóротах, обсуждает вопрос о величине и направлении силы реакции опоры рычага.

Современная теорема о трех силах, представленная в теоремой XXI, устанавливает условие равновесия трех произвольных непараллельных сил в плоскости. Вместо третьей силы может быть рассмотрена реакция опоры. Необходимым условием равновесия трех таких сил является пересечение линий их действия в одной точке. Теорема XXII устанавливает способ нахождения третьей (неизвестной) силы из правила геометрического сложения и разложения трех сходящихся сил. Сейчас неизвестная сторона (сила) находится из условия замкнутости силового треугольника. Вариньон же, в силу сложившихся традиций, пользуется построением параллелограмма.

Далее в «Новой механике» рассматриваются условия равновесия для случая параллельных сил и произвольной системы сил. Вариньон отмечает, что некоторые его результаты ранее были получены Архимедом, Робервалем, Ферма и Паскалем.

Первые три раздела 2-го тома «Новой механики» продолжают рассмотрение важных практических проблем статики, в частности равновесия на наклонной плоскости, разъясняют возможность замены силы реакции (сопротивления) гладкой поверхности активной силой, аналогичной тяге, направленной по перпендикуляру к плоскости (точнее, к касательной плоскости в данной точке поверхности).

В последних двух разделах второго тома Вариньон последовательно излагает теорию равновесия уже рассмотренных механизмов, а также гидростатику, на основе принципа виртуальных скоростей. «Общие следствия предыдущей теории» (раздел 9) начинаются с цитаты из письма И. Бернулли Вариньону (от 26 января 1717), где дается формулировка принципа виртуальных скоростей как обобщения «золотого правила механики». Вариньон дает количественное определение понятия «энергии» как произведения величины силы на перемещение (с учетом знака!) точки ее приложения вдоль линии действия силы. В понятие «энергия» ныне вкладывается совсем иной смысл, а в определении Вариньона (точнее, И. Бернулли) легко угадывается современное понятие работы силы. Под виртуальными скоростями понимаются величины, пропорциональные малым перемещениям точек.

Как уже упоминалось, Декарт не привел словесного описания принципа возможных перемещений. Он формулировал его в числовом выражении. Аналогичным образом поступает и Вариньон, формулируя в десятом разделе книги законы гидростатики Паскаля, объясняя действие сифонов, сообщающихся сосудов и других устройств.

Кроме «Проекта…» («Новой механики…») Вариньон опубликовал еще целый ряд работ, посвященных статике [1], в которых широко пользовался геометрическими методами. Но как академик-геометр он не мог обойти вниманием проблему вычисления площади поверхности фигуры вращения чисто механическим методом, используя понятие центра тяжести образующей. Этому посвящена большая работа «Размышления об использовании механики в геометрии».

Ранее, в 1635 г., идею использования понятия центра тяжести для определения площади поверхности высказал П. Гульден. Далее она получила развитие в работе Лейбница, опубликованной в 1695 г. в «Acta eruditorum», где автор без доказательства утверждает, что площадь тела вращения равна произведению образующей на путь, пройденный ее центром тяжести. Последовательно рассматривая систему тел, расположенных на покоящемся прямолинейном рычаге, систему произвольно расположенных тел, Вариньон получает формулы для траекторий центров тяжести этих систем тел, в случае их вращения вокруг некоторой оси, и приводит механико-геометрическое доказательство утверждений Гульдена и Лейбница.

Продолжая лучшие традиции древнегреческой механики, работы Стевина, дель Монте, Галилея, Гюйгенса, Вариньон создал стройную теорию решения актуальных в конце XVII века инженерных задач о равновесии тел, аксиоматически построенную на геометрии Евклида и объединенную идеей принципа сложения сил. История физики и механики убедительно доказала полезность современного понятия силы. До Вариньона это понятие не имело столь точно выраженных, зримых «материальных» свойств. Вариньон, как и Ньютон, не назвал силу вектором, но они сделали все для того, чтобы это сделали их последователи.

Самым замечательным достижением Вариньона в создании последовательной системы геометрической статики стала успешная попытка увязать два основных принципа геометрической статики предшествующего периода – принципа сложения сходящихся сил (правило параллелограмма) и принципа сравнения моментов сил. Если статика Роберваля еще основывалась на этих двух независимых друг от друга положениях, то у Вариньона они переплелись в его XVI лемме. Обращает на себя внимание сочетание в творчестве Вариньона абстрактного математического мышления с большой инженерной интуицией и знанием техники своего времени.

С точки зрения математического аппарата, нововведением Вариньона было систематическое оперирование алгебраически записанными равенствами (пропорциями), а также широкое использование тригонометрических функций (и первое и второе было выражено в весьма своеобразной форме).

Главный механический трактат Вариньона получил высокую оценку Мопертюи, Эйлера, Даламбера, Лагранжа – как итог развития мировой статики до конца XVII века, как упрочение в науке идеи математического моделирования. Эйлер писал: «*Что касается статики, то почти полную и во всех отношениях прекрасную работу издал на французском языке Вариньон в двух томах*» [1, с. 203]. Еще более выразительной была оценка, данная Лагранжем: «*...простота принципа сложения сил и легкость его применения ко всем проблемам равновесия имели своим результатом то, что все механики приняли его тотчас же после его открытия; можно сказать, что он служит основой почти для всех работ по статике, какие появились с тех пор*» [1, с. 203].

Столь высокая оценка вполне справедлива, так как большинство практических задач и теоретических проблем механики XVIII века были связаны с движением и равновесием тел под действием простейших систем сил (центральных, плоских, параллельных), для которых подход Вариньона был универсален. Архимедов «принцип рычага» (для покоящегося рычага первого рода – равенство моментов двух перпендикулярных ему сил, приложенных слева и справа опоры) сводится к теореме Вариньона через добавление к рычагу (слева и справа) равных, направленных по рычагу, но в разные стороны сил. При этом система двух параллельных сил приводится к системе двух сходящихся, имеющих равнодействующую.

Использование Вариньоном понятий силы, момента, момента результирующей силы, принципа «виртуальных скоростей», идеи сведения системы сил к простейшему виду, геометрических критериев равновесия и методов определения неизвестных сил (метод графостатики или веревочных и силовых многоугольников), в том числе сил-реакций со стороны опор, позднее названных реакциями связей, фактическое владение принципом освобождаемости от связей, получило дальнейшее развитие в прикладных и теоретических трудах его знаменитых последователей и соотечественников – Даламбера, Боссю, Монжа, Л. Карно, Лагранжа, Пуансо. После осознания Луи Пуансо ограниченности как принципа рычага, так и теоремы Вариньона для исследования произвольных систем сил, в частности скрещивающихся сил, окончательного внедрения в механику декартовой системы координат, принципа виртуальных работ, идеи приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту, понятия и свойств пары сил, наконец понятий вектора и его момента, – только в XIX веке статика приобрела современный вид.

В предуведомлении первого тома «Новой механики» Вариньон определяет механику как науку о движении, его причинах и результатах – обо всем, что имеет отношение к движению тел.

Именно проблемам движения тел, а не статики, с которой традиционно связывается имя Вариньона, и посвящена основная часть его научного наследия (более 80 публикаций).

Этой тематике посвящены его работы об определении траектории падающего тела (1695, 1699), об определении формы (поверхности вращения) сосуда (емкость водяных часов), из которого вода вытекает с постоянной скоростью (1699), о движении тела в центральном поле сил, идейно продолжающие работы Гюйгенса, Ньютона, Лейбница.

Рассматривая вращение шарика, закрепленного на нити, в горизонтальной плоскости, Гюйгенс поясняет физическую природу центробежной силы и заключает, что эта сила действует на шарик так же, как сила натяжения нити, на которой вертикально подвешен шарик, т.е. центробежная сила по своему действию на шарик аналогична его тяжести. Используя чисто геометрические построения и результаты мысленных экспериментов, автор доказывает основные свойства центробежных сил, которые ныне переданы формулой $f = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$, где f – центробежная сила, m – масса, υ – скорость шарика, R – радиус кривизны траектории. При этом речь идет о движении шарика или маятника по окружности или конической поверхности и величина центробежной силы измеряется количеством весов шарика или отношением диаметров окружностей, или отношением квадратов скоростей. Получены и отношения времен обращения маятников.

Ньютон при рассмотрении кругового движения шарика в горизонтальной плоскости получил ту же формулу для центробежной силы, использовав сводку результатов по теории удара и геометрические построения. Примерно в одно время с Гюйгенсом и Ньютоном понятием центробежной силы пользовался профессор математики Пизанского университета Д.А. Борелли для объяснения того, почему планеты в своем вращении вокруг Солнца не падают на него.

По-видимому, интерес к теории центральных сил возник у Вариньона под влиянием знакомства с «Началами» Ньютона. Об этом свидетельствуют работы 1700–1701 гг., где он достигает тех же результатов, что и его знаменитый современник (второй отдел первой книги «Начал» озаглавлен «О нахождении центростремительных сил»), используя дифференциальное исчисление Лейбница, ставшее с 1698 г. основным математическим аппаратом Вариньона при изучении проблем механики.

В статье 1700 г. Вариньон, рассматривая сначала прямолинейное, а затем и произвольное движения тела, впервые применяет два правила, являющиеся дифференциальной формой записи законов Ньютона:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}, \; y = \frac{dsdds}{dxdt^2} = \frac{\upsilon d\upsilon}{ds},$$

где s – дуга траектории, υ – скорость, y – центростремительная сила.

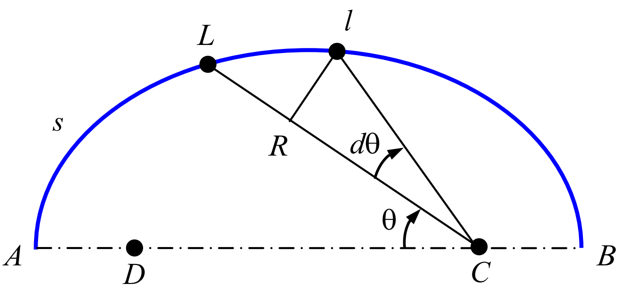


Рис. 69

Решая задачу о центростремительной силе, направленной к фокусу эллипса, по которому движется планета, Вариньон записал дифференциальную форму уравнения эллипса в полярных координатах:

$$b \cdot dr = dz \cdot \sqrt{4ar - 4r^2 - b^2},$$

где C – фокус эллипса, $CL = r$, $AL = s$, $Rl = dz = rd\theta$, $Ll = ds$, $RL = dr$, $AB = a$, $CD = c$, $b^2 = a^2 - c^2$. После преобразований уравнение эллипса приняло вид

$$\frac{4a - 4r}{r} = \frac{2b^2 dsdds}{dt^2}.$$

Заменяя dr на dx и $\dfrac{dsdds}{dxdt^2}$ на y, Вариньон находит выражение для центростремительной силы (точнее – ускорения):

$$y = \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

В более поздних работах Вариньон, используя формулы Лопиталя для радиуса кривизны, находит выражение для радиуса кривизны траектории в центральном поле сил, для тангенциальной и нормальной составляющих ускоряющей силы при движении тела по гиперболе и параболе, рассматривает (по инициативе Лейбница) движение тела под действием нескольких центральных сил. В представлении Вариньона, центробежные и центростремительные силы являются непременным атрибутом криволинейного (произвольного) движения. Поэтому их нахождению, выяснению их физической сущности он посвятил целую серию работ.

Он считал, что любое криволинейное движение тела, например движение планеты вокруг Солнца по эллипсу, в каждый момент складывается из прямолинейного движения и радиального движения к Солнцу. В результате сложения этих бесконечно малых мгновенных движений, по правилу параллелограмма, получается эллиптическое движение. Первая причина такого движения – естественное стремление всех тел двигаться прямолинейно (закон инерции), причина второго движения – центральная сила, притягивающая планеты к Солнцу. Движение планеты является результатом сложения (по правилу параллелограмма) этих двух составляющих.

Центральная сила в каждый момент времени сворачивает тело с прямолинейного пути, по которому оно стремится двигаться. И вид кривой (траектории) определяется тем, насколько сильно тело может сопротивляться изменению его прямолинейного движения. Степень сопротивления зависит от количества движения тела, т.е. от произведения массы (или тяжести) на скорость. Поэтому, чем больше тяжесть тела, чем больше его скорость, тем труднее ему отклониться от прямолинейной траектории. Тяжесть считается известной, постоянной, проявляющейся сама собой. Скорость – это отношение пути ко времени. Таковы физические воззрения Вариньона.

С точки зрения «геометрии бесконечно малых» тело в данный момент времени стремится двигаться по касательной к кривой (траектории), т.е. по бесконечно малой дуге кривой, через концы которой проходят радиусы, пересекающиеся в центре, к которому, по предположению, приложена центральная сила. Это бесконечно малая дуга определяет бесконечно малую разность радиусов, выходящих из центра. Из подобия силового и геометрического треугольников отношения касательной и центральной (радиальной) сил равно отношению путей. Центральная сила тем больше, чем больше искривлена траектория, т.е. чем меньше радиус кривой. Если тело движется по прямой, то центральная сила исчезает. Кривизна кривой определяется ее радиусом (кривизны), который может принимать значения от 0 до ∞. Такова суть математической модели автора, которая позволяет ему получить дифференциальную формулу для центростремительных сил для различных траекторий движения (логарифмической спирали, спирали Ферма, спирали Архимеда, эллипса, круга, гиперболы, параболы, произвольных конических сечений).

В мемуаре «Об обратных центральных силах» (1710) Вариньон впервые четко формулирует две основные задачи динамики: «*Возможны два вопроса, касающиеся центральных сил: первый – это найти силы, под действием которых описывается данная траектория, и второй – наоборот – по известным силам* *найти кривые, проходимые под действием этих сил. Первый из этих двух вопросов будет здесь называться вопросом о прямых центральных силах, а второй – об обратных центральных силах*» [1, с. 211].

Идея использования в задачах механики синтеза исчисления бесконечно малых и геометрии получила развитие в публикациях Вариньона, посвященных теории движения тел с учетом сопротивления среды, динамике околоземного движения, баллистической задаче. Всем циклом работ автор пытается дать решение баллистической задачи в постановке Ньютона (о движении в произвольной среде (воздух, вода)). В некоторых публикациях Вариньон использовал обозначения, введенные Ньютоном (точка над переменной вместо дифференциала).

Большой интерес для общей теории движения тел представляют работы Вариньона, посвященные общим законам ускоренного движения. Первая из таких работ опубликована в «Мемуарах Парижской академии наук» за 1693 г. Далее он неоднократно (1700, 1706, 1707, 1719) обращался к проблеме, признанным основоположником в ее постановке считался Галилей. Обращение Вариньона к проблемам его великого предшественника с позиций нового математического анализа было вполне закономерным.

Во времена Галилея и Декарта равномерное, ускоренное и замедленное движения рассматривались как самостоятельные. В работе «О произвольных переменных движениях, сравнимых между собой с равномерными» (1707) Вариньон впервые убедительно доказывает, что это – разновидности одного движения, которое он называет переменным. Он разрабатывает новую физико-математическую теорию движения.

Галилей показал, что при падении тела его скорость пропорциональна времени, а пройденный путь – его квадрату. Обобщая этот результат, Вариньон утверждает, что в общем случае путь и скорость, пользуясь терминологией Лейбница, являются функциями времени: $s = s(t)$, $\upsilon = \upsilon(t)$. Эти кривые имеют наглядное изображение в декартовой системе координат.

Исходя из классического философского закона о том, что все происходящее определяется причинами, скорость называется причиной пройденного пути, что в современных обозначениях можно записать как $s = s(\upsilon)$.

При постоянной скорости пройденный путь будет тем больше, чем больше скорость. При переменной скорости путь будет определяться интегралом от скорости – от ординат кривой $\upsilon = \upsilon(t)$, абсциссами которой является время. Для сравнения пройденных телом путей для одной и той же функции $\upsilon(t)$ необходимо сравнивать времена движения. При разных функциях $\upsilon(t)$ пройденные пути будут различны. Если $\upsilon = const$, т.е. кривая $\upsilon(t)$ является прямой, то, говоря современным языком, и закон движения $s = s(t)$ получит изображение в координатах $(s,\ t)$ прямой линией. В общем случае, нахождение закона движения $s = s(t)$ связано с интегрированием кривой скоростей $\upsilon(t)$. И Вариньон на примерах показывает, что чем сложнее вид кривой $\upsilon(t)$, тем труднее ее проинтегрировать.

Связь между ускоренным и замедленным движениями Вариньон демонстрирует наглядно: если на каком-то интервале времени движение было ускоренным, то это же движение, рассматриваемое в «обратном времени», будет замедленным. Переход от прямого к обратному времени выразится сменой знака алгебраического выражения для скорости или ускорения. Это означает, что достаточно изучать только законы ускоренного движения. Реальная скорость тела в каждый момент складывается из постоянной начальной скорости и скорости, приобретаемой в процессе ускорения (замедления), например, под действием тяжести тела. Решения, полученные математическими методами, в силу их общности могут не иметь физического смысла. Анализируя свои общие формулы переменного движения, Вариньон в конкретных примерах получает и выражение Галилея для равномерно ускоренного движения. Таковы основные положения кинематической теории движения Вариньона.

Эти воззрения были использованы им в работе, посвященной влиянию сопротивления среды (1707), и в публикации «Сравнение скоростей тел произвольной тяжести, опускающихся или поднимающихся в пустоте по прямым или произвольным кривым линиям» (1719), в которой используется результат, ранее сформулированный Ньютоном («Начала»), И. Бернулли («Мемуары», 1710) и Германом («Форономия»). Каждый из ученых по-своему доказал, что два тела равной массы и тяжести, пропорциональной массе, на одинаковых расстояниях от центра тяжести, падая или поднимаясь в пустоте по произвольной траектории (прямой или кривой), имеют равные скорости. Сами по себе выводы, сделанные Вариньоном по итогам этой работы, имеют, в основном, только историческое значение. Однако метод их получения был нов и перспективен. Этим методом была теорема об изменении кинетической энергии (в современной терминологии).

Опираясь на результат своей работы 1707 г., Вариньон доказывает теорему, математическое содержание которой сводится к следующему. Если f – сила в направлении движения, m – масса, u – скорость тела, то из $f=\frac{\pm mdu}{dt}$, $u=\frac{\pm dx}{dt}$ следует $\pm dx = udt$, $fdx = mudu$, или $\int fdx = \pm\frac{mu^2}{2}+q$, где знаки $\pm$ определяют направление движения (падение или подъем), q – константа, определяемая по начальным данным (положению и скорости). Рассматривая различные варианты начальных данных (движение из начала координат с нулевой скоростью, с заданной скоростью, аналогично из произвольной точки), движение в вертикальной плоскости, движение по наклонной плоскости, движение не только в поле центральных, но и параллельных сил, автор получает все возможные случаи соотношения начальных, текущих и конечных скоростей, особо отмечая, что из его теоремы следуют и соответствующие результаты Галилея.

Аналитическое выражение для силы $f = f(x)$, по предположению Вариньона, должно задаваться заранее. Как уже отмечалось, эти выражения он получил в более ранних работах, посвященных теории центральных сил. В поле параллельных сил сила тяжести постоянна. Для графической иллюстрации задачи о вертикальном падении (подъеме) тела в центральном поле сил Вариньон приводит рисунок:

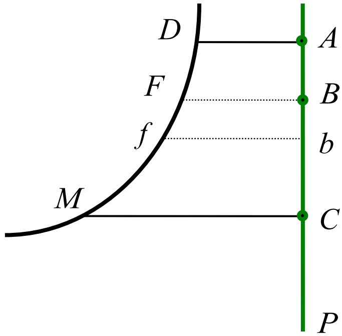


Рис. 70

Здесь P – центр сил; A – начальная точка падения; DFM – кривая сил, ордината FB которой по величине равна f; $AB - x$; $Bb - dx$; $\int fdx$ – площадь $BFfb$.

Таким образом, в арсенале механики Вариньона мы видим понятия: силы как направленного отрезка; сил центральных и параллельных; массы; скорости, направленной по касательной к траектории в сторону движения и равной производной от пройденного пути как функции времени; ускорения как величины изменения скорости, как производной от величины скорости; траектории, как геометрической кривой, определяющей положение тела (точки) в разные моменты времени. Он пользовался (не называя их) понятиями количества движения и лейбницевой «живой силы» для записи основных дифференциальных уравнений механики в виде, говоря современным языком, второго закона Ньютона, или теоремы об изменении кинетической энергии.

Именно в творчестве Вариньона в механике произошел переход от чисто геометрических методов Галилея, Декарта, Гюйгенса к аналитическим приемам дифференциального и интегрального исчисления.

Современный взгляд на механику, как на универсальную физико-математическую теорию произвольных движений тел, сформировался на основе использования одних и тех же понятий (положение, скорость, сила,...), принципов, законов для описания различных явлений, решения физических и технических задач разного содержания. Процесс универсализации методов, ранее применяемых для исследования равновесия весов, рычагов, блоков, для изучения явления удара, падения земных тел, движения небесных тел, это и есть путь создания теоретической механики. Это последовательная модернизация, обобщение, уточнение, конкретизация методов применительно к бурно расширяющемуся кругу жизненно важных для человечества задач: от падения тела в пустоте к движению тел с учетом сопротивления среды; от абсолютно упругого (неупругого) удара к реальному удару тел; от задачи двух тел к задаче n тел, задачам летательных аппаратов.

Универсализация методов, обобщение известных задач были главными подходами в научном поиске Вариньона. Но если его предшественники (Стевин, Галилей, Кеплер, Декарт) и современники (Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц) искали универсальный принцип в мире философских идей, то он больше тяготел к универсализации математического аппарата механики, особенно к адаптации идей математического анализа и дифференциальных уравнений. Основные идеи геометрической статики, принцип возможных перемещений, теорема об изменении количества движения, теорема об изменении кинетической энергии составляли основу механико-математических работ Вариньона. Это был пролог аналитической механики Эйлера–Даламбера–Лагранжа.

Анализируя результаты научного творчества Вариньона, можно отметить явную тягу этого математика к прикладным задачам той эпохи. Даже его чисто математические работы были ориентированы на развитие математического аппарата механики. Первый этап деятельности Вариньона (ориентировочно 1683–1692), связанный с освоением классической геометрии и механики предшественников, был «статическим». Изданием своего «Проекта» Вариньон не только подвел итог многовекового развития статики – механики, но и заложил основы для дальнейшего совершенствования ее математического аппарата (векторные свойства сил и движений, правило параллелограмма, теорема Вариньона) в трудах Д. Бернулли, Эйлера, Монжа, Л. Карно, Боссю, Лагранжа, Пуансо. Переписка Вариньона с Лейбницем и И. Бернулли, знакомство с трудами Ньютона и Лопиталя, полемика с Роллем сделали Вариньона активным проводником идей нового математического анализа в механических приложениях.

Второй этап его деятельности (условно 1693–1719) связан с разработкой теории центральных сил, дифференциально-геометрического метода построения дифференциальных уравнений движения тел (точнее – точек) и их интегрирования. В качестве прямоугольных осей координат часто использовались касательная и нормаль. Возможно, именно это и навело Д. Бернулли (1726) и Эйлера (1736) на мысль записать дифференциальные уравнения движения точки аналогичным образом.

Заключительный, третий, этап творчества Вариньона (1719–1722) связан с подготовкой к публикации «Новой механики», «Введения в анализ бесконечно малых», «Элементов математики», «Трактата о движении и измерении текущих вод» – трудов итогового характера, обобщающих не только научные достижения, но и богатый преподавательский опыт исследователя.

В истории механики период XVII – начала XVIII века стал эпохой перехода от механики отдельных явлений конкретных тел к механике произвольных движений любых тел (теоретическая, аналитическая механика). Это был этап смены методологии, универсализацией научных доктрин. Пьер Вариньон стал одним из первых представителей новой эпохи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Механика Г. Галилея.
2. Кинематические законы И. Кеплера.
3. Механика Р. Декарта.
4. Физические теории XVII–XVIII вв. Законы удара тел.
5. Физические теории XVII–XVIII вв. Теория колебаний маятников.
6. Физические теории XVII–XVIII вв. Закон всемирного тяготения и центральные силы.
7. Математические методы XVII–XVIII вв.
8. Математические работы Г.В. Лейбница.
9. «Начала» И. Ньютона.
10. Работы Я. Бернулли по механике.
11. Работы И. Бернулли по механике.
12. Механика П. Вариньона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яковлев В.И.* Начала механики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2005. 352 с.

2. *Яковлев В.И.* Математические начала. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2005. 224 с.

3. *Тюлина И.А.* История и методология механики. М: Изд-во МГУ, 1979. 282 с.

4. *Тюлина И.А., Чиненова В.Н.* История механики сквозь призму развития идей, принципов и гипотез. М.: Кн. дом «Либроком», 2013. 256 с.

5. *Боголюбов А.Н.* Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978. 151 с.

6. *Григорьян А.Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Наука, 1974. 479 с.

7. *Бугаенко Г.А., Маланин В.В., Яковлев В.И.* Механика. М.: Юрайт, 2016. 368 с.

8. *Яковлев В.И., Остапенко Е.Н.* История и методология механики. Математика и механика Древнего мира. Пермь, 2018. 124 с.

9. *Яковлев В.И., Остапенко Е.Н.* История и методология механики. Механика и математика Средневековья. Пермь, 2018. 134 с.

10. *Трусделл К.* Очерки по истории механики / пер. с англ. Е.В. Богатыревой; под ред. д.ф.-м.н. А.В. Борисова. М.; Ижевск, 2002. 316 с.

11. *История* механики. С конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972. 413 с.

12. *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. Классическая механика XIX века. М.: Янус, 1996, 400 с.

13. *Григорьян А.Т.* Механика в России. М.: Наука, 1978. 192 с.

14. *Кирсанов В.С.* Научная революция XVII века. М.: Наука, 1987. 342 с.

Учебное издание

Яковлев Вадим Иванович
Остапенко Елена Николаевна

История и методология механики. Основы классической механики

Учебное пособие

Редактор *Л. В. Хлебникова*
Корректор *Л. С. Рассанова*
Компьютерная верстка и дизайн:
Е. Н. Остапенко, В. Ф. Селезнёв

Объем данных 6,45Мб
Подписано к использованию 26.08.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15