

На правах рукописи

Боталов Андрей Юрьевич

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ,
ЧАСТИЧНО ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТЬЮ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ПЕРМЬ – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Тюменский государственный университет» на кафедре математического моделирования и в Тюменском филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Родионов Сергей Павлович

Официальные оппоненты: Любимова Татьяна Петровна,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт механики сплошных сред УрО РАН,
заведующая лабораторией вычислительной
гидродинамики.

Перминов Анатолий Викторович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, доцент кафедры
общей физики

Ведущая организация: НИИ прикладной математики и механики
Томского государственного университета

Защита диссертации состоится “23” декабря 2014 г. в 15-15 на заседании диссертационного совета Д 212.189.06 при Пермском государственном национальном исследовательском университете, зал заседаний Ученого совета (614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Пермского государственного национального исследовательского университета. Электронная версия текста диссертации и автореферата доступны на сайте ПГНИУ по адресу: <http://www.psu.ru>.

Автореферат разослан “ _____ ” 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент



В.Г. Гилев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Задачи динамики тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью вот уже более ста лет привлекают внимание исследователей, представляя как практический, так и теоретический интерес. Являясь классическими задачами механики и находясь на стыке таких дисциплин, как теоретическая механика и гидродинамика, задачи движения тел с жидкостью в полостях имеют огромное практическое значение. Практическое приложение данных задач связано с динамикой летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива, теорией движения кораблей и подводных лодок. В последнее время много внимания уделяется разработке эффективных демпферов колебаний различных высотных конструкций, которые представляют собой сосуды, частично заполненные жидкостью с частотой первой моды, согласующейся с собственной частотой колебания конструкции.

За более чем сто лет исследований задачи движения тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, получили решение для некоторых частных случаев моделей жидкого наполнителя и моделей движения тела. Так, было показано, что влияние идеальной жидкости, наполняющей полость, сказывается на движении тела посредством добавочного тензора инерции. Кроме того, учет влияния жидкости удалось свести к дополнительным членам в уравнении движения тела в случаях сильновязкой жидкости и слабовязкой при условии малости амплитуды движения тела. В задачах разработки гасителей колебаний основное внимание уделяется экспериментальному исследованию и численному исследованию приближенных уравнений динамики волнового движения жидкости (уравнения мелкой воды, уравнения потенциального движения). Однако в настоящее время почти не исследовано движение тел с полостями, частично или полностью заполненными вязкой жидкостью, в полной нелинейной постановке, и мало данных по течению жидкости, возникающему в движущихся полостях.

Цели работы:

- исследовать влияние жидкого наполнителя на движение вокруг неподвижной оси или неподвижной точки тела с полостями различной формы под действием силы тяжести;

- провести анализ влияния полости, частично заполненной жидкостью, на диссипацию энергии колебаний твердого тела.

Научная новизна:

- численно исследовано движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси и неподвижной точки в полной нелинейной постановке;

- исследована зависимость скорости затухания плоских колебаний замкнутых сосудов в форме квадрата и эллипса от изменяющихся в широком диапазоне параметров системы;

- установлены траектории движения кубической полости вокруг неподвижной точки для различных значений начальной гироскопической угловой скорости;

- проведен сравнительный анализ влияния различных конфигураций вставок (вертикальные и горизонтальные перегородки, вертикальные решетки) на скорость диссипации энергии колебаний тела с полостью, частично заполненной жидкостью;

- получены картины течения жидкости в колеблющихся полостях различной формы, полностью заполненных жидкостью, и в прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью и имеющей различные конфигурации вставок.

Научная и практическая значимость. Результаты исследований важны для понимания влияния оказываемого жидким наполнителем на движение тел с полостями, частично или полностью заполненными вязкой жидкостью. Результаты могут быть использованы при проектировании вязких демпферов для гашения нежелательных колебаний различных систем, а также при разработке быстро вращающихся роторов и гироскопов, имеющих жидкий наполнитель.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием общих законов и уравнений механики сплошной среды, применением хорошо апробированных численных методов, контролем получаемого решения с помощью аналитических интегралов, сравнением численного решения с известными асимптотическими решениями и проверкой сеточной сходимости численного решения.

На защиту выносятся результаты численного моделирования движения замкнутого сосуда, заполненного вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси и точки и поступательного движения тела с полостью, частично заполненной жидкостью:

- значения параметров задачи, при которых скорость диссипации энергии колебательного движения системы «тело с жидкостью» максимальна;
- структура вихревого течения жидкости в колеблющихся замкнутых сосудах с формой, отличной от цилиндрической, и открытых сосудах, имеющих различные конфигурации вставок;
- вывод о виде траекторий движения замкнутого кубического сосуда вокруг неподвижной точки при различных значениях начальной гироскопической угловой скорости;
- вывод о том, что полость со вставкой в виде двух вертикальных решеток с относительной высотой пластин, зависящей от амплитуды колебания тела, максимально увеличивает скорость диссипации энергии колебаний тела по сравнению с рассмотренными конфигурациями вставок.

Личный вклад автора заключается в написании программы для расчета задач динамики жидкости со свободной поверхностью с криволинейной геометрией стенок полости, проведении всех расчетов и анализе полученных результатов. Постановка задачи и обсуждение полученных результатов выполнены совместно с научным руководителем.

Публикации и апробация работы. По теме диссертации опубликовано 9 работ. Из них 3 статьи в журналах из перечня ВАК, 3 статьи в трудах международных и российских конференций, 3 – тезисы докладов конференций. Результаты работы докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях и семинарах: 54-ая Всероссийская молодёжная научная конференция с международным участием МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2011; X Международная конференция молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики», Новосибирск, 2012; Международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных

средах», Москва, 2012; семинар ТюмГУ под руководством проф. А.А. Вакулина, Тюмень, 2012; семинар НИИ механики МГУ под руководством проф. В.П. Стулова, Москва, 2012; семинар ТюмФ ИТПМ СО РАН под руководством проф. А.А. Губайдуллина, Тюмень, 2012, 2014; Пермский городской гидродинамический семинар им. Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого, Пермь, 2014.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, содержащего 123 наименования. Полный объем диссертации составляет 135 страниц, включает 58 рисунков и 3 таблицы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность проблемы, определены цели исследования, отмечены научная новизна и практическая значимость работы. Приведено краткое содержание работы.

В первой главе проводится анализ литературных источников с точки зрения современного состояния проблем динамики твердого тела с жидким наполнителем. Приведен обзор работ по движению тел с полостями, как полностью заполненными вязкой или идеальной жидкостью, так и частично заполненными.

Во второй главе приведена общая постановка задачи исследования: рассматривается тело с полостью, частично или полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, могущее двигаться произвольным образом. Течение предполагается ламинарным, вязкость постоянной.

В пункте 2.1 приведена полная система уравнений в векторном виде, описывающая движение тела с полостью, частично или полностью заполненной вязкой жидкостью. Данная система содержит уравнения неразрывности и Навье-Стокса движения жидкости, записанные в неинерциальной системе отсчета, связанной с телом, и уравнения Эйлера и Пуассона движения твердого тела. Также приведены граничные условия: условия прилипания или непротекания и идеального скольжения на стенках полости, кинематические и динамические условия на свободной поверхности.

В пункте 2.2 приведена система уравнений в размерном и безразмерном виде для случая плоских колебаний замкнутого сосуда в форме квадрата и эллипса, полностью заполненного жидкостью, вокруг неподвижной оси.

В пункте 2.3 приведена система уравнений в размерном и безразмерном виде для случая движения замкнутого кубического сосуда с жидкостью вокруг неподвижной точки.

В пункте 2.4 представлены уравнения движения тела с полостью квадратной или эллиптической формы, полностью заполненной сильно или слабовязкой жидкостью. Данные уравнения получены Ф.Л. Черноусько и в работе применяются для проверки численного решения. Приведены параметры расчетной сетки и значения параметров задачи. Для решения уравнений Навье-Стокса использован метод контрольного объема применительно к модифицированному алгоритму SIMPLER, особенностью которого является отказ от использования поправок скорости. Данный алгоритм реализован на структурированных криволинейных сетках. Для решения уравнений движения сосуда использовался BDF метод второго порядка точности.

В пункте 2.5 приведена система уравнений, описывающая поступательные колебания тела с полостью прямоугольной формы, частично заполненной жидкостью. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания тела. Рассматриваемая полость содержит различные вставки в виде вертикальных и горизонтальных перегородок и вертикальных решеток, полностью погруженных в жидкость. Также в данном пункте приведены значения, которые принимают параметры данной задачи.

В третьей главе представлена численная методика решения задач динамики вязкой жидкости со свободной поверхностью. Численное моделирование данных задач проводилось методом контрольного объема с использованием Эйлера-Лагранжева (ALE) подхода который подразумевает решение уравнений гидродинамики в системе координат, меняющейся в соответствии с движением свободной поверхности, и модифицированного алгоритма SIMPLER.

В пункте 3.1 приведена запись разностных уравнений искомой системы на криволинейной подвижной расчетной сетке. В качестве зависимых переменных выбраны контравариантные компоненты вектора скорости и давление.

В пункте 3.2 представлена запись граничных условий для рассматриваемых зависимых переменных в криволинейной системе координат. Для аппроксимации граничных условий используется квадратичный профиль зависимой переменной между расчетными точками, что дает второй порядок аппроксимации граничных условий. Для аппроксимации производной по времени в кинематическом условии используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

В пункте 3.3 приведено описание метода построения структурированной ортогональной к свободной поверхности расчетной сетки для заданных границ области. Для построения расчетной сетки применен метод решения эллиптических уравнений. Для обеспечения ортогональности к границе использован подход Дирихле, который заключается в перемещении внутренних точек сетки при фиксированных граничных точках.

В пункте 3.4 приведены результаты тестирования численной методики на ряде задач со свободной границей, имеющих аналитическое или численное решение, или по которым имеются экспериментальные данные.

В четвертой главе представлены результаты численного моделирования плоских колебаний невесомого замкнутого сосуда в форме квадрата и эллипса, заполненного вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси. В качестве параметров задачи выступают: Re_{Ω} – параметр, обратно пропорциональный вязкости жидкости, φ_0 – угол начального отклонения и a/b – отношение малой полуоси к большой (для формы эллипса). Значения параметра Re_{Ω} изменяются в диапазоне: $7 \leq Re_{\Omega} \leq 5700$, отношение полуосей: $0.25 \leq \frac{a}{b} \leq 1$. В качестве угла начального отклонения взято: $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

В пункте 4.1 рассмотрен случай сосуда квадратной формы. Был проведен анализ течения жидкости, возникающего при колебании сосуда. На рис. 1 изображены изолинии функции тока в фиксированный момент времени. Следствием периодичности движения маятника является перемена направления

вращения жидкости в полости на противоположное каждые полпериода. Данное изменение направления вращения сопровождается возникновением вторичных вихрей, оказывающих существенное влияние на скорость диссипации энергии колебаний маятника.

При увеличении значения параметра Re_Ω картина течения усложняется. Образующиеся вторичные вихри продолжают оказывать влияние на течение продолжительное время, взаимодействуя с новыми, возникающими вихрями, что

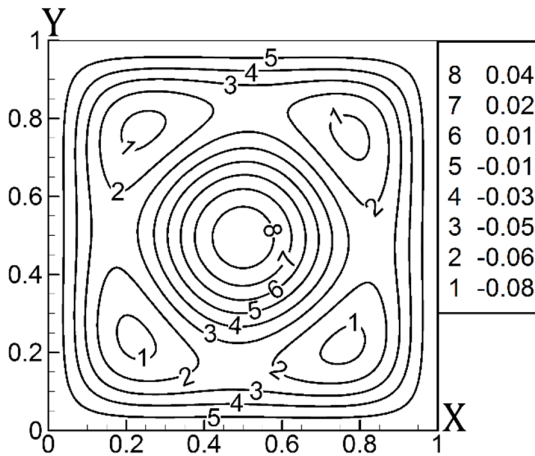


Рис. 1. Изолинии функции тока при $Re_\Omega = 15$ и $\tau = 0.5$, $\varphi_0 = 3\pi/4$

приводит к появлению высших гармоник в изменении компонент вектора скорости с течением времени.

Наличие диссипативных сил в жидкости приводит к постепенному уменьшению амплитуды колебания маятника. Характерное время затухания, которое определим как время, за которое амплитуда уменьшается в 1000 раз по сравнению с начальной, зависит от значения Re_Ω немонотонно, что следует из

рассмотрения предельных случаев большого и малого значений Re_Ω . В работе найдено значение Re_Ω , при котором характерное время затухания минимально. Оно зависит от величины начального отклонения: $Re_{\Omega_{min}} = 13 \pm 0.5$ при $\varphi_0 = \pi/4$, $Re_{\Omega_{min}} = 14 \pm 0.5$ при $\varphi_0 = \pi/2$ и $Re_{\Omega_{min}} = 15 \pm 0.5$ при $\varphi_0 = 3\pi/4$.

На рис. 2 представлен график зависимости характерного времени затухания от значения параметра Re_Ω . При изменении φ_0 качественное поведение зависимости не меняется.

В пункте 4.2 рассмотрен случай сосуда в форме эллипса. В данном случае зависимость характерного времени затухания от Re_Ω качественно похожа на случай квадратной формы сосуда: она также является немонотонной, причем значение Re_Ω , при котором характерное время затухания минимально, при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\frac{a}{b} = 0.5$ равно 10. Однако время затухания сосуда в форме эллипса больше

времени затухания квадратного сосуда. Стоит отметить, что при увеличении значения параметра $\frac{a}{b}$ до единицы, характерное время затухания колебаний уменьшается. Это связано с тем, при увеличении $\frac{a}{b}$ растет масса жидкости, вовлекаемая в движение.

Течение жидкости в эллиптической полости качественно похоже на течение жидкости в квадратной полости за исключением того, что вторичные вихри возникают в областях симметрично смещенных в сторону движения маятника относительно линии $x = 0$. При $\frac{a}{b} = 1$ (случай полости в форме кругового цилиндра) вторичные вихревые течения отсутствуют. Из данного факта следует, что смена направления вращения жидкости в полости, совершающей вращательные колебания, сопровождается вторичными вихревыми структурами только при отклонении формы полости от кругового цилиндра.

В пятой главе исследовано пространственное движение кубического замкнутого сосуда, полностью заполненного жидкостью, вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести. В качестве параметров задачи выступают: Re_Ω – параметр, обратно пропорциональный вязкости жидкости, ω_{z_0} – начальная гироскопическая угловая скорость и $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – косинусы углов между подвижными главными и вертикальной осями. Значения параметров задавались следующими: $Re_\Omega = 100, \gamma_x = -\sqrt{2/3}, \gamma_y = 0, \gamma_z = -1/\sqrt{3}, 0 \leq \omega_{z_0} \leq 150$.

В пункте 5.1 рассмотрен случай $\omega_{z_0} = 0$. При данном значении ω_{z_0} движение сосуда представляет собой плоские колебания с уменьшающейся амплитудой. Здесь применимы качественные выводы, сделанные в главе 4.

В пункте 5.2 рассмотрен случай $\omega_{z_0} > 0$. В данном случае движение полости становится трехмерным и стремится к регулярной прецессии. На рис. 3а

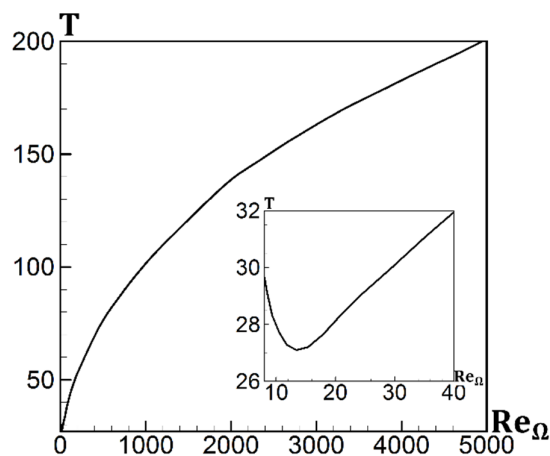


Рис. 2. Зависимость времени затухания от параметра Re_Ω при $\varphi_0 = \pi/2$

изображена траектория движения центра масс сосуда при малом значении ω_{z_0} ($\omega_{z_0} = 10$). В этом случае сосуд совершает затухающие колебания с поворотом плоскости колебаний. По мере уменьшения амплитуды колебания сосуда характер его движения изменяется на регулярную прецессию – вращение вокруг вертикальной оси, причем радиус вращения тем больше, чем больше значение ω_{z_0} , при этом угол нутации стремится к постоянному значению.

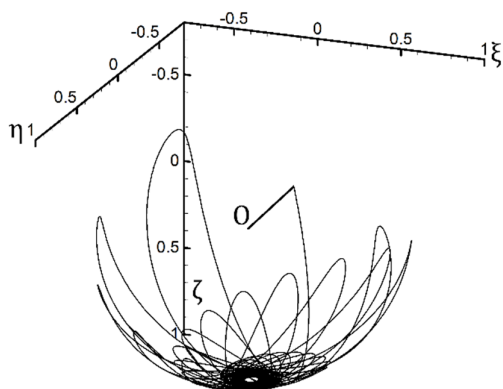


Рис.3а. Траектория центра масс при $\omega_{z_0} = 10$ ($\tau = 0..50$)

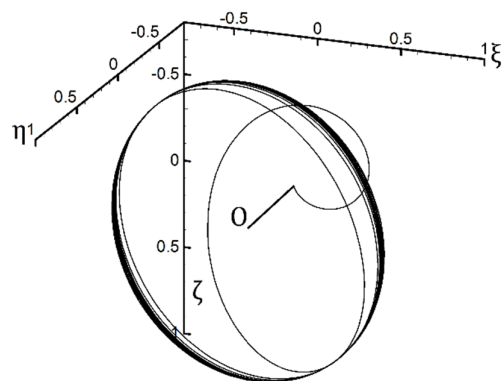


Рис.3б. Траектория центра масс при $\omega_{z_0} = 150$ ($\tau = 0..2.5$)

На рис. 3б показана траектория движения центра масс сосуда при большом значении ω_{z_0} ($\omega_{z_0} = 150$). В данном случае сосуд вращается вокруг оси, двигающейся вокруг начальной оси вращения, с амплитудой движения, увеличивающейся тем медленнее, чем больше значение ω_{z_0} . Это объясняется тем, что при больших угловых скоростях силы инерции значительно преобладают над гравитационными, что приводит к тому, что движение сосуда можно рассматривать как свободное, а свободное движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, происходит так, чтобы главная ось инерции с максимальным значением момента инерции совпала с осью начального вращения. Стоит отметить, что время перехода движения в режим регулярной прецессии зависит немонотонно от ω_{z_0} и принимает минимальное значение в случае $\omega_{z_0} = 45 \pm 5$.

Таким образом, переход движения тела с жидким наполнителем к регулярной прецессии при малых значениях ω_{z_0} происходит через колебания с

поворотом плоскости колебаний, а при больших значениях ω_{z0} – через вращение вокруг оси, близкой к оси начального вращения.

В шестой главе представлены результаты численного моделирования свободных и вынужденных поступательных колебаний тела с прямоугольной полостью, частично заполненной жидкостью. Заданными параметрами задачи являются: отношение массы жидкости к массе тела ($\mu = 0.01$), коэффициент затухания колебаний тела ($\delta = 0.01$), высота начального уровня жидкости ($h = 0.5$), отношение собственных частот колебаний тела к первой моде колебаний жидкости ($\Omega = 1$). Варьируемыми параметрами задачи являются: для свободных колебаний – отношение величины начального отклонения к длине

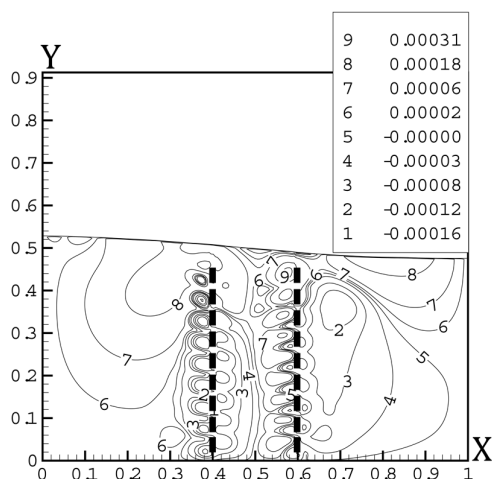


Рис. 4. Картина течения жидкости в колеблющейся полости

полости ($0.001 \leq \varepsilon \leq 0.01$), для вынужденных колебаний – отношение частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебаний тела ($0.9 \leq \beta \leq 1.1$).

В пункте 6.1 представлены картины течения жидкости в колеблющейся полости, имеющей различные конфигурации вставок. Наличие в полости вставок приводит к возникновению интенсивного вихревого течения, что

интенсифицирует процесс диссипации энергии колебания жидкости и приводит к тому, что смена направления течения жидкости сопровождается серией вихрей. Так, на рис. 4 изображены изолинии функции тока для случая размещения в полости двух решеток. На этом рисунке видны вихревые структуры, генерируемые решеткой, и два крупных вихря, вращающиеся в противоположных направлениях, в которые сворачивается поток жидкости при смене направления течения. Также в данном пункте показано, что увеличение расстояния между перегородками приводит к уменьшению интенсивности вихреобразования и уменьшению скорости диссипации энергии движения жидкости.

В пункте 6.2 представлены результаты моделирования случая свободных колебаний тела с полостью. Показано, что при заданных значениях параметров наличие полости с жидкостью приводит к сильным биениям колебаний тела, что связано с тем, что энергия колебаний тела, переходящая в жидкость, не успевает диссипировать и переходит обратно в движение тела. Размещение в полости различных вставок в виде вертикальных перегородок (d – высота перегородок), горизонтальных перегородок (d – высота расположения) и вертикальных решеток приводит к интенсификации диссипативных процессов в жидкости. Как видно из рис. 5, на котором показано изменение полной энергии системы, нормированной на начальное значение, при размещении в полости двух решеток скорость диссипации энергии колебаний тела является максимальной среди рассмотренных случаев.

При изменении величины начального отклонения тела меняется относительная высота пластин решеток (S_n), размещенных в полости, при которых диссипация энергии максимальна. Расчеты показали, что при $\varepsilon = 0.001$ быстрее всего уменьшается энергия колебаний в случае размещения двух решеток с $S_n \approx$

0.7. При увеличении ε относительная высота пластин, при которой энергия диссипирует максимально быстро уменьшается: $S_n \approx 0.5$ при $\varepsilon = 0.005$, $S_n \approx 0.45$ при $\varepsilon = 0.01$.

В пункте 6.3 представлены результаты численного моделирования случая вынужденных колебаний тела с полостью с жидкостью. На рис. 6 показана зависимость амплитуды колебания тела в установившемся режиме от относительной частоты внешнего воздействия при размещении в полости одной решетки ($S_n = 0.5$; пунктирная линия) и двух решеток ($d = 0.9$; сплошная линия). Когда вставки слабо интенсифицируют диссипативные процессы в

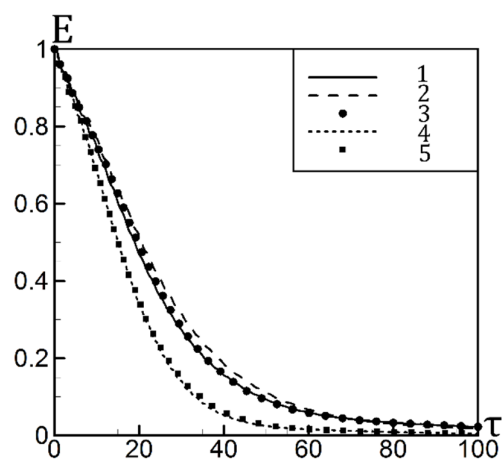


Рис. 5. Зависимость полной энергии от времени: 1 – одна перегородка ($d = 0.7$), 2 – две перегородки ($d = 0.7$), 3 – две горизонтальные перегородки ($d = 0.7$), 4 – две решетки, 5 – три решетки

жидкости имеется два ярко выраженных максимума, иначе – один. Таким образом, изменение геометрии вставок приводит к изменению резонансных частот колебаний тела. Также в данном пункте показано, что диссипация энергии колебаний тела максимальна среди рассмотренных случаев при размещении в полости двух вертикальных решеток ($s_n = 0.4$). В этом случае максимум и среднеквадратическое отклонение от среднего значения амплитуды колебаний тела минимальны по сравнению с другими случаями.

В **заключении** к диссертации подведены итоги работы и сформулированы выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

- Жидкость в полости оказывает демпфирующее воздействие на тело, изменяя характер его движения вокруг неподвижной точки. При $\omega_{z_0} > 0$ предельное движение – регулярная прецессия с радиусом вращения, увеличивающимся с ростом ω_{z_0} . Переход к предельному движению происходит при малых ω_{z_0} ($\omega_{z_0} \lesssim 80$) через колебания с поворотом плоскости колебаний, при больших ω_{z_0} ($\omega_{z_0} \gtrsim 80$) – через вращение вокруг оси, колеблющейся около начальной оси вращения с амплитудой, увеличивающейся тем медленнее, чем больше значение ω_{z_0} .
- Скорость диссипации энергии движения тела немонотонно зависит от параметров системы «тело с жидкостью». При плоских колебаниях сосуда, полностью заполненного жидкостью, характерное время затухания минимально при $Re_\Omega \approx 10$. При пространственном движении вращающегося

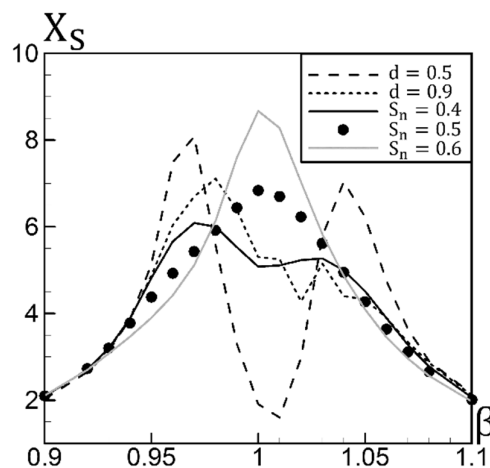


Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний тела от относительной частоты внешнего воздействия

кубического сосуда характерное время выхода на стационарный режим минимально при $\omega_{z_0} = 45$.

- Для поступательных колебаний тела с полостью, частично заполненной жидкостью, наиболее быстрая диссипация энергии среди рассмотренных случаев происходит в случае расположения в полости двух вертикальных решеток. При этом относительная высота пластин решеток, при которой полость с жидкостью диссипирует энергию наиболее быстро, зависит от амплитуды колебания тела, что позволяет путем изменения угла наклона пластин подстраивать демпфер под конкретную амплитуду колебания тела.
- При плоских колебаниях замкнутого сосуда формой, отличной от кругового цилиндра (например в основании квадрат или эллипс), и при поступательных колебаниях открытого сосуда, имеющего вставки, смена направления течения жидкости сопровождается возникновением вихревого течения, существенно влияющем на скорость диссипации энергии.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

- Боталов А. Ю., Зубков П.Т. Колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Тепловые процессы в технике. 2012. Т.4. № 10. С. 449-454.
- Боталов А. Ю. Движение полости, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки // В мире научных открытий. Математика, механика, информатика. 2013. № 2.1(38). С. 9-23.
- Боталов А. Ю., Родионов С.П. Вынужденные колебания твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. 2014. №7. С. 120-126.
- Боталов А. Ю., Зубков П.Т. Численное исследование затухающих колебаний полости, содержащей вязкую жидкость // Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. (10-30 ноября 2011). Москва. 2011. С.192-194.

- Боталов А. Ю. Численное исследование влияния жидкого наполнителя на гироскопическое движение тела // Труды 55-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Управление и прикладная математика. Т. 2. (19-25 ноября 2012). Москва. 2012. С. 41-43.
- Боталов А. Ю., Родионов С.П. Численное исследование колебаний тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // Труды 56-й научной конференции МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Управление и прикладная математика. (25-30 ноября 2013). Москва. 2013. Т.2. С. 53-54.
- Боталов А. Ю. Численное исследование свободного движения тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью // Тезисы докладов XXI Всероссийской школы-конференции молодых учёных и студентов «Математическое моделирование в естественных науках». Пермь. 2012. С. 22-24.
- Боталов А. Ю. Численное исследование движения тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью // Тезисы докладов X Международной конференции молодых ученых: «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики» (13-16 июня 2012). Новосибирск. 2012. С. 23-24.
- Боталов А. Ю. Движение структуры с одной степенью свободы с полостью, частично заполненной жидкостью // Тезисы докладов XXII Всероссийской школа-конференции молодых ученых и студентов: «Математическое моделирование в естественных науках» (2-5 октября 2013). Пермь. 2013. С. 26-28.