

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи



Хохлова Валерия Васильевна

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ РЕДУЦИРОВАНИЯ
ДАННЫХ ВЫСОКОТОЧНОЙ ГРАВИРАЗВЕДКИ
С УЧЕТОМ СФЕРИЧНОСТИ ЗЕМЛИ

Специальность 1.6.9
«Геофизика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук А.С.Долгаль

Пермь, 2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ БУГЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛИ.....	10
1.1. Стандартный граф обработки материалов гравиметрической съемки	11
1.2. Обзор и анализ способов определения аномалий Буге на сферической Земле	12
1.3. Обоснование целесообразности использования сферической модели Земли при редуцировании данных полевых гравиметрических наблюдений.....	30
1.4. Выводы по главе.....	34
2. ОЦЕНКА РАЗЛИЧИЙ ПРИМЕНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛИ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МАТЕРИАЛОВ ГРАВИРАЗВЕДКИ.....	35
2.1. Погрешности, возникающие при вертикальном перемещении аномалиеобразующих масс 36	
2.2. Оценка снизу влияния сферичности Земли	43
2.3. Примеры искажений аномалий силы тяжести, обусловленных влиянием сферичности.....	44
2.4. Выводы по главе.....	47
3. КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛЕВЫХ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩАЯ РЕАЛЬНУЮ ФОРМУ ЗЕМЛИ.....	49
3.1. Обзор способов вычисления гравитационных эффектов для локальных объектов, реализованных в сферической системе координат	50
3.2. Существующие методики вычисления гравитационного эффекта сферического параллелепипеда.....	63
3.3. Новый алгоритм вычисления радиальной составляющей силы тяжести сферического параллелепипеда.....	77
3.4. Основные элементы технологии учета гравитационного влияния топографических масс для шарообразной модели Земли.....	83
3.5. Использование сферы Каврайского с целью повышения точности решения прямых задач гравirazведки	85
3.6. Выводы по главе.....	88
4. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ ДАННЫХ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ.....	90
4.1. Поисковые работы на интрузивном массиве Кондёр	90
4.1.1 Краткая физико-геологическая характеристика района	90

4.1.2. Полевые гравиметрические работы	92
4.1.3. Обработка полевых материалов согласно «Инструкции по гравirazведке».....	96
4.1.4. Обработка полевых материалов согласно предложенному графу обработки	99
4.1.5. Основные геологические результаты	99
4.2. Мониторинговые исследования на Верхне-Камском месторождении калийных солей	
104	
4.2.1 Краткая физико-геологическая характеристика района	104
4.2.2. Полевые гравиметрические работы	105
4.2.3. Обработка полевых материалов согласно «Инструкции по гравirazведке».....	107
4.2.4. Обработка полевых материалов согласно предложенному графу обработки	109
4.2.5. Основные геологические результаты	111
4.3. Выводы по главе 4.....	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	113
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	115

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

При решении прикладных задач в качестве моделей Земли используются плоскость, шар, эллипсоид вращения, квазигеоид, геоид. Каждая последующая модель в этом списке является более точным приближением к реальной фигуре нашей планеты. Предусмотренный "Инструкцией по гравиразведке" граф обработки данных наземной гравиметрической съемки базируется на модели "плоской Земли" и не включает в себя процедуры, учитывающие ее шарообразную форму. Это связано с тем, что на протяжении многих лет существовала необходимость в максимальном упрощении вычислительных процедур, направленном на сокращение трудозатрат при камеральной обработке данных полевых измерений. В наши дни такого рода ограничений не существует, т.к. "эпоха ручного счета" (термин В.Н. Страхова) закончилась после массового внедрения персональных компьютеров в практику геофизических исследований. Также существенно повысилась точность полевых измерений силы тяжести до (0.005–0.015) мГал за счет создания новой гравиметрической и геодезической аппаратуры. Кроме того, произошло расширение круга геологических задач, поставленных перед гравиразведкой, в частности – связанных с выявлением и интерпретацией малоинтенсивных аномалий.

Таким образом, требования геологоразведочной отрасли и возросшие аппаратурно-технические возможности влекут за собой необходимость разработки более совершенных процедур редуцирования гравиметрических измерений, использующих более точные представления о форме Земли. Использование нового графа обработки данных гравиразведки позволит проводить выделение аномалий силы тяжести, обусловленных слабоконтрастными и глубокозалегающими объектами, что повысит эффективность применения метода при геокартировании, прогнозировании, поисках и разведки месторождений полезных ископаемых, а также при

решении инженерно-геологических задач.

Следует отметить, что вопросами учёта сферичности Земли при обработке и интерпретации гравиметрических данных занимались как отечественные исследователи (П.И. Лукавченко, В.И. Старостенко, А.Г. Манукян, Т.В. Романюк, Н.К. Фролова, В.Н. Страхов, В.М. Гордин, А.И. Каленицкий, В.П. Смирнов, Г.Г. Ремпель, С.Г. Бычков, А.С. Долгаль, П.С. Мартышко), так и зарубежные (T.R. LaFeur, J.H. Karl, P. Vanicek, P. Novak, L.R. Jonson, J.J. Litehiser, L. Uieda).

Цель исследований - совершенствование методов обработки результатов полевых гравиметрических наблюдений на основе вычислительных процедур, использующих сферическую модель Земли, с целью увеличения точности определения аномалий силы тяжести в редукции Буге и повышения геологической информативности гравиметрической съемки.

Основные задачи исследований:

В соответствии с поставленной целью в процессе исследований решался ряд конкретных задач, основными из которых являлись:

- Анализ существующих методов учета влияния сферичности Земли при редуцировании данных гравиметрической съемки и решении прямой задачи гравиразведки.
- Создание программно-алгоритмического обеспечения для вычисления гравитационных эффектов, обусловленных влиянием промежуточного слоя горных пород и рельефом местности в точках измерения силы тяжести, находящихся на сферической Земле.
- Разработка графа обработки результатов полевых гравиметрических наблюдений, учитывающего сферическую форму Земли.
- Оценка различий гравитационных аномалий в редукции Буге, рассчитанных с использованием плоской и сферической моделей Земли, на практических материалах.
- Создание новой вычислительной схемы расчета радиальной

составляющей силы тяжести для сферического параллелепипеда на основе кубатурных формул и ее программная реализация.

- Моделирование гравитационных эффектов, обусловленных влиянием сферичности Земли при интерпретации материалов гравиметрической съемки.

Научная новизна:

- Разработаны эффективные алгоритмы для редуцирования данных гравиметрической съемки на шарообразной Земле. Впервые в области гравиразведки использована сфера Каврайского для перехода от геодезических координат к сферическим. Радиус сферы равен 6372.9 км (что обеспечивает минимальные искажения расстояний и углов при вычислении).

- На основании выполненных оценок, полученных с использованием материалов высокоточных гравиметрических съемок, установлены существенные отличия в аномалиях Буге, определенных в рамках плоской и сферической моделей Земли. Эти искажения могут рассматриваться как своеобразная помеха геологического происхождения, амплитуда которой в ряде случаев заметно превышает точность современных гравиметрических съемок.

- Получена новая вычислительная схема вычисления радиальной составляющей силы тяжести для сферического параллелепипеда, основанная на адаптивном квадратурном алгоритме, обеспечивающая высокую точность результатов и скорость счета.

- Предложен способ оценки снизу влияния сферичности Земли при решении прямых и обратных задач гравиразведки на основе различия радиальной и вертикальной компонент поля V_R и V_Z для одной и той же модели источников поля.

- Созданы алгоритм и технология вычисления радиальной производной гравитационного потенциала для совокупности сферических параллелепипедов, обеспечивающие адекватную аппроксимацию рельефа

местности для шарообразной модели Земли.

Практическая значимость исследований:

- Предложенные алгоритмы редуцирования гравиметрических данных на поверхности сферической Земли повышают точность определения аномалий Буге и качество соответствующих цифровых моделей поля.

- Созданные автором компьютерные технологии, предназначенные для обработки материалов гравиметрических съемок, могут использоваться в производственных организациях, выполняющих геофизические исследования методом гравirazведки.

- Разработанный метод вычисления радиальной составляющей силы тяжести V_R для сферического параллелепипеда, обеспечивающий высокую точность и скорость вычислений, может использоваться при решении прямых и обратных задач гравirazведки в компьютерных технологиях, использующих сферическую модель Земли.

Защищаемые положения:

1. Количественные оценки аномальных эффектов, связанных с различиями плоской и сферической моделей Земли, свидетельствующие о целесообразности использования более адекватных реальности представлений о форме уровенной поверхности при обработке и интерпретации материалов гравirazведки.

2. Алгоритм расчета радиальной составляющей силы тяжести, обусловленной влиянием сферического параллелепипеда, базирующийся на применении кубатурных формул для вычисления тройного интеграла, характеризующийся высокой точностью и быстродействием.

3. Граф обработки данных гравиметрической съемки, позволяющий существенно повысить эффективность метода гравirazведки при геокартировании, прогнозировании и поисках месторождений полезных ископаемых за счет учета шарообразной формы Земли.

Личный вклад автора

Анализ и обобщение информации по теме исследований;

математическое обоснование процедур; разработка алгоритмов; написание программ в среде объектно-ориентированного программирования Delphi 7.0; выполнение вычислительных экспериментов; анализ результатов экспериментов; выполнение полевых работ и полного цикла обработки материалов гравirazведки, участие в написании отчетов по результатам производственных работ и грантов.

Фактический материал

Фактической основой исследований послужили материалы геологических фондов, результаты гравиметрических съемок, проводимых Горным институтом УрО РАН, полученные в процессе работы по договорной тематике с рядом нефте - и горнодобывающих предприятий России. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-35-00299-мол_а).

Апробация и публикации

Основные положения и результаты работы докладывались на Международной научной конференции SGEM (Албена, Болгария, 2014); на Уральской молодежной научной школе по геофизике (Пермь, 2013, 2015); на региональных научно-практических конференциях «Геология в развивающемся мире» (Пермь, 2013) и «Геология и полезные ископаемые Западного Урала» (Пермь, 2016, 2018); на Международных семинарах «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» им. Д.Г. Успенского (Екатеринбург, 2014; Пермь, 2015, 2019; Воронеж, 2016; Казань, 2018); на восьмых научных чтениях памяти Ю.П.Булашевича (Екатеринбург, 2015); на Международной научно-практической конкурс-конференции «ГЕОФИЗИКА» (Санкт-Петербург, 2013, 2015); на Международной научно-практической конференции «Теория и практика разведочной и промысловой геофизики» (Пермь, 2014); на юбилейной научно-практической конференции «ПНГ-65» (Пермь, 2015); на Международной научно-практической конференции «Геодезия, картография, кадастр, ГИС – проблемы и перспективы развития» (Новополоцк, 2016); на Международном научном конгрессе «ГЕО - Сибирь»

(Новосибирск, 2017); а также на научных сессиях Горного института УрО РАН (Пермь, 2014, 2015, 2016, 2019).

Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 37 печатных работах, 16 из которых в рецензируемых журналах: десять – в журналах «Вестник Пермского университета. Геология», «Геоинформатика», «Геофизика», «Георесурсы», «Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле», «Горный журнал», включенных ВАК в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых публикуются основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук. Также получено свидетельство о государственной регистрации программы.

Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения общим объемом 118 страниц, содержит список литературы, включающий 82 наименования, а также 46 иллюстраций и 10 таблиц.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность коллективу лаборатории и заведующему лабораторией, д.г.-м.н. С.Г.Бычкову за внимание, непосредственную помощь и ценные советы. За поддержку в процессе исследований автор благодарен к.т.н. А.А. Симанову.

Особо хочу поблагодарить своего научного руководителя доктора физико-математических наук А.С. Долгаля за неоценимую всестороннюю помощь, поддержку, советы и консультации при написании диссертационной работы.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ БУГЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛИ

Предусмотренный "Инструкцией по гравиразведке" [Инструкция, 1980] граф обработки данных наземной гравиметрической съемки не включает в себя процедур, учитывающих сферичность Земли. Действующая "Инструкция по гравиразведке" [Инструкция, 1980] для получения аномалии в редукции Буге предписывает вычислять поправки за промежуточный слой и рельеф местности, основываясь на плоской границе "Земля-воздух". При использовании таких представлений поправка за промежуточный слой $\Delta g_{пр.сл.}$ – это гравитационное влияние бесконечного плоскопараллельного слоя с постоянной плотностью σ , а поправка за рельеф δg_p учитывает отклонения земной поверхности от этого слоя. Вполне очевидно, что такая модель не соответствует реальному распределению топографических масс вокруг гравиметрического пункта.

Между тем, еще В.Н. Страхов отметил, что одним из основных направлений развития интерпретации геопотенциальных полей является разработка теории, методов и численных алгоритмов, основанных на представлении о Земле как о теле, близком к сфере, с использованием соответствующих аналитических соотношений в сферических координатах и геометрических представлений, согласованных с этой системой координат [Страхов, 2000].

Учет сферичности Земли при обработке полевых гравиметрических данных заключается в вычислении влияния топографических масс, расположенных между гравиметрическим пунктом и сферической уровенной поверхностью. Это влияние является суммой двух составляющих: поправки за промежуточный слой и поправки за влияние рельефа местности. При этом промежуточный слой аппроксимируется сферическим слоем, а поправки за рельеф учитывают отклонения реальной поверхности Земли от сферического слоя.

1.1. Стандартный граф обработки материалов гравиметрической съемки

В действующей «Инструкции по гравиразведке» обработка полевых данных в камеральный период включает в себя учет нормального поля, введение поправок за высоту и притяжение промежуточного слоя, вычисление поправок за влияние рельефа местности. В целом значения аномалий Буге вычисляются по формуле:

$$\Delta g_a = g_n + \Delta g_B + \gamma_0, \quad (1.1)$$

где g_n – наблюдаемое значение силы тяжести; Δg_B – поправка Буге; γ_0 – нормальное значение силы тяжести.

Нормальное поле учитывается по формуле:

$$\gamma_0 = 978,016 \cdot (1 + 0,005302 \cdot \sin^2 \varphi - 0,000007 \cdot \sin^2 2\varphi) - 14 \text{ мГал}, \quad (1.2)$$

где φ – широта точки определения силы тяжести.

В «Инструкции по гравиразведке» рекомендуется приводить пункты наблюдений к единому уровню. Для этого надо учесть влияние промежуточного слоя с кажущейся плотностью, полученной по данным наземной гравиметрической съемки. В качестве поверхности относимости обычно принимается уровень моря. Поправка Буге вычисляется как:

$$\Delta g_B = (0,3086 - 0,0419 \cdot \sigma) \cdot H, \quad (1.3)$$

где H – высота пункта наблюдения над уровнем моря, м; σ – плотность пород промежуточного слоя, г/см³.

Вычисление поправок за рельеф местности «Инструкция по гравиразведке» предписывает проводить по топографическим картам или аэрофотоснимкам. Учет ближней зоны (до 100-300 м от точки наблюдения) проводится по крупномасштабным картам (1:5 000 – 1:10 000) или с использованием инструментальных методов. Учет средней и дальних зон рекомендуется выполнять на ЭВМ, используя как палеточные, так и интерполяционные методы. В зависимости от масштаба съемок и рельефа местности радиус учитываемой области варьируется от 50 до 200 км.

Палеточные и табличные способы вычисления поправки за рельеф местности являются трудоемкими и требуют значительных затрат времени, а

также в них присутствует субъективизм выбора средней высоты для каждого фрагмента рельефа. С другой стороны, повсеместное распространение мощных компьютеров и практически полный доступ к цифровым моделям рельефа (ЦМР) разного разрешения, позволяет эффективно использовать компьютерные технологии для решения подобного рода рутинных задач.

1.2 Обзор и анализ способов определения аномалий Буге на сферической Земле

Вопрос необходимости учета сферичности Земли при обработке и интерпретации гравиметрических данных часто поднимался в научных работах. Изучением данной тематики занимались как отечественные, так и зарубежные исследователи. Далее кратко рассмотрим предложенные ранее способы учета криволинейности земной поверхности.

Первой работой, где поднимался вопрос учета сферичности, была книга "Гравиметрические исследования в восточной Африке" [Bullard, 1936], выпущенная Е.С. Bullard в 1936г. Она содержала указания для учета кривизны земной поверхности, а именно то, что в добавление к редукции Буге (Bullard A) необходимо учитывать отклонения реальной поверхности Земли от плоскопараллельного слоя (Bullard B). Позже, в 1942 г. С.Н. Swick предложил в дополнение к поправке Bullard B использовать поправку за рельеф Bullard C [Swick, 1942]. В критической статье 1991 г. Т.Р. LaFehr [LaFehr, 1991] указывалось, что значения, полученные Е.С. Bullard и С.Н. Swick являются неточными и были приведены формулы для точного вычисления поправки Bullard B. Впоследствии возникла дискуссия между М. Talwani [Talwani, 1998] и Т.Р. LaFehr [LaFehr, 1998] по поводу истинности значений, приведенных в работах Е.С. Bullard и С.Н. Swick, а также величины зоны учета влияния рельефа и необходимости учета сферичности Земли вообще. В конечном итоге точными были признаны формулы вычисления поправки Bullard B, полученные Т.Р. LaFehr, а радиус учета влияния рельефа 166.7 км.

Поправка Bullard В базируется на том, что плоскопараллельный горизонтальный слой содержит боковые массы вне реальной Земли и не включает массы, где поверхность Земли опускается ниже пластины (рис. 1.1). Это исправление модифицирует поправку за промежуточный слой с учетом кривизны земной поверхности:

$$BB = 2\pi\gamma\rho(\mu h - \lambda R), \quad (1.4)$$

где γ – гравитационная постоянная; ρ – плотность промежуточного слоя; h – высота точки наблюдения; R_0 – радиус Земли; R – радиус Земли в гравиметрическом пункте, т.е. $R_0 + h$; μ и λ – безразмерные коэффициенты, получаемые по формулам:

$$\mu = \frac{1}{3}\eta^2 - \eta; \quad (1.5)$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \left\{ (d + f\delta + \delta^2) \cdot \sqrt{(f - \delta)^2 + k} + p + m \right. \\ \left. \cdot \log_e \frac{n}{f - b + \sqrt{(f - \delta)^2 + k}} \right\}, \quad (1.6)$$

где

$$\delta = \frac{R_0}{R}; \quad \eta = \frac{h}{R}; \quad d = 3 \cdot \cos^2 \alpha - 2; \quad f = \cos \alpha; \quad k = \sin^2 \alpha; \\ p = -6 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^3 \frac{\alpha}{2}; \quad (1.7) \\ m = -3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha; \quad n = 2 \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right),$$

где α – угол при центре Земли между направлениями на гравиметрический пункт и конец зоны учета.

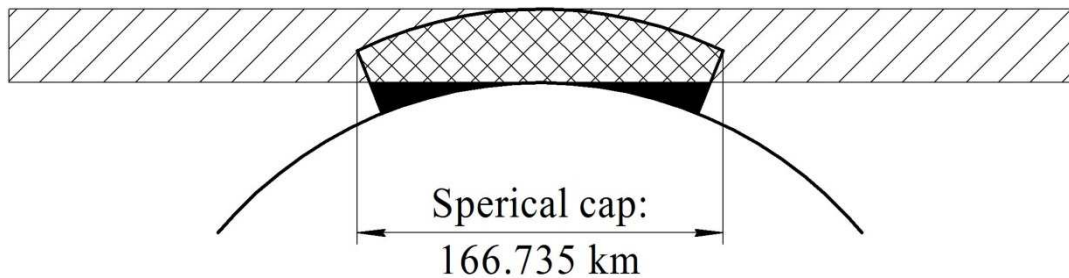


Рис. 1.1 Различия сферического и «плоского» слоя (по T.R. LaFeur)

Следует упомянуть, что формулы T.R. LaFehr [LaFehr T.R., 1991, 2012] и Г.Г. Ремпеля [Ремпель, 1980] дают идентичные результаты, однако использование формулы (1.25) кажется более удобным.

В 1951г. П.И. Лукавченко в своей монографии приводит таблицы и номограммы для вычисления поправки за влияние рельефа с учётом сферичности поверхности Земли [Лукавченко, 1951]. Ученый считал, что за пределами 30 км отклонение поверхности Земли от горизонтальной плоскости заметно влияет на точность вычисления поправки, поэтому вычисление поправки проводилось в трех зонах:

1. *Ближней (до 30 км, без учета сферичности)*. В этом радиусе вся местность разбивается на 19 кольцевых зон, а каждая зона радиальными лучами разделяется на отделения. Далее для каждого отделения выбирается средняя высота и по критическим таблицам, приведенным в монографии [Лукавченко, 1951] определяется поправка за рельеф для этого значения высоты.

2. *Средней (от 30 до 100 км, с учетом сферичности)*. Если поправки за влияние рельефа для "плоской Земли" всегда положительны, то при использовании сферического промежуточного слоя топографические массы могут создавать как положительные, так и отрицательные гравитационные эффекты. Знак δg_p зависит от расположения учитываемых масс относительно не только сферического слоя, но и горизонтальной плоскости, проходящей через точку наблюдения (рис.1.2). Соответственно П.И. Лукавченко предложил формулы вычисления поправки для каждого случая расположения учитываемых масс [Долгаль и др., семинар им. Д.Г.Успенского, 2015]:

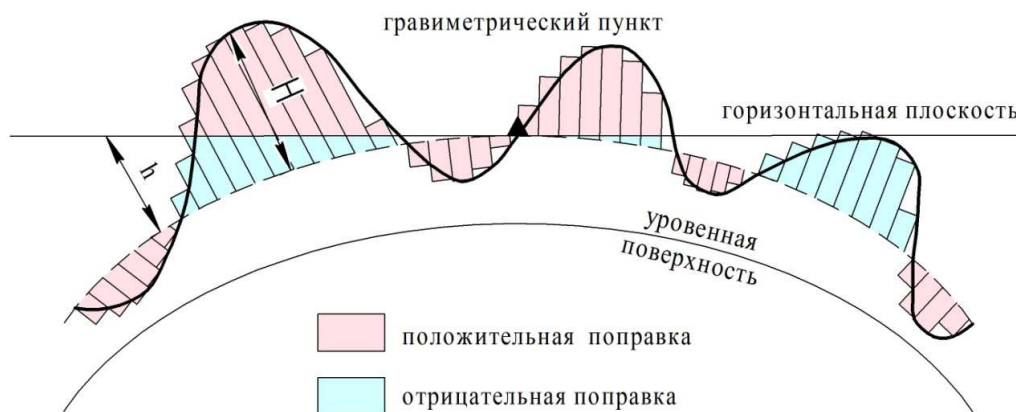


Рис. 1.2 Положительные и отрицательные гравитационные эффекты рельефа земной поверхности (по П.И. Лукавченко)

- Положительные относительные высоты меньше уклонения уровенной поверхности от горизонта, т.е. возмущающие массы находятся ниже горизонтальной плоскости, проходящей через гравиметрический пункт, но выше уровенной поверхности (поверхности сферы) (рис.1.3). В таком случае используется формула:

$$\Delta g(H) = \Delta g(h) - \Delta g(h - H), \quad (1.8)$$

где H – средняя высота столба учитываемых масс; h – отклонение уровенной поверхности, проходящей через гравиметрический пункт, от горизонтальной плоскости, проходящей через тот же пункт; $\Delta g(H)$ – вертикальная составляющая притяжения действительного цилиндрического столба ABCD; $\Delta g(h)$ – вертикальная составляющая притяжения цилиндрического столба с высотой h (столба AB'C'D); $\Delta g(h-H)$ – вертикальная составляющая притяжения цилиндрического столба с высотой $h-H$ (столба BB'C'C);

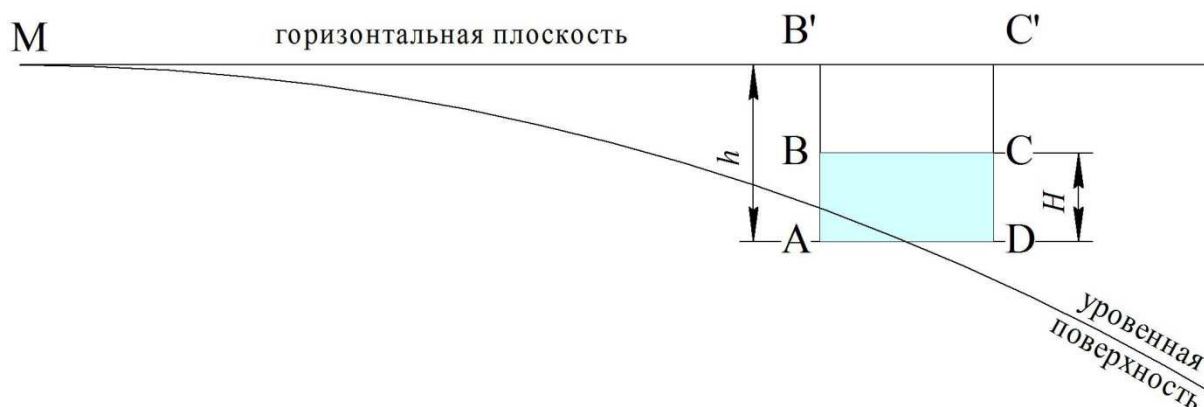


Рис. 1.3. Положительные относительные высоты меньше уклонения уровенной поверхности от горизонта (по П.И. Лукавченко)

- Положительные относительные высоты больше, чем уклонение уровенной поверхности от горизонта, другими словами, учитываемые массы располагаются выше уровенной поверхности и горизонтальной плоскости, проходящих через гравиметрический пункт (рис.1.4). В этом случае поправка за влияние рельефа вычисляется по формуле:

$$\Delta g(H) = \Delta g(H - h) - \Delta g(h), \quad (1.9)$$

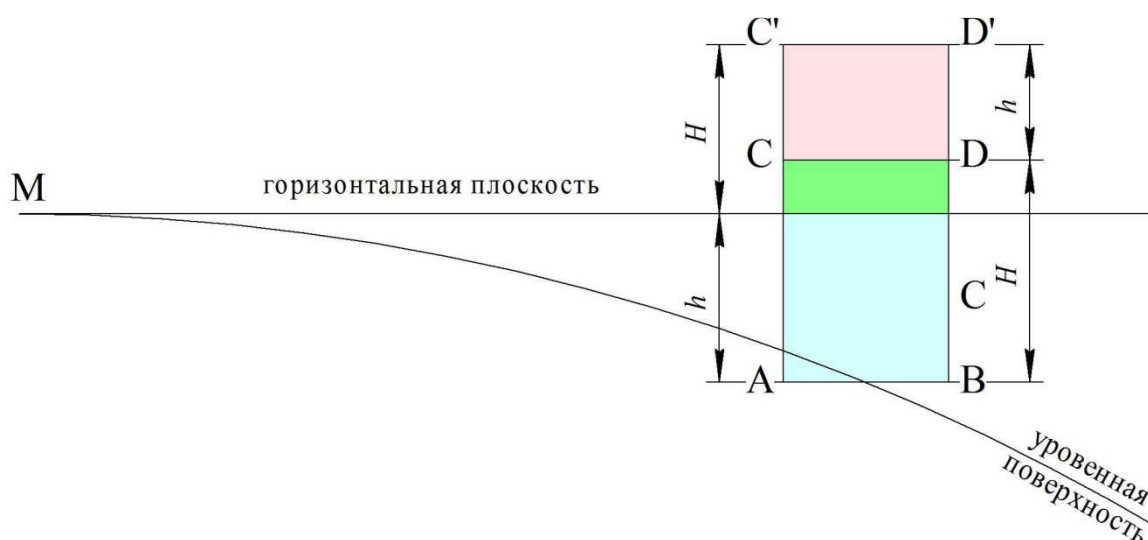


Рис. 1.4 Положительные относительные высоты больше, чем уклонение уровенной поверхности от горизонта (по П.И. Лукавченко)

- Отрицательные относительные высоты. Возмущающие массы находятся ниже уровенной поверхности (рис.1.5). Тогда применяется следующая формула:

$$\Delta g(H) = \Delta g(H + h) - \Delta g(h), \quad (1.10)$$

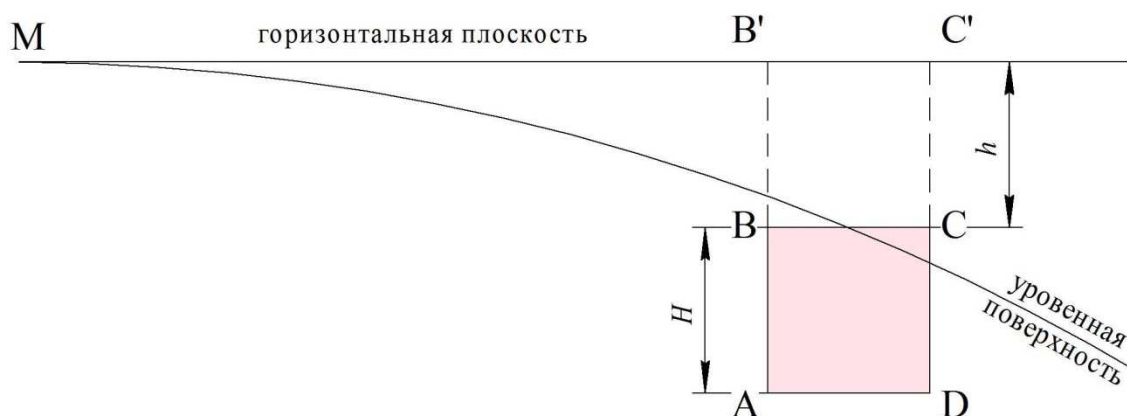


Рис. 1.5 Отрицательные относительные высоты (по П.И. Лукавченко)

3. *Дальней (от 100 до 400 км, с учетом сферичности).* Для далеких зон, вычисления поправок производились по формулам, выведенным для сферической уровенной поверхности, проходящей через пункт наблюдений:

$$\Delta g(\pm H) = \frac{2\pi f\sigma}{n} H \left[\left(\sin \frac{\Theta_\alpha}{2} - \sin \frac{\Theta_i}{2} \right) \pm \frac{3H}{4R} \left(\sin \frac{\Theta_\alpha}{2} - \sin \frac{\Theta_i}{2} \right) \pm \frac{H}{4R} \left(\operatorname{cosec} \frac{\Theta_\alpha}{2} - \operatorname{cosec} \frac{\Theta_i}{2} \right) \right]. \quad (1.11)$$

Здесь знак «плюс» означает, что столб учитываемых масс расположен выше уровенной поверхности, а знак «минус» означает, что столб лежит ниже уровенной поверхности; Θ_α и Θ_i – внешний и внутренний угловые радиусы сферических зон; H – средняя высота отделения. С помощью этой формулы были вычислены и построены номограммы для упрощения процесса получения поправки.

Таким образом, номограммы охватывают пространство вокруг пункта наблюдений в радиусе 400 км. Вычисления поправок в таком большом радиусе будут необходимы только при специальных экспериментальных исследованиях или для обеспечения очень высокой степени точности учета влияния рельефа местности.

В 1966г. М. Takin и М. Talwani [Takin, Talwani, 1966] предложили метод учета окружающего рельефа, основанный на формуле гравитационного притяжения усеченного конуса. Рельеф, вокруг точки расчета разбивается на секционные срезы, центром секции является

вертикальная линия, проходящая через гравиметрический пункт, а величина центрального угла определяется расчлененностью рельефа. Далее каждый секционный срез делится горизонтальными линиями, так, чтобы объем, заключенный между двумя горизонтальными линиями мог быть аппроксимирован усеченным конусом (также конус усечен вертикалью, проходящей через гравиметрический пункт). Гравитационное притяжение каждого такого раздела вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta g &= G\rho\Delta\Psi \left\{ Z_2 - Z_1 - \cos^2\beta \cdot \left(\sqrt{Z_2^2 + r_2^2} - \sqrt{Z_1^2 + r_1^2} \right) \right. \\ &+ (r_1 \cdot \cos^2\beta \cdot \sin\beta - Z_1 \cdot \cos\beta \cdot \sin^2\beta) \\ &\cdot \log \left[\frac{\sqrt{Z_2^2 + r_2^2} \cdot \cos\beta + Z_2 + r_1 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta - Z_1 \cdot \sin^2\beta}{\sqrt{Z_1^2 + r_1^2} \cdot \cos\beta + Z_1 + r_1 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta - Z_1 \cdot \sin^2\beta} \right] \Bigg\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где G – гравитационная постоянная; ρ – плотность топографических масс; β – угол между AB и вертикалью; $\Delta\Psi$ – величина центрального угла секции; Z_1 и Z_2 , r_1 и r_2 – вертикальные и горизонтальные координаты линий A и B относительно гравиметрического пункта (рис. 1.6). Для получения гравитационного влияния всего секционного среза требуется суммировать влияния всех разделов.

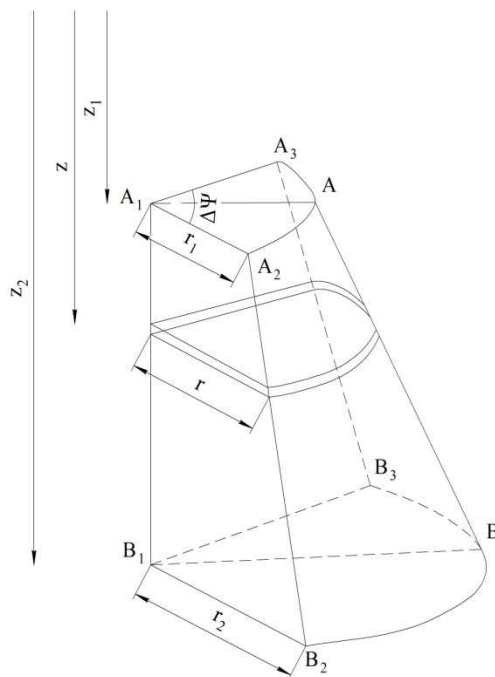


Рис. 1.6 Усеченный конус (по М. Takin и М. Talwani)

Когда данный метод применяется на больших площадях, возникает необходимость учета кривизны Земной поверхности, ввиду ее заметного влияния. Для этого предлагается пересчет координат по следующей формуле (рис.1.7):

$$\begin{aligned} AS' &= (R - Z) \cdot \sin \varphi \\ AC &= R \cdot \left[1 - \cos \varphi \cdot \left(1 - \frac{Z}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $R=OS$ - радиус Земли; Z - глубина A ниже точки D на поверхности; r - расстояние вдоль поверхности Земли от S до D (φ - соответствующая угловая величина).

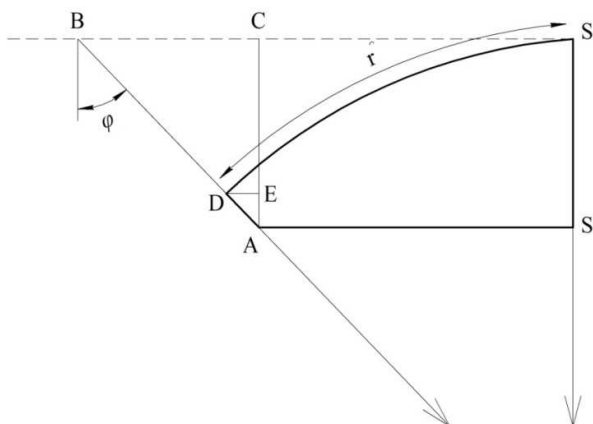


Рис. 1.7 Пояснения к формуле (1.27) пересчета координат

В 1971г. J.H. Karl в краткой заметке [Karl, 1971] предложил заменить стандартную формулу вычисления поправки за промежуточный слой:

$$\alpha = 2\pi\gamma\rho h, \quad (1.14)$$

где γ – гравитационная постоянная; ρ – плотность промежуточного слоя; h – мощность слоя. На формулу эффекта Буге для сферической Земли:

$$\alpha = \gamma \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho \cdot \left[\frac{r^3 - (r - h)^3}{r^2} \right], \quad (1.15)$$

где m – масса сферического слоя плотностью ρ и толщиной h ; r – расстояние от центра Земли до гравиметрического пункта. Формула (1.15) может быть преобразована к виду:

$$\alpha = 4\pi\gamma\rho h \cdot \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{3r^2} \right). \quad (1.16)$$

Значения, полученные по этой формуле, в два раза превышают поправку за промежуточный слой, полученную по формуле (1.14). Таким образом, J.H. Karl приходит к выводу о том, что нельзя использовать плоскопараллельный бесконечный слой для аппроксимации в первом приближении сферической Земли. Такой подход получил критические замечания, с учетом того, что топографические массы, удаленные более чем на 166.7 км от гравиметрического пункта, оказывают крайне незначительный эффект на значения аномалии Буге. В то время как, для крупномасштабных геодезических или изостатических построений используются собственные методики учета сферичности всей Земли [Heiskanen, Meinenz, 1958].

В 1974г. в своей монографии В.М. Гордин [Гордин, 1974] приходит к выводу, что учёт влияния рельефа при редуцировании гравиметрических данных должен осуществляться в «зоне достаточно большого радиуса». А поскольку уже при радиусе зоны более 50 км заметное влияние на величину поправки оказывает эффект сферичности Земли, возникает необходимость его учёта. Для этого стандартная формула вычисления поправки в редукции Буге:

$$\Delta g_B = g_n - \gamma = g_n - \gamma_0 + 0.3086 \cdot H - 0.0419 \cdot \sigma \cdot H + \Delta g_P, \quad (1.17)$$

где g_n – измеренные значения силы тяжести в точке, γ – притяжение некоторой теоретической модели Земли, γ_0 – нормальное значение силы тяжести на поверхности эллипсоида, H – превышение пункта над эллипсом относимости, σ – плотность промежуточного слоя, Δg_P – поправка за рельеф местности, заменяется на формулу с учётом сферичности Земли:

$$\Delta g_B' = g_n - \gamma_0 + 0.3086 \cdot H - g_{\text{сф.с.}}(\psi_0) + \Delta g_P, \quad (1.18)$$

где $\psi_0 = R / R_3$; R – радиус учитываемой зоны, R_3 – радиус Земли. Как видно из формулы (1.18) поправка за плоскопараллельный промежуточный слой заменяется поправкой за сферический слой. В.М. Гордин отказывается от полной топографической редукции, предлагая вычислять влияние топографических масс не всей Земли, а части сферического слоя, заключенной в пределах области интегрирования.

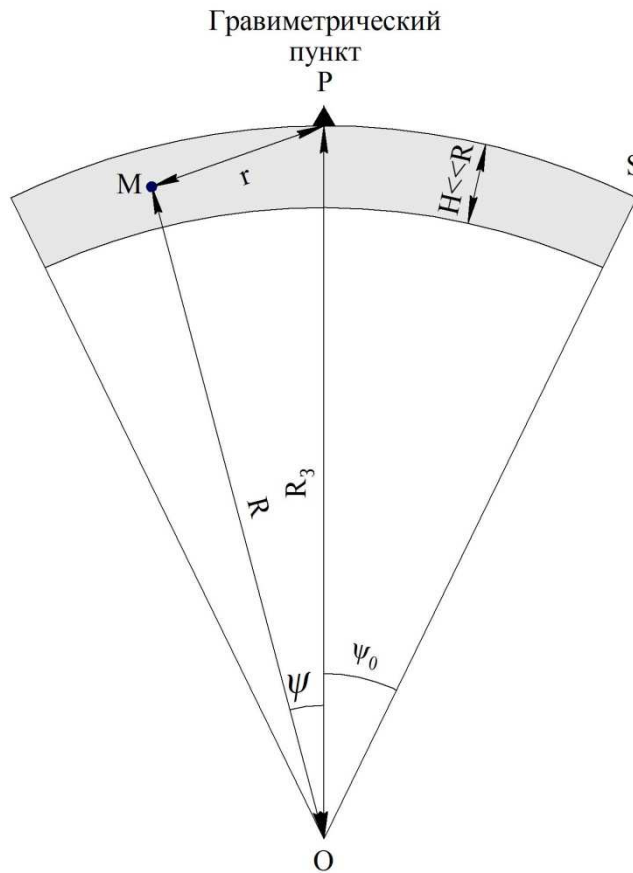


Рис. 1.8 Переход к сферической системе координат (по В.М. Гордину)

Для этого осуществляется переход к сферической системе координат с началом в центре Земли. В таком случае вертикальная составляющая притяжения части сферического слоя малой мощности $H \ll R \ll R_3$ на внешний пункт P (рис.1.8) определится по формуле:

$$g_{\text{сф.с.}}(\psi_0) = f \cdot \sigma \cdot H \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \frac{R_3^2 \cdot \sin \psi d\psi d\varphi}{r} \right]_{\rho=R_3}, \quad (1.19)$$

где ρ , ψ , φ – координаты точки P в сферической системе координат. Поскольку $r^2 = R_3^2 + \rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot R_3 \cdot \cos \psi$, находим, что:

$$\frac{R_3^2 \cdot \sin \psi d\psi}{r} = \frac{R_3}{\rho} dr \quad (1.20)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.19) и меняя пределы интегрирования по ψ , получим:

$$g_{\text{сф.с.}}(\psi_0) = -2\pi f \sigma R_3 H \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + R_3^2 - 2R_3 \rho \cos \psi_0} - (\rho - R_3)}{\rho} \right]_{\rho=R_3} = \quad (1.21)$$

$$= 2\pi f \sigma H \left(1 + \frac{1 - \cos \psi_0}{\sqrt{2(1 - \cos \psi_0)}} \right).$$

Отсюда при $R \ll R_3$ получим:

$$g_{\text{сф.с.}} = 2\pi f \sigma H \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{R_3} \right) = 0.0419 \sigma H (1 + 0.000157 R), \quad (1.22)$$

где R выражается в километрах.

Как позже показал Г.Г. Ремпель [Ремпель, 1980], формула В.М. Гордина не учитывает нелинейную зависимость аномалии Δg от мощности промежуточного слоя.

В.М. Гордин отмечает, что при вычислении аномалий Δg_B по стандартной формуле (1.17), значения поправок за рельеф, рассчитанные с учетом сферичности Земли, должны быть уменьшены на величину

$$\Delta = 0.0419 \cdot 0.000157 \sigma H R. \quad (1.23)$$

Как именно нужно учитывать сферичность земли при вычислении поправок за рельеф местности в статье не указывается. Возможно, учёт сферичности должен быть произведен на этапе ввода входных данных при использовании палеточных способов определения влияния топографических масс.

В 1980г. Г.Г. Ремпель в своей статье [Ремпель, 1980] отмечает, что наиболее распространенная в разведочной гравиметрии редукция Буге обеспечивает высокую точность аномального поля в районах со слаборасчлененным рельефом. В тоже время при исследовании районов с резко расчлененным рельефом (колебания высот более 50-100 м) редукция Буге уже не удовлетворяет потребностям крупномасштабных съемок, поскольку пренебрегает близкой к сферической формой Земли.

Для устранения этой погрешности необходимо заменить бесконечный горизонтальный промежуточный слой на сферический, при этом учитывать сферический слой не целиком (по всей Земле), а ограничиться учетом некоторого сектора этого слоя. Одной из целей статьи Г.Г. Ремпеля [Ремпель, 1980] является определение размеров учитываемой области.

Также Г.Г. Ремпель указывает на тот факт, что попытки учета сферичности Земли при вычислении поправок за рельеф предпринимались неоднократно, в частности, это предусмотрено в номограммах П.И. Лукавченко [Лукавченко, 1951]. Однако учет сферичности Земли должен распространяться не только на поправки за рельеф, но и на поправки за промежуточный слой.

Г.Г. Ремпелем был проведен ряд экспериментов, результаты которых показали, что в случае крупномасштабных съемок нельзя пользоваться редукцией Буге. Также он получил выражение для приближенных расчетов поправки за промежуточный слой:

$$\Delta g = 2\pi f\sigma \left\{ 1 + \frac{l}{2R_1} - H \left[\frac{1}{2}l + \frac{1}{R_1 - l} \right] \right\}, \quad (1.24)$$

где $H=R_2-R_1$ – мощность промежуточного слоя. При радиусе учета более 100 км погрешность вычислений по формуле [1.24] не превышает 0.03 мГал.

Более того, Г.Г. Ремпель приводит формулу для вычисления аномалии силы тяжести в «модернизированной» редукции:

$$\Delta g = g - \gamma_0 + \left\{ 0.30855 \cdot (1 + 0.000711 \cos 2\varphi) - 0.0000000725H - 0.04193\sigma \cdot \left\{ 1 + \frac{l}{2R_1} - H \left[\frac{1}{2}l + \frac{1}{R_1 - l} \right] \right\} \right\} \cdot H + \delta g_p, \quad (1.25)$$

где g – измеренное значение силы тяжести; δg_p – поправка за рельеф, вычисляемая с учетом сферичности Земли.

Также в этой статье Г.Г. Ремпель приходит к выводу, что для целей разведочной гравиметрии можно считать, что массы, расположенные за пределами зоны радиуса 50 км, обуславливают постоянный вертикальный градиент поля силы тяжести. Соответственно, оптимальная схема учета влияния рельефа местности выглядит как:

1) во внутренней зоне до 50 км поправки вычисляются в модернизированной редукции (1.25);

2) во внешней зоне от 50 до 500 – 2000 км вычисляются вертикальные градиенты Δg и поправка за эту зону приобретает следующую форму:

$$\delta g^* = V_{zz}H, \quad (1.26)$$

где V_{zz} – вертикальный градиент Δg .

В 1981г. А.И. Каленицкий и В.П. Смирнов получили ряд простых, но весьма точных приближенных формул для определения притяжения сферического слоя с конкретными параметрами.

Например, при радиусе зоны от 0 до 3000 км для слоя толщиной H_u высокую точность обеспечивает формула:

$$\delta g^{\text{сф.пр.с}}(r, H_u) = \delta g^{\text{пл.с}}(r, H_u) \cdot \left[\pm 1 + \sin \frac{r}{2R} - 0.00012 \cdot H_u \right], \quad (1.27)$$

где R – среднее значение радиуса Земли, равное 6371 км; $\delta g^{\text{пл.с}}(r, H_{\text{ц}}) = 2\pi f \sigma_0 \cdot \left[r + H_{\text{ц}} - (r^2 + H_{\text{ц}}^2)^{1/2} \right]$ – выражение притяжения плоскопараллельного слоя; величина коэффициента 0.00012 при $H_{\text{ц}}$ соответствует выражению его в километрах; величина знака при единице в квадратных скобках правой части формулы соответствует положению результирующей точки на слое или уровне его основания.

Если принять во внимание малость величины отношения $r/2R$ и то, что сферичность Земли начинает проявляться при $r \geq 5-10$ км, можно считать малой величиной и отношение $H^2/2R^2$, тогда формула (1.27) преобразуется к виду:

$$\delta g^{\text{сф.пр.с}}(r, H_{\text{ц}}) = \delta g^{\text{пл.с}}(r, H_{\text{ц}}) + F(r) \cdot H_{\text{ц}} - 0.0067 \cdot \sigma_0 \cdot H_{\text{ц}}^2, \quad (1.28)$$

где

$$F(r) = 2\pi f \sigma_0 \cdot \sin \frac{r}{2R} \approx \pi f \sigma_0 \frac{r}{2R} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{24R^2} \right) \cong \pi f \sigma_0 \frac{r}{R}. \quad (1.29)$$

В этой формуле уже в явном виде отражается сферическая составляющая. Формулы (1.27) и (1.28) обеспечивают высокую точность получения результатов – с погрешностью, не превышающей 0.01%.

Для вычисления поправки за рельеф местности А.И. Каленицкий и В.П. Смирнов предложили разбить учитываемую область вокруг результирующей точки на n круговых зон, а зоны на m секторов. Тогда формула для вычислений выглядит следующим образом:

$$\delta g^{\text{сф}}(r_{\text{н}}, r_{\text{к}}) \cong \alpha \cdot (H_{\text{ц}}^2 + \overline{H^2} - 2H_{\text{ц}} \cdot H_0) + F(r_{\text{н}}, r_{\text{к}}) \cdot (H_{\text{ц}} - \tilde{H}). \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} F(r_{\text{н}}, r_{\text{к}}) &= F(r_{\text{к}}) - F(r_{\text{н}}); \\ \tilde{H} &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(r_{i1}, r_{i2}) \cdot H_{ij}}{m \cdot \sum_{i=1}^n F(r_{i1}, r_{i2})} \cong \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta r_i \cdot H_{ij}}{m \cdot \Delta r}; \\ H_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta r_i}{r_{i1} \cdot r_{i2}} \overline{H_i}}{\frac{\Delta r}{r_{\text{н}} \cdot r_{\text{к}}}}; \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\overline{H^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\Delta r_i}{r_{i1} \cdot r_{i2}} \cdot H_{ij}^2}{m \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\Delta r_i}{r_{i1} \cdot r_{i2}}};$$

$$\alpha = \pi f \sigma_0 \cdot \frac{\Delta r}{r_n \cdot r_k};$$

r_{i1} и r_{i2} – величины внутреннего и внешнего радиусов i -ой зоны; H_{ij} – высота рельефа в j -ом секторе i -ой зоны; r_n и r_k – размеры внутреннего и внешнего радиуса всей учитываемой области.

В серии статей 1986-2001г. [Novak et al., 2001; Vanicek, Krakiwsky, 1986, Vanicek et al., 2001] говорится о том, что существует две абсолютно противоположных аномалии Буге: плоская аномалия Буге (в которой промежуточный слой аппроксимируется бесконечной плитой) и сферическая аномалия Буге (аппроксимация сферическим слоем). А также ведется обширная дискуссия о физическом смысле редуцирования гравиметрических данных вообще.

В статье [Vanicek et al., 2001] дается вывод, что нет существенной разницы в том, какую модель использовать для вычисления аномалии в классической редукции Буге: плоскопараллельный слой или сферическую оболочку. Между значениями, полученными с использованием двух разных моделей, возникает разница второго порядка, которая легко компенсируется «поправкой за кривизну», вычисляемой по формуле:

$$\delta A_S^B = -8\pi G \sigma \frac{H^2}{R}, \quad (1.32)$$

где G – гравитационная постоянная; σ – плотность промежуточного слоя; H – мощность слоя; R – радиус Земли. Однако, также упоминается, что при использовании сферического слоя для вычисления поправки за промежуточный слой, необходимо использовать и поправки за рельеф с учетом кривизны Земной поверхности.

В статье А. Yamamoto [Yamamoto, 2002] говорится о том, что необходимо модифицировать существующую технологию вычисления аномалии в редукции Буге, т.к. эффект от пренебрежения сферичностью Земли может быть сопоставим с аномалиями от искомым геологических объектов. Традиционная редукция Буге, игнорирующая реальную поверхность Земли, имеет склонность к «сверхкомпенсации» гравитационных эффектов. Поправка за рельеф с учетом сферичности регулирует эту «сверхкомпенсацию», поэтому особенно необходима в условиях сильно расчлененного рельефа.

Таким образом, в статье А. Yamamoto показывается метод вычисления сферической поправки за рельеф с использованием ЦМР размерностью 50x50 м. Поправку за промежуточный слой с учетом сферичности Земли предлагается считать по формуле Y. Nagiawara [Nagiawara, 1975]:

$$B' = 2\pi G\rho \cdot \left(a + h - \sqrt{a^2 + h^2}\right), \quad (1.33)$$

где G – гравитационная постоянная; ρ – плотность промежуточного слоя; a – радиус учета топографических масс; h – мощность промежуточного слоя.

Для вычисления поправки за рельеф, окружающая топография условно разбивается на 4 зоны:

Зона А. Включает в себя расстояние до 30-40 м вокруг гравиметрического пункта. Окружающая топография аппроксимируется набором (от четырех до восьми) сегментов усеченного конуса. Эти сегменты имеют общую ось, проходящую через гравиметрическую станцию, а их базальная дуга имеет радиус r . Подобные аппроксимирующие элементы использовали М. Takin и М. Talwani [Takin, Talwani, 1966].

Зона В. Учитывается влияние топографических масс, расположенных от пределов зоны А до 150 м. Рельеф аппроксимируется прямоугольными призмами или цилиндрически-усеченными призмами.

Зона С. Радиус зоны колеблется в пределах 10-20 км от гравиметрического пункта. Для аппроксимации топографических масс используются прямоугольные призмы.

Зона D. Пределы зоны могут колебаться в зависимости от расчлененности рельефа и решаемых задач. В вышеупомянутой статье [Yamamoto, 2002] используется величина 50-100 км. Для описания топографических масс в этой зоне используется линейная аппроксимация, т.к. гравитационное притяжение быстро уменьшается по мере удаления от гравиметрического пункта. Вследствие чего, использование прямоугольных призм для аппроксимации кажется непрактичным в связи с большими временными затратами.

В 2004г. в статье Y. Zhanjun и C. Yuru [Zhanjun, Yuru, 2004] указывают на тот факт, что при гравиметрических съемках в горных областях, необходимая точность гравитационных аномалий не может быть достигнута, несмотря на совершенствование гравиметрической и топографической аппаратуры и методик проведения работ. Традиционная обработка гравиметрических данных включает в себя поправки за широту и высоту точки наблюдения, а также поправки за промежуточный слой и рельеф местности. Понятно, что с увеличением точности планово-высотной привязки повышается и точность поправок за широту и высоту гравиметрического пункта. Однако, использование плоскопараллельного слоя в качестве модели для получения поправок за промежуточный слой и рельеф местности, ведет к неучету криволинейности Земной поверхности и связанным с этим погрешностям. Соответственно, авторы предлагают заменить традиционные формулы вычисления поправок за промежуточный слой и окружающий рельеф на алгоритмы, учитывающие сферичность Земли. Как и многие ученые, авторы используют прямоугольные призмы для аппроксимации топографических масс.

Поправку за промежуточный слой следует вычислять по формуле:

$$\begin{aligned}
\Delta g(r_1, r_2, \Theta) = & -\frac{2}{3}\pi G\rho \\
& \cdot \left\{ \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right) + \sqrt{2(1 - \cos\Theta)} \cdot (3\cos^2\Theta + \cos\Theta - 1) \right. \\
& - \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2\left(\frac{r_1}{r_2} \right)\cos\Theta + 1} \\
& \cdot \left(\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)\cos\Theta + 3\cos^2\Theta - 2 \right) + 3\cos\Theta \cdot \sin^2\Theta \\
& \cdot \ln \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r_2} \right) - \cos\Theta + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2\left(\frac{r_1}{r_2} \right)\cos\Theta + 1}}{(1 - \cos\Theta) + \sqrt{2(1 - \cos\Theta)}} \right) \Bigg\}, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

где r_1 - радиус от центра Земли до нижней границы сферического слоя, т.е. радиус Земли; r_2 - радиус от центра Земли до верхней границы сферического слоя, т.е. $r_2 = r_1 + h_0$; h_0 - высота гравиметрического пункта; Θ - угол, определяющий величину зоны учета топографических масс, $\Theta = \tilde{s}/r_2$; $\tilde{s}$ - сферическое расстояние от точки наблюдения до конца зоны учета.

Поправка за окружающий рельеф вычисляется по формуле:

$$\Delta g = G\rho \left| \left| \left\{ X \cdot \ln(Y + R) + Y \cdot \ln(X + R) - Z \cdot \operatorname{tg}^{-1} \frac{XY}{RZ} \right\} \right|_{x'-a'}^{x'+a} \right|_{y'-b'}^{y'+b'} \Bigg|_{h_1}^{h_2}, \tag{1.35}$$

где G - гравитационная постоянная; ρ - плотность пород, слагающих рельеф; $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, X, Y, Z - переменные интегрирования;

$$\begin{aligned}
x' &= (r_0 + h) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot s}{r_0} \right) \cdot \frac{x}{s}; \\
y' &= (r_0 + h) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot s}{r_0} \right) \cdot \frac{y}{s}; \\
a' &= a \cdot m \cdot \cos \left(\frac{m \cdot x}{r_0} \right); \\
b' &= b \cdot m \cdot \cos \left(\frac{m \cdot y}{r_0} \right); \tag{1.36}
\end{aligned}$$

$$h_1 = (r_0 + h_0) - (r_0 + h_0) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot s}{r_0}\right);$$

$$h_2 = (r_0 + h_0) - \sqrt{(r_0 + h_0)^2 - (r_0 + h_0)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot s}{r_0}\right)};$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$m = \cos\left(\frac{y_0}{r_0}\right),$$

где x , y - координаты топографической точки (начало координат в гравиметрическом пункте); a , b - половина длины и половина ширины прямоугольной призмы, аппроксимирующей топографические массы; r_0 - средний радиус Земли; h_0 - высота точки наблюдения; y_0 - абсцисса точки наблюдения в Гауссовской системе координат.

Как утверждается в рассматриваемой статье, применение описанного метода вычисления сферической топографической поправки при редуцировании гравиметрических данных, может привести к значительному повышению точности гравитационных аномалий, особенно при проведении работ в горных областях.

1.3. Обоснование целесообразности использования сферической модели Земли при редуцировании данных полевых гравиметрических наблюдений

Для того чтобы обосновать целесообразность использования сферической модели, оценим отклонения сферической поверхности Земли от горизонтальной плоскости, соприкасающейся с этой поверхностью в пункте гравиметрических наблюдений. Для этого возьмем окружность с радиусом $R = 6365.57$ км. Такая величина получена путём вычисления радиуса эллипса в заданной точке на широте $\varphi = 50^\circ$ для земного эллипсоида с полуосями $a = 6356.8$, $b = 6378.1$ км. Радиус зоны учёта влияния промежуточного слоя L примем равным 200 км (рис. 1.9), т.к. обычно именно в таких пределах рассчитывают поправки за влияние рельефа для гравиметрических съёмок

масштаба 1:50 000 и мельче [Инструкция, 1980]. В таком случае отклонение по высоте DH плоской и сферической моделей на краю зоны учёта составит 3.14 км, а разница зоны учёта L и дуги сегмента C будет равняться -65 м. Одни и те же гравиметрические пункты, за счет имеющихся различий высот DH в рассмотренных выше моделях Земли, использующихся при редуцировании результатов полевых измерений, будут характеризоваться разными аномальными значениями силы тяжести. Поэтому возникает необходимость учёта максимально приближенной к реальной поверхности Земли при обработке материалов гравиметрических съемок [Хохлова, 2015].

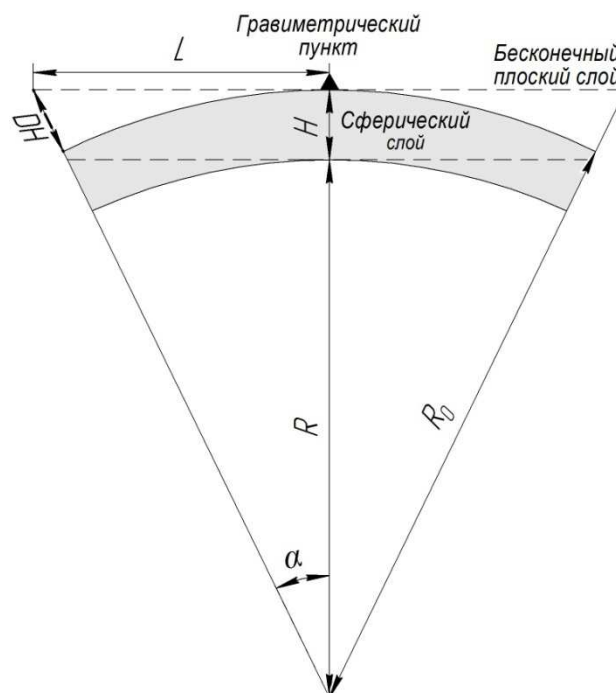


Рис. 1.9 2D модель Земли: сферический и плоский промежуточный слой, используемые при вычислении аномалий Буге

Учет влияния криволинейности земной поверхности при обработке гравиметрических данных состоит в двух аспектах. В первую очередь необходимо учесть сферичность Земли в поправке за промежуточный слой, а далее учесть отклонения реального рельефа местности от сферического промежуточного слоя. Для математического описания (аппроксимации) этого слоя целесообразно использовать не плоскопараллельную бесконечную модель, а более адекватную сферическую – например, набор сферических

сегментов или сферических параллелепипедов. В качестве примера приведем сравнение гравитационных эффектов от горизонтального бесконечного диска и сферического сегмента, при радиусе последнего 200 км. Диапазон изменения мощности промежуточного слоя составляет 0–3000 м. Как свидетельствует рисунок (рис.1.10) максимальное расхождение поправок Буге для разных моделей достигает -2,42 мГал, при среднем для выбранного интервала значении -1,43 мГал. В Пермском крае высоты пунктов гравиметрических наблюдений составляют, преимущественно, 300–600 м, различия поправок за промежуточный слой для этого случая лежат в пределах от -0,47 до -0,89 мГал, что значительно превышает точность съемки. Но это только часть той ошибки, которую мы сознательно включаем в полевые гравиметрические данные. Свою лепту вносит и неучет сферичности Земли при вычислении гравитационного влияния рельефа [Долгаль, Хохлова, 2014].

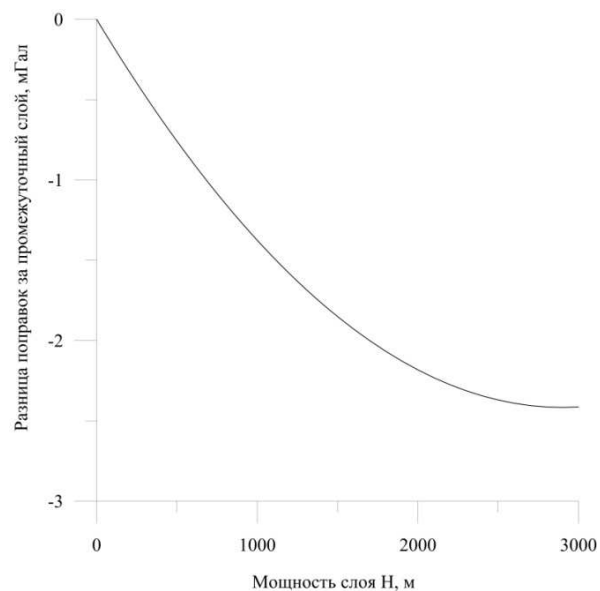


Рис. 1.10. Разница поправок за промежуточный слой, полученная для плоской и сферической моделей

Рассмотрим пример вычисления аномалии в редукции Буге для территории Пермского края и прилегающих регионов до расстояния 200 км от границ края по данным глобальных цифровых моделей рельефа создана

регулярная сеть высот рельефа с шагом 1 км. С помощью программы «New Standards» [Khokhlova, 2014] для всей территории Пермского края была вычислена поправка за промежуточный слой по стандартной методике и с учетом сферичности (радиус учета $L = 200$ км). По программе «TopWin» [Симанов, 2008] были рассчитаны поправки за рельеф для "плоской" и "сферической" Земли – $\delta g_{пл}$ и $\delta g_{сф}$, соответственно. Имея в виду то, что сферичность Земли начинает проявляться при радиусе учета $L \geq 5-10$ км, внешний размер области учитываемого рельефа составил 200 км, внутренний – 10 км. Разница между аномалиями Буге (рис.1.11), полученными для «плоской» и «сферической» моделей Земли достигает 3 мГал в горных районах на востоке Пермского края, при среднем ее значении 0.47 мГал, что превышает точность определения аномалии силы тяжести в редукции Буге для 1:200 000 масштаба исследований.

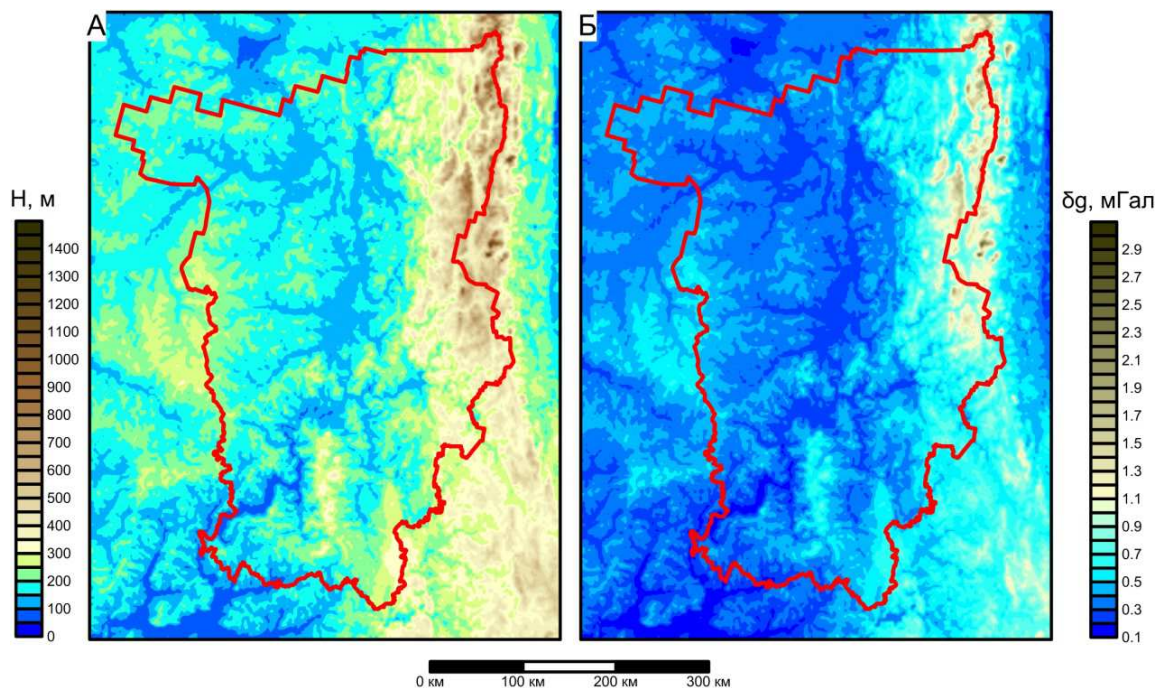


Рис. 1.11 Сравнение аномалий Буге, полученных для «плоской» и «сферической» моделей Земли.

А – рельеф местности в м; Б – разность аномалий Буге в мГал.

Красный контур: административная граница Пермского края

Редуцирование гравиметрических данных с учетом сферичности Земли представляет наибольшую сложность в обработке полевых материалов. Однако использование устаревшей «плоской» модели Земли при обработке может вносить неконтролируемые погрешности в вычисленные аномалии Буге, что отрицательно влияет на последующую геологическую интерпретацию гравиметрических карт [Бычков, Симанов, 2014].

1.4. Выводы по главе

В стандартной процедуре редуцирования для аппроксимации промежуточного слоя используется модель горизонтальной плиты, т.к. эффект, оказываемый сферичностью Земли, считается пренебрежительно малым. Е.С. Bullard [Bullard, 1936] первым обратил внимание на необходимость учета сферичности Земли при вычислении аномалии в редукции Буге, предлагаемая поправка изменяла геометрию промежуточного слоя с горизонтальной плиты на сферический слой, и была названа «Bullard В». В 1942 г. С.Н. Swick [Swick, 1942] предложил в дополнение к поправке Bullard В использовать поправку за рельеф Bullard С, которая учитывает отклонения реального рельефа от идеализированной сферической поверхности Земли.

Также ряд ученых [Takin, Talwani, 1966; Karl, 1971; Vanicek et al., 2001; Гордин, 1974; Лукавченко, 1961, Ремпель, 1980; Каленицкий, Смирнов, 1981; Kloch, Kruński, 2010] указывали на важность учета сферичности Земли при редуцировании гравиметрических данных. Несмотря на это, в большинстве российских учебников по гравиразведке [Любимов, 1978; Маловичко, 1966; Инструкция, 1980; Гравиразведка: Справочник геофизика, 1990; Хмелевской, Костицын, 2010] поправки за кривизну Земной поверхности не упоминаются, более того, даже алгоритмы наших соотечественников [Лукавченко, 1951; Ремпель, 1980; Каленицкий, Смирнов, 1981; Гордин, 1974] так и не были введены в практику проведения обработки гравиметрических работ.

2. ОЦЕНКА РАЗЛИЧИЙ ПРИМЕНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛИ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МАТЕРИАЛОВ ГРАВИРАЗВЕДКИ

При решении подавляющего большинства геокартировочных и прогнозно-поисковых геологических задач методом гравirazведки в силу ограниченных размеров изучаемых площадей сферичностью Земли пренебрегают. Существуют различные мнения по поводу целесообразности учета сферичности Земли при обработке и интерпретации материалов гравиметрических съемок. По представлениям В.Н. Страхова такой учет необходимо проводить для территорий, обладающих линейными размерами более 100 км [Страхов, 2000]. В.Н. Сеначин [Сеначин, 2015] полагает, что это необходимо лишь при построении региональных геоплотностных моделей с площадью более 20 млн. км². Ю.В. Пятаков, В.И. Исаев считают, что "когда изучаемые структуры имеют протяженности порядка тысячи километров и более, необходимо учитывать сферичность Земли" [Пятаков, Исаев, 2012].

Вопрос о влиянии сферичности Земли следует рассматривать в двух аспектах – применительно к качественной и количественной интерпретации материалов гравirazведки.

Качественная интерпретации гравиметрических карт, основанная на анализе морфологических особенностей аномалий силы тяжести в редукции Буге, проводится с целью выделения пликативных и дизъюнктивных геологических структур, а также локализации перспективных площадей для дальнейшего изучения. Сферичность Земли на результаты качественной интерпретации заметного влияния не оказывает. Плановое положение аномалий силы тяжести и отвечающих им геологических объектов совпадает, поэтому все интерпретационные построения могут выполняться в любой системе координат.

Традиционные подходы к количественной интерпретации гравитационных аномалий базируются на решение прямых и обратных задач гравirazведки для первой вертикальной производной потенциала V_z в

прямоугольных координатах ΣXYZ , т.е. используют модель "плоской Земли". Представления о сферической Земле уже могут потребоваться при количественной интерпретации материалов среднемасштабных гравиметрических съемок. При этом для описания геометрии источников и местоположения точек расчета поля применяется сферическая система координат $\Sigma r\varphi\lambda$, а интерпретируемые значения силы тяжести отождествляются с ускорением силы тяжести (радиальной производной V_R гравитационного потенциала).

2.1. Погрешности, возникающие при вертикальном перемещении аномалиеобразующих масс

При гравитационном моделировании и переходе из «плоской» модели в сферическую необходимо сохранить расположение возмущающих объектов относительно точки наблюдения. Вертикальные перемещения аномалиеобразующих масс для разных моделей проиллюстрируем на примере гравиметрического профиля 1–2 длиной 660 км, проходящего на «плоской Земле» вдоль оси X (рис. 2.1). В пределах профиля выделены равные отрезки B_iB_{i+1} , $1 \leq i \leq 6$, длиной 100 км. Отклонения по высоте (апликате Z) точек на профиле 1–2 от дуги A_1A_7 (сферической поверхности Земли) рассчитываются по формуле $Z = \sqrt{R^2 - X^2}$ при совпадении точек A_4 , B_4 с началом координат (0, 0) и составляют: $A_3B_3 = A_5B_5 = 785$ м, $A_2B_2 = A_6B_6 = 3140$ м, $A_1B_1 = A_7B_7 = 7067$ м.

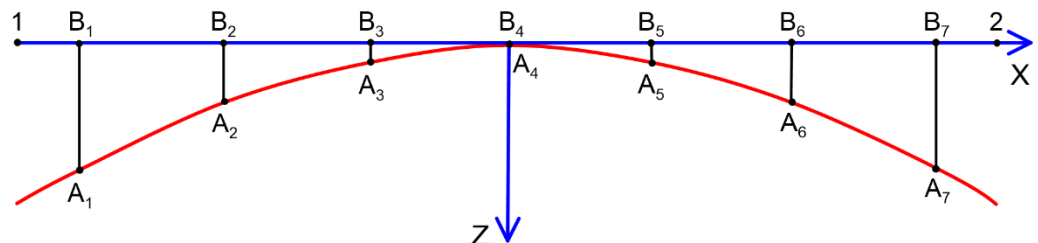


Рис.2.1. Гравиметрический профиль 1–2, расположенный на плоскости (синий цвет) и сферическая поверхность Земли (красный цвет).

В качестве геоплотностной модели № 1 возьмем семь сингулярных источников – шаров диаметром 20 км с эффективной плотностью 0.2 г/см^3 , расположенных в однородном по плотности нижнем полупространстве на одинаковых глубинах $A_i B_i = 20 \text{ км}$, $1 \leq i \leq 7$. Отсчет глубин выполняется относительно сферической поверхности наблюдений по радиус-вектору r , направленному к центру Земли O . Таким образом, центры тяжести всех шаров находятся на одной уровенной поверхности (дуге $B_1 B_7$), отвечающей окружности с радиусом $R^* = 6351 \text{ км}$ и центром в точке O . Расстояния (по соответствующим дугам) составляют $A_i A_{i+1} = 100 \text{ км}$, $B_i B_{i+1} \cong 99.686 \text{ км}$, $1 \leq i \leq 6$. В 331 точке профиля 1–2 вычислялись значения V_R путем решения прямой задачи гравиразведки в системе координат $\Sigma r\phi\lambda$. Максимальные амплитуды аномалий силы тяжести над центрами шаров достигают 14.24 мГал при ширине на уровне полумаксимума $\sim 30 \text{ км}$ (рис.2.2).

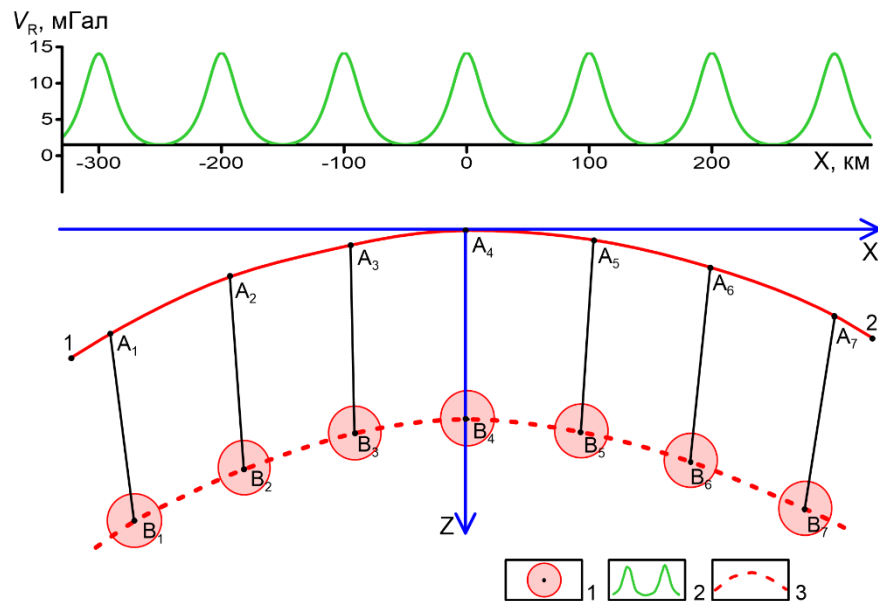


Рис. 2.2 Геоплотностная модель № 1 ("сферическая") и ее аномальный эффект:

1 – аномалиеобразующие тела; 2 – график гравитационного поля V_R ;

3 – уровенная поверхность $R^* = 6351 \text{ км}$.

Далее попытаемся построить "плоский аналог" модели № 1 – модель № 2 с использованием системы координат $\Sigma x y z$. Известно, что поверхность сферы или эллипсоида нельзя представить на плоскости, т.е. на

карте, без искажений [Серапинас, 2005]. При проведении топографо-геодезических и гравиметрических работ обычно используется равноугольная картографическая проекция Гаусса-Крюгера, позволяющая в пределах сферического двуугольника размером 6° по долготе осуществлять построение системы плоских прямоугольных координат: $x = f_1(\varphi, \lambda)$, $y = f_2(\varphi, \lambda)$, где f_1, f_2 – некоторые функции, φ, λ – географические координаты. При построении геоплотностной модели № 2 в проекции Гаусса-Крюгера допустим, что профиль 1–2 проходит непосредственно по осевому меридиану данной 6° -й зоны. Для построения разреза возьмем два соосных цилиндра с радиусами R и R^* с центрами в точке O и выполним их развертку на плоскость. В этом случае линейные размеры модели № 2, будут иметь минимальные искажения: по прежнему $A_i A_{i+1} = 100$ км и $B_i B_{i+1} \cong 99.686$ км, $1 \leq i \leq 6$; $A_1 B_1 = A_7 B_7 = 20.022$ км, $A_2 B_2 = A_6 B_6 = 20.010$ км, $A_3 B_3 = A_5 B_5 = 20.003$ км, $A_4 B_4 = 20.000$ км (рис. 2.3). График гравитационного поля V_z , обусловленного этой моделью, визуально не отличается от графика V_R , приведенного на рис. 2.1. Представим себе ситуацию, что при интерпретации результатов полевых гравиметрических измерений (модель № 1) используются модель № 2 "плоской Земли" и сравним между собой их аномальные эффекты.

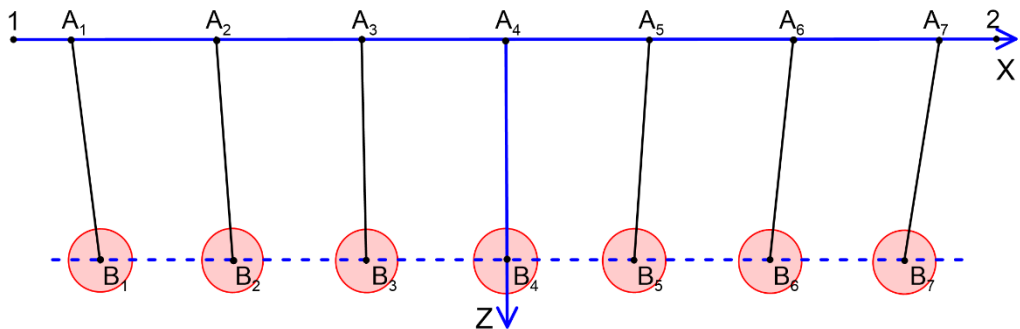


Рис.2.3 Геоплотностная модель № 2 ("плоский аналог" модели № 1).

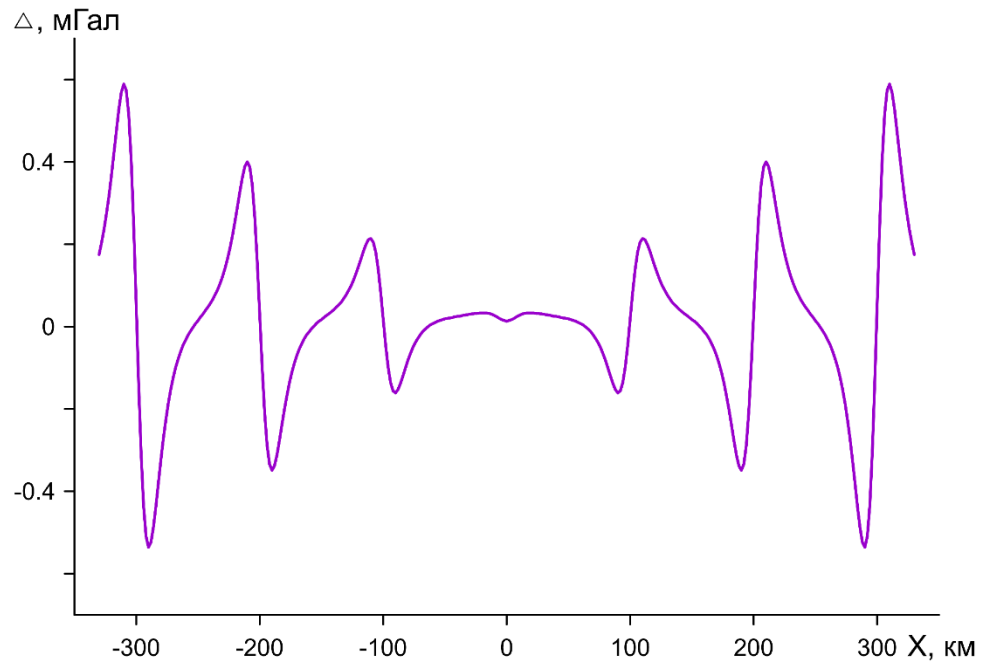


Рис.2.4 График разности Δ полей V_R и V_z для сферической и плоской моделей Земли № 1 и № 2.

Разность Δ полей V_R и V_z моделей № 1 и № 2 изменяется от -0.54 мГал до 0.59 мГал (рис.2.4), носит нелинейный характер и может составлять более 4% от амплитуды гравитационного поля: $\max|\Delta|/\max|V_R| \cong 0.041$. В эпицентрах локальных гравитационных аномалий, обусловленных одинаковыми массами, разности V_R и V_z близки к нулю; симметрия графика относительно точки $x = 0$ и увеличение Δ с ростом $|x|$, а также знакопеременный характер Δ связан с геометрическими особенностями использованных моделей. Следует отметить, что значения Δ существенно превышают точность определения аномалий Буге при современных гравиметрических съемках [Долгаль и др., 2018].

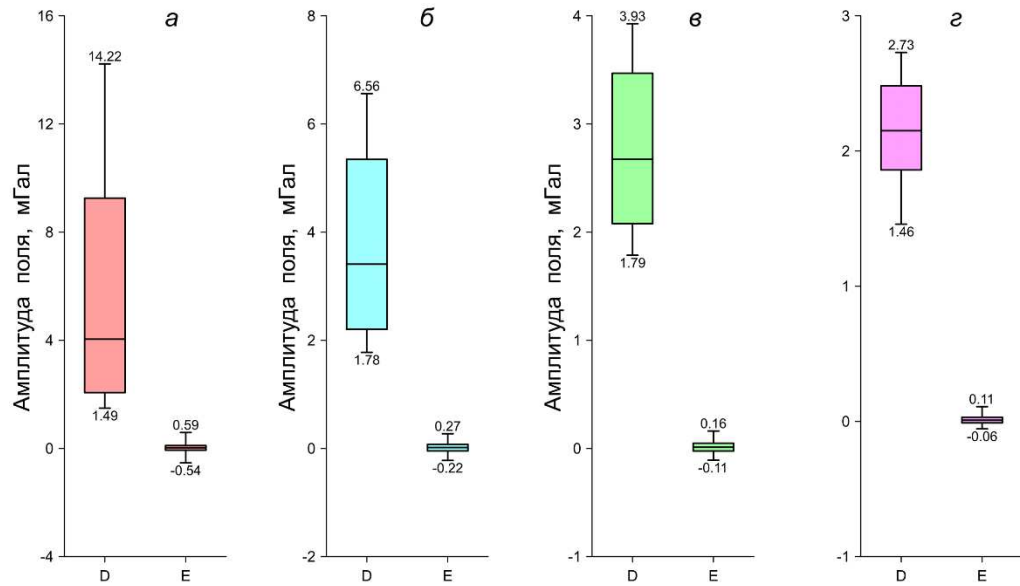


Рис.2.5 Диаграммы Тьюки, характеризующие влияние сферичности Земли при различных глубинах H залегания центров аномалиеобразующих тел – 20 км (а), 30 км (б), 40 км (в), 50 км (г): D – гравитационное поле V_R ; E – параметр Δ .

Выполнен еще ряд подобных вычислительных экспериментов, при последовательном увеличении значений глубин H источников поля AB до 30 км, 40 км и 50 км в модифицированных моделях № 1 и № 2. Полученные результаты представлены на рис. 2.5 в виде диаграмм Тьюки (box-and-whiskers diagram). Границами "ящика" являются первый и третий квартили, линия внутри "ящика" – медиана, длина "усов" отвечает минимальным и максимальным значениям гравитационных аномалий V_R (показаны соответствующие цифры).

Сопоставить между собой значения аномалий силы тяжести и параметра Δ при различных глубинах H до центров аномалиеобразующих

шаров можно также с использованием двух функционалов: $\mu_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=331} \Delta_i^2}{\sum_{i=1}^{i=331} G_i^2}}$ и

$\mu_2 = \frac{\max|\Delta|}{\max|G|}$, где G – гравитационный эффект модели № 1 и ее модификаций,

Δ – разность полей V_R и V_z , i – номер точки профиля 1–2.

Таблица 2.1

Сопоставление гравитационных аномалий на "плоской" и "сферической" поверхности Земли при разных глубинах источников поля.

Глубина Н	20 км	30 км	40 км	50 км
Функционал μ_1	0.029	0.026	0.021	0.017
Функционал μ_2	0.130	0.045	0.040	0.040

Проведем второй эксперимент, в котором попытаемся приближенно оценить влияние замены плоской уровенной поверхности на сферическую при решении прямой задачи гравиразведки еще одним способом. Построим геоплотностную модель № 3 в системе прямоугольных координат для тех же семи шаров, при следующих геометрических характеристиках $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1} = 100$ км, $1 \leq i \leq 6$; глубины $A_i B_i = 20$ км, $1 \leq i \leq 7$ измеряются по перпендикуляру к профилю 1–2 (рис. 2.6). Следует отметить, что такого рода модели весьма широко встречаются в практике исследований (например – геолого-геофизические разрезы в комплектах современных геологических карт масштаба 1:1 000 000).

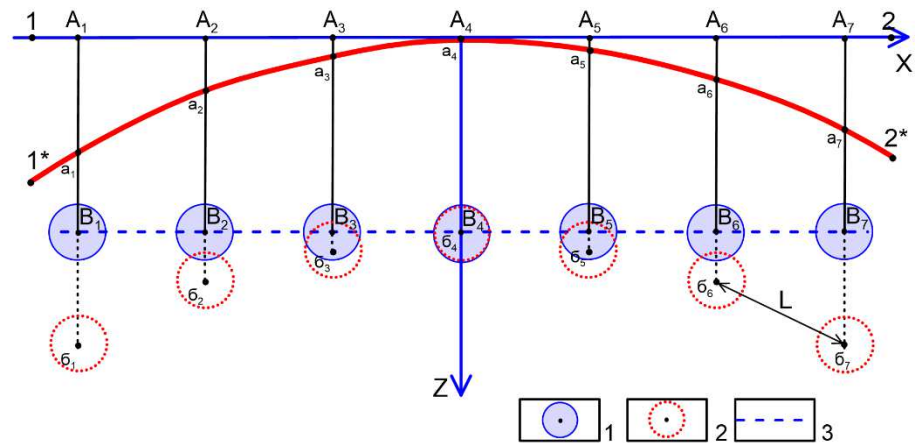


Рис. 2.6. Геоплотностные модели № 3 ("плоская") и № 4 ("сферический аналог")

модели № 3): профили расчета гравитационного поля: 1–2 (синий цвет);

1*–2* (красный цвет); аномалиеобразующие тела: 1 – в модели № 3, 2 – в модели

№ 4; 3 – уровенная поверхность $z = 20$ км для плоской Земли.

Построим "сферический аналог" модели № 3 для расчетного профиля 1*–2* путем вертикального проектирования аномалиеобразующих тел и

точек расчета поля. Поместим центр O сферической Земли на глубине 6371 км под центральной точкой A_4 профиля наблюдений и увеличим глубины центров соответствующих шаров на 785 м, 3140 м, 7067 м без изменения их горизонтальных координат x . Вертикальные линии, по которым произошло перемещение аномалиеобразующих масс, близки к нормальям к поверхности Земли: углы между ними в точках A_1 и A_7 составляют менее 3° , в точках A_1 и A_7 – $\sim 1^\circ$. Длина криволинейного профиля 1*–2* по сравнению с горизонтальным 1–2 увеличилась на ~ 296 м, т.е. менее 0.05% (расчет по формуле Гюйгенса). Величина среднеквадратической погрешности при вычислении поля V_R , связанной с изменением длины расчетного профиля, не превышает ± 0.004 мГал. Расстояние L между центрами перемещенных по вертикали шаров в модели № 4 несколько увеличилось (до ~ 77.1 м), сами шары находятся на разных уровневых поверхностях ($R \neq \text{const}$), их центры обозначены буквами $b_1 - b_7$ (рис. 2.6).

Безусловно, в геометрические параметры разреза, представленного на модели № 3, при построении модели № 4 внесены определенные искажения, которые можно охарактеризовать количественно. В качестве обобщенной характеристики геометрии построенных моделей будем использовать показатель $F_k = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_{ij}^2 / (mn)}$, где k – номер модели; i – номер тела; j – номер точки расчета поля; ρ – евклидово расстояние между центром i -го шара и j -й точкой; в данном случае: $1 \leq k \leq 4$, $m = 7$, $n = 331$. Как очевидно, значение F_k представляет собой среднее квадратическое расстояние между точками расчета и аномалиеобразующими объектами для каждой из рассмотренных моделей.

Таблица 2.2

Статистические характеристики гравитационных эффектов,
обусловленных влиянием сферичности Земли.

Номера моделей,	Статистические параметры Δ ; Δ^* , мГал
-----------------	---

используемые производные потенциала					
V_R	V_z	Минимум	Максимум	Среднее	Сред. квадр. отклонение
№ 1	№ 2	-0.54	0.59	0.02	± 0.21
№ 4	№ 3	-0.53	0.60	0.02	± 0.21
№ 1	№ 3	-0.01	0.03	0.03	± 0.006
№ 1	№ 1	-0.19	0.31	0.02	± 0.11
№ 3	№ 3	-0.36	0.31	0.003	± 0.11

Геометрия «сферических» и «плоских» моделей, для которых выполнялись оценки Δ (разности V_R и V_z) в двух вычислительных экспериментах, достаточно слабо различается: $F_1 - F_2 = -32$ м, $F_4 - F_3 = -45$ м. Гравитационные эффекты, обусловленные моделями № 1 и № 3 очень близки (табл. 2.2), но степень различия самих моделей существенно выше: $F_1 - F_3 = 415$ м.

2.2. Оценка снизу влияния сферичности Земли

При производстве гравиметрических работ гравиметр, вопреки широко распространенному мнению, замеряет не вертикальную составляющую силы тяжести V_z , а радиальную V_R (рис. 2.7). Еще Ю.И. Блох отмечал: «Поскольку направления нормалей в разных точках Земли различно, гравиметры измеряют в них совершенно разные по отношению к декартовым координатам компоненты. Вместе с тем, если наблюдения проводятся на ограниченной площади, где направления нормалей практически одинаковы, то, упрощая задачу, считают, что измеренная гравитационная аномалия – это аномалия вертикальной составляющей гравитационного поля V_z . Если же решаются региональные или глобальные задачи, где из-за сферичности

Земли такое упрощение недопустимо, полагают, что измерена радиальная компонента V_R » [Блох, 2009]

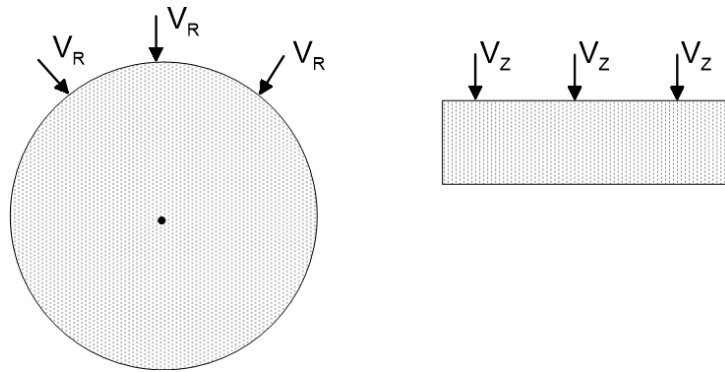


Рис. 2.7. Использование различных производных гравитационного потенциала

В соответствии с этим, оценкой снизу влияния сферичности при гравитационном моделировании можно считать разность полей V_R и V_Z для одной и той же модели (сферической или плоской). В этом случае мы полностью пренебрегаем картографическими искажениями. Более того, такую оценку можно выполнять без построения предполагаемого пространственного распределения аномалиеобразующих тел, только на основе истокообразной аппроксимации аномалий силы тяжести и трансформации поля $V_R \rightarrow V_Z$.

2.3. Примеры искажений аномалий силы тяжести, обусловленных влиянием сферичности

Рассмотрим модельный пример: на сферической поверхности Земли S (гипсометрические высоты отсутствуют), на площади размером 500×500 км, в точках квадратной сети с шагом 5 км, заданы значения гравитационного поля V_R . Эти значения получены путем решения прямой задачи гравиразведки для модели 5 шаров, параметры которых приведены в табл. 2.3. Начало декартовых координат $\sum xuz$ находится в левом нижнем углу площади (рис. 2.8).

Таблица 2.3

Параметры аномалиеобразующих тел

X, км	Y, км	Z, км	Радиус, км	Эфф. плотность, г/см³
100	100	21.5698	15	0.3
100	400	33.3557	15	0.3
400	400	45.1634	15	0.3
400	100	33.3557	15	0.3
250	250	29.8176	15	-0.3

«Наблюдаемое» поле V_R аппроксимировалось полем системы сингулярных источников, расположенных на глубине 6 км от поверхности S . Среднеквадратическая погрешность аппроксимации составила ~ 0.005 мГал, при этом максимальное (по модулю) расхождение полей не превышает 0.137 мГал. Затем в тех же точках было проведено восстановление значений вертикальной составляющей V_Z^* , а также расчет V_Z путем решения прямой задачи гравirazведки. Статистические характеристики всех полей и параметра Δ даны в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Статистические характеристики аномалий
силы тяжести и влияния сферичности Δ

Элемент поля	Минимум, мГал	Максимум, мГал	Среднее, мГал	Средн. квадр. отклонение, мГал
V_R	-70.36	70.72	1.78	7.58
V_Z	-70.47	70.74	1.82	7.61
V_Z^*	-70.35	70.63	1.82	7.61
$\Delta = V_R - V_Z$	-2.98	1.94	-0.04	0.35

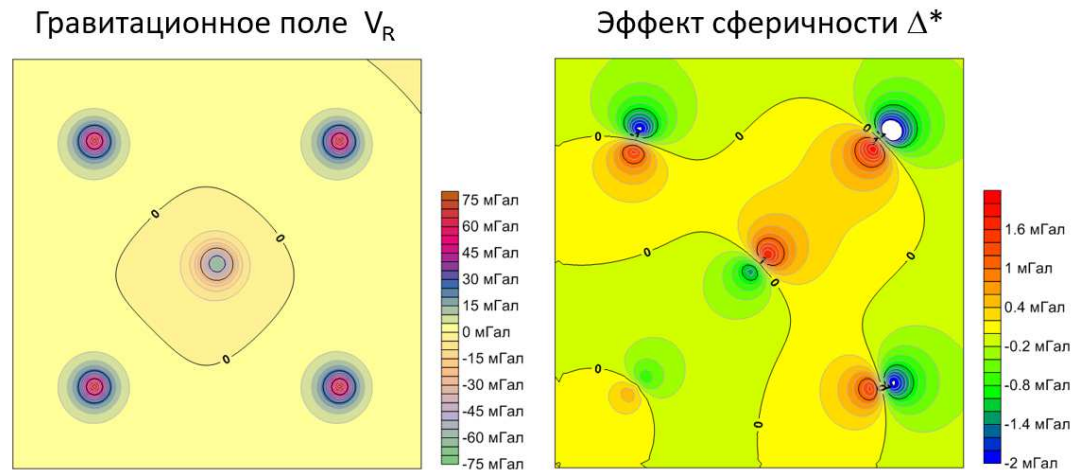


Рис.2.8. Модельный пример оценки снизу влияния сферичности

Как очевидно, диапазон искажений Δ , обусловленных сферичностью Земли, составляет $\sim 3.2\%$ от диапазона изменения «наблюдаемого» поля, а их абсолютные значения существенно превышают точность определения аномалий Буге для гравиметрической съемки 1:200 000 масштаба [Долгаль и др., 2019].

Следующий пример оценки влияния сферичности Земли при замене составляющей V_R на составляющую V_z охарактеризуем на примере материалов гравиметрической съемки масштаба 1: 200 000 в пределах листа Q-45 (Игарка). Гравитационное поле Δg (фактически V_R) этой территории изменяется от -44.04 до 74.45 мГал, а величина Δ – от -2.31 до 0.62 мГал, при среднем значении -0.41 мГал и среднеквадратическом отклонении 0.55 мГал (рис. 2.9).

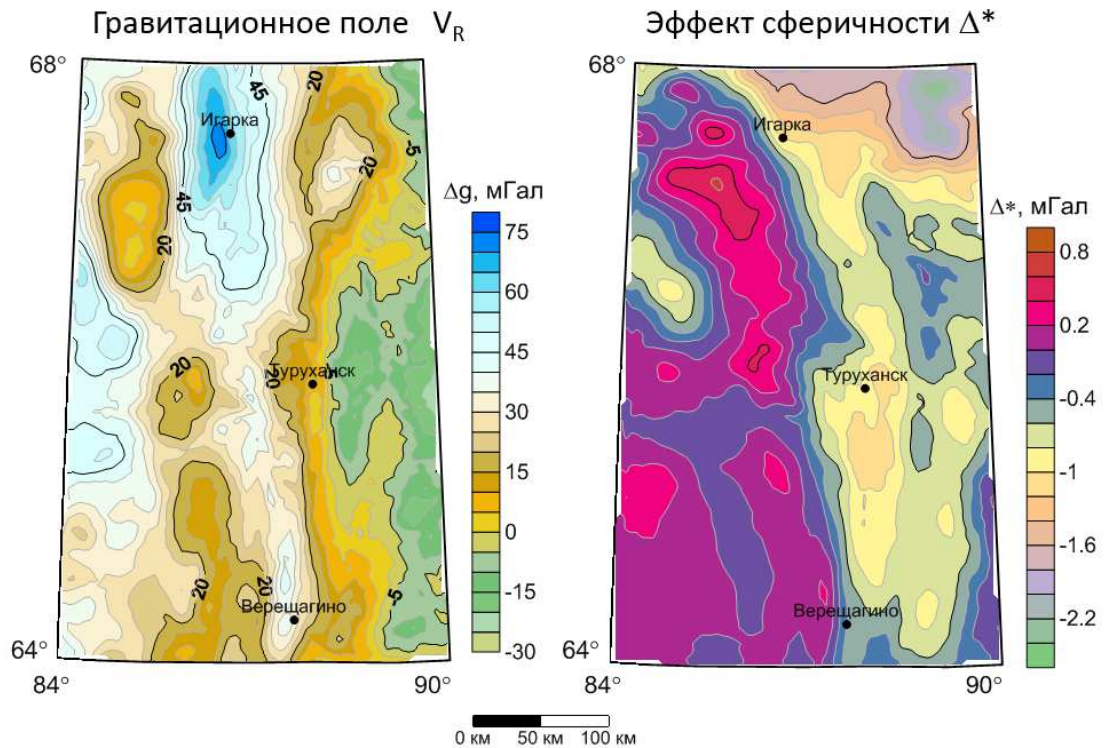


Рис. 2.9. Разность Δ аномалий силы тяжести в редукции Буге Δg и вертикальной компоненты поля V_Z^* . Лист Q-45 (Игарка)

2.4. Выводы по главе

Тема учета сферичности Земли при редуцировании гравиметрических данных до сих пор вызывает бурные дискуссии. Существует ряд ученых [Hinze et al., 2005; Бычков и др., 2015; Долгаль и др., Геофизика, 2019], которые убеждены в необходимости изменения стандартного графа обработки и включении процедур, учитывающих криволинейность земной поверхности. Но также есть и ученые [Мартышко и др., 2017; Мартышко и др., 2018] отстаивающие традиционный подход к обработке и интерпретации полевых данных. Обычно аргументом последних является то, что эффект, вносимый сферичностью Земли, несоизмеримо мал по сравнению с аномалией от искомых геологических объектов. Безусловно, существование подобных взглядов обеспечивает и кажущаяся сложность внедрения методов решения прямой задачи гравиметрии, учитывающих сферичность.

В рассмотренной главе было показано, что амплитуда погрешности, возникающей при игнорировании реальной формы Земли, значительно

превышает точность современных гравиметрических съемок порядка 5-10%. Внесение этой погрешности в результаты обработки практически не заметно при выполнении качественной интерпретации, однако, может существенно влиять на точность решения обратной задачи гравirazведки. При этом применение новых стандартов редуцирования почти не осложняет саму обработку и не приводит к ощутимой потере производительности. Очевидно, что при современном технологическом и метрологическом обеспечении полевых работ, необходимо пересмотреть стандартные процедуры обработки гравиметрических данных.

3. КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛЕВЫХ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩАЯ РЕАЛЬНУЮ ФОРМУ ЗЕМЛИ

При редуцировании гравиметрических данных с учетом сферичности Земли, наибольшую сложность представляет расчет поправки за рельеф местности. В основе вычисления поправки лежит решение прямой задачи гравиразведки от некоторого элементарного тела. Традиционный подход к вычислению поправки за рельеф местности основывается на плоской границе «Земля-воздух», а топографические массы, как правило, аппроксимируются набором прямоугольных призм [Бычков и др., 2015; Долгаль, 2002; Лукавченко, 1951]. Такой подход привязывает нас к декартовой системе координат ΣXYZ , в которой невозможно адекватно описать сферическую поверхность. «Погрешность вычисления поля определяется детальностью аппроксимации геологических объектов геометрическими фигурами и погрешностью вычислительной процедуры от элементарной аппроксимирующей ячейки при превалирующем влиянии первой причины» [Гольдшмидт, 1984]. Учитывая вышесказанное, представляется разумным переход из декартовой ΣXYZ системы координат в сферическую $\Sigma r\varphi\lambda$. Ряд исследователей [Jonson, Litehiser, 1972; Глазнев, 2003; Старостенко, Манукян, 1983; Пятаков, Исаев, 2012] предлагали разные тела, содержащие элементы сферичности, для аппроксимации моделируемых геоплотностных неоднородностей: сферический диск [Глазнев, 2003], сферическая треугольная призма [Мартышко и др., 2017; Пятаков, Исаев, 2012; Zhou et al., 1990], сферический параллелепипед [Старостенко, Манукян, 1983], сферический многогранник [Jonson, Litehiser, 1972; Пятаков, Исаев, 2012]. Таким образом, эти тела могут использоваться для создания «плотной упаковки» сферической поверхности. Далее будут рассмотрены предложенные способы учета шарообразности Земли в сферической системе координат.

3.1. Обзор способов вычисления гравитационных эффектов для локальных объектов, реализованных в сферической системе координат

В 1972г. в статье L.R.Jonson и J.J. Litehiser [Jonson, Litehiser, 1972] был представлен метод вычисления гравитационного влияния $3D$ объектов произвольной формы с учетом шарообразности и эллипсоидальности Земли. Авторы приходят к необходимости такого метода после попытки моделирования гравитационного влияния крупных геологических объектов, обладающих латеральной протяженностью несколько тысяч километров и мощностью сотни километров. В подобных моделях сферичность Земли и, в меньшей степени, её эллипсоидальность, играют огромную роль. Авторы развили метод M.Talwani и M.Ewing [Talwani, Ewing, 1960] в сферической системе координат, а также учли сжатие земного эллипсоида. Трехмерные тела аппроксимируются набором полигональных пластин на разных глубинах. Пластины являются частями эллипсоида вращения, а их боковые стороны – арки больших кругов. Гравитационное влияние пластины частично вычисляется с помощью аналитического интегрирования и частично с использованием численного интегрирования.

Все вычисления проводятся на поверхности эллипсоида вращения, авторы считают его достаточной аппроксимацией Земного геоида. Также можно предположить, что поверхности постоянной плотности являются эллипсоидами вращения, соответственно эксцентриситеты этих эллипсоидов можно представить как функцию от глубины. Референц-эллипсоид, который аппроксимирует Земной геоид, имеет большую полуось a_0 , в свою очередь, эллипсоиды, связанные с нижней и верхней кромками трехмерного тела, характеризуются большими полуосями a_b и a_t , соответственно (рис. 3.1). Точка наблюдения O располагается на широте θ_O (геоцентрическая), долготе φ_O и высоте h_O (относительно эллипсоида).

Трехмерное тело произвольной формы разбивается на пластины, в пределах которых плотность можно считать постоянной. Пусть dV – элемент объема одной такой пластины, лежащей на поверхности Σ , которая является

частью эллипсоида с большой полуосью a , R – расстояние между dV и точкой наблюдения O (рис. 3.1). Тогда гравитационный потенциал трехмерного тела в точке наблюдения можно представить как:

$$U(\Theta_0, \varphi_0, h_0) = \gamma \int_{a_b}^{a_t} \int_{\Sigma(a)} \frac{\rho(a)}{R(\Theta_0, \varphi_0, h_0, \Theta, \varphi, a)} \cdot dV(\Theta, \varphi, a), \quad (3.1)$$

где γ – гравитационная постоянная; ρ – плотность.

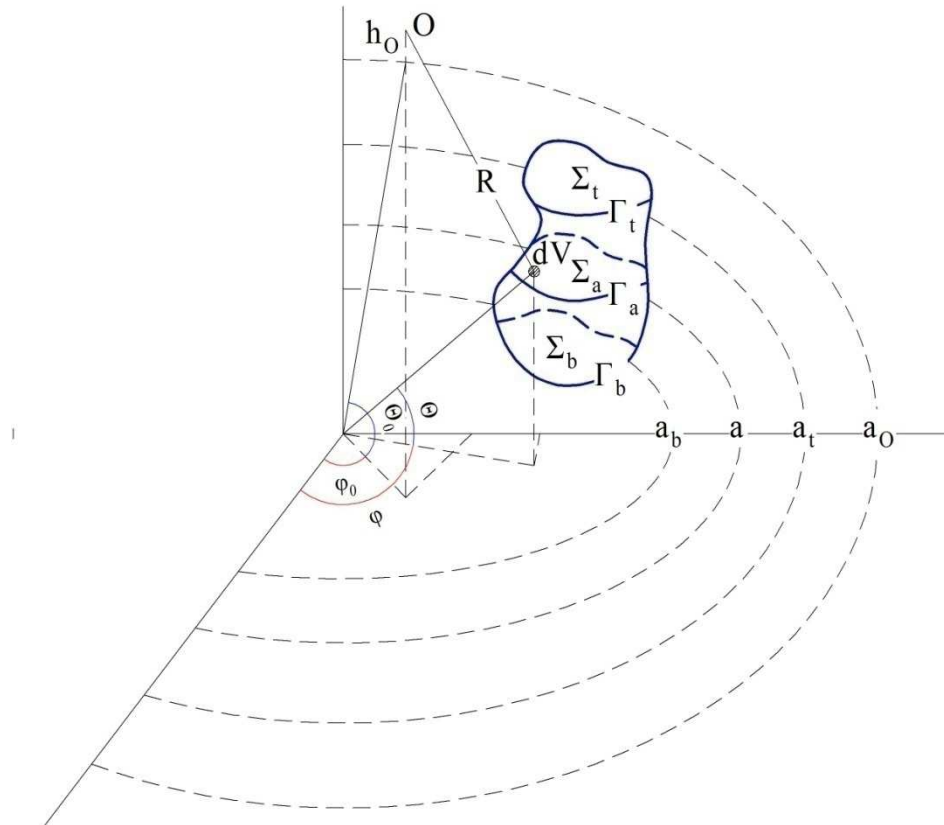


Рис. 3.1 Геометрия 3D тела в пределах эллипсоидальной Земли. Верх и низ тела - Σ_t и Σ_b соответственно – части эллипсоидов вращения с полуосями a_t и a_b . dV – элементарный объем, находящийся на поверхности Σ , которая является частью эллипсоида вращения с полуосью a . Точка наблюдения O находится на высоте h_0 над референс эллипсоидом с полуосью a_0 . Θ – геоцентрическая широта, φ – долгота.

Для упрощения вычислений авторы статьи предложили переход к новой сферической системе координат с полярной осью, проходящей через точку расчета. Таким образом, переменные интегрирования Θ и φ заменяются на ψ и ζ , которые являются угловым расстоянием и азимутом от точки O . Сначала ведется интегрирование по переменной ψ , далее

производится интегрирование по азимутальному углу ζ , фактически по контуру границы тела. Если границы пластин, из которых состоит трехмерное тело, могут быть представлены в аналитической форме, то задача интегрирования значительно упрощается. Однако, этот частный случай встречается редко, поэтому форма отдельной пластины аппроксимируется полигоном, смежные вершины которого, соединяются между собой арками больших кругов. Следует отметить, что подобная аппроксимация может быть выполнена с любой степенью точности, путем увеличения количества вершин полигона.

Далее, используя стандартные методы численного интегрирования и применяя описанную процедуру ко всем сторонам полигона, можно получить значение вертикальной составляющей силы тяжести от одной пластины. Это приводит нас к последней операции интегрирования: вдоль большой полуоси a : зная количество пластин, описывающих трехмерное тело, плотность и значение вертикальной составляющей гравитационного притяжения каждой пластины, можно вычислить гравитационный эффект от всего тела.

В статье В.И. Старостенко и Манукяна А.Г. 1989г. [Старостенко, Манукян, 1989] приведены два алгоритма решения прямой задачи гравиметрии для гравитационного потенциала и его производной по радиальному направлению на шарообразной Земле, при этом все построения производятся в сферической системе координат. Следует отметить, что в данной работе обобщается задача В. Вискочила и М. Бурды на случай неоднородной по радиусу Земли [Бурда, Вискочил, 1973].

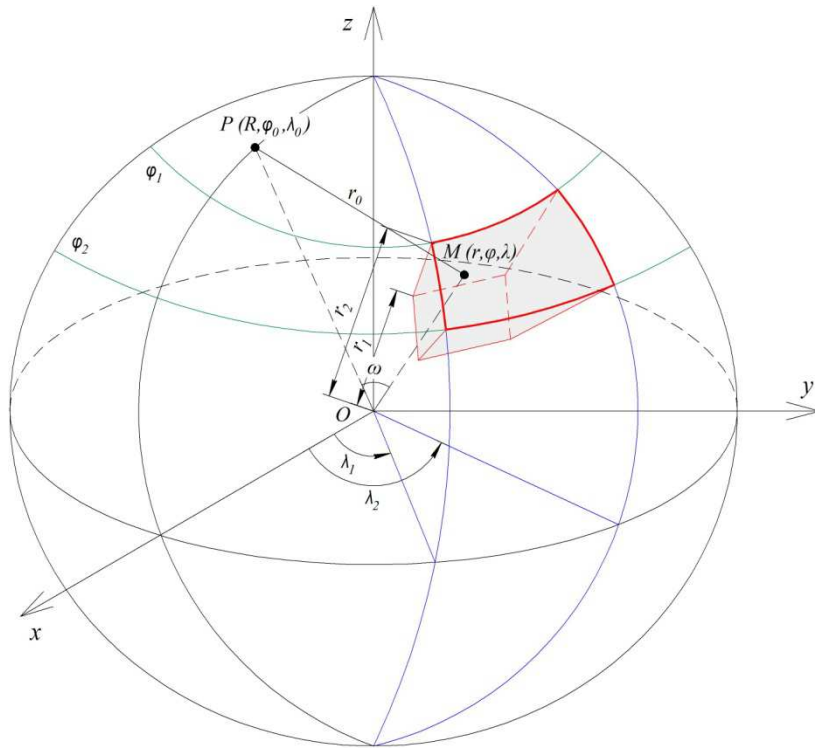


Рис. 3.2 Расположение тела, ограниченного сферическими координатными поверхностями, внутри шарообразной Земли

Постановка задачи: начало сферической системы координат размещается в центре Земли, а внутри сферы, аппроксимирующей земную поверхность, выделяется тело (рис. 3.2), ограниченное координатными поверхностями φ_1 , φ_2 , λ_1 , λ_2 , r_1 и r_2 . Данное тело авторы предлагают называть сферическим параллелепипедом. Для этого тела решается прямая задача гравиметрии в предположении, что плотность тела изменяется вдоль r по линейному закону:

$$\sigma(r) = \sigma + k(r_2 - r), \quad (3.2)$$

где r_2 - координата верхней поверхности тела, σ - постоянная плотность у верхней поверхности тела, k - коэффициент, характеризующий изменение плотности по направлению r . Гравитационный потенциал тела на произвольную точку пространства $P(R, \varphi_0, \lambda_0)$ описывается соотношением:

$$V(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sigma(r) r^2 \sin \varphi d\varphi d\lambda dr}{p}, \quad (3.3)$$

где f - гравитационная постоянная,

$$p^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega, \quad (3.4)$$

$$\cos \omega = \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda), \quad (3.5)$$

ω - угол при центре сферы между направлениями на точки $P(R, \varphi_0, \lambda_0)$ и (r, φ, λ) .

Необходимо определить в точке $P(R, \varphi_0, \lambda_0)$ ускорение силы притяжения V_z обусловленное телом. Для этого нужно вычислить производную потенциала V , заданного формулой (3.3), по R с обратным знаком (поскольку направление R противоположно направлению внешней нормали z). Затем учитывая (3.2), представить выражение (3.3) и найденную в результате дифференцирования (3.3) по R формулу для V_z в виде:

$$V(R, \varphi_0, \lambda_0) = f(\sigma + kr_2) \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi d\lambda dr}{p} - fk \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^3 \sin \varphi d\varphi d\lambda dr}{p}, \quad (3.6)$$

$$V(R, \varphi_0, \lambda_0) = f(\sigma + kr_2) \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(R - r \cos \omega) r^2 \sin \varphi d\varphi d\lambda dr}{p^3} - fk \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(R - r \cos \omega) r^3 \sin \varphi d\varphi d\lambda dr}{p^3}, \quad (3.7)$$

Интегралы (3.6) и (3.7) не выражаются в конечном виде, для их решения необходимо использовать способы приближенного вычисления. В первом алгоритме авторы предлагают провести аналитическое интегрирование по переменной r , а затем продолжить вычисления, используя полиномы Лежандра. Во втором алгоритме, авторы также проводят

аналитическое интегрирование по переменной r , а далее используют формулы Гаусса для приближенного вычисления двойных интегралов.

Применяя вычислительную схему первого алгоритма, приходится многократно вычислять полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра. Сами авторы отмечают, что эти вычисления выполняются весьма неустойчиво, даже если пользоваться нормированными величинами. Соответственно авторы рекомендуют использовать первый алгоритм только в диапазоне широт от экватора до 20° .

Для второго алгоритма авторы рекомендуют пользоваться квадратурными формулами либо только с четным количеством узлов, либо только с нечетным. Это правило в два раза ускоряет сходимость вычислительного процесса. Также для решения задач с крупными телами целесообразно использовать метод кубатурных процессов, т.е. последовательно разбивать исходное тело на тела меньших размеров и для каждого применять исходную кубатурную формулу. Всегда лучше пользоваться квадратурными формулами с большим числом узлов и за несколько шагов кубатурного процесса добиваться сходимости, чем действовать наоборот.

Развитие метод Старостенко получил в работе Страхова, Романюк и Фроловой [Страхов и др., 1989], где уточнено аналитическое решение для интеграла (3.3), были использованы более совершенные квадратурные формулы, выполнена программная реализация.

В книге Глазнева В.Н. 2003г. [Глазнев, 2003] рассматривается возможность решения прямой задачи гравиметрии в сферической системе координат, без использования сферических параллелепипедов и методов численного интегрирования на основе кубатур высокого порядка точности.

В предложенном методе используется вычисление гравитационного эффекта сферического диска в его полярной точке (при $\theta=0$). Сущность такого подхода заключается в переносе полюса S сферической системы координат в точку P локальной системы, для которой вычисляется значение

поля (рис.3.3). Расчет аномального поля строится на основе обычной радиально-кольцевой палетки, состоящей из совокупности тонких сферических прямоугольных пластин с постоянной плотностью. При этом исчезает необходимость использования сложных кубатур, но возникает проблема интерполяции значений нерегулярных данных в новую сетку сферических координат.

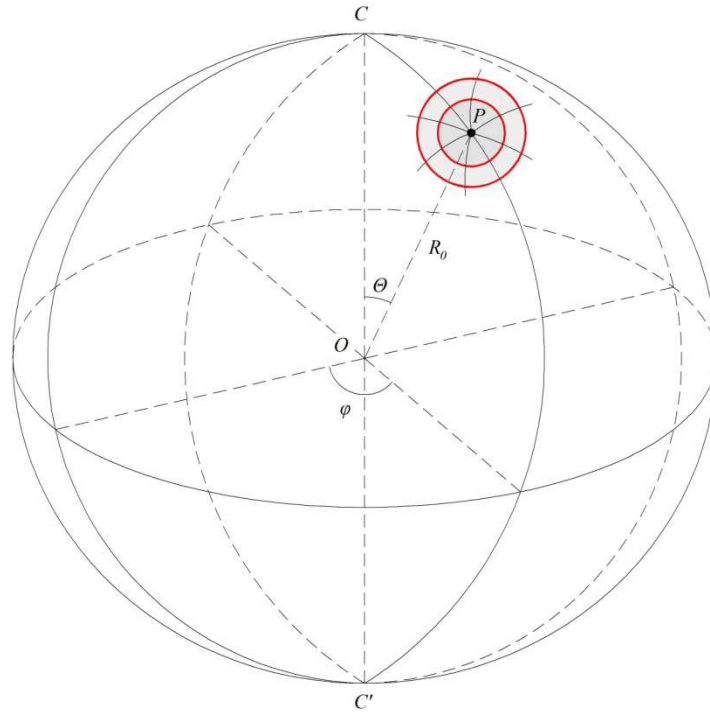


Рис.3.3 К решению прямой задачи на сфере [Глазнев В.Н., 2003]

В данном подходе среда разбивается на сферические прямоугольники с плотностью $\Delta\rho$ и толщиной dR , гравитационный потенциал $V(P)$ которого получен из известного выражения сферического диска с угловым радиусом Θ , расположенного ортогонально относительно новой, перенесенной в точку P полярной оси OP , проходящей через центр этого диска:

$$V(P) = \gamma \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} \int_{\Theta_m}^{\Theta_{m+1}} \frac{\Delta\rho \cdot R^2 \sin\Theta dR d\Theta d\varphi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\Theta)^{1/2}} = \gamma \psi_m \Delta\rho \frac{R dR}{r} (r_{m+1} - r_m). \quad (3.8)$$

Здесь $\psi_m = \varphi_{n+1} - \varphi_n$, а остальные принятые обозначения связаны между собой соотношениями:

величины пропорциональности p аномалий силы тяжести от центрального элемента палетки (диска) на уровне R_0 и некоторого периферического элемента на том же уровне. Дополнительно вводится условие изометричности элементов палетки ($L_\Theta = L_\varphi$). Величины для угловых размером колец Θ_m и количества секторов на кольцах $N_m = 2\pi/\psi_m$ определяются как:

$$\begin{aligned}\Theta_{m+1} &= 2 \cdot \arcsin\left(\frac{N_m}{p} \cdot \sin \frac{\Theta_1}{2} + \sin \frac{\Theta_m}{2}\right), \\ N_m &= E\left[\frac{2\pi}{\Theta_{m+1} - \Theta_m} \cdot \sin \frac{\Theta_{m+1} + \Theta_m}{2}\right],\end{aligned}\quad (3.15)$$

где $E[]$ – целая часть числа.

Поправка за дальнюю зону – притяжение масс вне области разбиения регулярной по r , φ и Θ сеткой палетки, может быть выражена из (3.13) как гравитационный эффект фрагмента тонкого сферического слоя, находящегося за максимальным угловым радиусом палетки Θ_{m-1} , в виде:

$$\Delta g^A(P) = 2\pi\gamma\Delta\bar{\rho}_M \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{R - r\cos\Theta_{M+1}}{r_{M+1}}\right) dR, \quad (3.16)$$

где индекс M обозначает количество кольцевых зон в палетке, а величина средней плотности в последнем кольце:

$$\Delta\bar{\rho}_M = N_M^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{N_M} \Delta\rho_n. \quad (3.17)$$

Суммарный гравитационный эффект от принятой аппроксимации среды, представляющей совокупность тонких прямоугольных сферических пластин и дисков в области разбиения по r ($R_0, R_0-K\cdot dR$), по Θ ($0, \Theta_{M+1}$) и по φ ($0, N_m\cdot\psi_m$), записывается в некоторой дискретной точке земной поверхности с координатами (φ, Θ, h) как:

$$\Delta g(\varphi, \Theta, h) = \left(\sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_M} C_{kmn} \cdot \Delta\rho(k, m, n) + \sum_{k=0}^K C_k^0 \cdot \Delta\bar{\rho}_M(k) \right) dR, \quad (3.18)$$

где индексные переменные k, m, n действуют в локальных полярных координатах относительно точки расчетов (рис. 3.4), а коэффициенты C_{kmn} и C'_k вычисляются при указанных выше параметрах из формул (3.13) и (3.18).

В статье 2013г. авторы В.И. Старостенко и Пятаков Ю.В. [Старостенко, Пятаков, 2013] рассматривают решения прямой задачи гравиметрии для сферического многогранника и сферической треугольной призмы, заданных в сферических координатах, при этом авторы используют локальные прямоугольные и сферические координаты для каждой точки расчета.

Прямая задача для сферического многогранника. Под сферическим многогранником (рис.3.5) понимается тело, имеющее $2*N$ вершин. N вершин расположены на сфере радиуса r_2 и имеют координаты $r_2, \varphi_i, \lambda_i, i=1,2,...,N$; остальные N вершин расположены на сфере радиуса r_1 ($r_1 < r_2$) и имеют координаты $r_1, \varphi_i, \lambda_i$. Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и начало системы координат. Верхняя и нижняя грани тела образованы сегментами сфер радиусов r_2 и r_1 - т.н. сферическими многоугольниками. Каждое ребро верхней (нижней) грани представляет собой дугу большого круга, соединяющую смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и $r_1, \varphi_i, \lambda_i; r_1, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$.

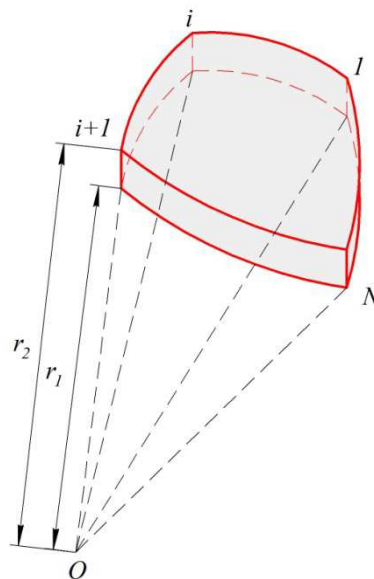


Рис. 3.5 Сферический многогранник

Радиальная составляющая силы тяжести сферического многогранника:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \iiint_D \rho(r)(R - r \cdot \cos\omega) P^{-3} r^2 \cdot \sin\varphi dr d\varphi d\lambda, \quad (3.19)$$

где R, φ_0, λ_0 - координаты точки расчета поля в сферической системе координат; r, φ, λ - переменные интегрирования; ω - угол при центре сферы между направлениями на точки R, φ_0, λ_0 и r, φ, λ ;

$$P^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\omega; \quad (3.20)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi + \sin\varphi_0 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda); \quad (3.21)$$

$\rho(r)$ - плотность сферического многогранника, которая линейно изменяется в радиальном направлении:

$$\rho(r) = \rho + k(r_2 - r), \quad (3.22)$$

где ρ - постоянная плотность, k - коэффициент, характеризующий изменение плотности по направлению r .

Если предположить, что все вершины сферического многогранника лежат по одну сторону относительно плоскости каждой из его боковых граней, тогда интеграл в правой части (3.19) можно представить в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned} & f \iiint_D \rho(r)(R - r \cdot \cos\omega) P^{-3} r^2 \cdot \sin\varphi dr d\varphi d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^N t_i \cdot f \iiint_{D_i} \rho(r)(R - r \cdot \cos\omega) P^{-3} r^2 \cdot \sin\varphi dr d\varphi d\lambda, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$t_i = \text{sign}[(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0) \cdot (a_i x_{i+2} + b_i y_{i+2} + c_i z_{i+2})]; \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & a_i = y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i; \quad b_i = -x_i z_{i+1} + x_{i+1} z_i; \quad c_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i; \\ & x_i = \sin\varphi_i \cdot \cos\lambda_i; \quad y_i = \sin\varphi_i \cdot \sin\lambda_i; \quad z_i = \cos\varphi_i; \quad i = 1, 2, \dots, N+2; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\varphi_{N+1} = \varphi_1; \quad \varphi_{N+2} = \varphi_2; \quad \lambda_{N+1} = \lambda_1; \quad \lambda_{N+2} = \lambda_2.$$

Авторы статьи предлагают проводить расчет интегралов в правой части (3.35) в системе координат $OX'Y'Z'$, полученной ортогональным вращением исходной системы $OXYZ$ вокруг центра O таким образом, чтобы точка расчета поля M оказалась на оси OZ' (рис.3.6). Тогда выражение (3.23) можно переписать в виде:

$$f \iiint_D \rho(r)(R - r \cdot \cos \omega) P^{-3} r^2 \cdot \sin \varphi dr d\varphi d\lambda$$

$$= f \iiint_{D_i} \rho(r)(R - r \cdot \cos \varphi') P^{-3} r^2 \cdot \sin \varphi' dr d\varphi' d\lambda', \quad (3.26)$$

где D_i - элементарный сферический многогранник; φ' , λ' - переменные интегрирования, определенные в локальной системе координат $\Sigma_{c\varphi}(0; r, \varphi', \lambda')$, связанной с декартовой системой координат $OX'Y'Z'$.

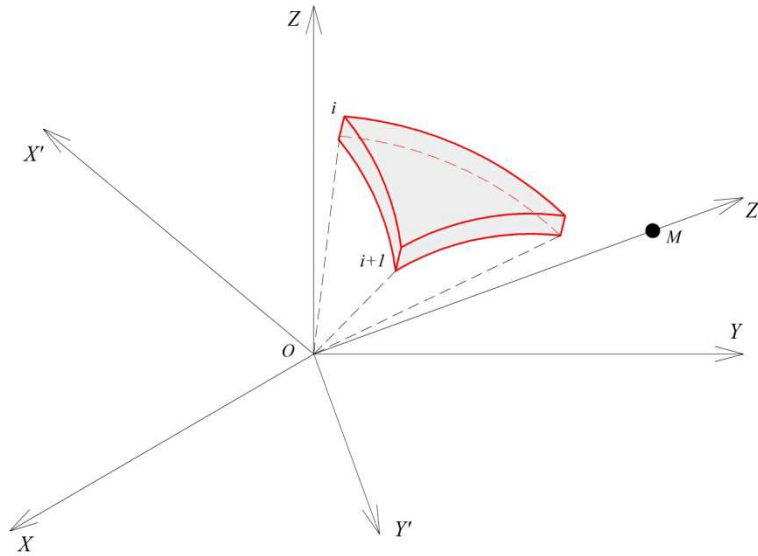


Рис.3.6 Создание локальной системы прямоугольных координат

Далее в выражение (3.26) подставляется выражение (3.22) для плотности и выполняется последовательное интегрирование по переменным φ' и r :

$$f \iiint_{D_i} \rho(r)(R - r \cdot \cos \varphi') P^{-3} r^2 \cdot \sin \varphi' dr d\varphi' d\lambda' \quad (3.27)$$

$$= f(\rho + k \cdot r_2) R \int_0^{L_i} F_1(\lambda') d\lambda' - f \cdot k \cdot R^2 \int_0^{L_i} F_2(\lambda') d\lambda',$$

Интегралы в правой части (3.27) не выражаются в конечном виде, поэтому для их вычисления авторы статьи [Старостенко, Пятаков, 2013] предлагают использовать квадратурную формулу Гаусса-Лежандра:

$$\int_0^{L_i} F_k(\lambda') d\lambda' \approx \frac{L_i}{2} \sum_{j=1}^n A_j F_k(\lambda_j'), k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.28)$$

где $\lambda_j' = L_i x_j / 2$; n - порядок квадратуры; x_j и A_j - узлы и коэффициенты квадратурной формулы.

Прямая задача для сферической треугольной призмы. В геоцентрической системе координат $\Sigma_{cf}(0; r; \varphi; \lambda)$ выделим тело (рис.3.7), имеющее вершины с координатами $(r_1^e, \varphi_1, \lambda_1)$, $(r_1^h, \varphi_1, \lambda_1)$, $(r_2^e, \varphi_2, \lambda_2)$, $(r_2^h, \varphi_2, \lambda_2)$, $(r_3^e, \varphi_3, \lambda_3)$ и $(r_3^h, \varphi_3, \lambda_3)$. Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $r_i^e, \varphi_i, \lambda_i$; $r_{i+1}^e, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ ($i=1, 2, 3$; $r_4^e = r_1^e$ и т.п.) и начало системы координат. Верхнее и нижнее основания призмы (поверхности) опираются на верхние и нижние вершины и описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} r^e(\varphi, \lambda) &= a^e \varphi + b^e \lambda + c^e; \\ r^h(\varphi, \lambda) &= a^h \varphi + b^h \lambda + c^h; \end{aligned} \quad (3.29)$$

Основания призмы $r^e(\varphi, \lambda)$, $r^h(\varphi, \lambda)$ считаются сферическими, а описанное тело называется треугольной сферической призмой с произвольно расположенными верхним и нижним основаниями. Радиальная составляющая гравитационного потенциала для такой призмы определяется как:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \iiint_D \rho(r)(R - r \cdot \cos\omega) P^{-3} r^2 \cdot \sin\varphi dr d\varphi d\lambda, \quad (3.30)$$

где $R, \varphi_0, \lambda_0, r, \varphi, \lambda, \omega$ - те же, что и в выражении (3.29); $\rho(r)$ - плотность сферической треугольной призмы, которая линейно изменяется в радиальном направлении.

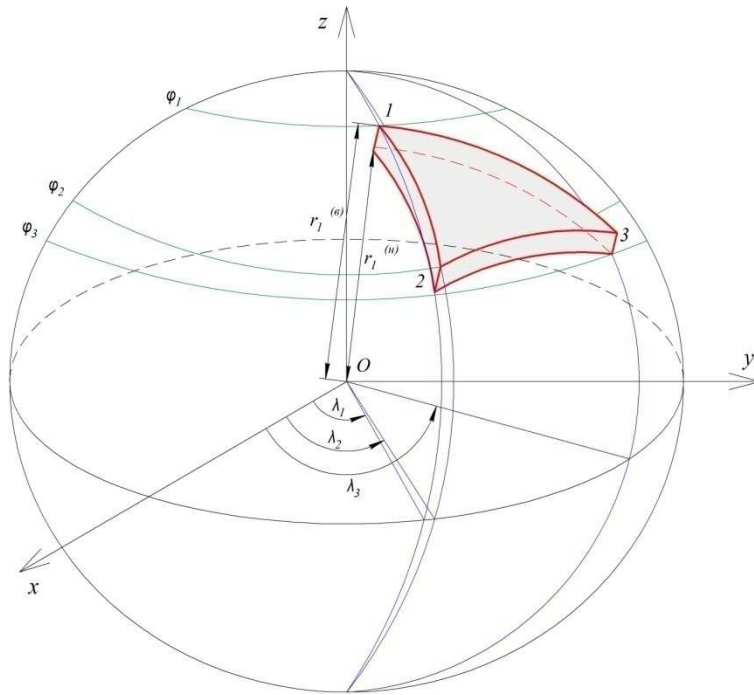


Рис.3.7 Сферическая треугольная призма

Авторы статьи [Старостенко, Пятаков, 2013] предлагают выполнить поворот системы координат, так чтобы точка расчета оказалась на оси OZ' , провести аналитическое интегрирование выражения (3.30) по переменной r , а далее использовать квадратурные формулы Гаусса-Лежандра для вычисления двойных интегралов вида $\int_0^\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi', \lambda') \sin\varphi' d\varphi' d\lambda'$.

3.2. Существующие методики вычисления гравитационного эффекта сферического параллелепипеда

За продолжительное время (с 1936 г.) исследований учета сферичности Земли при обработке потенциальных геофизических полей было предложено несколько способов вычисления гравитационного эффекта сферического

параллелепипеда (СП). Часть методов опирается на численное интегрирование, часть использует аналитическое и полуаналитическое интегрирование, некоторые методы используют аппроксимацию СП другими телами. Все способы отличаются друг от друга точностью, быстродействием и сложностью реализации. Далее будет рассмотрена часть методов для вычисления силы тяжести сферического параллелепипеда.

Численное решение тройного интеграла. Гравитационный потенциал тессероида может быть описан интегралом Ньютона:

$$V(Q) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{l} d\Omega, \quad (3.31)$$

$$l = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos\psi}, \quad (3.32)$$

$$\cos\psi = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (3.33)$$

где (r, φ, λ) и $(\xi, \varphi', \lambda')$ – сферические координаты точки вычисления Q и переменной точки интегрирования P' , G – гравитационная постоянная, ρ – локальная плотность возмущающих масс и $d\Omega = \xi^2 d\xi d\sigma$ – объем тессероида ($d\sigma$ – поверхностный элемент единичной сферы).

Для аппроксимации возмущающих масс, проводится разделение на тессероиды объемом Ω_i , с постоянной плотностью ρ_i :

$$V(Q) = G \sum_i \rho_i \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\Omega}{l}. \quad (3.34)$$

Тройной интеграл гравитационного потенциала, его первая и вторая производная могут быть решены численными методами, например, используя кубатуры Гаусса-Лежандра (3D).

Разложение в ряд Тейлора. Один из методов решения эллиптического интеграла – разложение в ряд Тейлора подынтегральной функции I из уравнений (3.31) и (3.34)

$$I = I(\xi, \varphi', \lambda') = \frac{\xi^2 \cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \psi}} = \frac{\xi^2 \cos \varphi'}{l} \quad (3.35)$$

и последующего интегрирования. Разложение в ряд Тейлора до третьего порядка выражается как:

$$\begin{aligned} I(\xi, \varphi', \lambda') = I(r_0, \varphi_0, \lambda_0) &+ \left\{ \frac{\partial I}{\partial \xi} \Big|_0 \Delta \xi + \frac{\partial I}{\partial \varphi'} \Big|_0 \Delta \varphi' + \frac{\partial I}{\partial \lambda'} \Big|_0 \Delta \lambda' \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 \Delta \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \varphi'} \Big|_0 \Delta \xi \Delta \varphi' + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \lambda'} \Big|_0 \Delta \xi \Delta \lambda' \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 \Delta \varphi'^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi' \partial \lambda'} \Big|_0 \Delta \varphi' \Delta \lambda' + \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda'^2} \Big|_0 \Delta \lambda'^2 \right\} + O(\Delta^3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

В этом уравнении символ Ландау $O(\Delta)$ означает, что члены третьего и выше порядка в $\Delta \xi$, $\Delta \varphi'$, $\Delta \lambda'$ игнорируются. Точка Тейлора P_0 (r_0 , φ_0 , λ_0) выбирается как геометрический центр тессероида, т.е.:

$$r_0 = (r_1 + r_2)/2, \quad \varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \quad \lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2. \quad (3.37)$$

Следовательно, члены нечетного порядка и смешанные выражения исчезают после интегрирования. Гравитационный потенциал вычисляется как:

$$\begin{aligned} V(Q) = G\rho \left[I(r_0, \varphi_0, \lambda_0) + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 \Delta r^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 \Delta \varphi^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda'^2} \Big|_0 \Delta \lambda^2 \right\} \right. \\ \left. + O(\Delta^4) \right] \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где

$$\Delta r = r_2 - r_1, \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \quad (3.39)$$

Численное интегрирование по двум переменным φ , λ . В этом методе интеграл Ньютона сначала аналитически решается по переменные интегрирования r , далее для вычисления двойного интеграла используются численные методы, например, квадратуры Гаусса-Лежандра

$$V(Q) = G\rho \iint_{\sigma} \left[\int_R^{r'(\lambda', \varphi')} \frac{\xi^2}{l} d\xi \right] d\sigma, \quad (3.40)$$

$$d\sigma = \sin \psi d\psi d\alpha = \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'. \quad (3.41)$$

После решения интеграла по r получаем:

$$V(Q) = \frac{G\rho}{2} \iint_{\sigma} [\xi l + 3r \cos \psi l + r^2(3\cos^2 \psi - 1) \ln(l + \xi - r \cos \psi)]_R^{r'} d\sigma = G\rho \iint_{\sigma} K_V d\sigma, \quad (3.42)$$

где

$$K_V = \frac{1}{2} \left\{ r' \bar{l}' - R \bar{l} + 3r \cos \psi (\bar{l}' - l) + r^2(3\cos^2 \psi - 1) \ln \left| \frac{\bar{l}' + r' - r \cos \psi}{\bar{l} + R - r \cos \psi} \right| \right\}, \quad (3.43)$$

$$\bar{l}' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi},$$

$$\bar{l} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi}.$$

Этот метод в своих работах предлагали В.И. Старостенко и А.Г. Манукян [Старостенко, Манукян, 1983], Z. Martinec [Martinec, 1998], P. Novak [Novak, 2000], P. Vanicek [Vanicek et al., 2001], В. Heck [Heck, 2003], Ю.В. Пятаков и В.И. Исаев [Пятаков, Исаев, 2012]

Замена сферического параллелепипеда прямоугольной призмой.

При замене тессероида прямоугольной призмой должны выполняться два условия:

1. Оба элемента имеют одинаковый объем ($V_{\text{тессероида}} = V_{\text{призмы}}$):

$$\frac{1}{3} (r_2^3 - r_1^3) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (3.44)$$

2. Высота тессероида должна быть такой же как высота призмы $\Delta r = \Delta z$.

Если размеры тессероида очень малы ($\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi$) и расстояние от тессероида до центра глобальной (геоцентрической) системы координат

гораздо больше его размеров ($\Delta r \ll r_1$), трансформация тессероида в призму происходит как:

$$\Delta x = r_0 \Delta \varphi, \quad \Delta y = r_0 \cos \varphi_0 \Delta \lambda, \quad \Delta z = \Delta r. \quad (3.45)$$

$$r_0 = (r_1 + r_2)/2, \quad \varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \quad \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (3.46)$$

Уравнение пересчета для вектора силы тяжести:

$$\underline{g}^* = \underbrace{\underline{S}_x \underline{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \underline{R}_z(\lambda) \left(\underline{S}_x \underline{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) \underline{R}_z(\lambda') \right)^T}_{\underline{R}} \underline{g}, \quad (3.47)$$

где R_y и R_z обозначают матрицы вокруг осей y и z соответственно, в то время как S_x обозначает зеркальное отображение оси x (рис.3.8).

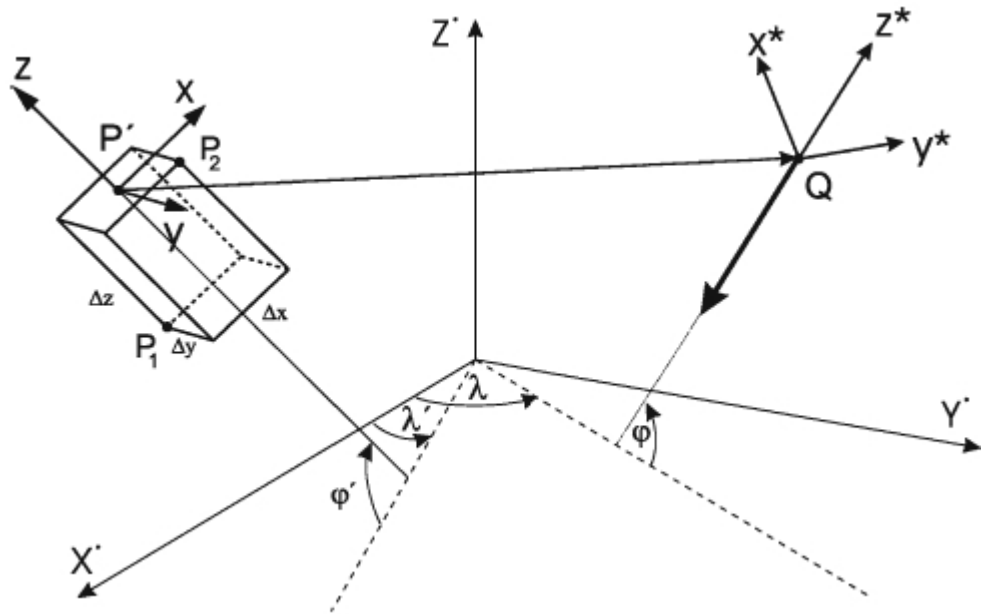


Рис. 3.8 Трансформация локальной краевой системы координат призмы в систему координат точки расчета.

Адаптивный подход к вычислению гравитационного эффекта СП.

В статье [Li et al., 2011] предложен новый адаптивный подход для моделирования гравитационных эффектов в сферических координатах, основанный на делении пространства по широте и долготе. Полный гравитационный эффект сферической призмы вычисляется с использованием численных методов интегрирования, а именно квадратур Гаусса-Лежандра (КГЛ). Для качественного гравитационного моделирования сферические

призмы рекурсивно делятся на более маленькие, в соответствии расстоянию до точки расчета.

Основываясь на теории поля, гравитационный эффект (например, потенциал силы тяжести, пространственный вектор и тензорные градиенты гравитационного потенциала) сферической призмы в точке наблюдения O может быть выражен как тройной интеграл:

$$g_0 = \int_{r_s=r_1}^{r_2} \int_{Q_s=Q_1}^{Q_2} \int_{\varphi_s=\varphi_1}^{\varphi_2} g(r_s, Q_s, \varphi_s, r_o, Q_o, \varphi_o) dr_s dQ_s d\varphi_s, \quad (3.48)$$

где g_0 представляет различные гравитационные эффекты в точке наблюдения O ; $g(r_s, \Theta_s, \varphi_s, r_o, \Theta_o, \varphi_o)$ представляет интегральное ядро соответствующего гравитационного эффекта (табл.3.1); r_s, Θ_s, φ_s и r_o, Θ_o, φ_o – радиус, геоцентрическая коширота (полярное расстояние) и долгота источника и точки наблюдения; r_1, Θ_1, φ_1 и r_2, Θ_2, φ_2 – угловые координаты радиуса, геоцентрической кошироты и долготы призмы. R_{os} – расстояние от узла возмущающей призмы до точки наблюдения, которая определяется как:

$$R_{os} = (r_o^2 + r_s^2 - 2r_o r_s \cos \delta)^{1/2}, \quad (3.49)$$

$$\cos \delta = \cos Q_o \cos Q_s + \sin Q_o \sin Q_s \cos(\varphi_o - \varphi_s). \quad (3.50)$$

Табл.3.1.

Формулы подынтегрального выражения для всех гравитационных эффектов [Asgharzadeh et al., 2007]

Параметр	$g(r_s, \Theta_s, \varphi_s, r_o, \Theta_o, \varphi_o)$
K	$G\rho_s r_s^2 \sin Q_s$
P	k/R_{os}
g_r	$k(-r_o + r_s \cos \delta)/R_{os}^3$
g_Q	$kr_s[-\sin Q_o \cos Q_s + \cos Q_o \sin Q_s \cos(\varphi_o - \varphi_s)]/R_{os}^3$
g_φ	$-kr_s \sin Q_s \sin(\varphi_o - \varphi_s)/R_{os}^3$

g_{rr}	$k(-R_{0s}^2 + 3(r_0 - r_s \cos \delta)^2)/R_{0s}^5$
g_{rQ}	$kr_s[-\sin Q_0 \cos Q_s + \cos Q_0 \sin Q_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)]/R_{0s}^5$ $[R_{0s}^2 + 3r_0(-r_0 + r_s \cos \delta)]$
$g_{r\varphi}$	$kr_s \sin Q_0 \sin Q_s \sin(\varphi_0 - \varphi_s)[-R_{0s}^2 + 3r_0(r_0 + r_s \cos \delta)]/R_{0s}^5$
g_{Qr}	$3kr_s(r_0 - r_s \cos \delta)[\sin Q_0 \cos Q_s - \cos Q_0 \sin Q_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)]/R_{0s}^5$
g_{QQ}	$kr_s \left(\frac{-R_{0s}^2 \cos \delta + 3r_0 r_s}{[\sin Q_0 \cos Q_s - \cos Q_0 \sin Q_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)]^2} \right) / R_{0s}^5$
$g_{Q\varphi}$	$kr_s \sin Q_s \sin(\varphi_0 - \varphi_s) \{-R_{0s}^2 \cos Q_0$ $+ 3r_0 r_s \sin Q_0 [\sin Q_0 \cos Q_s$ $- \cos Q_0 \sin Q_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)]\}/R_{0s}^5$
$g_{\varphi r}$	$3kr_s \sin Q_s \sin(\varphi_0 - \varphi_s)(r_0 - r_s \cos \delta)/R_{0s}^5$
$g_{\varphi Q}$	$3kr_0 r_s^2 \sin Q_s \sin(\varphi_0 - \varphi_s) [\sin Q_0 \cos Q_s$ $- \cos Q_0 \sin Q_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)]/R_{0s}^5$
$g_{\varphi\varphi}$	$kr_s \sin Q_s [-R_{0s}^2 \cos(\varphi_0 - \varphi_s + 3r_0 r_s \sin Q_0 \sin Q_s \sin^2(\varphi_0 - \varphi_s))]$ $/R_{0s}^5$
*Где G - гравитационная постоянная [$6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$]; ρ_s – остаточная плотность сферической призмы; P – гравитационный потенциал; g_r , g_Q и g_φ – радиальный, северо-южный и западно-восточный компоненты гравитационного вектора; g_{rr} , g_{rQ} , $g_{r\varphi}$, g_{Qr} , g_{QQ} , $g_{Q\varphi}$, $g_{\varphi r}$, $g_{\varphi Q}$ и $g_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора силы тяжести.	

Подставляя формулы (3.49), (3.50) и данные из (табл.3.1) в (3.48) можно получить формулы всех гравитационных эффектов.

Из-за сложного аналитического решения уравнения (3.48), численное интегрирование с помощью КГЛ было адаптировано для оценки тройного интеграла (3.48) методом наименьших квадратов. Раскладывая интеграл с использованием КГЛ, можем записать:

$$\frac{(r_2 - r_1)(Q_2 - Q_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}{8} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I C_i C_j C_k g(r_{si}, Q_{sj}, \varphi_{sk}, r_0, Q_0, \varphi_0) \quad (3.51)$$

где число узлов (I, J, K) для интегрирования методом КГЛ по координатам r , Θ , φ . Далее гравитационный эффект $I \times J \times K$ эквивалентных точечных источников суммируется для симуляции гравитационного эффекта сферической призмы. Координаты $(r_{si}, \Theta_{sj}, \varphi_{sk})$ – фактические координаты в призме и коэффициенты Гаусса-Лежандра (C_i, C_j, C_k) соответствуют координатам Гауссовых узлов $(r_{ip}, \Theta_{jp}, \varphi_{kp})$ в интервале $(-1;1)$. $r_{si}, \Theta_{sj}, \varphi_{sk}$ приведены ниже:

$$\begin{cases} r_{si} = \frac{r_{ip}(r_2 - r_1) + (r_2 + r_1)}{2} \\ Q_{sj} = \frac{Q_{jp}(Q_2 - Q_1) + (Q_2 + Q_1)}{2} \\ \varphi_{sk} = \frac{\varphi_{kp}(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_2 + \varphi_1)}{2}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Так как r_{si} всегда меньше, чем r_2 согласно уравнению (3.52), то R_{os} всегда больше нуля. Следовательно, метод квадратур Гаусса-Лежандра для гравитационного моделирования наземных измерений (например, точка наблюдения находится наверху сферической призмы) не будет вызывать сингулярности.

Точность интегрирования КГЛ в основном зависит от расстояния между узлами: чем оно меньше, тем точнее получаемое решение. Более того, вычислительная точность, получаемая с использованием меньших призм эквивалентна точности, получаемой с большим количеством узлов КГЛ. Поэтому авторы статьи предлагают делить каждую призму на меньшие, уменьшая расстояние между узлами. Перед интегрированием призма должна быть поделена на несколько призм с меньшими размерами, если, длина ее стороны больше, чем минимальное расстояние от призмы до точки наблюдения. Это деление будет продолжаться до тех пор, пока все призмы не станут достаточно маленькими по сравнению с расстоянием до точки вычисления. После того, как возмущающие массы будут оптимально

разделены, происходит интегрирование КГЛ для вычисления гравитационных эффектов. В алгоритме должно устанавливаться наименьшее значение длины стороны СП для предотвращения бесконечного деления на призмы, когда расстояние до точки наблюдения равно или стремиться к нулю.

Меньшие призмы и близкое расположение узлов более аккуратное решение, но такой метод увеличивает время вычисления. Поэтому чем дальше от точки вычисления, тем меньше делений сферической призмы выполняется. Большинство разделений и вычислений происходят на нескольких призмах вблизи точки наблюдения, в то время как, остальные удаленные призмы требуют всего нескольких вычислений. Таким образом, адаптивная схема помогает избежать многих ненужных вычислений при той же заданной точности.

Метод Декартового интегрального ядра. В статье [Grombein, 2013] представлена модификация стандартных формул для вычисления гравитационного поля тессероида. Автор предлагает при интегрировании по объему тессероида представлять подынтегральное выражение в Декартовых координатах. Таким образом упрощается определение производных гравитационного потенциала тессероида, по сравнению с тем, когда подынтегральное выражение описано в сферических координатах. Разработанные формулы для тессероида обеспечивают точные выражение производных потенциала в локальной системе Декартовых координат, что позволяет избежать дополнительных трансформаций и поэтому, может использоваться в любой точке на земном шаре.

Интеграл Ньютона для тессероида постоянной плотности ρ может быть определен введением области интегрирования $\Omega^* := [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\lambda_1, \lambda_2] \subset R_3$ и сферического элемента $d\Omega = r'^2 \cos \varphi' dr' d\varphi' d\lambda'$:

$$V^*(r, \varphi, \lambda) = G\rho \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{l} d\Omega = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r'^2 \cos \varphi'}{l} dr' d\varphi' d\lambda' \quad (3.53)$$

где $l = l(P, Q) = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$ - обозначает Евклидово расстояние между точкой вычисления P и текущей точкой интегрирования Q . Сферическое расстояние ψ между векторами на точки P и Q определяется как:

$$\cos \psi(P, Q) := \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (3.54)$$

Так как интегрирование по переменным λ' и φ' состоит из эллиптических интегралов, (3.53) не может быть решено в закрытой аналитической форме. Поэтому для вычисления гравитационного потенциала тессероида, используются численные методы оценки подынтегрального выражения

$$K(P, Q) := \frac{r'^2 \cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}}. \quad (3.55)$$

Точка вычисления P должна находиться вне поверхности тессероида, т.е. $P \notin \Omega^*$.

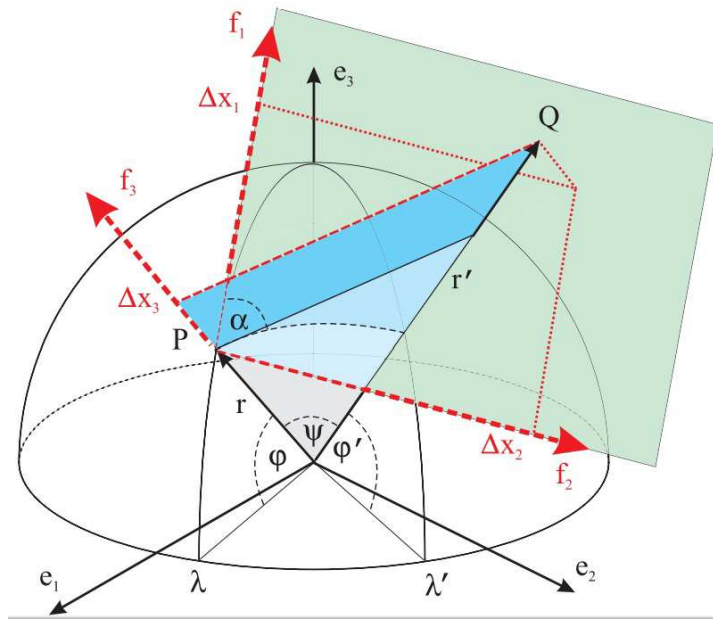


Рис.3.9 Визуализация разницы координат Δx_1 , Δx_2 и Δx_3 между точкой расчета P и текущей точкой интегрирования Q . Геоцентрическая Декартова и связанная сферическая системы координат обозначены черной осью e_i , топоцентрическая локальная Декартова система координат показана красной осью f_i .

Как видно из рисунка (рис.3.9), Декартово расстояние между точкой вычисления P и текущей точкой интегрирования Q может быть выражено как:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= r' \sin \psi \cos \alpha, \\ \Delta x_2 &= r' \sin \psi \sin \alpha, \\ \Delta x_3 &= r' \cos \psi - r,\end{aligned}\tag{3.56}$$

где α – азимутальный угол между направлениями на точки P и Q . Следует отметить, что $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ в уравнении (3.56) могут быть также интерпретированы как Декартовы координаты точки Q относительно топоцентрической системы с началом в точке P .

Вводим известные выражения сферической тригонометрии:

$$\begin{aligned}\sin \psi \cos \alpha &= \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos \delta \lambda, \\ \sin \psi \sin \alpha &= \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \delta \lambda,\end{aligned}\tag{3.57}$$

в уравнение (3.56) и получаем:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= r'(\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos \delta \lambda), \\ \Delta x_2 &= r' \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \delta \lambda, \\ \Delta x_3 &= r' \cos \psi - r,\end{aligned}\tag{3.58}$$

где $\delta \lambda := \lambda' - \lambda$.

Используя полученные функциональные выражения в уравнении (3.58) Евклидово расстояние между P и Q может быть выражено в локальной Декартовой системе как:

$$l(P, Q) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2} = \sqrt{\Delta x_i \Delta x_i}.\tag{3.59}$$

Подставляя уравнение (3.59) в уравнение (3.53):

$$V^*(r, \varphi, \lambda) = G\rho \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}} d\Omega\tag{3.60}$$

для гравитационного потенциала тессероида, основываясь на подынтегральном выражении в Декартовых координатах.

Поскольку подынтегральное выражение в уравнении (3.60) аналитическая функция $P \notin \Omega^*$, дифференцирование и интегрирование может быть заменено согласно интегральному правилу Лейбница. Из этого следует:

$$\frac{\partial V^*}{\partial x_1} = G\rho \frac{\partial}{\partial x_1} \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{l} d\Omega = G\rho \iiint_{\Omega^*} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{l} d\Omega. \quad (3.61)$$

Аналогично выражению для призмы или точечной массы, частные производные с подынтегральным выражением в Декартовых координатах в результате выглядит как:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{l} \right) = \frac{\Delta x_i}{l^3}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{l} \right) = \left(\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{l^5} - \frac{\delta_{ij}}{l^3} \right), \quad (3.63)$$

где $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и δ_{ij} – дельта Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$ если $i=j$ и $\delta_{ij} = 0$ в другом случае.

Гравитационный потенциал, ускорение и тензор Марусси тессероида с постоянной плотностью ρ могут быть описаны общей формулой:

$$\begin{Bmatrix} V^*(r, \varphi, \lambda) \\ a_i^*(r, \varphi, \lambda) \\ M_{ij}^*(r, \varphi, \lambda) \end{Bmatrix} = G\rho \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{l^3} \begin{Bmatrix} \Delta x_i \Delta x_j \\ \Delta x_i \\ \frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{l^2} - \delta_{ij} \end{Bmatrix} d\Omega, \quad (3.64)$$

где $\Delta x_i \Delta x_i = l^2$.

Хотя подынтегральное выражение в уравнении (3.64) выражено в Декартовых координатах, стоит упомянуть, что область интегрирования все равно ограничена сферическими координатами, распространяющимися и на область тессероида, где $\Omega^* = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\lambda_1, \lambda_2]$ и $d\Omega = r'^2 \cos\varphi' dr' d\varphi' d\lambda'$. Также эти формулы составляют эллиптические интегралы, которые должны вычисляться численными методами, например, разложением в ряд Тейлора. При таком подходе интегрирование происходит путем разложения в ряд

Тейлора подынтегрального выражения с погрешностью четвертого порядка в пространственных координатах точки наблюдения.

Перенос точки расчета на полюс. В статье [Сеначин, Сеначин, 2018] представлен алгоритм компьютерной программы, предназначенной для расчета региональных и планетарных моделей тектоносферы Земли с учетом ее сферической формы, путём аппроксимации гравитирующих тел сферическими прямоугольными призмами. Авторы указывают на то, что учет шарообразной формы Земли необходим лишь при построении региональных геоплотностных моделей с площадью более 20 млн. км².

Изначально заданный аномалеобразующий объект разбивается на элементарные тела, имеющие форму сферической прямоугольной призмы. Далее происходит преобразование координат всех вершин гравитирующих тел так, чтобы точка расчета поля была расположена на вершине сферы, заменяющей Землю (т.е. $\varphi=0$). Это необходимо для упрощения вычислений гравитационного эффекта от сферической прямоугольной призмы.

В общем виде интегральное выражение для расчета аномального эффекта от сферической прямоугольной призмы, может быть представлено как:

$$\Delta G(r_0, \varphi_0, \Theta_0) = f \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{p(r)(R - r \cos \omega) r^2 \sin \varphi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi d\Theta dr, \quad (3.65)$$

где f – гравитационная постоянная; r_0 , φ_0 , Θ_0 – высота, широта и долгота точки, в которой проводится расчет гравитационного поля; R – радиус Земли;

$$\cos \omega = \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(\Theta_0 - \Theta). \quad (3.66)$$

Как указано в работе [Старостенко и др., 1986], интеграл (3.65) не выражается в конечном виде, поэтому для его решения необходимо пользоваться методами численного интегрирования. Однако, В.Н. Сеначин предложил другой подход к решению данного интеграла: при расположении точки расчета гравитационного поля на полюсе (r_0 , $\varphi_0=0$) из выражения (3.66) следует $\cos \omega = \cos \varphi$, а интеграл (3.65) можно представить в виде:

$$\Delta G(r_0, \varphi_0 = 0, \Theta_0) = f \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{p(R - r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi d\Theta dr. \quad (3.67)$$

Тогда, можно провести аналитическое интегрирование по долготе:

$$\Delta G(r_0, \varphi_0 = 0, \Theta_0) = f(\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{p(R - r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi dr. \quad (3.68)$$

Решение данного интеграла представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta G(R, 0, \Theta_0) \\ = f \Delta \Theta \rho_0 \left[\frac{X^{3/2}}{3R^2} + \left(\frac{r}{R} \cos \varphi - \sin^2 \varphi \right) \cdot X^{1/2} - R \cos \varphi \right. \\ \left. \cdot \ln \left| 2r - 2R \cos \varphi + 2X^{3/2} \right| \right], \end{aligned} \quad (3.69)$$

где $X = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$.

Выражение (3.69) представляет решение двойного интеграла, в который необходимо подставить значения пределов интегрирования по переменным $\cos \varphi$ и Θ , затем вычислить гравитационный эффект заданной сферической прямоугольной призмы.

Аппроксимация тессероида сферическими треугольниками. В работе [Мартышко и др., 2018] представлен метод решения прямой задачи гравиметрии, базирующийся на аппроксимации тессероида сферическими треугольниками. Фактически интегрирование происходит по треугольным граням и выражается в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \int_{\langle p_1, p_2, p_3 \rangle} \frac{dS}{|\vec{r} - \vec{r}_0'|} \\ = -\frac{\pi}{2} |(\vec{a}_1; \vec{n})| + \sum_{i=1}^3 (\vec{a}_i; [\vec{A}_{i-1}; \vec{n}]) \ln \frac{(\vec{A}_{i-1,i}; \vec{a}_i) + |\vec{a}_i|}{(\vec{A}_{i-1,i}; \vec{a}_{i-1}) + |\vec{a}_{i-1}|} \\ - (\vec{a}_i; \vec{n}) \operatorname{arctg} \frac{([\vec{a}_{i-1,i}; \vec{a}_i], [\vec{a}_{i,i+1}; \vec{a}_i])}{(\vec{a}_i; \vec{N}) |\vec{a}_i|}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

где $\vec{A}_{j,i} = \frac{\vec{a}_{j,i}}{|\vec{a}_{j,i}|}$.

3.3. Новый алгоритм вычисления радиальной составляющей силы тяжести сферического параллелепипеда

В качестве элементарного аппроксимирующего тела для решения прямой задачи гравиразведки с учетом сферичности Земли выбран сферический параллелепипед (СП) – фрагмент Ω шара радиусом R с центром, совпадающим с началом координат O сферической системы координат $\Sigma r\varphi\lambda$, помещенным в центр Земли. СП ограничен частями двух сферических поверхностей с радиусами r_1, r_2 и центрами в точке O ; двумя плоскостями, направленными под углами λ_1, λ_2 в экваториальной плоскости и пересекающимися на полярной оси OZ ; двумя коническими поверхностями φ_1, φ_2 с вершиной в точке O (рис.3.2).

Необходимо вычислить производную V_R (аналог V_Z в сферической системе координат) гравитационного потенциала данного тела в точке $P (R, \varphi_0, \lambda_0)$:

$$V_R(R, \varphi_0, \lambda_0) = f\sigma \iiint_{r_1, \varphi_1, \lambda_1}^{r_2, \varphi_2, \lambda_2} (R - r \cos \omega) r_0^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda, \quad (3.71)$$

где $r_0 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega}$, σ – плотность тела; r, φ, λ – переменные интегрирования, ω – центральный угол между точками P и M : $\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos (\lambda_0 - \lambda)$. Как известно [Старостенко, Манукян, 1983] интеграл (3.71) не имеет аналитического решения, поэтому для расчета гравитационного эффекта в данном случае приходится прибегнуть к численному интегрированию.

Для решения этой задачи предложен адаптивный смешанный алгоритм, использующий квадратурные формулы Гаусса-Лежандра [Старостенко, Манукян, 1983; Пятаков, Исаев, 2012]. Однократное интегрирование (по переменной r), осуществляется аналитически, оставшийся двукратный

интеграл решается упомянутым численным методом. Надо сказать, что аналитическое интегрирование заметно усложняет вид подынтегральной функции (в частности, появляются слагаемые, включающие в себя логарифмическую функцию), что неизбежно сказывается на последующей скорости вычисления двойного интеграла по переменным φ и λ [Долгаль и др., Вестник КРАУНЦ, 2015].

С учетом требований к точности, быстродействию и устойчивости алгоритмов решения прямых задач [Страхов, 1999], а также исходя из возможностей современных компьютеров, авторами разработано теоретико-программное обеспечение задачи вычисления интеграла (3.71), основанное на адаптивном квадратурном алгоритме, весьма эффективным при вычислении интегралов от функций с особенностями [Бахвалов и др., 2000].

Примем сокращенные обозначения: $\psi(X)$ – подынтегральная функция в выражении (3.71), $X = (r, \varphi, \lambda)$, $\Omega = \{r_1 \leq r \leq r_2, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$. Заменой переменных $r = (r_1 + r_2)/2 + t_1(r_1 - r_2)/2$, $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 + t_2(\varphi_1 - \varphi_2)/2$, $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 + t_3(\lambda_1 - \lambda_2)/2$, интеграл (3.83) преобразуется в интеграл по кубу:

$$f\sigma \iiint_{\Omega} \psi(X) dX = f\sigma \iiint_G g(t) dt, \quad (3.72)$$

где $G = \{-1 \leq t_1 \leq 1, -1 \leq t_2 \leq 1, -1 \leq t_3 \leq 1\}$. Для его вычисления предлагаются три кубатурные формулы:

$$\iiint_G g(t) dt \approx Q_q(g), \quad q = 1, 2, 3. \quad (3.73)$$

$$Q_1 = \frac{8}{225} \left[44g(0,0,0) + \frac{121}{8} \sum_{[i],[j],[k]=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{11}}, j\sqrt{\frac{5}{11}}, k\sqrt{\frac{5}{11}}\right) + 10 \sum_{[i]+[j]+[k]=1} g(i,j,k) \right], \quad (3.74)$$

$$Q_2 = \frac{8}{1225} \left[-\frac{1552}{5} g(0,0,0) + \frac{1573}{40} \sum_{[i],[j],[k]=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{11}}, j\sqrt{\frac{5}{11}}, k\sqrt{\frac{5}{11}}\right) + \frac{784}{5} \sum_{[i]+[j]+[k]=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{14}}, j\sqrt{\frac{5}{14}}, k\sqrt{\frac{5}{14}}\right) + 15T \right], \quad (3.75)$$

$$T = \sum_{[i],[j]=1} g(i, j, 0) + \sum_{[i],[k]=1} g(i, 0, k) + \sum_{[j],[k]=1} g(0, j, k), \quad (3.76)$$

$$Q_3 = 4/9 Q_1 + 5/9 Q_2. \quad (3.77)$$

Индексы суммирования i, j, k здесь могут принимать только фиксированные значения: -1,0,1. Формулы Q_1 и Q_2 являются точными для всех многочленов, со степенью $n \leq 5$, аппроксимирующих функцию $g(t)$; формула Q_3 точна для всех многочленов при $n \leq 7$. Следует заметить, что при вычислении по формулам Q_1 и Q_2 частично используются одни и те же значения переменных интегрирования t , что заметно снижает вычислительные затраты.

Алгоритм численного интегрирования представляет собой итерационный процесс, в котором последовательно увеличивается число подобластей, на которые разбивается область G . Первоначально для этой области осуществляется вычисление интегралов по формулам $Q_1(g)$ и $Q_2(g)$. При выполнении условия

$$|2[Q_1(g) - Q_2(g)]/[Q_1(g) + Q_2(g)]| \leq 10^{-4} \quad (3.78)$$

за приближенное значение интеграла принимается величина, вычисленная по формуле Q_3 , являющаяся линейной комбинацией значений, полученных по формулам Q_1 и Q_2 . Если условие (3.78) не выполняется, то G разбивается на 2^3 конгруэнтных кубов (по 33 значения $g(t)$ в каждом из них (рис. 3.10)) и данный алгоритм применяется к каждому из этих кубов. Процесс деления продолжается до тех пор, пока условия (4) не будет выполнено. С целью экономии времени желательно начинать вычисление тройного интеграла (3.72) с разбиения области G сразу на 64 куба. Результаты выполненных вычислительных экспериментов свидетельствуют, что число кубов при вычислении гравитационного эффекта от любого СП может быть ограничено сверху величиной $64^3 = 262144$.

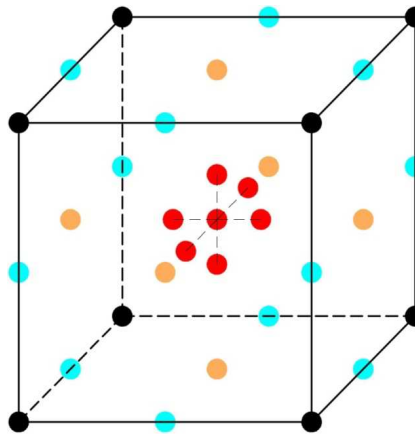


Рис. 3.10. Схема узловых точек функции $g(t)$ в элементарном кубе, на которые разбивается область G

В таблице 3.2 приведены результаты модельного эксперимента: вычисление V_R для объекта, ограниченного координатами $50^\circ \leq \varphi \leq 50.5^\circ$, $40^\circ \leq \lambda \leq 40.2^\circ$ и глубинами оснований 5 км и 15 км, обладающего избыточной плотностью 0.2 г/см³, на сферической Земле в 14641 точке квадратной сети размером $0.02^\circ \times 0.02^\circ$ (в линейной мере ~ 1.4 км $\times$ 2.2 км). Отметим, что максимальная амплитуда поля V_R составляет примерно 36.4 мГал. Для расчета применялись составные формулы трапеций, парабол (Симпсона) и представленный выше алгоритм. Для методов Ньютона-Котеса использовался переменный шаг интегрирования k , последовательно уменьшающийся в 2 раза. Существенно ускорить процесс вычислений позволило однократное вычисление массива $\{\cos \omega\}$ для аномалиеобразующего объекта и хранение его в RAM. Число узлов интегрирования N изменялось в зависимости от модуля разности интегралов $\varepsilon = |I(k) - I(k/2)|$ в каждой точке расчета поля $(R, \varphi_0, \lambda_0)$ и составляло 215–224. Максимальное количество N вычисляемых значений функции $g(t)$ в предлагаемом алгоритме не превышало 33×29 .

Таблица 3.2

Параметры точности и скорости вычислений V_R

Алгоритм расчета	Среднее N	Среднее ε , мГал	Время счета, с
Формула трапеций	1065584	0.00008	694
Формула парабол	37764	0.00002	19
Кубатурный алгоритм (3)	2342	0.00002	7

Как очевидно, в данном случае наилучшие результаты получены с применением предлагаемого кубатурного алгоритма, а наиболее трудоемким во всех случаях является вычисление гравитационного эффекта вблизи возмущающего объекта (рис. 3.11). Следует добавить, что реальная точность вычислений ε параметра V_R по итоговой формуле Q_3 будет несколько выше, чем указано в таблице, где использованы оценки $\varepsilon = /Q1 - Q2 /$.

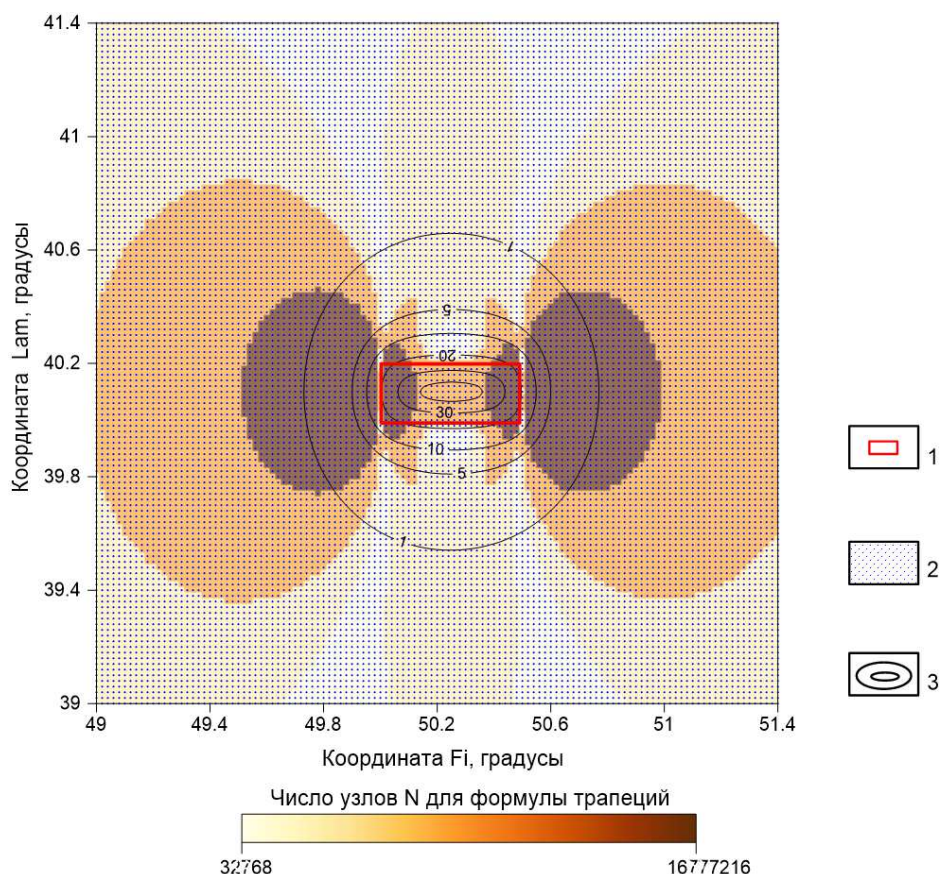


Рис. 3.11. Модельный пример:

1—сферический параллелепипед; 2—точки расчета гравитационного поля; 3—
изоаномалы V_R , мГал

Представляет интерес сопоставление вышеописанного алгоритма вычислений поля СП с вычислительной схемой, приведенной в работе [Старостенко, Манукян, 1983], где имеются представленные в табличной форме результаты расчетов. Задача 4 представляет собой вычисление V_R для СП, расположенного по широте φ в интервале 87.5° – 92.5° , по долготе – в интервале 10° – 15° , с глубиной верхней кромки 30 км от земной поверхности, с вертикальной мощностью 300 км, обладающего избыточной плотностью $\sigma = 1$ г/см³. Значения гравитационного поля, вычисленного двумя разными способами при одинаковой заданной точности $\varepsilon = 0.05$ мГал, по широтному профилю $\varphi_0 = 12.5^\circ$ близки между собой (рис. 3.12).

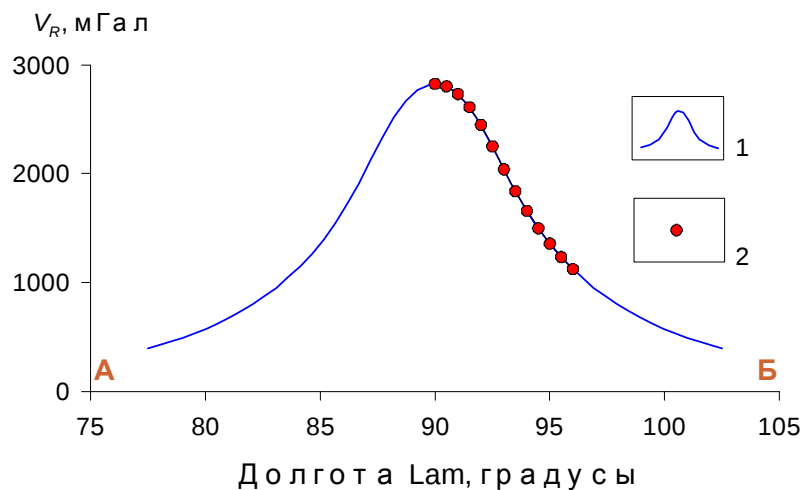


Рис. 3.12. Сопоставление результатов решения прямой задачи разными методами по широтному профилю АБ: 1 - адаптивный кубатурный алгоритм; 2 – квадратуры Гаусса-Лежандра (Старостенко, Манукян, 1983)

Основные затраты времени при численном интегрировании зависят от скорости вычисления значений подынтегральной функции. Для расчета по формуле (3) число кубов, на которые разбивалась область интегрирования G , изменялось от 64 до 4096 (по 33 значения $g(t)$ в каждом из них). В одной точке определения V_R функция $g(t)$ в среднем вычислялась 3032 раза. Расчет гравитационного поля в $25 \times 25 = 625$ точках был выполнен за 1 секунду (рис. 3.13). При вычислении двойного интеграла с помощью квадратур Гаусса-Лежандра при той же точности интегрирования ε требовалось уже

$32 \times 32 \times 16 = 16384$ значения функции (более сложной, чем $g(t)$) [Долгаль и др., Георесурсы, 2015].

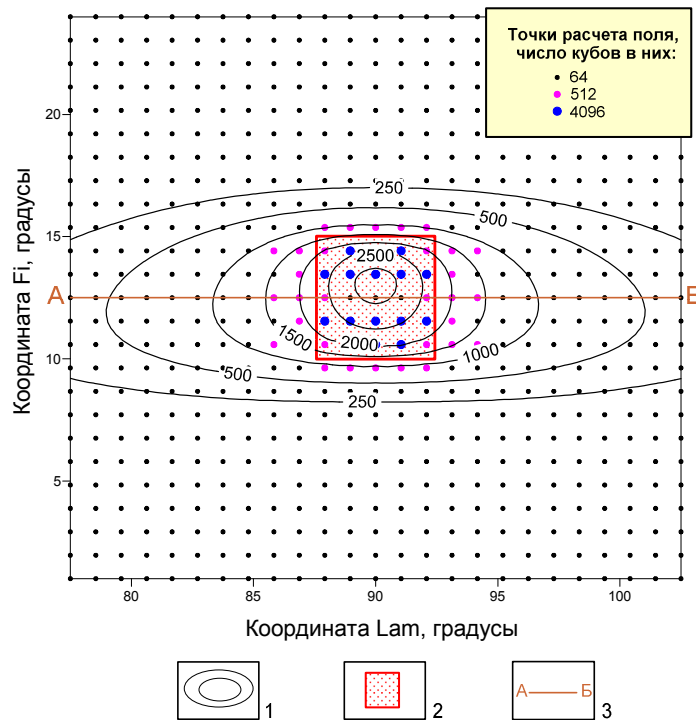


Рис. 3.13. Решение прямой задачи гравиразведки для сферического параллелепипеда с помощью адаптивного кубатурного алгоритма:

1 - изоаномалы V_R , мГал; 2 - аномалиеобразующий объект; 3 - расчетный профиль
 $\varphi_0 = 12.5^\circ$

3.4. Основные элементы технологии учета гравитационного влияния топографических масс для шарообразной модели Земли

Предпосылками разработки и создания технологии учета сферичности Земли при высокоточных гравиметрических съемках явилось:

- повышение точности полевых измерений силы тяжести за счет создания новой аппаратуры. Выпускаются всё более точные гравиметры, например, ГНУ-КВК, ScintrexAutogravCG-3, CG-5, CG-6 [Бычков и др., 2013]. Также увеличилась точность планово-высотной привязки пунктов наблюдения;

- получение новых знаний о форме Земли, в открытом доступе имеются детальные базы данных о фигуре геоида и рельефа Земли;

- значительное увеличение вычислительных мощностей компьютеров, которые широко используются для обработки и интерпретации полевых данных. Соответственно исчезла необходимость в максимальном упрощении процедур обработки;

Таким образом, требования производства и наши аппаратурно-технические возможности влекут за собой нецелесообразность использования «плоской» модели Земли [Хохлова, Симанов, 2013]. В связи с этим диссертантом предлагается новый алгоритм вычисления V_R для сферического параллелепипеда с учётом криволинейности земной поверхности, предназначенный для редуцирования гравиметрических данных.

Предлагаемый алгоритм обладает рядом особенностей:

- в качестве модели Земли используется сфера Каврайского [Каврайский, 1958], что является неким компромиссом между сферической и эллипсоидальными моделями Земли. Сферическая модель Земли идеализирует её реальную форму, например, не учитывается полярное сжатие. В то время как, использование эллипсоидальной модели значительно усложняет процесс вычисления;
- аппроксимация топографических масс осуществляется набором сферических параллелепипедов, которые позволяют наиболее точно описать промежуточный слой и рельеф местности;
- использование аналитической модели рельефа вместо цифровой;
- вычисление гравитационного эффекта V_R с помощью адаптивного кубатурного алгоритма, характеризующегося быстродействием и высокой точностью получаемых результатов.

Целевым назначением разработанного алгоритма является помощь в редуцировании данных высокоточной гравиразведки, а именно вычисление поправки за промежуточный слой и рельеф местности. Также возможно использование алгоритма при моделировании геологических структур с учетом сферичности Земли.

3.5. Использование сферы Каврайского с целью повышения точности решения прямых задач гравиразведки

Известно, что фигура Земли – геоид. Это уровенная поверхность, совпадающая в открытом море со средним невозмущенным положением поверхности воды. Геоид не является какой-либо правильной математической поверхностью, и его уравнение не может быть написано в конечном виде. Поэтому в практике пользуются одним из следующих двух приближений к действительной форме геоида.

1 приближение. Земля – шар с радиусом $R=6370$ км. При этом целесообразно брать за земной шар, такой, поверхность которого равна поверхности земного эллипсоида (сфероида). Для эллипсоида Красовского, принятого в России, $R=6371.116$ км; для международного Хейфорда эллипсоида $R=6371.228$ км.

2 приближение. Земля – сфероид, т.е. эллипсоид вращения с малым сжатием вдоль полярной оси. Это приближение, как правило, принимается при обработке геодезических измерений и при точных картографических работах. А именно, измерения, относящиеся к поверхности геоида, мысленно укладываются или проектируются на поверхности некоторого близкого к геоиду сфероида, называемого референц-эллипсоидом. Геодезические координаты, используемые при проектировании и выполнении гравиметрических работ, относятся к общеземному эллипсоиду, размеры и форма которого определяются значениями большой полуоси и сжатия (ПЗ-90.11). По известным геодезическим координатам B и L двух точек можно рассчитать с любой точностью расстояние между ними и направление с одной точки на другую. Но формулы вычислений достаточно сложные и громоздкие, следовательно, при решении задач, не требующих очень высокой точности, расчеты можно проводить не на поверхности эллипсоида, а на поверхности сферы с использованием более простых выражений.

Для этого необходимо отобразить поверхность эллипсоида на заменяющую сферу, т.е. каждой точке с геодезическими координатами B и L на эллипсоиде поставить в соответствие точку на сфере со сферическими координатами φ и λ . Поскольку геодезическая и сферическая долготы по определению совпадают, достаточно преобразовать только геодезическую широту в сферическую и выбрать радиус сферы R так, чтобы результаты расчета расстояний и углов на сфере были как можно ближе к результатам точного расчета на эллипсоиде. В практике геологоразведочных работ часто пользуются сферой радиусом $R = 6371$ км, поверхность которой равна поверхности эллипсоида. При этом максимальные погрешности в определении расстояний достигают 0,5% и углов не более 0.4° . Однако, в воздушной навигации для решения подобных задач наиболее часто используют способ отображения, предложенный В.В. Каврайским [Каврайский, 1958; Сарайский, 2007]. Он обеспечивает минимальное искажение углов и расстояний в среднем на всей поверхности сферы. Погрешность расчета углов на сфере не превышает 0.1° , а максимальное относительное искажение расстояний 0.08%. Для эллипсоида Красовского формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi = B - k \cdot \sin 2B, \\ \lambda = L, \\ R = 6372.9 \text{ км}, \end{cases} \quad (3.79)$$

где $k=0.143814^\circ=8'38''\approx 8.6'$.

Использование сферического параллелепипеда для учета гравитационного влияния топографических масс на шарообразной Земле позволяет, во-первых, наиболее адекватно аппроксимировать промежуточный слой и рельеф местности, и, во-вторых, отпадает необходимость отдельного определения этих поправок и двойного вычисления влияния рельефа местности. В свою очередь, применение локальной сферической системы координат, упрощает процесс вычисления гравитационного эффекта от каждого аппроксимирующего тела. При этом

пересчет из геодезических координат в сферические с помощью формул В.В. Каврайского [Каврайский, 1958], ведет к повышению точности определения планового положения всех объектов, не усложняя вычислений.

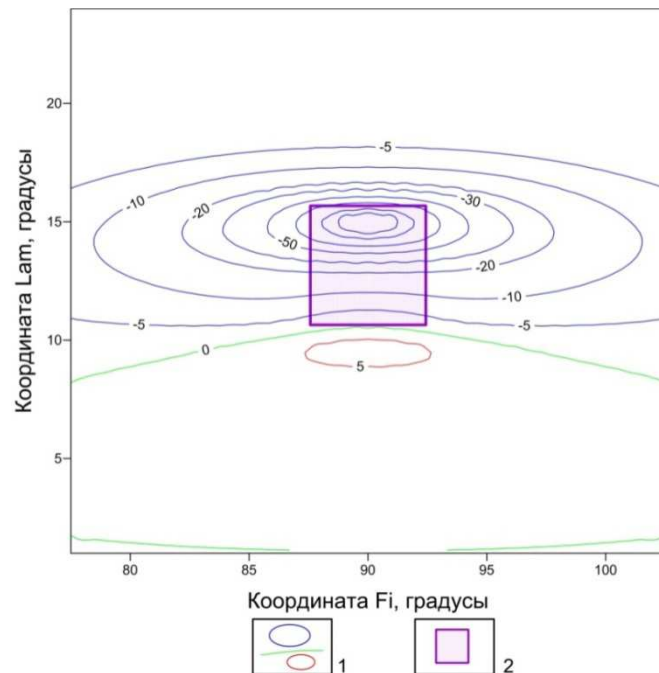


Рис. 3.14. Различия в значениях силы тяжести, обусловленных сферическим параллелепипедом, вычисленных на поверхности шара и на сфере Каврайского:
1 - изоаномалы разности V_R , мГал; 2 - аномалиеобразующий объект.

Представляет интерес сопоставление результатов решения прямой задачи гравиразведки для сферического параллелепипеда из задачи №4 в работе В.И. Старостенко и Манукяна А.Г. [Старостенко, Манукян, 1983] на поверхности шара радиусом $R=6371$ км и на сфере Каврайского. Сферический параллелепипед расположен по широте φ в интервале 87.5° – 92.5° , по долготе λ – в интервале 10° – 15° , с глубиной верхней кромки 30 км от земной поверхности и вертикальной мощностью 300 км, обладает избыточной плотностью $\sigma = 1$ г/см³. Разность значений V_R имеет диапазон изменения от -105.2 мГал до 8.3 мГал, при среднем значении 5.9 мГал и среднеквадратическом отклонении ± 14.5 мГал (рис. 3.14). Максимальная относительная погрешность в амплитудах аномалии достигает почти 10%.

Как очевидно, использование преобразования (3.79) может заметно повысить точность вычисления гравитационных аномалий на шарообразной Земле.

3.6. Выводы по главе

При обработке высокоточной гравиметрической съемки, а также во время моделирования крупных геологических объектов, необходимо учитывать сферичность Земли. Для более адекватного описания рельефа и геологических структур в таком случае удобнее использовать в качестве элементов аппроксимации сферические тела: сферический параллелепипед, диск, многогранник, треугольную призму и т.д. Выбор элемента аппроксимации должен осуществляться исходя из двух условий. С одной стороны, создание "плотной упаковки" при описании форм рельефа или геологической структур. С другой стороны, скорость и точность вычисления гравитационного поля от одного элемента.

При вычислении радиальной составляющей гравитационного потенциала от сферического элемента аппроксимации необходимо вычислять тройной интеграл по переменным r , φ , λ . Часть исследователей [Старостенко, Манукян, 1983; Пятаков, Исаев, 2012] предпочитают вычислять его частично с помощью аналитического интегрирования и частично с использованием численного интегрирования. Следует отметить, что аналитическое интегрирование заметно усложняет вид подынтегральной функции (в частности, появляется слагаемые, включающие в себя логарифмическую функцию), что неизбежно сказывается на последующей скорости вычисления двойного интеграла по переменным φ и λ [Долгаль и др, 2015]. Разложение в ряд Тейлора дает результаты несколько хуже, чем использование квадратур Гаусса-Лежандра [Wild-Pfeiffer, 2008].

Оригинальный подход к учету сферичности Земли предложил Глазнев В.Н. [Глазнев, 2003]. Расчет аномального поля строится на основе обычной радиально-кольцевой палетки, состоящей из совокупности тонких сферических прямоугольных пластин с постоянной плотностью.

Эффективность метода продемонстрирована в монографии автора [Глазнев, 2003].

Исследователи предлагают различные сферические тела для аппроксимации, однако, многие из них сходятся в том, что для упрощения вычислений необходимо переходить к локальной сферической системе координат $\Sigma_{сфлок}$, таким образом, чтобы точка расчета поля находилась на полюсе.

Для первичной обработки и последующей интерпретации гравиметрических данных мы разработали алгоритм решения прямой задачи гравиразведки на сферической поверхности Земли. Кроме того, что использование данного алгоритма не усложняет и не затягивает процесс камеральной обработки, основные особенности алгоритма заключаются в следующем:

1. В качестве модели Земли используется её квазиэллипсоидальное приближение (сфера Каврайского). Это наиболее удобный и точный способ отображения земного эллипсоида на заменяющую его сферу, который обеспечивает минимальное искажение углов и расстояний.
2. Вычисления проводятся в сферической системе координат (СК). Это наиболее подходящая СК для адекватной аппроксимации топографических масс и геологических тел набором элементарных источников.
3. Аппроксимация рельефа земной поверхности осуществляется набором сферических параллелепипедов, которые позволяют наиболее точно описать промежуточный слой и рельеф местности;
4. Использование аналитической модели рельефа (АМР) вместо цифровой. Этот прием позволяет восстанавливать высоту произвольно выбранной точки в пределах АМР, вне зависимости от расположения её узлов.
5. Вычисление радиальной составляющей силы тяжести с помощью адаптивного кубатурного алгоритма, характеризующегося быстроедействием и высокой точностью получаемых результатов.

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ ДАННЫХ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

4.1. Поисковые работы на интрузивном массиве Кондёр

4.1.1 Краткая физико-геологическая характеристика района

Горный массив Кондёр находится в Аяно-Майском районе северной части Хабаровского края (рис.4.1). Расположен в 75 км к западу от села Джигда и в 100 км на юго-запад от села Нелькан, и в 1100 км на север от Хабаровска. Массив представляет собой почти идеально круглой формы геологическое образование, напоминающее кратер, - диаметром 7-8 км и возвышающееся над окружающим плато на 700 м, достигая 1400 м в своей вышей точке (рис.4.2.).

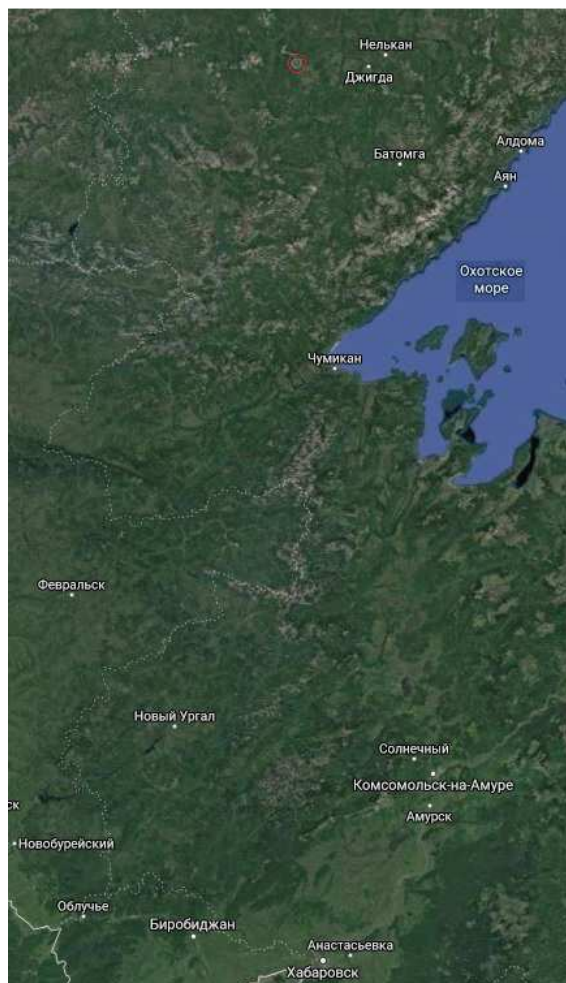


Рис. 4.1. Карта района работ: красный контур – участок гравиметрической съемки



Рис. 4.2. Горный массив Кондёр [ОАО "Артель старателей Амур"]

Климат района резко континентальный. Характерны зимние температуры до $-40^{\circ}\text{C} \div -45^{\circ}\text{C}$, летние до $+26^{\circ}\text{C} \div +30^{\circ}\text{C}$, с незначительным количеством осадков и недостатком влаги. Гидрографическая сеть не развита, в северной части, где кольцо хребта Кондёр размыкается, из него вытекает мелководная одноименная речка, являющаяся притоком р. Уоргалан. Внутри самого «кольца» находится цепочка возвышенностей, покрытых кедровым стлаником с редкой примесью лиственных деревьев. Животный мир типичен для горно-таежной области.

В экономическом отношении район освоен. Здесь расположено крупное месторождение россыпной платины, находящееся в разработке артелью старателей «Амур» (входит в группе компаний «Русская платина»). Данное месторождение по объему добычи занимает второе место в мире [ОАО "Артель старателей Амур"]

В геологическом плане площадь работ находится на северном склоне Батомгского выступа Алданского щита, на пересечении двух глубинных

разломов: Бераинского субмеридионального и Кондёр-Нётского субширотного. Здесь сформировался Кондёрский интрузивный массив, который на уровне современного эрозионного среза имеет в плане форму круга диаметром до 8.5 км и концентрически зональное строение. Массив сложен в основном ультрамафитами, по периферии которых развиты монцонитоиды. Вмещающими породами являются архейские метаморфиты и граниты, а также терригенные образования среднего рифея.

4.1.2. Полевые гравиметрические работы

Полевая гравиметрическая съемка масштаба 1:25 000 выполнялась Научно-производственной геофизической экспедицией Горного института УрО РАН на площади 35 км². Шаг измерений составлял 50 м, межпрофильное расстояние - 200 м; кроме того, выполнялись профильные наблюдения по 4-м профилям, выходящим за пределы Кондёрского массива с шагом 50 м. Фактически выполненный объем работ составил 206 пог. км, что полностью соответствовало геологическому заданию. Работы проводились в соответствии с проектом, “Инструкцией по гравиразведке” [Инструкция, 1980], “Инструкцией по топографо-геодезическому и навигационному обеспечению геологоразведочных работ” [Инструкция, 1997].

Гравиметрические работы выполнялись высокоточными компьютеризированными гравиметрами AUTOGRAV CG-5 № 82, № 404 фирмы SCINTREX (Канада). Для проведения топографо-геодезической съемки использовались электронный тахеометр Topcon GTS-239, GPS-приемники «Trimble – R8», навигационные GPS-приемники Garmin. Характеристики приборов приведены в таблице 4.1.

Гравиметрические работы. В качестве исходного пункта использовался пункт ОГП 0-1 со значением силы тяжести 700 мГал в поселке Кондёр. Относительно пункта ОГП 0-1 создан пункт ОГП 0-2. Пункт ОГП 0-2 создан в пешеходном рейсе двумя гравиметрами. Среднеквадратическая

погрешность определения силы тяжести на пункте составила ± 0.009 мГал (по проекту 0.02 мГал).

Рядовая гравиметрическая сеть включает в себя 4185 гравиметрических пунктов. Измерения на пунктах рядовой сети производились по однократной методике с использованием приборов AUTOGRAV при пешем передвижении от пунктов полевой опорной сети.

Для оценки качества съемки были выполнены контрольные наблюдения в объеме 287 пунктов, что составляет 6.9 % от общего числа рядовых пунктов. В каждый последующий рейс включались контрольные пункты предыдущих рейсов. Все звенья рейсов проконтролированы. Погрешность единичного измерения гравиметров на рядовой гравиметрической сети составила ± 0.021 мГал, которая принимается в качестве СКП определения наблюдаемых значений силы тяжести на пунктах.

Общая среднеквадратическая погрешность определения силы тяжести на рядовых гравиметрических пунктах с учетом погрешности опорной сети, вычисленная по формуле 9 «Инструкции по гравirazведке» [Инструкция, 1980], составляет ± 0.023 мГал.

Таблица 4.1

Сведения о методах и средствах измерений и метрологических параметрах результатов измерений

№	Объект измерений (горная выработка, порода, элемент и т. д.)	Измеряемая величина или параметр	Единица измерения	Требования по проекту		Характеристики использованных методов и средств измерений					Дата и место последней государственной поверки	Установленная НТД периодичность проверок метрологических параметров	Дата (период) проведения измерений	Где и кем проводились измерения	Принятый руководящий НТД
				Допустимая погрешность (в единицах измерения)	Рекомендуемый метод измерения	Метод измерения	Средство измерений, тип и заводской номер	Диапазон измерений, мГал	Величина случайной погрешности и по интервалам, мГал	Величина систематической погрешности, мГал/град					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	Гравитационное поле на земной поверхности	Ускорение силы тяжести	мГал (10^{-5} м/с ²)	На пунктах: каркасных- ±0.03 рядовых- ±0.05	С наземным и узко- и широкодиапазонными гравиметрами	С наземным и широкодиапазонными гравиметрами	CG-5 №404	8000	±0.010	0.5×10^{-4}	БГЭ, 06.13	Не менее 1 раза в год	2013г.	Хабаровский край, НППЭ ГИ УрО РАН	Инструкция по гравиразведке, 1980; ГОСТ 13017-83; МИ 1920-87; РД 41-03-012-92;
							CG-5 №82	8000	±0.008	0.4×10^{-4}	БГЭ, 06.13				
							CG-5 №402	8000	±0.008	0.5×10^{-4}	БГЭ, 06.13				
2	Геофизический пункт	Высота над уровнем моря	м	±0.10	Система спутниковой навигации и GPS	Система спутниковой навигации и GPS и высотные тахеометрические ходы	Тахеометр: Trimble 3305 №610192A Topcon GTS239 ON4350 Topcon GPT3107 8W2321 GPS-приемники: Trimble –R8 № 4906165155 № 4906165181				ФГУП «ПО Инженерная геодезия», 06.13, 12.12	Не менее 1 раза в год	2013г.	Хабаровский край, НППЭ ГИ УрО РАН	Инструкция по топографо-геодезическому и навигационному обеспечению геологоразв. работ, Новосибирск, 1997
3	Геофизический пункт	Координаты пунктов геофизических наблюдений.	м	±10											

Топографо-геодезические работы. Пункты геофизических наблюдений устанавливались через 50 метров. На местности пункты закреплялись деревянными кольями высотой 0.5-1.5 м с надписью номера профиля и пункта. Планово-высотная привязка пунктов гравиметрической съемки осуществлена в системе координат 1942 года и Балтийской системе высот 1977 года.

Координаты пунктов геофизических наблюдений определялись при помощи GPS аппаратуры «Trimble – R8». Спутниковые определения производились одновременно двумя двухчастотными приемниками. Наблюдения выполнялись в режиме быстрой статики и кинематики. Продолжительность сеансов составляла, в зависимости от условий видимости ИСЗ, помех на станции и величины базовой линии, от 1 мин до 30 мин.

Математическая обработка результатов спутниковых измерений производилась с использованием программного пакета «Trimble Business Center» v1.2. Сначала была выполнена обработка базовых линий, затем производилось уравнивание. Максимальная средняя квадратическая ошибка вычисления базовой линии составляет 0.100 метра.

Уравнивание сети проходило в два этапа. Свободное уравнивание методом наименьших квадратов в системе координат WGS-84. Свободное уравнивание действует как проверка качества сети. По результатам уравнивания ошибки определения координат не превышали 300 мм в плане и 50 мм по высоте.

Трансформация СГСС в Государственную систему координат 1942г. и Балтийскую систему высот, происходила при помощи фиксирования каталожных координат и отметок пунктов ГГС с использованием математической модели геоида EGM-96 (Global).

По контрольным измерениям координат на 99 пунктах при помощи спутниковой аппаратуры была произведена оценка точности, где

среднеквадратическая погрешность определения координат составила ± 0.98 м.

Высоты гравиметрических пунктов определялись из ходов нивелирования, выполненных электронным тахеометром. Ходы опираются на пункты государственной геодезической сети и на опорные пункты, выставленные на открытых местах. Ходы нивелирования проложены по гравиметрическим пунктам в виде ходов и замкнутых полигонов. Оценка нивелирования и увязка ходов (полигонов) выполнялась по методическим требованиям технического нивелирования. Максимальная невязка нивелирного хода составила -0.23 метра.

Оценка точности определения высот гравиметрических пунктов произведена по невязкам ходов (полигонов). Среднеквадратическая погрешность на 1 км хода составила ± 0.087 м. Максимальная среднеквадратическая ошибка в середине хода составила ± 0.030 м. Погрешность определения высот с учетом ошибок GPS измерений составила ± 0.03 м.

4.1.3. Обработка полевых материалов согласно «Инструкции по гравиразведке»

Обработка полевых гравиметрических материалов осуществлялась в соответствии с Инструкцией по Гравиразведке [Инструкция, 1980] с помощью информационно-аналитической системы «ИАС ГРАВИС», созданной в Горном институте УрО РАН [Симанов, 2008]. Поправки за свободный воздух и промежуточный слой были вычислены по стандартным формулам. Поправки в гравитационное поле за влияние рельефа местности рассчитывались программой TopWin с использованием цифровых моделей рельефа, сформированных:

- путем использования векторизованных топографических карт масштаба 1: 50 000 - для центральной и ближней зон (шаг сети отметок высот – 33.3 м);

- путем пересчета данных о рельефе Земли матрицы SRTM, заданной с разрешением 90 м на земную поверхность, расположенных между 60 градусом северной и 56 градусом южной широты в узлы равномерной сети (шаг сети отметок высот – 50 и 300 м). Матрица SRTM свободно распространяется через Internet Национальным картографическим управлением США (National Imagery and Mapping Agency, NIMA) NASA.

Основные сведения об исходных материалах и методике вычислений поправок за рельеф приведены в таблице 4.2. Плотность промежуточного слоя принималась стандартной, равной 2.67 г/см³. Именно для этой плотности даны все основные оценки точности выполненной гравиметрической съемки.

Таблица 4.2

Основные характеристики исходных данных и методики расчета поправок за влияние рельефа местности

Название зоны	Размеры зоны		Сеть ЦММ, м	Примечания
	Сторона L1 внутреннего квадрата, км	Сторона L2 внешнего квадрата, км		
Центральная		0.100	33.3×33.3	Использовалась аппроксимация высот алгебраическим полиномом 4-ой степени.
Ближняя	0.100	3.0	33.3×33.3	Поправки вычислялись в 4-х ближайших к пункту узлах ЦММ, затем применялась 3D-интерполяция полученных значений.
Средняя	3.0	15.0	33.3×33.3	
Дальняя	15.0	50.0	300×300	

Полученные значения суммарной поправки за влияние рельефа местности изменяются в диапазоне от 1.97 до 18.96 мГал.

Среднеквадратическая погрешность определения аномалии Буге с учетом погрешности наблюдаемых значений силы тяжести, определения высот и координат пунктов наблюдений составила ± 0.024 мГал и ± 0.038 мГал – с учетом погрешностей вычисления поправок за влияние рельефа местности. Карта значений аномалии в редукции Буге при $\sigma = 2.9$ г/см³ с поправкой за влияние рельефа представлена на рисунке 4.3.

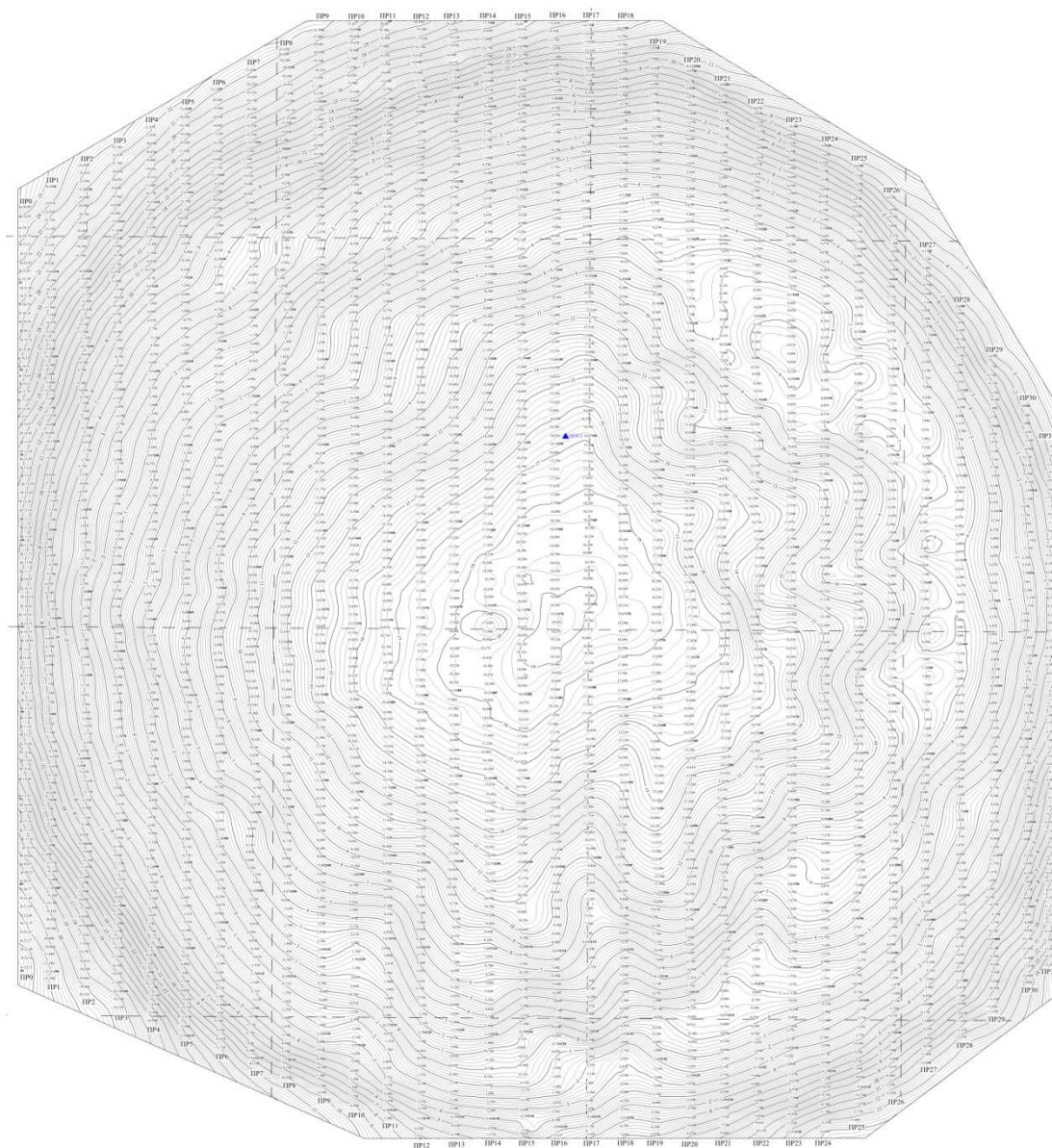


Рис. 4.3. Гравиметрическая карта по результатам высокоточной гравиметрической съемки масштаба 1:25 000 в пределах лицензионного участка Кондер.

Редукция Буге $\sigma=2.9$ г/см³ (с поправкой за влияние рельефа)

4.1.4. Обработка полевых материалов согласно предложенному графу обработки

Учет сферичности Земли при редуцировании гравиметрических данных производится при вычислении топографических поправок: за промежуточный слой и окружающий рельеф; таким образом, этапы первичной обработки и подготовки цифровых моделей рельефа проходят без изменений. Поправка за свободный воздух была вычислена по инструкции, для вычисления поправки за промежуточный слой была использована формула Каленицкого А.И. [Каленицкий, Смирнов, 1981]. Поправки в гравитационное поле за влияние рельефа местности рассчитывались доработанной программой TopWin 2.0. Полученная гравитационная аномалия в редукции Буге с учетом сферичности земной поверхности характеризуется амплитудой от -27.58 до 18.20 мГал.

4.1.5. Основные геологические результаты

В отчете по договору «Высокоточная гравиметрическая съемка масштаба 1:25 000 в пределах лицензионного участка Кондёр» [Долгаль и др., 2013] выдвигается предположение, что в первом приближении форма Кондёрского интрузивного массива отвечает двум вертикальным соосным цилиндрам, в которой внутренний цилиндр приближает дунит-клинопироксенит-габбровый комплекс, а внешний – обрамляющее его кольцо раннемеловых интрузивных и метаморфических пород. Для устранения фонового влияния Кондёрского массива и изучения локальной составляющей гравитационного поля в процессе многократного решения прямой задачи была создана оптимальная цилиндрическая модель. Критерием оптимальности служил минимум невязки наблюдаемого и модельного полей в среднеквадратической метрике. Базисная модель №1 (рис.4.4.) представлена двумя соосными цилиндрами и описывается вектором параметров $k = k(\sigma_1, \sigma_2, R_1, R_2, H_1, H_2)$, где σ_1 и σ_2 – аномальные (избыточные) плотности внешнего и внутреннего цилиндров относительно вмещающих пород, R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров,

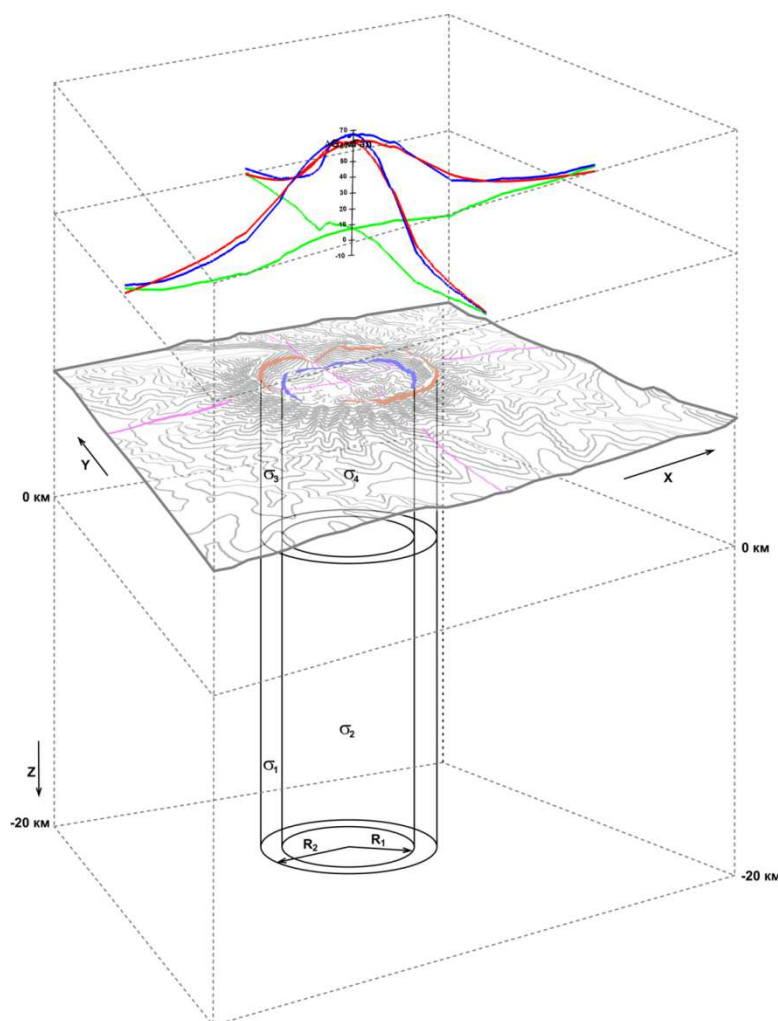


Рис.4.4. Геоплотностная модель №1 массива Кондер
(с дополнением до модели №2)

Параметры оптимальной модели цилиндров №1

Условные координаты центра модели		Избыточная плотность внешн. цилиндра σ_1 , г/см3	Избыточная плотность внутр. цилиндра σ_2 , г/см3	Радиус внешн. цилиндра R_2 , км	Радиус внутр. цилиндра R_1 , км	Абс. отметка верхней кромки модели H_1 , км	Абс. отметка нижней кромки модели H_2 , км
X, км	Y, км						

479.5	6385.05	0.48	0.55	4.0	3.0	0	-20
-------	---------	------	------	-----	-----	---	-----

Таблица 4.4

Параметры оптимальной модели цилиндров №2

Условные координаты центра модели		Избыточная плотность внешн. цилиндра σ3, г/см3	Избыточная плотность внутр. цилиндра σ4, г/см3	Радиус внешн. цилиндра R1, км	Радиус внутр. цилиндра R2, км	Абс. отметка верхней кромки модели H0, км	Абс. отметка нижней кромки модели H1, км
X, км	Y, км						
479.5	6385.05	0.18	0.35	4.0	3.0	Рельеф земной пов-ти	0

Результаты геологического редуцирования – гравитационный эффект $\Delta g(p)$, обусловленный внутренним строением изучаемого массива, полученный после исключения влияния моделей №1 и №2, представлен на рис.4.5.

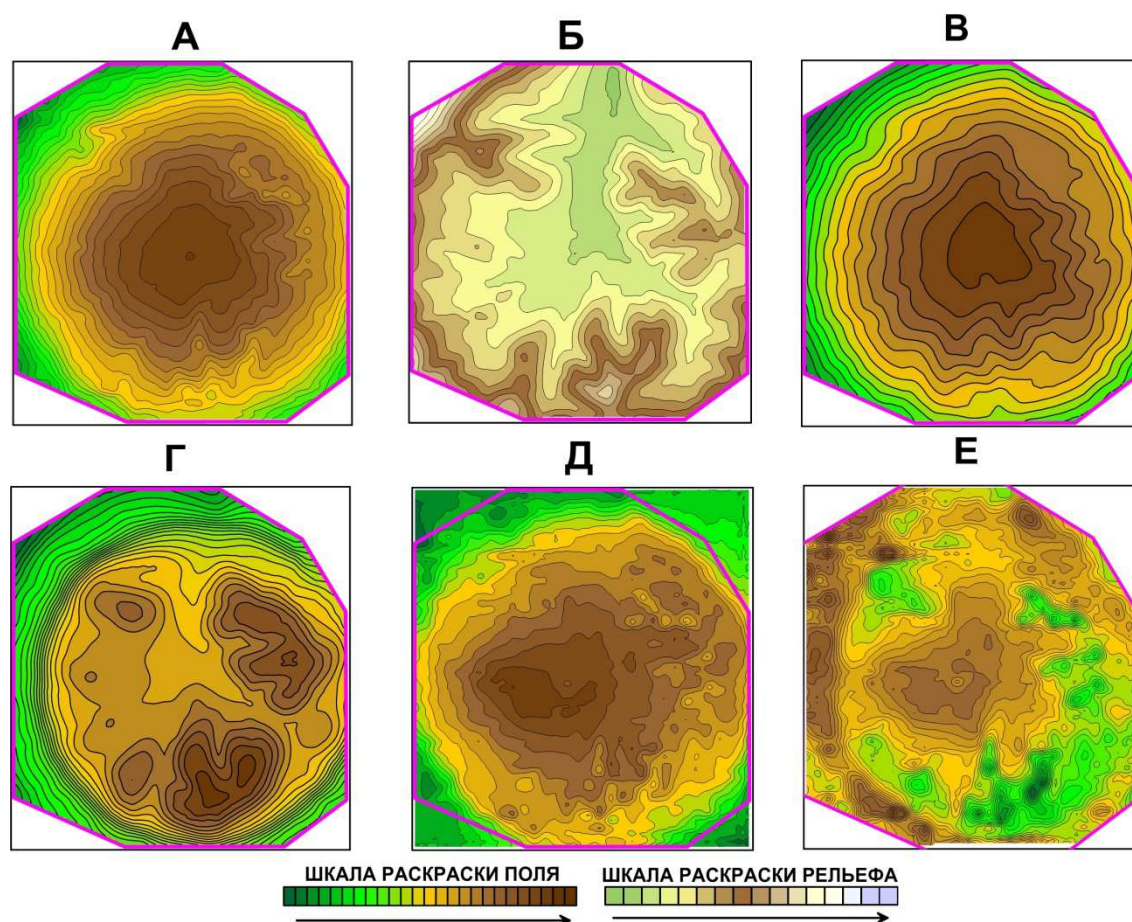


Рис.4.5. Результаты геологического редуцирования гравитационного эффекта

модели начального приближения массива Кондёр

А – наблюдаемое гравитационное поле $\Delta g(n)$ в редукции Буге с плотностью промежуточного слоя 2.9 г/см^3 и учетом сферичности Земли; Б – рельеф земной поверхности; В – аномальное гравитационное поле $\Delta g(m1)$ модели №1; Г – аномальное гравитационное поле $\Delta g(m2)$ модели №2; Д – разность $\Delta g(p1)$ наблюдаемого поля (А) и поля модели №1 (В); Е – аномальное гравитационное поле $\Delta g(p)$, с исключенным влиянием моделей №1 и №2

Аномалии остаточного поля $\Delta g(p)$, полученного в результате редуцирования влияния модели, характеризуют распределение локальных петроплотностных неоднородностей, связанных с вещественным составом пород массива и наложенными метаморфическими и др. процессами, то есть геологических объектов, не укладывающихся в рамки упрощенных, однородных по плотности моделей №1 и №2.

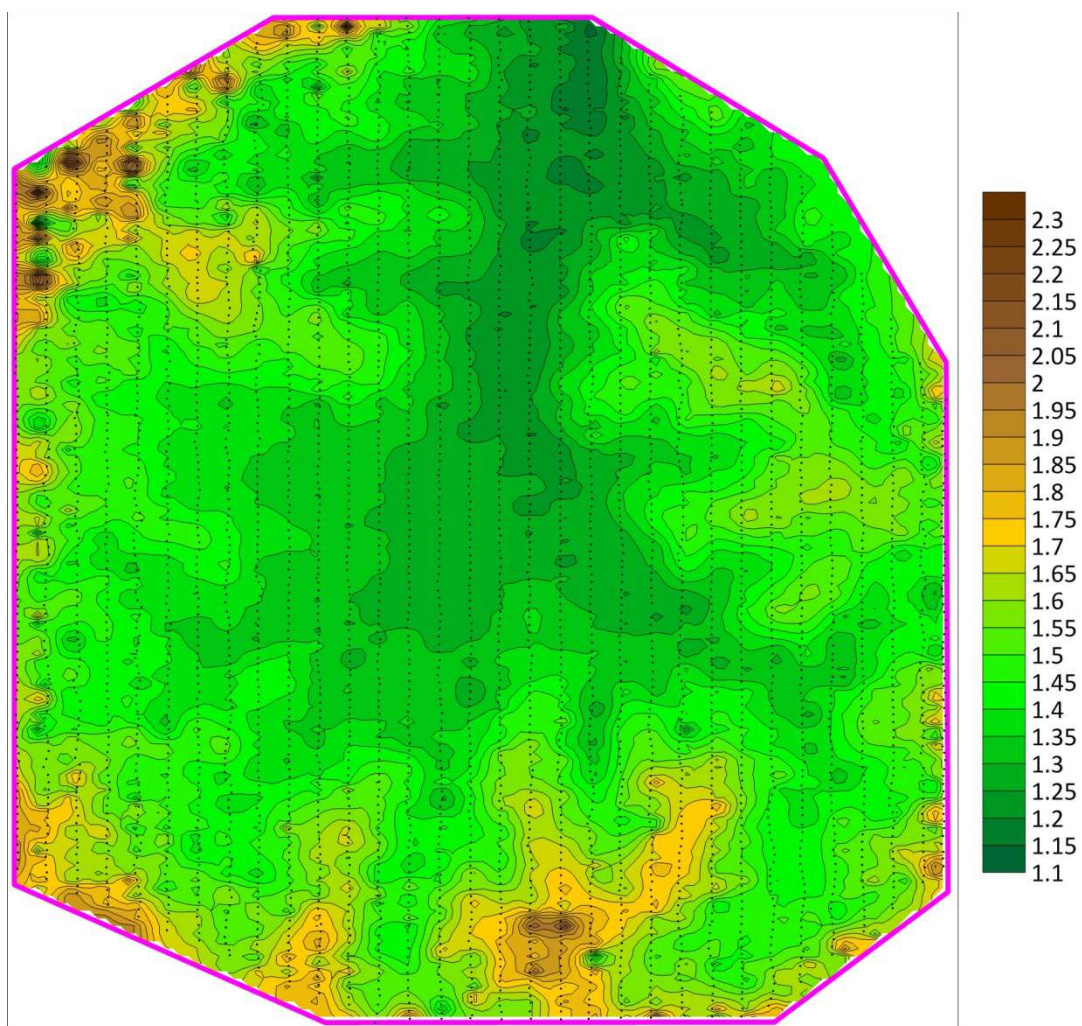


Рис.4.6. Разность наблюдаемых гравитационных полей $\Delta g(n)$ в редукции Буге, вычисленных согласно «Инструкции по гравиразведке» и предложенному графу обработки

Разность наблюдаемых гравитационных полей в редукции Буге, вычисленных согласно «Инструкции по гравиразведке» и предложенному алгоритму представлена на рис.4.6. Величина разности колеблется от 0.96 до 2.41 мГал, что составляет 3,23% от общей аномалии редукции Буге (рис.4.5(A)) и 12,85% от локальной составляющей (рис.4.5(E)). На рисунке 4.7 показан кросс-плот зависимости разности редукций («плоской» и «сферической») от высоты точки наблюдения. Коэффициент детерминации между анализируемыми параметрами весьма высокий: $R^2 = 0.996$, что свидетельствует о наличии сильной корреляционной связи.

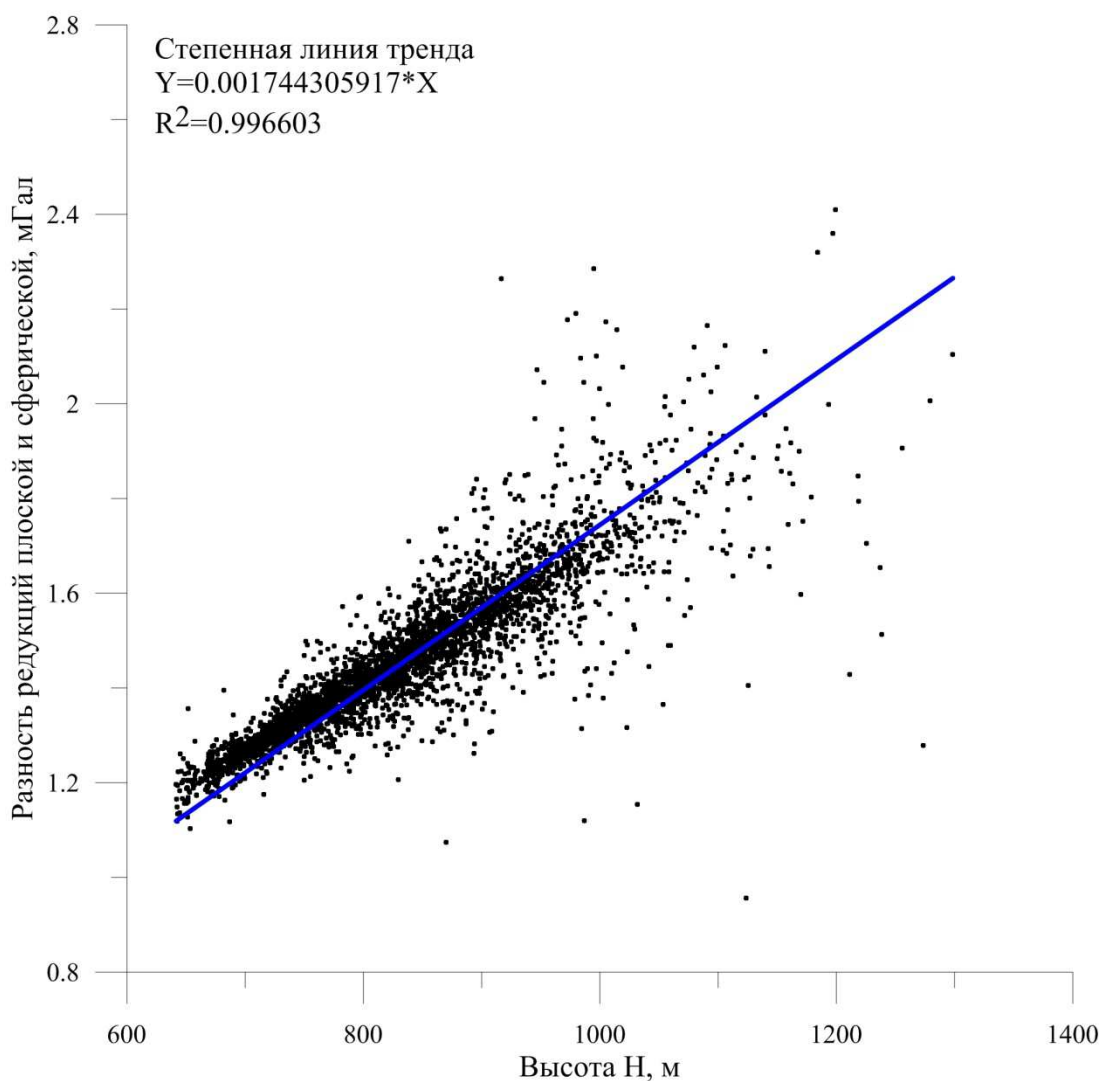


Рис.4.7. Кросс-плот зависимости разности редукций, полученных разными способами, от высоты рельефа

4.2. Мониторинговые исследования на Верхне-Камском месторождении калийных солей

4.2.1 Краткая физико-геологическая характеристика района

Верхнекамское месторождение калийных солей (ВКМКС), расположенное в пределах Пермского края, является единственной сырьевой базой калийной промышленности России [Кудряшов, 2001]. Находится в левобережной части долины реки Камы, между рекой Вишерой на севере и рекой Яйвой на юге (рис.4.8). Протяженность разведанной части с севера на юг – 140 км, с запада на восток – около 60 км. Промышленная разработка месторождения ведется с 1934 года.

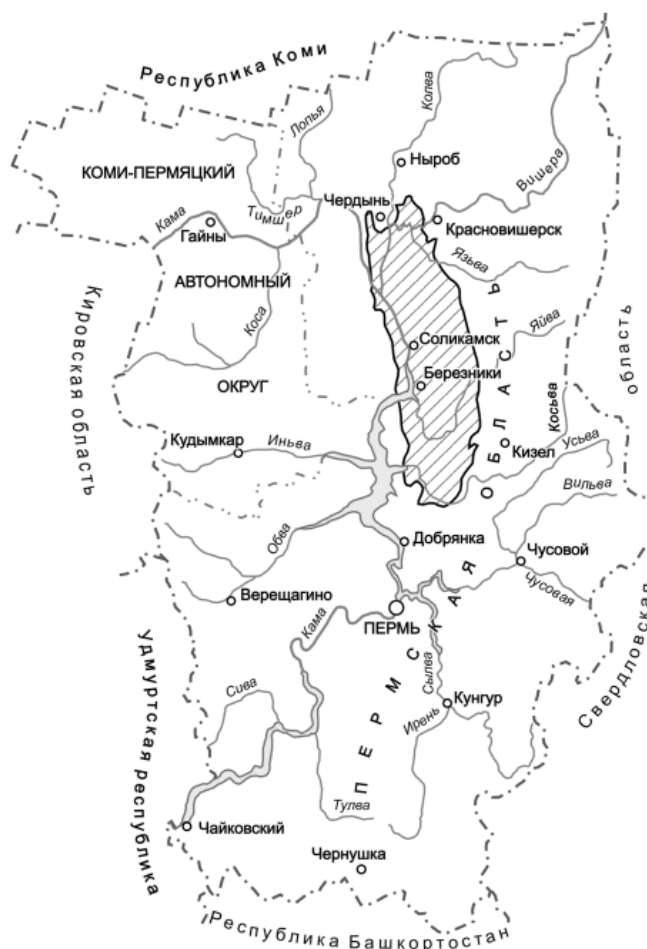


Рис. 4.8. Географическое положение ВКМКС

(штриховкой отмечена площадь развития соляной залежи) [Кудряшов, 2001]

Климат района умеренно континентальный, с суровой и продолжительной зимой, и достаточно теплым летом. По данным метеостанции Пермь - опытная средняя годовая температура воздуха в районе изысканий равна $+1,5^{\circ}\text{C}$. Средняя годовая температура воздуха в зимний период составляет -15°C , в летний период $+18,1^{\circ}\text{C}$.

В геологическом плане ВКМКС располагается в Соликамской депрессии Предуральяского краевого прогиба. Разрез данной территории имеет следующую характеристику. Терригенно-карбонатная толща, имеющая плотность $2.40-2.49 \text{ г/см}^3$, распространяется от земной поверхности до глубины примерно 150 м. Ниже залегают глинисто-мергелистые породы мощностью 90 м и плотностью около 2.30 г/см^3 . Далее комплекс, включающий: переходную толщу – переслаивание галита и глины переменной мощности и покровную каменную соль со средней плотностью 2.15 г/см^3 . Продуктивная толща имеет по площади значительную изменчивость литологии. Добыча ведется по пластам: КрII - красный сильвинит, АБ - пестрый и полосчатый сильвинит, В – карналлит. Средняя плотность продуктивного комплекса 2.10 г/см^3 , мощность - около 70 м. Ниже залегает подстилающая каменная соль со средней плотностью 2.13 г/см^3 , ее мощность изменяется от 150 м до 400 м, а подошва залегает на глубине около 700 м. Основным объектом изучения для гравиметрии является водозащитная толща (ВЗТ), включающая в основном переходную толщу, покровную каменную соль и верхнюю часть продуктивной толщи (до горных выработок) [Кудряшов, 2001].

4.2.2. Полевые гравиметрические работы

На одном из участков ВКМКС, расположенном на западном склоне соляного поднятия, на подработанной территории развилась область интенсивного оседания земной поверхности. Через три года после завершения отработки продуктивных пластов в зоне максимального оседания, где уровень грунтовых вод стал выше земной поверхности,

сформировалось техногенное озеро [Бычков и др., 2019; Бычков и др., 2021]. Современная длина озера 1.2 км, ширина южной части 0.7 км, северной – 0.4 км (рис.4.9).

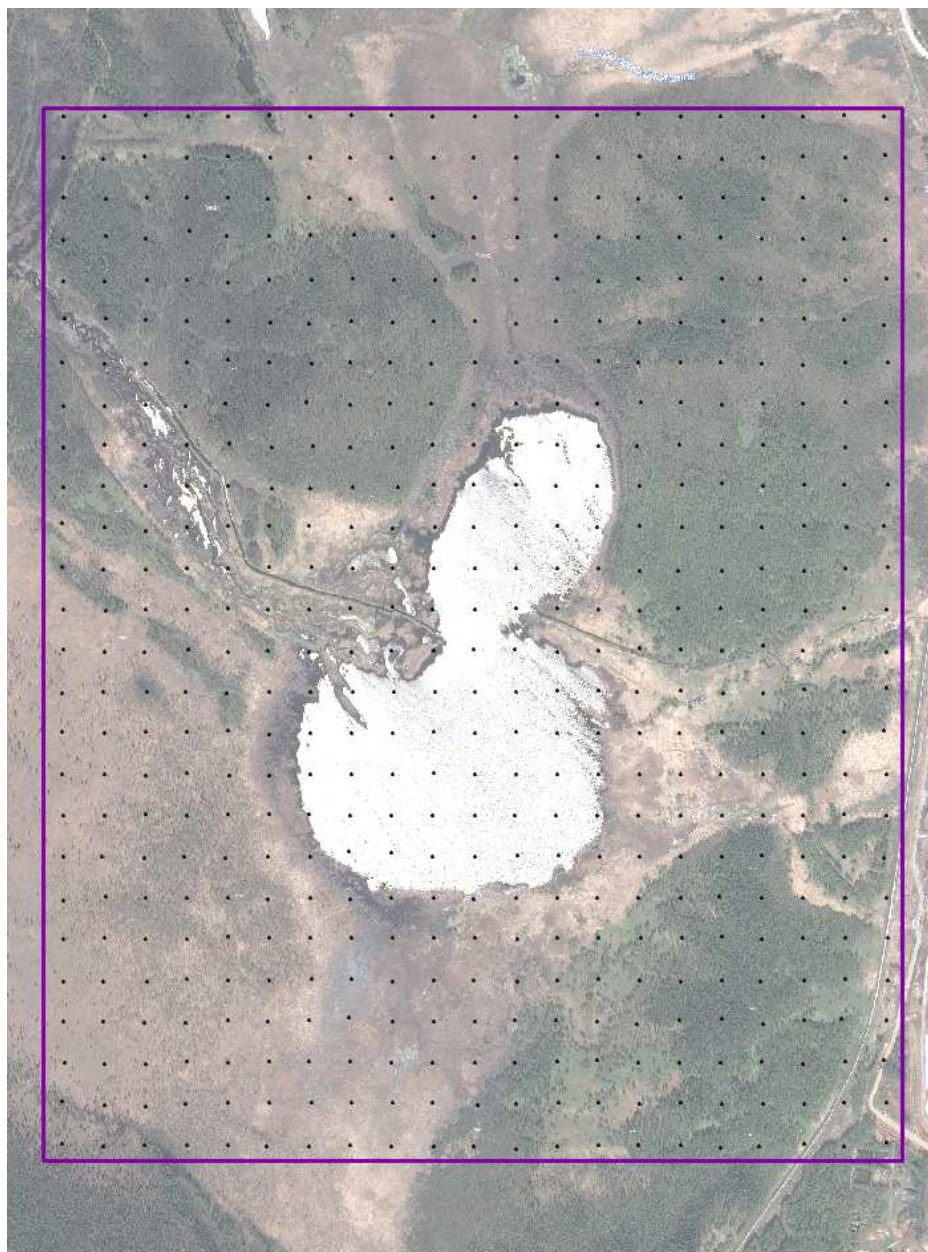


Рис. 4.9. Техногенное озеро на ВКМКС

В районе техногенного озера проводилась гравиметрическая съемка масштаба 1:10 000 с плотностью пунктов наблюдения 100×100 м в 2018 и 2021 г.г. Гравиметрические работы выполнялись высокоточными компьютеризированными гравиметрами AUTOGRAV CG-5 № 127, 82 фирмы SCINTREX (Канада). Для проведения топографо-геодезической съемки

использовались электронный тахеометр Topcon GTS-239, GPS-приемники «Trimble R8», навигационные GPS-приемники Garmin. Измерения силы тяжести на пунктах рядовой сети производились по однократной методике в одном рейсе. Оценка качества съемок приведена в таблице 4.5.

Таблица 4.5

Оценка качества съемок

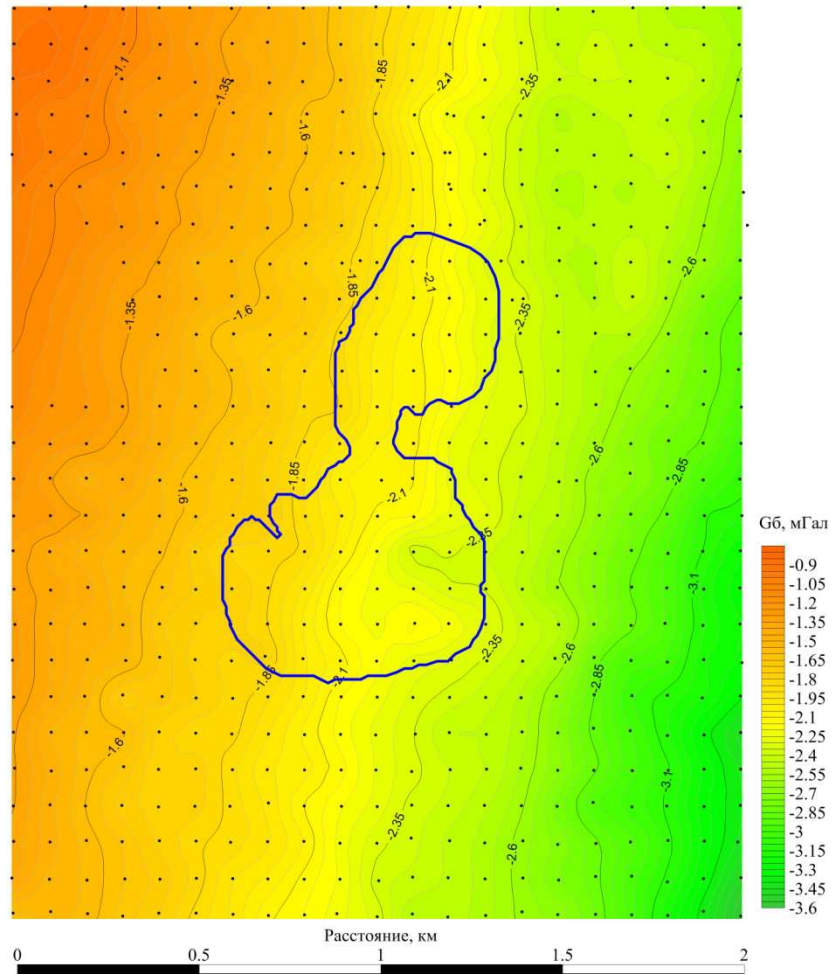
Год съемки	Общее кол-во пунктов	Кол-во контрольных наблюдений	Процент контрольных наблюдений	Погрешность ед.наблюдения, мГал
2018	546	59	10.8%	± 0.022
2021	546	360	65.9%	± 0.029

4.2.3. Обработка полевых материалов согласно «Инструкции по гравirazведке»

Обработка полевых гравиметрических материалов осуществлялась в соответствии с Инструкцией по Гравirazведке [Инструкция, 1980]. Поправки за свободный воздух и промежуточный слой были вычислены с использованием традиционных формул. Поправка за влияние рельефа местности не вычислялась ввиду отсутствия необходимости, т.к. исследования мониторинговые. Плотность промежуточного слоя была определена методом Неттлетона [Nettleton, 1940] и принята 2.3 г/см^3 .

Среднеквадратическая погрешность определения аномалии Буге с учетом погрешности наблюденных значений силы тяжести, определения высот и координат пунктов наблюдений составила $\pm 0.025 \text{ мГал}$ в 2018 г. и $\pm 0.030 \text{ мГал}$ в 2021 г. . Карты значений аномалии в редукции Буге при $\sigma = 2.3 \text{ г/см}^3$ представлены на рисунках 4.10 А) и Б).

А)



Б)

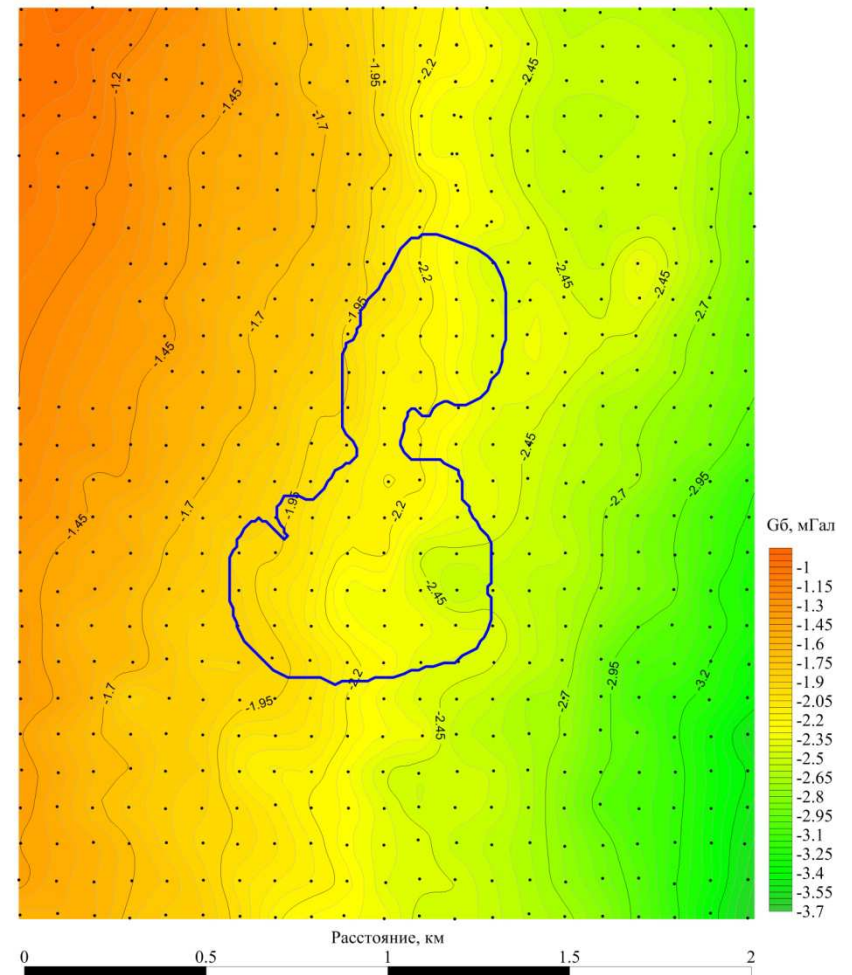


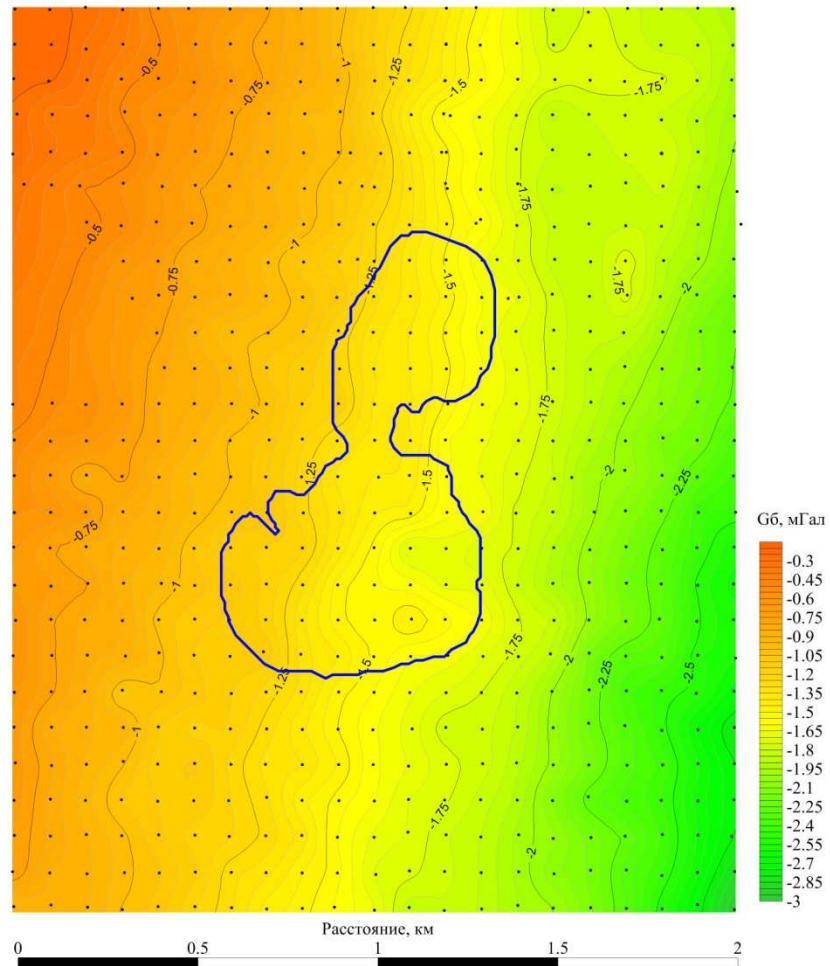
Рис. 4.10. Поле аномалий силы тяжести в редукции Буге ($\sigma = 2.3 \text{ г/см}^3$) с сечением изоаномал 0.05 мГал:
А) 2018г.; Б) 2021г.

Диапазон изменения значений поля в пределах участка составляет 2.72 мГал в 2018г. и 2.66 мГал в 2021г. Значения поля уменьшаются на восток - юго-восток в соответствии с поднятием кровли соляной толщи, обладающей более низкой плотностью по сравнению с вышележащими породами. Встречаются участки сближения изоаномал и их извилистости, что свидетельствует о значительной плотностной неоднородности верхней части геологического разреза.

4.2.4. Обработка полевых материалов согласно предложенному графу обработки

Учет сферичности Земли при мониторинговых наблюдениях заключается в использовании отличной формулы поправки за промежуточный слой. Первичная обработки проходит, как и при стандартном графе обработки. Далее поправки за свободный воздух и промежуточный слой были вычислены с использованием формул Каленицкого А.И. [Каленицкий, Смирнов, 1981]. Полученные гравитационные аномалии в редукции Буге с учетом сферичности земной поверхности (рис.4.11) характеризуются амплитудой от -0.20 до -2.94 мГал в 2018г. и от -0.29 до -2.97 мГал в 2021г.

А)



Б)

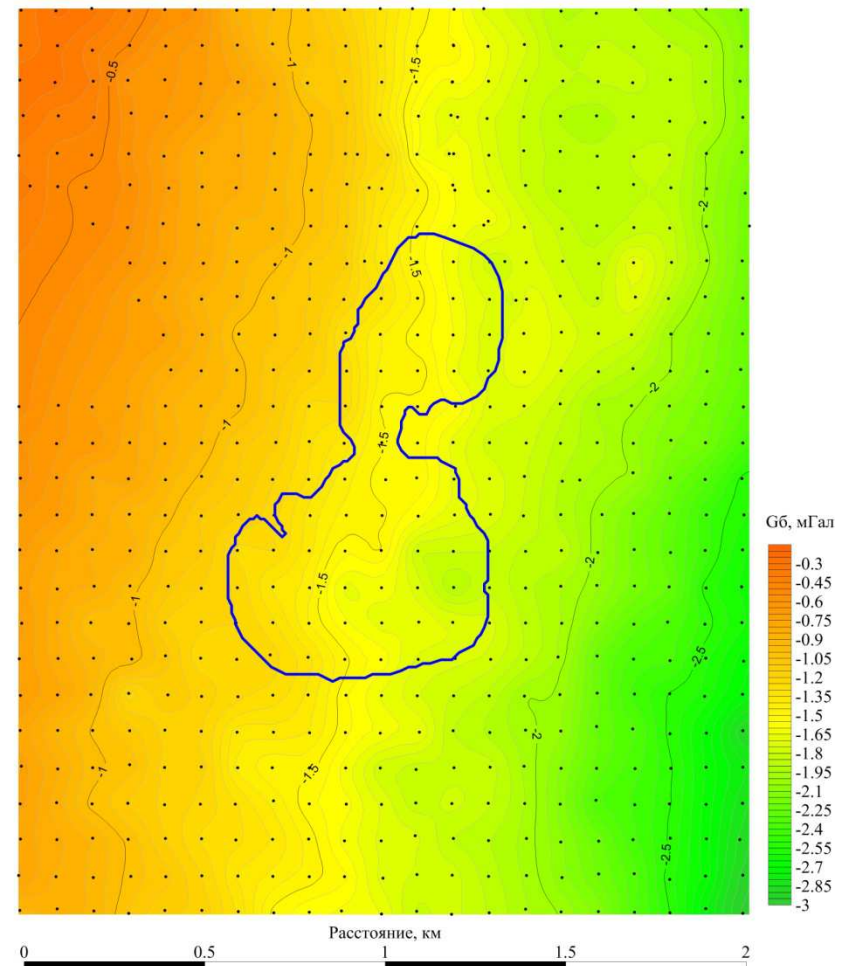


Рис. 4.11. Поле аномалий силы тяжести в редукции Буге ($\sigma = 2.3 \text{ г/см}^3$) с учетом сферичности (сечение изоаномал 0.05 мГал):
А) 2018г.; Б) 2021г.

4.2.5. Основные геологические результаты

По результатам анализа динамической аномалий силы тяжести за период 2018 - 2021 гг. видно, что отрицательные аномалии, т.е. зоны, где происходит процесс разуплотнения пород, расположены в южной и северной частях озера (рис.4.12). Аномалии с более выраженными амплитудами наблюдаются в южной части озера, где, видимо, динамические процессы в массиве протекали более контрастно. Очевидно, что здесь в зоне с изначально пониженными плотностями пород происходят интенсивные процессы техногенного разуплотнения, обусловленные горными работами, что приводит к оседанию земной поверхности.

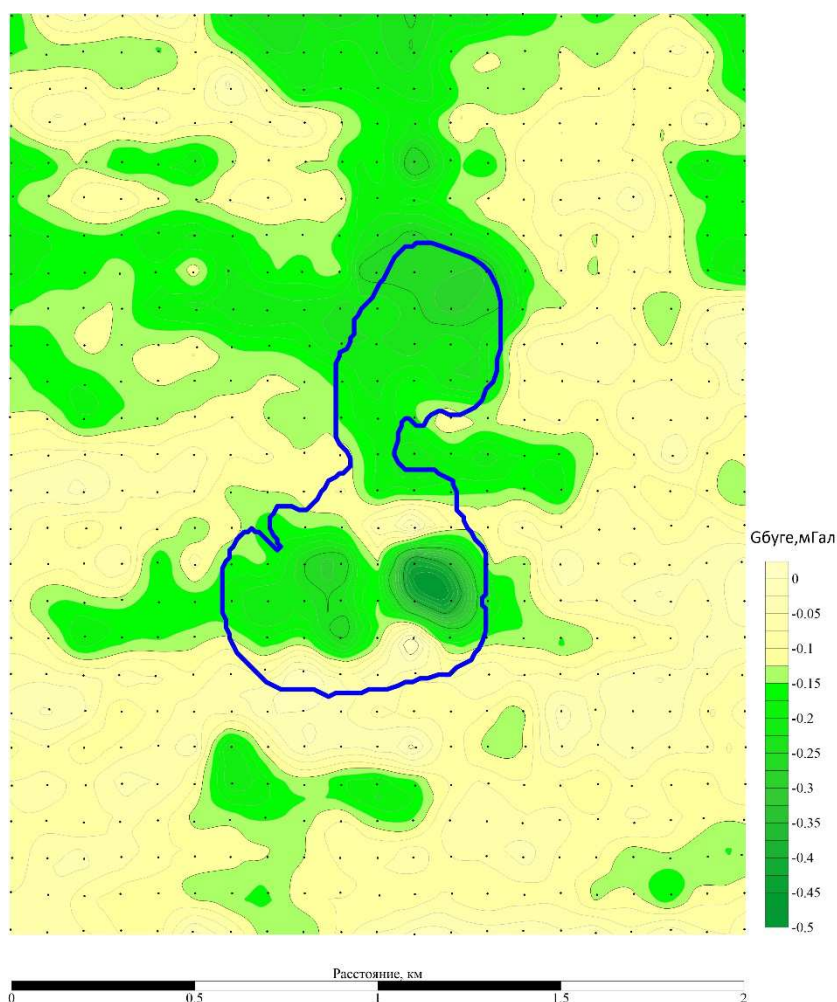


Рис.4.12. Динамическая аномалия силы тяжести за период 2018 – 2021 гг.

4.3. Выводы по главе 4

На примерах высокоточной гравиметрической съемки масштаба 1:25 000 и повторных гравиметрических исследований масштаба 1:10000 показана необходимость учета сферичности земли даже при небольших размерах площадей. Продемонстрированы последствия игнорирования реальной формы земной поверхности при относительно небольших размерах изучаемой площади. Используя устаревший граф обработки полевых гравиметрических данных, мы сознательно вносим неконтролируемые погрешности в результаты наблюдений, что может привести к невосполнимой потере информации от целевых геологических объектов, которую невозможно компенсировать применением самых совершенных интерпретационных технологий. Предлагаемый алгоритм вычисления топографических поправок для сферической Земли должны существенно повысить эффективность гравirazведки при прогнозировании, поисках и разведке месторождений полезных ископаемых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат выполненных исследований состоит в создании новой компьютерной технологии редуцирования полевых данных высокоточной гравиразведки, учитывающей близкую к реальной форму Земли. Современный подход к вычислению топографических поправок основывается на представлениях, приблизительно отвечающих реальной форме Земли. Однако, большое количество исследований на тему учета сферичности при редуцировании и моделировании данных гравиразведки, говорит о том, что задача актуальна и требовала детального изучения. В процессе написания работы на модельных и практических примерах была доказана целесообразность использования сферических моделей при обработке и интерпретации полевых данных. Также представлен способ оценки снизу влияния сферичности Земли при решении прямых и обратных задач гравиразведки на основе различия радиальной и вертикальной компонент поля V_R и V_Z для одной и той же модели источников поля.

В работе предложена новая вычислительная схема на основе кубатурных формул для расчета радиальной составляющей силы тяжести сферического параллелепипеда, который является универсальной аппроксимационной ячейкой для описания геологических тел в рамках модели шарообразной Земли. Впервые для решения задач гравиметрии осуществлено использование сферы Каврайского, повышающее примерно в 5 раз точность позиционирования при переходе от геодезических координат к сферическим.

Предложенные в диссертационной работе алгоритмы редуцирования гравиметрических данных на поверхности сферической Земли позволят перейти на качественно новый уровень обработки, повысить точность построения гравиметрических карт в редукции Буге и цифровых моделей поля, что увеличит вероятность обнаружения слабоконтрастных и глубокозалегающих аномалиеобразующих объектов. В результате работ

созданы компьютерные технологии, которые могут быть использованы в производственных организациях, выполняющих геофизические исследования методом гравirazведки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука. 2000. 622 с.
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. 2009 г.
3. Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. Вычисления аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь, УрО РАН, 2015. – 142 с.
4. Бычков С.Г., Симанов А.А., Хохлова В.В. Контроль процесса оседания земной поверхности по мониторинговым гравиметрическим наблюдениям // Инженерная и рудная геофизика – 2021: 17-я науч.-практ. конф. и выставка, 26-30 апр. 2021 г. – Геленджик, 2021. – С. 1-7. – DOI: 10.3997/2214-4609.202152028.
5. Бычков С.Г., Симанов А.А., Хохлова В.В. Современные процедуры вычисления аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических наблюдениях // Вестник Пермского университета. Геология. Пермь, 2013. №3(20). С.61-70.
6. Бычков С.Г., Симанов А.А. Совершенствование процедур обработки высокоточных гравиметрических наблюдений // Геофизика. 2014. №1. С.11-17.
7. Бычков С.Г., Простолупов Г.В., Щербинина Г.П. Выявление техногенных изменений в подработанном массиве по гравиметрическим данным на верхнекамском месторождении солей // Геофизика. – Москва, 2019. -№5. – С. 43-49.
8. Бурда М., Высочил В. К вычислению гравитационного эффекта моделей глубинных аномальных масс. – В кн.: Numerische Methoden in der Geophysik, Liblice, 1972. Praha, Academia, 1973. S. 39-50.
9. Глазнев В.Н. Комплексные геофизические модели литосферы Фенноскандии. Апатиты, КазМ, 2003. - 252 с.
10. Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. Москва: Недра, 1984. – 184 с.
11. Гордин В.М. Способы учета влияния рельефа дневной поверхности при высокоточных гравитационных измерениях. М.: ВИЭМС. 1974. Сер. IX. 89 с.
12. Гравиразведка: Справочник геофизика. / Под ред. Е.А. Мудрецов, К.Е. Веселова. - М.: Недра, 1990. - 607 с.
13. Долгаль А.С. Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: ООО Фирма-МАРТ. 2002. 188 с.
14. Долгаль А.С. и др. Отчет о выполнении наземных гравиметрических работ по объекту «Высокоточная гравиметрическая съемка масштаба 1:25 000 в пределах лицензионного участка Кондёр»//Пермь: ГИ УрО РАН. 2013. - 116с.
15. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Симанов А.А., Хохлова В.В. Основные элементы технологии учета гравитационного влияния топографических масс для шарообразной Земли // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле, №4, 2015. – С. 40-46.
16. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В. Моделирование гравитационных эффектов, обусловленных влиянием сферичности Земли // Геофизика, 2018, №5, С. 50-56.
17. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В. Оценка искажений аномалий силы тяжести, обусловленных влиянием сферичности Земли // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: материалы 46-й сессии Международного семинара им. Д.Г.Успенского. Пермь: ГИ УрО РАН, ПГНИУ, 2019. С. 121-126.
18. Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В. Приближенная 3D-оценка гравитационных аномалий, обусловленных шарообразной формой Земли // Геофизика. – 2019. – № 5. – С. 56-62.
19. Долгаль А.С., Симанов А.А., Хохлова В.В. Решение геокартировочных и прогнозно-поисковых геологических задач методом гравиразведки с учетом сферичности Земли // Георесурсы. - Казань. 2015. № 4(63), Т.2. – С. 56-62.

20. Долгаль А.С., Симанов А.А., Хохлова В.В. Технология вычисления поправок за влияние рельефа местности для сферической Земли // Материалы 42-й сессии Междунар. науч. семинара им. Д.Г.Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» (г. Пермь, 26-30.01.2015 г.) – Пермь, Горный ин-т УрО РАН, Перм.гос.нац.исслед.ун-т 2015. – С. 76-78.
21. Долгаль А.С., Хохлова В.В. Модель Земли в гравиразведке - плоскость или сфера ?// Горное эхо, № 2-3 (55-56), 2014. – С. 31-35.
22. Инструкция по гравиразведке. М., Недра, 1980. - 80 с.
23. Инструкция по топографо-геодезическому и навигационному обеспечению геологоразведочных работ. Новосибирск, СНИИГиМС, 1997. – 106с.
24. Каврайский В.В. Избранные труды. Том II. Математическая картография. Выпуск 1. Общая теория картографических проекций. Издание Управления начальника Гидрографической службы ВМФ 1958, стр. 256-266.
25. Каленицкий А.И., Смирнов В.П. Методические рекомендации по учету влияния рельефа местности в гравиразведке. Новосибирск: СНИИГиМС. 1981. 174 с.
26. Кудряшов А.И. Верхнекамское месторождение солей. Пермь: ГИ УрО РАН. 2001. 429 с.
27. Лукавченко П.И. Таблицы и номограммы для вычисления поправок силы тяжести за рельеф местности при съемке с гравиметрами. Москва, Гостоптехиздат, 1951. – 41 с.
28. Любимов Г.А. Учет рельефа местности в гравиразведке с использованием малых ЭВМ // Разведочная геофизика. 1978. Вып. 81. С. 88-92.
29. Маловичко А.К. Основной курс гравиразведки. Пермь: Пермский гос. ун-т. 1966. Ч.1. 326 с.
30. Маловичко А.К., Костицын В.И. Интерполяция поправок за влияние рельефа при детальной гравиметрической съемке // Вопросы обработки и интерпретации геофизических наблюдений. Пермь: Пермский гос. ун-т. 1974. № 11. С. 3-11.
31. Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. Об учёте влияния сферичности Земли при трёхмерно плотностном моделировании // Доклады академии наук, 2017, том 477, №2. С. 221-225.
32. Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. О численном алгоритме решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей // Материалы 46-й сессии Междунар. науч. семинара им. Д.Г.Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» (г. Пермь, 20-26.01.2019 г.) – Пермь, ГИ УрО РАН, 2019. С. 260-264.
33. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и “плоская” модель. // Физика Земли. 2018. № 4. С. 31–39
34. ОАО "Артель старателей Амур": [сайт]. URL:<http://www.artel-amur.ru/>
35. Пятаков Ю.В, Исаев В.И. Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия Томского политехнического университета. - Томск. 2012. № 1, Т.320. – С. 105-110.
36. Ремпель Г.Г. Актуальные вопросы введения поправок, связанных с рельефом местности, в данные гравиразведки и магниторазведки // Физика Земли, №12, 1980. – С. 75-89.
37. Сарайский Ю.Н. Геоинформационные основы навигации: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Университет ГА. С.-Петербург, 2007. 95 стр.
38. Сеначин В.Н Гравитационное моделирование тектоносферы Земли с учетом ее сферической формы // Материалы всероссийской научной конференции «Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска» (г. Южно-Сахалинск, 26-30.03.2015 г.) – Владивосток: Дальнаука, 2015. Том 2. – С. 150-153.

39. Сеначин В.Н., Сеначин М.В. Расчет планетарных и региональных гравитационных моделей коры и мантии Земли с учетом её сферической формы // Геосистемы переходных зон. – Южно-Сахалинск, 2018. -№2. – С. 131-137.
40. Серапинас Б.Б. Математическая картография: Учебник для вузов. М.: Издательский центр "Академкнига", 2005. 336 с.
41. Симанов А.А. Разработка и создание информационно-аналитической системы хранения, обработки и анализа гравиметрических данных: дис.канд.техн.наук. – Москва, 2008. Режим доступа: <https://earthpapers.net/razrabotka-i-sozdanie-informatsionno-analiticheskoy-sistemy-hraneniya-obrabotki-i-analiza-gravimetricheskih-dannyh>.
42. Симанов А.А. Учет влияния рельефа местности при высокоточной гравиметрической съемке на основе геоинформационных технологий // Геология и полезные ископаемые Заадного Урала // Материалы региональной научно-практической конференции. Пермь, 2008. С. 220-223.
43. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Физика Земли, №12, 1983. – С. 34–50.
44. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Загорько А.Н. Методы решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах / Киев: Наук.думка, 1986. 112 с.
45. Старостенко В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямых задач гравиметрии для сферических аппроксимирующих тел. Алгоритмы // Известия ТПУ. 2013. №1.
46. Страхов В.Н. Три парадигмы в теории и практике интерпретации потенциальных полей (анализ прошлого и прогноз будущего). М.: ОИФЗ РАН. 1999. 78 с.
47. Страхов В.Н. Разрушение господствующего стереотипа мышления – главная задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) в начале XXI века. М.: ОИФЗ РАН. 2000. 44 с.
48. Страхов В.Н., Романюк Т.В., Фролова Н.К. Методы решения прямых задач гравиметрии, используемые при моделировании глобальных и региональных гравитационных аномалий // Новые методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М.: Ин-т физики Земли АН СССР, 1989.С.118-235
49. Хмелевской В.К., Костицын В.И. Основы геофизических методов. Пермь, Пермский гос. ун-т. 2010. 400 с.
50. Хохлова В.В. Учет сферичности Земли при обработке гравиметрических данных// Геофизика. – Москва, 2015. -№5. – С. 59-64.
51. Хохлова В.В., Симанов А.А. Современные методы обработки высокоточных гравиметрических наблюдений // Материалы четырнадцатой уральской молодежной научной школы по геофизике (г. Пермь, 18-22.03.2013 г.) – Пермь, ГИ УрО РАН. – Пермь, 2013. – С. 261-264.
52. Asgharzadeh, M.F., von Frese, R.R.B., Kim, H.R., Leftwich, T.E. Kim, J.W. Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature. Geophys.J., 2007. Int.169, 1-11.
53. Bullard E.C. Gravity measurements in east Africa: Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1936. 235, 757, 486-497.
54. Grombein T., Seitz K., Heck B. Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid // Journal of Geodesy. 2013. Vol. 87.
55. Hagiwara Y. Conventional and spherical Bouguer correction, J.Geod.Soc.Japan, 1975, 21 p. (на японском)
56. Heck B. On Helmert's methods of condensation / J Geoid. 2003. V.77(3-4): 155-170.
57. Heiskanen W.A., Vening Meinesz F.A. The earth and its gravity field. 1958.
58. Jonson Lane R., Litehiser Joe J. A method for computing the gravitational attraction of three-dimensional bodied in a spherical or ellipsoidal Earth / Geophysical Research. 1972. V.77, №35. p. 6999-7009.

59. Karl J.H. The Bouguer correction for the spherical Earth / *Geophysics*. 1971. V.36, №4. p. 761-762.
60. Khokhlova V. Improving the data processing procedures of precision gravity survey // 14th GeoConference on Informatics, geoinformatics and remote sensing. Bulgaria: SGEM, 2014. P. 635-642.
61. Kloch G., Kryński J. On the determination of the terrain correction using the spherical approach // *International Association of Geodesy Symposia*. 2010. Vol. 135. P. 389-395.
62. LaFehr T.R. An exact solution for the gravity curvature (Bullard B) correction / *Geophysics*, vol.56, No.8, 1991, p.1179-1184.
63. LaFehr T.R. On Talwani's "Errors in total Bouguer reduction", 1998.
64. LaFehr T.R. Standardization in gravity reduction // *Geophysics*. 1991b. Vol. 56, N 8. P. 1170-1178.
65. LaFehr T.R., Nabighian M.N. Fundamentals of gravity exploration. SEG. 2012. 218 p.
66. Li X., Götze H.-J. Tutorial Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics // *Geophysics*, 2001. Vol. 66, N 6. P. 1660-1668.
67. Ma X.Q., Watts D.R. Terrain correction program for regional gravity surveys // *Computers and Geosciences*. 1994. N 20. P. 961-972.
68. Martinec Z. Boundary –value problems for gravimetric determination of a precise geoid / *Lecture notes in earth sciences*. 1998. V. 73
69. Nettleton L.L. *Geophysical prospecting for oil*. New York; London: McGraw-hill Book Company. 1940. 452 p.
70. New standards for reducing gravity data: The North American gravity database / W.J.Hinze, C.Aiken, J.Brozena, B.Coakley, D.Dater, G.Flanagan, R.Forsberg, T.G.Hildenbrand, R.Keller, J.Kellogg, R.Kucks, X.Li, A.Mainville, R.Morin, M.Pilkington, D.Plouff, D.Ravat, D.Roman, J.Urrutia-Fucugauchi, M.Veronneau, M.Webring, D.Winester // *Geophysics*. 2005. Vol. 70, N 4. P. J25-J32.
71. Novak P. Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution of the geodetic boundary value problem. PhD Dissertation
72. Novak P., Vanicek P., Martinec Z., Veronneau M. Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid / *Journal of Geodesy*. 2001. V.75. p. 491-504.
73. Swick, C.H., 1942, Pendulum gravity measurements and isostatic reductions: U.S. Coast and Geodetic Survey Special Publication 232, 82 p.
74. Takin M., Talwani M. Rapid computation of the gravitation attraction of topography on a spherical Earth / *Geophysical Prospecting*. 1966. V.2. p. 119-142.
75. Talwani M. Errors in the total Bouguer reduction // *Geophysics*. 1998. Vol. 63, N 4. P. 1125-1130.
76. Talwani M. and Ewing M. Rapid computation of the gravitational attraction of topography on a spherical Earth. 1960.
77. Vanicek P. and Krakiwsky E.J. *Geodesy: The Concepts*. 2nd Edition, North-Holland, Amsterdam. 1986.
78. Vanicek P., Novak P., Martinec Z. Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell / *Journal of Geodesy*. 2001. V.75. p. 210-215.
79. Wild-Pfeiffer, F. A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *J Geod* 82, 2008. p. 637–653
80. Yamamoto A. Spherical terrain corrections for gravity anomaly using a digital elevation model gridded with nodes at every 50 m // *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University, Ser. VII (Geophysics)*. 2002. Vol. 11, N 6. P. 845-880.
81. Zhanjun Y., Yupu C. Spherical external correction technique for gravity prospecting // SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting. 2004. 4 p.
82. Zhou X., Zhong B., Li X. Gravimetric terrain corrections by triangular-element method // *Geophysics*. 1990. N 55. P. 232-238