Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный университет»

В. Л. Чечулин

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ С САМОПРИНАДЛЕЖНОСТЬЮ (основания и некоторые приложения)

МОНОГРАФИЯ

Пермь 2010

УДК 519.50
ББК 22.10
Ч 57

Чечулин, В. Л.
Ч 57 Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения): монография / В. Л. Чечулин; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2010. – 100 с.
ISBN 978-5-7944-1468-4

В монографии излагаются основные результаты теории множеств с самопринадлежностью. Подход к описанию оснований введения самопринадлежности в теорию множеств (выдвинута русским математиком Д. Миримановым в 1917 г.), используемый в монографии имеет, гносеолого-философские основания.

В 1-й части приводятся основные теоремы о свойствах множеств с самопринадлежностью, в частности теорема о непротиворечивости теории множеств с самопринадлежностью.

Во 2-й части рассматриваются приложения полученных результатов к решению некоторых математических проблем. Показано, что теория множеств с самопринадлежностью свободна от парадоксов наивной теории множеств, использовавшей только несамопринадлежащие множества. Доказательство теоремы Гёделя в семантике самопринадлежности значительно укорачивается.

В 3-й части уделено внимание внематематическим прикладным аспектам описанных в предыдущих главах результатов. Рассматривается приложение теоремы о трёхмерности пространства с ориентированными осями к построению метода управления качеством технологических процессов, а также к некоторым аспектам экономико-математического моделирования.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 519.50
ББК 22.10

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пермского государственного университета

Рецензенты: кафедра прикладной информатики и искусственного интеллекта Пермского государственного педагогического университета (зав. каф. д. т. н. Л. Н. Ясницкий,); В. В. Морозенко, к. ф.-м. н., доц. каф. информационных технологий в бизнесе Пермского филиала ГУ ВШЭ

ISBN 978-5-7944-1468-4

Chechulin, V. L.
Set theory with selfconsidering (foundation and some applications): monography / V. L. Chechulin; Perm State University.— Perm (Russia), 2010.— 100 p.
ISBN 978-5-7944-1468-4

The monograph presents the main results of the theory of sets with selfconsidering. The approach to the description of the grounds selfconsidering introduction to the theory of sets (as proposed by the Russian mathematician Mirimanov in 1917), used in the monograph has epistemological grounds.

In the 1-st part of the book. In this part sets out the main theorems about properties of sets with selfconsidering, in particular — a theorem about the consistency of set theory with selfconsidering.

In the 2-nd part of the book discusses applications of the results to the solution of certain mathematical problems. Shown that the theory of sets with selfconsidering free from the paradoxes of naive set theory, using only unselfconsidering sets. The proof of Godel's theorem in the selfconsidering semantics significantly shortened.

In the 3-rd part of the attention paid to some applied aspects described in the previous chapters results. The application of the theorem on 3-dimension space with axes oriented was considered to the construction method of quality management processes. Also mentioned the application of the same theorem to certain aspects of economic-mathematical modeling.

The book is intended for researchers, postgraduates and senior students.

Printed by decision editorial and publishing soviet of Perm State University

Reviewers: subfaculty of applied informatics and computer intellect ot Perm pedagogical university (chief Dr. L. N. Yasnitskiy); V. V. Morozenko, docent of subfuculty information technologies in business of Hihg economic school Perm filial

ISBN 978-5-7944-1468-4

Оглавление

Contents

Предисловие автора

Предпосылкой написания монографии стал курс лекций по «философии математики», прочитанный автором в 2007/2008 учебном году студентам-математикам при кафедре математики и физики Соликамского государственного педагогического института.

Каждая часть книги имеет содержательную завершённость. В первой части даётся описание оснований и основных результатов теории множеств с самопринадлежностью. Во второй части содержатся внутриматематические приложения основных результатов. Примеры приложений результатов в других областях даны в третьей части.

Автор выражает благодарность в первую очередь В. Н. Павелкину, а также С. А. Гусаренко, В. Ф. Панову, О. Г. Пенскому за организацию обсуждения результатов исследований на научных семинарах при Пермском государственном университете, Л. М. Шестаковой за организацию чтения курса при Соликамском государственном педагогическом институте; особенная благодарность С. В. и О. Л. Русаковым за содействие в организации прикладных работ по разработке информационных систем, использующих интерпретацию теоремы о размерности.

Систематизация материалов исследований, относящихся к теории множеств и её приложениям, и их оформление для публикации производилось в связи с НИР №1.15.10, выполняемой при Пермском университете по заданию Федерального агентства по образованию.

Часть 1. Основания и основные результаты

Глава 1. Гносеологические основания

§1. Самоссылочные структуры сознания

Онтологические основания нижеследующих рассуждений весьма очевидны: имеется окружающий мир, в котором находится сознание человека, внутри сознания содержится описание окружающего мира, включающего как самого человека, так и само описание окружающего мира. То есть внутри описания мира находится некоторое самоссылочное (непредикативное) ядро описания. Эта самоссылочность в описании мира проявляется на весьма высоких уровнях абстракции, которые явны при более подробном гносеологическом анализе описания мира.

Последовательная схема отражения действительности в сознании представлена на рис. 1 [62][1]. Высший уровень отражения — 6-й — необходимо самоссылочен (непредикативен). Не углубляясь в гносеологический анализ схемы отражения, можно заметить, что при анализе процесса познания (отражения действительности) видно, что так как самоссылочные структуры имеются в сознании, то тем более самоссылочность уместна и в математических структурах.

О допустимости самопринадлежности в теории множеств было известно с начала XX в. "Впервые внимание к <экстраординарным

[1] Онтологически это связано с трёхсоставностью действительности: сознание, информация (организованная во времени), материя. При этом закономерности каждой составляющей своеобразны [62]. Место математики — в средней составляющей реальности. Такое устройство реальности соответствует ступеням познания истины [27]: i) непосредственное созерцание (в сознании), ii) логические рассуждения (информация, во времени), iii) практическая деятельность (во внешнем материальном мире). Такая последовательность выдержана и в этой работе — от непосредственного созерцания самопринадлежности к формализуемым математическим рассуждениям и далее к практическим приложениям полученных математических результатов.

множествам> привлёк Д. Мириманов[2]" [32, с. 117], оставаясь в рамках наивной теории множеств. Аксиоматизация теории множеств была связана в основном с попыткой избавиться от рассмотрения множеств с самопринадлежностью[3].

Однако при рассмотрении множеств с самопринадлежностью не возникает противоречий и открываются весьма неожиданные свойства этих объектов мысли.

---

[2] *Mirimanoff D.,* Les antinomies de Russel et de Burali-Forti et le probleme fondamental de la théorie des ensembles // L'Enseygnement Mathematiques, 1917, vol. 19, 37-52. Mirimanoff D., Remarqes sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes // Ibidem, 1921, vol. 21, 29-52. (указано по: [32]; см. список литературы).

[3] В теории множеств, хотя было известно (с 1917 г.) о существовании самопринадлежащих множеств: $s \in s$, названных экстраординарными [32, с. 117], была предложена Цермело (в 1925 г.) и фон Нейманом (позже) аксиома фундирования, исключающая из рассмотрения такие множества [32, с. 118]. Аксиома эта была измышлена из предположения ("предрассудка"), что якобы "единственным первичным конституентом (составляющим, constituent) любого множества оказывается пустое множество [32, с 117].

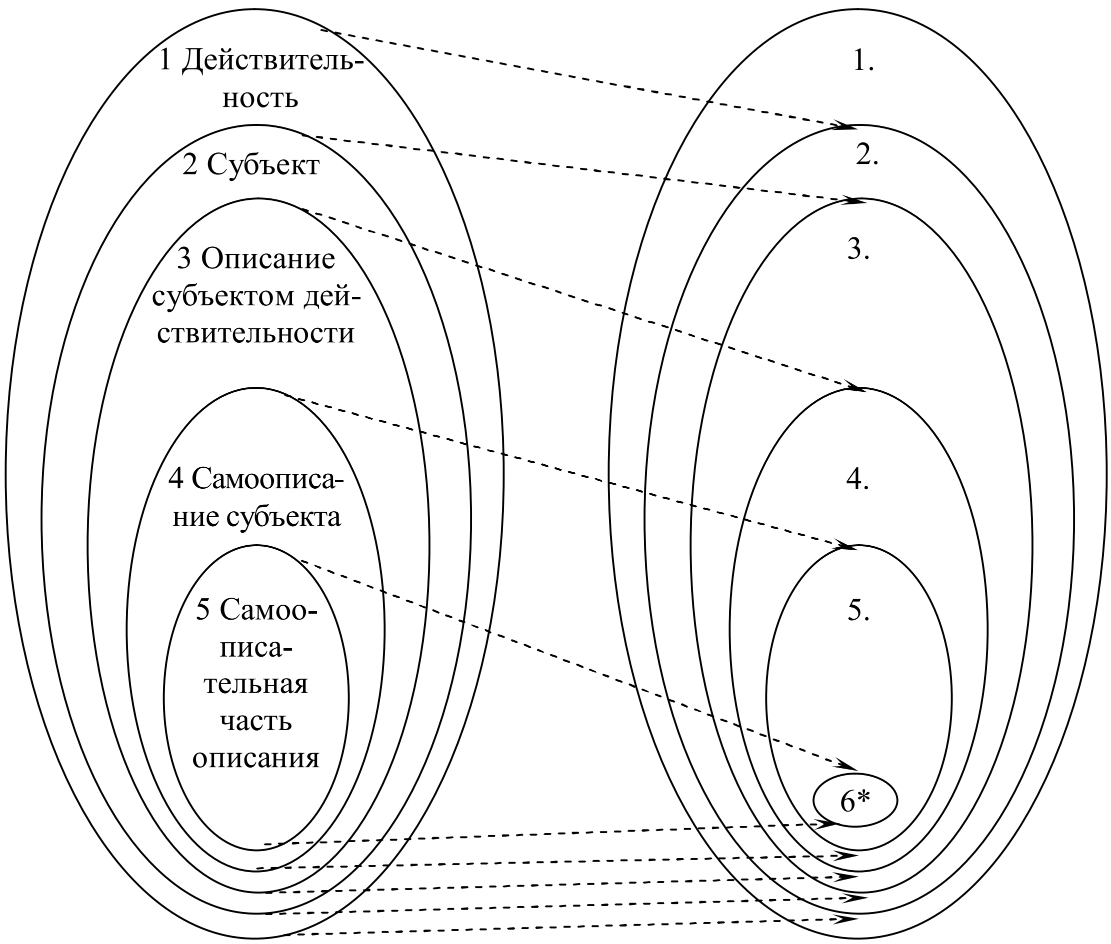

Рис. 1. Схема отражения мира в самоосознании.
* 6 — самоописание субъекта в самоописательной части описания мира

Глава 2. О множествах с самопринадлежностью

§2. Формализация отношения принадлежности

Прежде чем формально рассматривать самопринадлежащие множества, следует определиться с интуитивным пониманием объекта и отношения принадлежности (отношения части и целого).

Объекты мысли (но не мыслящего и не саму мыслимую мысль) можно мыслить как единое или как многое, или как едино-многое. Возможности мыслимости объектов отображены в табл. 1.

Таблица 1. **Диалектика единого и многого**

Обозначение	Пояснение
[…]	Брать нечто как единое, взятое — единое
{…}	Брать нечто как многое, взятое — многое
a = {… a}	Брать нечто (а) как едино-многое, взятое — едино-многе
[[…]] = […]	Брать единое как единое, взятое — единое
[{…}] = […]	Брать многое как единое, взятое — единое
a = {… a}, [a] = a	Брать едино-многое как единое, взятое — едино-многое
{[…]} = […]	Брать единое, как многое, взятое — единое
{{…}} = {…}	Брать многое как многое, взятое — многое
a = {… a}, {a} = a	Брать едино-многое как многое, взятое — едино-многое

При рассмотрении диалектики единого, многого и едино-многого в плане взаимного содержания, взаимосвязи частей и целого созерцательно таковы, как указано в табл. 2.

Таблица 2. **Отношение части и целого**

Обозначение	Пояснение
$[x] \in \{\ldots x\}$	Единое во многом. (Отношение принадлежности)
$x \subseteq \{\ldots\}$, каждый y из x — в $\{\ldots\}$	Многое во многом. (Отношение включения, подмножество)
	Едино-многое во многом; едино-многое в едином. (Отношение и принадлежности и включения)

При формализации этих интуитивно ясных отношений и выстраиваются операции с самопринадлежащими множествами.

§3. Явная запись самопринадлежащих объектов

Пример. Пусть $A = \{a, A\}$, $A \in A$, множество подмножеств A таково: $Exp(A) = \{\{a\}, \{a, A\}, \{A\}\}$ = (раскрытие самопринадлежащего едино-многого объекта A) $=\{\{a\}, \{a, A\}, \{a, A\}\}$ = (удаление подобных обозначений) = $\{\{a\}, \{a, A\}\}$ = (раскрытие многих, взятых как многое, в одно многое) = $\{a, a, A\}$ = (удаление подобных обозначений) = $\{a, A\} = A$.

§4. Схема свёртывания

Определение 1. Множество всех множеств M — множество, содержащее все объекты, рассматриваемые как связанные между собой отношением принадлежности.

Схема свёртывания, схема выделения объектов из M такова:
A содержит объекты x из M, такие, что выполняется условие L(x), причём т. к. пустое множество принадлежит (формально) любому объекту из M, то возможность несуществования объекта A, при невыполнении условия L(x) на всех объектах из M оговаривается отдельно, условием $(x \in \varnothing)$:
$A = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $L(x)\}$.

Таким образом, теория множеств с самопринадлежностью есть некоторое исчисление множеств (объектов), ограниченное замкнутой областью M [4].

Посредством схемы свёртывания операции с множествами записываются следующим образом:

Объединение множеств A и B —

$A \cup B = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $(x \in A$ или $x \in B)\}$.

Пересечение множеств A и B —

$A \cap B = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $(x \in A$ и $x \in B)\}$.

Множество подмножеств множества A —

$Exp(A) = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $(x \subseteq A)\}$.

§5. Основные определения

Определение 2. A — подмножество множества B, если всякий объект из A принадлежит B.

$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow x \in B$.

Определение 3. Множество всех подмножеств некоторого объекта A обозначется ExpA.

$Exp(A) = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $x \subseteq A\}$.

Очевидно, что $Exp(\varnothing) = \varnothing$.

§6. Свойства ∅

Свойства пустого множества [5]

1. ∅ — самопринадлежаще (формально[6]), очевидно, $\varnothing \in \varnothing$.

2. ∅ принадлежит любому объекту из M (формально), что выражено в схеме свёртывания:

$A = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или "условие задающее объект A"$\}$.

---

[4] См. далее свойство M: Exp(M)=M.

[5] Несуществования (ничто), обозначаемого существующим символом.

[6] Содержательно: ничто только из ничто и состоит (в несуществующем только несуществование, и нет в нём существующего).

3. $\varnothing$ — единственно.

Доказательство[7] (формальное). Пусть $\varnothing'$ и $\varnothing$ — пустые множества, тогда по свойствам 1 и 2 (т. к. оба множества самопринадлежащи) и т. к. $\varnothing' \in \varnothing$ и $\varnothing \in \varnothing'$, по теореме о транзитивности принадлежности имеем $\varnothing' \subseteq \varnothing$ и $\varnothing \subseteq \varnothing'$, значит, $\varnothing = \varnothing'$, т. е. разные обозначения обозначают одно и то же, $\varnothing$ — единственно. □

4. Множество подмножеств пустого множества также пусто. $\mathrm{Exp}(\varnothing) = \varnothing$.

Доказательство (формальное).
$\mathrm{Exp}\varnothing = \{[x] \in M \mid (x \in \varnothing)$ или $x \subseteq \varnothing\} \in \varnothing$. □

§7. Свойства M

Свойства множества всех множеств

1. M — самопринадлежаще, $M \in M$.

Доказательство. По определению множества всех объектов, т. к. множество всех множеств тоже некоторый объект, этот объект самопринадлежащ. □

2. Если A — некоторый объект из M, $A \in M$, то $A \subseteq M$.

Доказательство. Если $x \in A$, то, по определению M, $x \in M$ (для всех x из A), по определению подобъекта, $A \subseteq M$. □

3. Если A — некоторый объект из M, и $M \in A$, то $A = M$. ("Переполнимость" любого объекта из M объектом M, неограничиваемость объекта M подобъектами, его "максимальность".)

Доказательство. По условию $A \in M$ (с учётом особенности M $A \subseteq M$); $M \in A$, по теореме о транзитивности принадлежности $M \subseteq A$; по объединению формул $A = M$. □

4. M — единственно.

Доказательство. Если бы объект M' был бы тоже множеством всех множеств, то по определению этот объект содержал бы M и наоборот (по определению объекта M) содержался бы в M:

---
[7] Содержательно ясно, что ничто — единственно.

M'∈M и M∈M'; т. к. M и M' — самопринадлежащи, по 1-му свойству и по теореме о транзитивности отношения принадлежности для самопринадлежащих множеств, то $M \subseteq M'$ и $M' \subseteq M$, значит, речь при разных обозначениях идёт об одном объекте. Объект M — единственен, с точностью до обозначения. □

5. M тождественно множеству всех своих подмножеств, $M = Exp(M)$.

Доказательство. По определению множества подмножеств (опред. 3) $M \subseteq Exp(M)$; по определению M, $Exp(M) \subseteq M$; по объединению формул $M = Exp(M)$ [8]. □

§8. Основные теоремы

Транзитивность принадлежности. Недополнимость. Непротиворечивость.

Лемма 1. Пусть объект A — несамопринадлежащ, тогда если $A \in B$, то объекты, принадлежащие A, не принадлежат B, и наоборот. $(A \notin A \text{ и } A \in B) \Leftrightarrow ((x \in A \text{ и } x \notin \varnothing) \Rightarrow (x \notin B)$.

Доказательство. Необходимость и достаточность вытекают из интуитивного определения отношения принадлежности, которое в этой лемме принимает формальный вид. □

Теорема 1 (о транзитивности принадлежности). Пусть объекты, принадлежащие самопринадлежащему объекту A, принадлежат и тому объекту B, которому объект A принадлежит. $A \in A$, $(A \notin \varnothing)$, $A \in B$, следовательно, $x \in A \Rightarrow x \in B$, т. е. $A \subseteq B$.

Доказательство [9]. Случай $B = \varnothing$ и $A = \varnothing$ вырожденный, формально выполняется, не рассматриваем. Возможны два случая:

---

[8] Теорема Кантора о порядке множества подмножеств (см., напр., [8]) справедлива только для несамопринадлежащих множеств.

[9] Содержательно вытекает из интуитивного определения отношений частей и целого, самопринaлежащий объект представляет собой открытость, через самопринадлежащее, целое частей, составляющих это целое.

1. $M \in B$. $M = B$. Тогда т. к. любой объект из M принадлежит M, то и любой объект из A принадлежит M. $A \subseteq M$. □

2. $M \notin B$. $B \in M$. По (интуитивному, содержательному) определению самопринадлежащего объекта самопринадлежащий объект (единомногое) принадлежит другому со всеми составляющими его объектами — и как объект, и как подмножество. Формально же пусть $A \in A$, $A \in B$, $x \in A$ и предположим противное пусть $x \notin B$, тогда по лемме 1 $A \notin A$ — противоречие с первоначальным предположением доказывает утверждение теоремы. □

Теоремы о недополнимости подмножества в M и неделимости самопринадлежащего объекта.

Теорема 2 (о недополнимости объекта в M). M — множество всех множеств. Для любого существующего объекта в M не существует дополнения до M.

Доказательство. Пусть A объект, $A \in M$, возможны случаи:

1. $A = \varnothing$, тогда A — не объект ($\varnothing$ означает несуществование, но не существующий объект)

2. $A \notin \varnothing$ и $M \notin A$. Попытаемся построить дополнение B к A в M, т. е. попытаемся собрать все объекты, не принадлежащие A, "внешние" по отношению к A, в одно множество B.

$B = \{[x] \in M \mid x \in \varnothing \text{ или } x \notin A\}$, $M \notin A$, значит, $M \in B$, т. е. $B = M$ и $A \in B$. Дополнение "поглощает" дополняемый объект. Попытка неудачна. Утверждение теоремы доказано.

3. $A = M$, очевидно, $B = \{[x] \in M \mid x \in \varnothing \text{ или } x \notin A\} = \varnothing$, что означает несуществование (отсутствие) дополнения к M в M. □

Следствие. Множество всех объектов M невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся объектов. M неделимо на части.

Теорема 3 (о неделимости самопринадлежащего объекта). Любой самопринадлежащий объект целокупен, т. е. неделим на две (и более) непересекающиеся части.

Доказательство. Пусть $A \in M$ Возможны случаи:

1. A = $\varnothing$. Предельный случай, формально $\varnothing \in \varnothing$, $\varnothing$ единственно,— "ничто" неделимо.

2. $A \notin \varnothing$. Доказательство подобно доказательству теоремы о недополнимости объекта в М. Попытка "дополнить" любой, отличный от А и $\varnothing$, объект В из А в А — неудачна. В выстраиваемом дополнении присутствует собственно объект А, объемлющий дополняемый объект В. □

Следствие. Для любого существующего объекта В из самопринадлежащего объекта А в А не существует дополнения.
Доказательство очевидно. □

Теорема 4 (о непротиворечивости). Пусть М — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в М объекты,— непротиворечива.

Доказательство

Если высказыванием L описан объект А, то отрицание этого высказывания описывало бы дополнение В к объекту А в М, но по теореме о недополнимости это невозможно, следовательно, высказывания об объектах из М непротиворечивы. [10] □

---

[10] Известно [21, с. 154–155], что если существует сильно недостижимый кардинал β, то есть такой, что $\forall\alpha < \beta$, $2^{\alpha} < \beta$, то в теории множеств существует внутренняя модель самой теории множеств, что позволяет доказать непротиворечивость теории множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля (ZF), однако существование недостижимых кардиналов не следует из аксиоматики ZF [7], [21], поэтому рассуждения о недостижимых кардиналах в теории множеств без самопринадлежности более гипотезы, чем доказуемые утверждения. При рассмотрении теории множеств с самопринадлежностью выполняются условия, аналогичные свойствам недостижимых кардиналов, и доказуема непротиворечивость теории.

В теории множеств с самопринадлежностью множество всех множеств М совпадает со множеством всех своих подмножеств, но не совпадает со множествами подмножеств любого своего собственного подмножества — Exp(M)=M, но $\forall A \subset M$ $(M \notin A)$ $Exp(A) \neq M$, ($M \notin Exp(A)$). То есть утверждение, аналогичное утверждению о недостижимом кардинале, выполнено. Однако непротиворечивость теории множеств с самопринадлежностью доказывается из несколько других соображений, что описано выше.

Существует, однако, ограничение: эти высказывания об объектах из M не могут быть получены формальным выводом из некоторых аксиом.

Пример. Пусть A — множество, содержащее как объекты все несамопринадлежащие множества, тогда A — самопринадлежаще (если $A\notin A$, то $A\in A$), внутренность[11] множества A тоже самопринадлежаща, и т. д. по всем множествам ряда внутренностей A. A — недостижимый объект:

$A=\{[x]\in M|(x\in\varnothing \text{ или } x\notin x) \text{ либо } (x=a, a\in a, a\in A, P^{\alpha}(a)=A, \text{где } \alpha\text{—число})\} \notin \varnothing.$

Объект, полученный отрицанием высказывания в схеме выделения не существует, очевидно,

$A=\{[x]\in M|(x\in\varnothing \text{ или } x\notin x) \text{ эквив. } (x=a, a\in a, a\in A, P^{\alpha}(a)=A, \text{где } \alpha\text{—число})\} \in \varnothing.$

В M-теории верно первое высказывание о множестве, содержащем все несамопринадлежащие множества. Однако объект, содержащий только самопринадлежащие внутренности объекта A, тоже существует:

$A = \{[x]\in M \mid (x\in\varnothing) \text{ или } (x = a, a\in a, a\in A, P^{\alpha}(a) = A, \text{где } \alpha \text{ — число})\} \notin \varnothing,$ в этом случае A — недостижимое бесконечное число.

§9. О множестве несамопринадлежащих множеств

Пусть M — множество всех объектов (множеств). Выделим в M множество A, содержащее все несамопринадлежащие множества. В первом приближении A таково:

$A = \{ [x]\in M \mid x\in\varnothing \text{ или } x\notin x\}.$ (1)

Но тогда $A\notin A$, значит по словесному определению $A\in A$, т. е. (1) перепишем как

$A = \{ [x]\in M \mid x\in\varnothing \text{ или } (x\notin x \text{ либо } x = A)\};$ (2)

однако внутренность[12] такого объекта A, V(A) описываема по формуле (1), значит, объекту A, содержащему все несамопринадлежащие объек-

---

[11] См. след. сноску.

[12] $V(A) = \{[x]\in M \mid x\in\varnothing \text{ или } (x\notin A \text{ и } A\notin x) \}$ — внутренность объекта A,— объект содержащий все объекты из A, кроме самого A. Для несамопринадлежащих мно-

см. след. стр. ⟶

ты, принадлежат и все внутренности самого объекта А (причём ряд внутренностей не обрывается[13]):

$A = \{[x]\in M \mid x\in\varnothing$ или $(x = a,\ a\notin a,\ a = V^{\alpha}(A)$, где α — число $)\}$. (3)

Таким ообразом, объект, содержащий все несамопринадлежащие множества,— самопринадлежащ и содержит все свои внутренние подобъекты.

К тому же множество всех подмножеств объекта А совпадает с ним самим, $Exp(A) = A$,— если $X\subseteq A$ и $X\notin X$, то $X\in A$ по определению А (3) (см. табл. 1, 2); если же $X\subseteq A$ и $X\in X$, то X совпадает с некоторым внутренним объектом из А или с А, т. е. по определению А (3), $X\in A$.

В теории с самопринадлежностью множеств парадокс Расселла отсутствует.

Рассуждение. Словесной формулировки недостаточно для однозначного выделения объекта из М, требуется формализованная конкретизация, причём кроме первоначально сформулированного словесно условия объект может обладать (объективно) и другими свойствами — содержать помимо выделяемых и иные объекты. В рассуждениях о множестве несамопринадлежащих множеств первоначальная словесная формулировка формализована (переведена на математический язык) в формуле (1), в следующей формуле (2) условие конкретизировано (не применительно к словесным выражениям естественного языка, но применительно к естеству М-теории), окончательно объект выделен, построен, по объективно существующей структуре объекта М — формула (3). Рассуждения об объектах (множествах) возможны при признании существования объекта М (множества всех множеств) в явном виде, полностью не описываемого и не формализовываемого.

Рассуждая логически (см. теорему о непротиворечивости), в логике, вложимой в М-теорию, невозможно построить утверждение, отрицающее себя. Утверждения, отрицающие себя[14] (несамопринадлежащие

жеств внутренность совпадает с самим объектом: $X\notin X$, значит, $V(X) = X$.

[13] Условие обрыва минимальных цепей отсутствует в теории М.

[14] При интерпретации отношения принадлежности $\in$ как импликации $\Rightarrow$.

объекты), содержатся в некотором самоутвердительном утверждении (самопринадлежащем объекте).

Интуитивного представления о числе как о порядковом типе (вполне упорядоченной структуре) достаточно для интуитивного разумения отсутствия в теории с самопринадлежащими множествами парадокса Расселла.

§10. Числовые структуры

Интуитивно самопринадлежность наблюдается при счёте моментов времени, единица — "сейчас" состоит из "сейчас", двойка — из "бывшего" и "сейчас", но "бывшее" когда-то было "сейчас", тройка — из "бывшего раньше", "бывшего" и "сейчас"; каждый момент бытия заключён в бытии — самопринадлежащ. Числа (при счёте во времени) самопринадлежащи:
единица состоит из единицы и ничто;
двойка — из единицы, двойки (себя самой) и ничто[15];
тройка — из единицы, двойки, тройки (себя самой) и ничто;
$1 \in 1, \varnothing \in 1,$
$1 \in 2, 2 \in 2, \varnothing \in 2,$
$1 \in 3, 2 \in 3, 3 \in 3, \varnothing \in 3, \ldots$

$1 = \{1\}, \varnothing \in 1,$
$2 = \{1, 2\}, \varnothing \in 2,$
$3 = \{1, 2, 3\}, \varnothing \in 3,$ и т. д.[16]

---

[15] То же при счёте на пальцах: два загнутых пальца — это двойка, но не две единицы (единица — загнутый мизинец) — пальцы не поменять местами (как при счёте на палочках — палочки).

[16] Определение числа в теории множеств с самопринадлежностью формализуется посредством понятия последователя к множеству (объекту).

Определение. Последователь объекта А содержит объект А и себя же самого;
$P(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in A \text{ либо } P(A)\in[x])\}$
Если последователь простой (единичный), то

см. след. стр. ⟶

Таким образом, понятие о числах, упорядоченных структурах, определяется из теории множеств естественно.

Очевидно, что множество N, содержащее все натуральные числа,— несамопринадлежаще $N \notin N$ [17].

Формализация же в теории множеств с самопринадлежностью, понятий о бесконечных числовых, структурах достаточно пространна и описана в следующей главе.

$P(A)=\{[x]\in M|([x]\in\varnothing)$ или $([x]\in A$ либо $[x]=P(A))\}$.

Свойства последователей.

1. Формально, единичный объект — это последователь для ничто; $[a] = P(\varnothing)$; (двойственность к особенности внутренности единичного объекта).

2. Последователь для M не определён (по единственности M).
Формально $P(M) = \varnothing$, что означает: M — не расширяемо последователями, ограничено.

3. Последователь вообще не единственен (для объекта иного, чем M); $[a]\in M$, и $M\notin a$, $P_1(a) \neq P_2(a)$ (однако, очевидно, внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$.

4. Все простые последователи, построенные по определённому выше типу P,— конечны.

[a], P([a]), P(P([a])) и т. д. — конечны. Добавлением единицы (без абстракции бесконечности) можно построить (выделить в M) только конечные числа.

Натуральные числа — это ряд последовательных последователей к единичному объекту.

Вообще же если C — множество-число, то $C\in C$ и, для любых двух объектов a, b из C, $a\in a$, $b\in b$, $a\in b$ или $b\in a$; число — нить вложенных друг в друга отношением принадлежности (без ветвлений) объектов.

[17] Т. е. [N] — единичное множество, может быть началом новой линии счёта. Однако этим замечанием следует пока ограничиться.

Глава 3. Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью

В этой главе продолжено краткое описание понятий о бесконечных числовых (упорядоченных) структурах в теории множеств с самопринадлежностью.

§11. Простые, конечные, последователи

Определение натурального числа (см. §10) в теории множеств с самопринадлежностью формализуемо посредством понятия последователя к множеству (объекту).

Определение 4. Простой последователь объекта А содержит объект А и себя самого, $P(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in A \text{ либо } P(A)\in[x])\}$.

Если последователь простой (единичный), то
$P(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing) \text{ или } ([x]\in A \text{ либо } [x]=P(A))\}$.

Свойства последователей

1. Формально: единичный объект —это последователь для «ничто»; $[a] = P(\varnothing)$ (двойственность к свойству внутренности единичного объекта);

2. Последователь для М не определён (по единственности М), формально $P(M) = \varnothing$, что означает: М — не расширяемо последователями, ограничено.

3. Последователь вообще не единственен (для объекта иного, чем М); $[a]\in M$, и $M\not\in a$, $P_1(a) \neq P_2(a)$ (однако, очевидно, внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$.

4. Все простые последователи, построенные по определённому выше типу Р,— конечны.

$[a]$, $P([a])$, $P(P([a]))$ и т. д. — конечны. Добавлением единицы (без абстракции бесконечности) можно выделить в М только конечные числа.

Натуральные числа — это ряд последовательных последователей к единичному объекту. Вообще же если С — *множество-число*, то $C\in C$ и для любых двух объектов a, b из С, $a\in a$, $b\in b$, $a\in b$ или $b\in a$; т. е. число

— это *нить* вложенных друг в друга отношением принадлежности (без ветвлений) объектов.

Определение 5. Внутренность объекта A содержит объекты, принадлежащие объекту A, за исключением самого объекта A;
$V(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing)$ или $([x]\in A$ и $A\notin V(A))\}$.

Свойства внутренностей

1. Внутренность единичного объекта — ничто; $V([a]) = \varnothing$,

2. Внутренность для M не определена — формально ничто,
$V(M) = \varnothing$, т. е. объект M, множество всех множеств не имеет ни последователей, ни внутренностей[18].

3. Внутренность объекта — единственна.

3.1 Для несамопринадлежащего объекта внутренность объекта совпадает с самим объектом. $B\notin B$, следовательно, $V(B) = B$ (см. определение внутренности).

3.2 Для самопринадлежащего объекта внутренность объекта — единственна. $A\in A$, по определению внутренности $V(A)$ либо а) самопринадлежаща, $V(A)\in V(A)$, тогда она единственна (единственен самопринадлежащий объект $V(A)$ по содержанию понятия о самопринадлежности, см. табл. 1, 2), либо б) несамопринадлежаща, $V(A)\notin V(A)$, также очевидна единственность несамопринадлежаще-

[18] Хотя можно ввести иерархию единичных объектов, взяв мысленно объект M как единое следующего уровня единства, как единичный объект,]M[, однако тогда придётся постулировать бытие многих единичных объектов $]M_i[$, аналогичных объекту]M[, что противоречит свойству единственности множества всех множеств M (см. выше); но даже допустив, внелогично, мыслимость неединственности множества таких единичных объектов $]M_i[$, должно было бы заключить, что они принадлежат множеству всех множеств следующего уровня иерархии M1, совпадающего, однако, по структуре при всей изолированности структур множеств $]M_i[$ со структурой множества всех множеств M и при изолированности, несвязанности отношением принадлежности объектов из разных множеств $]M_i[$ и $]M_j[$ (по определению единичных объектов) $(i \neq j)$ и из M1, не получили бы качественно новых, структурно различимых объектов (см. ниже определение самоподобия) — не добавили бы ничего качественно нового к описанию самопринадлежащих объектов, поэтому остаётся ограничиться рассмотрением обычного множества всех множеств.

го множества $V(A)$;
в) либо ничто, $V(A) = \varnothing$.

4. Внутренности всех последователей одного объекта совпадают $V(P_1(a)) = V(P_2(a))$.

Пример. $1 \in 1, \varnothing \in 1,$

$1 \in 2, 2 \in 2, \varnothing \in 2,$

$1 \in 3, 2 \in 3, 3 \in 3, \varnothing \in 3, \ldots$

$1 = \{1\}, \varnothing \in 1,$

$2 = \{1, 2\}, \varnothing \in 2,$

$3 = \{1, 2, 3\}, \varnothing \in 3$, и т. д.[19]

$P(1) = 2, P(2) = 3, V(3) = 2.$

Легко определяются n-е последователи: $P(P(a)) = P^2(a)$ и т. д. и n-е внутренности $V(V(a)) = V^2(a)$, где n — натуральное число, изобразимое последователем $P^n(\varnothing)$; в общем случае для простых последователей $V^n(P^n(a)) = a$, но возможно $P^n(V^n(a)) \neq a$, например $P^5(V^5(P^3(\varnothing))) = 5$ [20].

Вообще можно рассматривать и разные ветвящиеся структуры и циклы простых последователей, аналогичные ориентированным графам, однако при рассмотрении более сложных структур, имеющих практическое приложение, остаётся ограничиться рассмотрением числовых (вполне упорядоченных) структур.

§12. Бесконечные последователи

Натуральный ряд в M выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

---

[19] В этой записи два обозначения "3" справа и слева от знака равенства обозначают один и тот же объект (определение самопринадлежащего множества самоссылочно, непредикативно).

[20] В арифметике натурального ряда (без дополнительных конструкций) нет отрицательных чисел, арифметическая запись этого выражения $3–5 = 0$, $0+5 = 5$.

$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \varnothing)$ или $([x]=P^n(\varnothing)$, где $n \in N$ и $P(V(P(x))) = x)$ [21]$\}$.

Свойства натурального ряда

1. Натуральный ряд — не единственен.

2. N — несамопринадлежаще, $N \notin N$.

3. Внутренность натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, $V(N) = N$, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам[22].

Имеются две возможности рассмотрения последователей к натуральному ряду N (N — как единичное либо как многое):

1. Простой последователь к N как к единичному объекту [N], $P([N])$; [N] — единичный объект изоморфен единице $[N] \cong [1]$, $P([N])$ — двойке, такое рассмотрение выявляет структуру изоморфную натуральному ряду, но новых структур не выявляет.

2. Бесконечный последователь — последователь к множеству всех объектов из N, последователь к натуральному ряду, взятому как многое, $\{N\}$: $PN = \{[x] \in M \mid ([x] \in \varnothing)$ или $([x] \in N$ либо $x = PN(\varnothing))\}$.

Свойства бесконечного последователя PN:

1) вообще PN не единственен,

2) PN — самопринадлежащ,

3) $V(PN(\varnothing)) = N$.

Так же, как и для счётных последователей, определимы n-е бесконечные последователи типа PN: $PN(PN(\varnothing)) = PN^2(\varnothing)$ и т. д., и бесконечные последователи:

$PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing) = \{ [x] \in M \mid [x] \in \varnothing$ или $(x = (PN^{\alpha}(\varnothing)), \alpha \in PN(\varnothing)) \}$

и т. д.

---

[21] Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

[22] Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающа и совпадает с самим натуральным рядом.

§13. Недостижимые последователи

Выделим бесконечный ряд последовательных простых и бесконечных последователей PN:

$$\varnothing,\ P(\varnothing),\ldots,\ PN(\varnothing),\ P(PN(\varnothing)),\ldots,\ PN^2(\varnothing),\ldots,\ PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing),\ \ldots \qquad (4)$$ [23]

выделим в записи последовательности только некоторые объекты (последовательность бесконечных последователей PN):

$$\varnothing,\ PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing),\ldots,PN^{PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing)}(\varnothing)\ ,\ldots,PN^{PN^{PN^{PN(\varnothing)}(\varnothing)}(\varnothing)}(\varnothing)\ ,\ldots \qquad (5)$$

Объект PO(∅), содержащий все объекты такого ряда,— самопринадлежащ (если нет, то к нему можно построить последователь по типу P(PN(∅)) и, значит, он объект из этого же ряда), причём ряд его внутренностей не обрывается[24], объект PO(∅) — недостижимый объект. По аналогии, рассматривая ряды из последователей вида PO(∅) и их PO(∅) степеней, можно выделить объект P1O(∅), содержащий все такие последователи, и т. д., построив бесконечный ряд PO, P1O, P2O и т. д.,— недостанет счётного ряда для нумерования уровней недостижимости объектов, придётся использовать для нумерации недостижимые же последователи и т. д. — получаются структуры, аналогичные недостижимым последователям (кардиналам), рассматриваемым в классической теории множеств (см.: [7; 22]).

Увеличение уровня недостижимости перестаёт добавлять качественно новое в структуру объектов; следующий уровень сложности (бесконечности) объектов — объекты самоподобные, структурно-изоморфные своей собственной части.

---

[23] P(PN(∅)) в иной записи — это счётная бесконечность плюс единица, $\omega+1$.

[24] См. выше (глава 2) подобные рассуждения при выделении множества, содержащего все несамопринадлежащие множества.

§14. Структурный изоморфизм

Определение 6. Два объекта структурно-изоморфны, если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^{\in} B$ если $A \cong B$ и если для любых $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$, $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Пример. Объекты $A = \{[a], A\}$ и $2 = \{1, 2\}$ — структурно-изоморфны, объекты A и $C = \{[c_1], [c_2]\}$ — изоморфны, но не структурно ($A \cong^{\notin} C$), $A \ncong [a]$.

Теорема 5 (об изоморфизме множеств подмножеств). Если два множества структурно изоморфны друг другу, то множества их подмножеств также структурно изоморфны между собой, $A \cong^{\in} B \Rightarrow \mathrm{Exp}(A) \cong^{\in} \mathrm{Exp}(B)$.

Доказательство следует из определений структурного изоморфизма и множества подмножеств. □

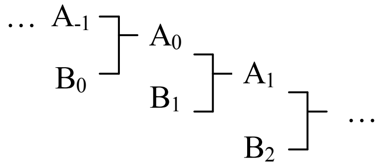

Рис. 2. Структура самоподобного множества

§15. Самоподобие, пространства

Счёт в конечных последователях:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots \qquad (6)$$

однонаправленный, полностью обратимый.

Счёт же в бесконечных последователях $PN(\varnothing)$, $PO(\varnothing)$ и т. д. — отчасти однонаправленный, отчасти обратимый (многоточие обозначает промежутки необратимости счёта):

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots PN(\varnothing) \longrightarrow P(PN(\varnothing)) \longrightarrow \ldots \qquad (7)$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots PN(\varnothing) \longrightarrow \ldots \longrightarrow V(PO(\varnothing)) \longrightarrow PO(\varnothing) \ldots, \qquad (8)$$

при этом как последовательность последователей типов P-, PN-, PO- не обрывается, так и последовательность внутренностей объекта $PO(1)$ не

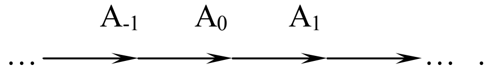

Рис. 3. Структура порядка прямой

обрывается, ввиду того, что при возможных вариантах рассмотрения ряда внутренностей объекта PO(1)

1) $V^{PO(1)}PO(\varnothing) = \varnothing$ (т. е. ряд внутренностей только счётен, ряд (8) симметричен относительно предельного перехода). Это невозможно, так как $V(PN(\varnothing))=PN(\varnothing)$;

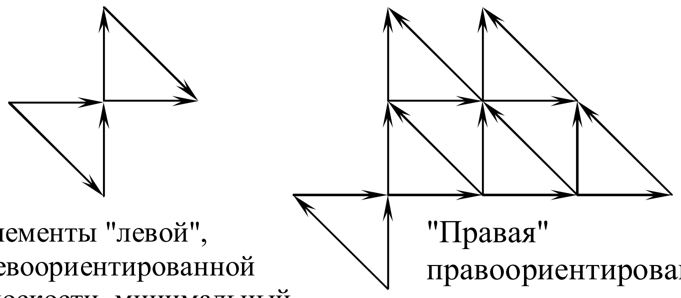

Рис. 4. Структура порядка плоскости

2) $V^{PO(1)}PO(\varnothing)$ — внутри необрывающегося ряда внутренностей:

$\varnothing \to 1 \to \ldots\ PN(\varnothing) \to \ldots \to V^{PO(1)}PO(\varnothing) \to \ldots \to V(PO(\varnothing)) \to PO(\varnothing) \ldots$ (9).

Определение 7. Объект А — собственно внутренний по отношению к объекту В, если он принадлежит В, но не принадлежит ряду внутренностей объекта В [25].

Пример. Число 2 собственно внутреннее по отношению к недостижимому числу $PO(\varnothing)$, т. к. $2 \in PO(\varnothing)$, $V^{\alpha}(PO(\varnothing)) \notin 2$.

Определение 8. Объект самоподобен если структурно изоморфен подобъекту, собственно внутреннему по отношению к этому же объекту.

[25] Как таковую, в виде отдельного объекта, собственную внутренность недостижимого объекта выделить невозможно; несамопринадлежащие множества объекта А (см. главу 2) собственно внутренние, однако объект, содержащий только несамопринадлежащие множества,— невыделим.

Пример. Объект A_1 — самопринадлежащ и самоподобен, в собственной внутренности объекта A_1 — объект A_0, структурно изоморфный объекту A_1, $A_0 \cong^{\in} A_1$, некоторый объект B_1 — в собственной внутренности объекта A_1, $B_1 \in VT(A_1)$, $B_0 \cong^{\in} B_1$. Объекты A_0, A_1, A_{-1} выделимы с точностью до обозначения, ряд объектов продолжим в обе стороны последовательно неограниченно (по свойству недостижимых объектов), однако в целом ряд (рис. 2) — несамопринадлежащий объект.

Если в объекте рис. 2 (взятом как многое) "обнулить" содержимое объектов "нити B", то получим простейшее одномерное пространство — прямую рис. 3, обозначим для дальнейшего рассуждения отношения принадлежности между отдельными выделенными самоподобными объектами этой последовательности стрелками, а объекты (выделенные с точностью до обозначения[26]) — точками.

При наличной выделимости самоподобных объектов, как и недостижимых объектов, в последовательности с точностью до обозначения (ввиду структурного изоморфизма), имеется и возможная и бесконечная делимость "отрезка" — между любыми объектами из последовательности (см. рис. 3), выделение между двумя последовательными (принадлежащими один другому самоподобными объектами) третьего, "промежуточного" (содержащего первый и принадежащего второму)[27] .

Следующий сложный самоподобный объект — плоскость, двухмерное пространство, каждый объект из плоскости (рис. 4) структурно изоморфен любому содержащемуся в нём объекту; минимальное структурное образование (ясно просматривается на рис. 4) может быть двояким: либо "левориентированным" либо "правоориентированным"; нити

---

[26] Если объекты одинаковы по структуре, то отличить один объект от другого по внутренним их свойствам невозможно, но можно различить по различию обозначений. Для того чтобы получить действительную прямую, требуется кроме обозначений ввести ещё понятие о мере (в простейшем виде о мере длины).

[27] Аналог аксиомы об отделимости (Хаусдорфа). Для оперирования с числами на прямой остаётся определить каким-либо образом внешнюю по отношению к прямой меру, меру регулярную.

последователей в кольца не замкнуты, то объект, содержащий все объекты одной плоскости (рис. 4),— несамопринадлежащ.

Рассмотрим трёхмерные пространства. В трёхмерном объекте возможны ориентации: "левая" и "правая" — по нижней ориентирующей плоскости (без циклов, см. теорему о стягивании циклов); "вверх" и "вниз" (без циклов). При этом плоскости, секущие куб по диагоналям противоположных сторон, не являются ориентированными[28], т. е. координатные оси в таком ориентированном пространстве заданы однозначно (ориентирующие векторы не являются координатными). Объект, со-

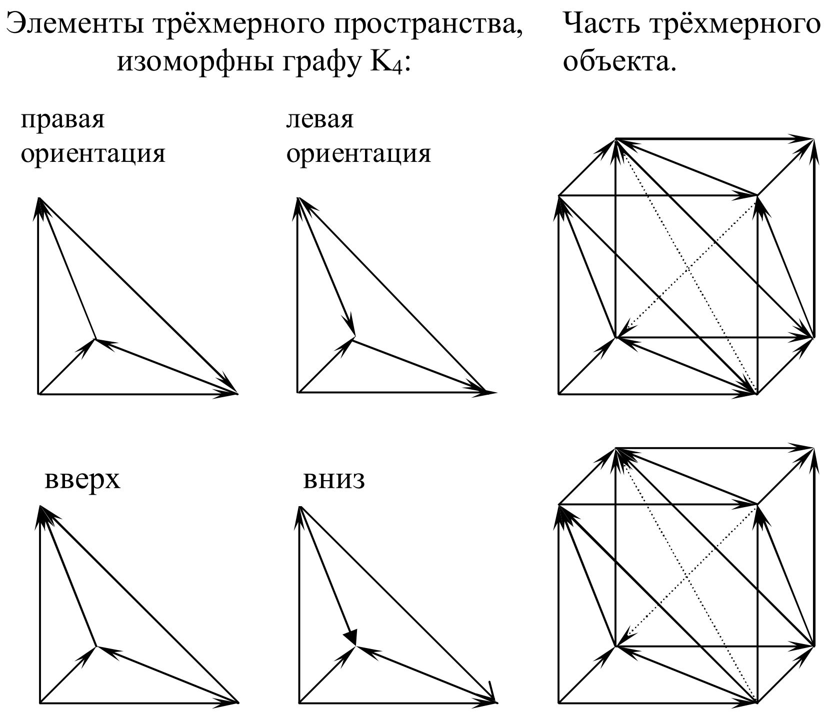

Рис. 5. Структура порядка трёхмерного пространства.

держащий всё трёхмерное пространство,— несамопринадлежащ.

Вышеизложенным показано свойство неоднозначной ориентируемости двухмерных объектов внутри трёхмерных пространств.

Теорема 6. В М совершенно однозначно ориентировано лишь 2-мерное пространство (плоскость).

[28] Если бы это было, то ориентация секущей (по диагонали, ориентирующей основание куба) плоскости (построенная по ориентациям сторон куба) была бы неоднозначна (что и показано на рисунке пунктирными линиями).

Доказательство очевидно, см. на рис. 5 ориентацию плоскости, пересекающей основание куба по диагонали. □

Рассмотрим четырёхмерное пространство.

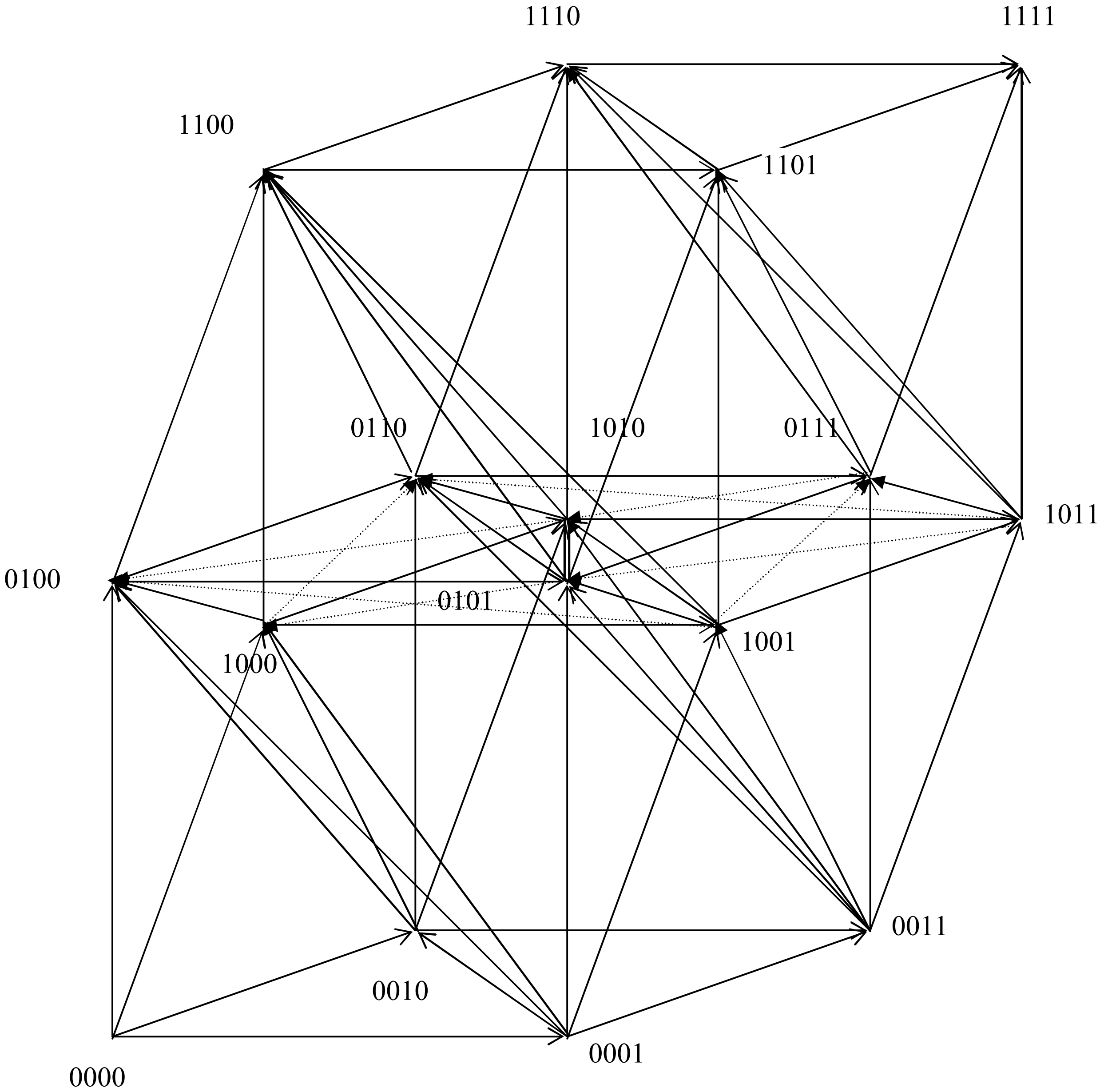

Рис. 6. Фиктивное 4-мерие.

§16. Ограничение размерности

Основная теорема об ограниченности размерности полностью упорядоченных ориентированных самоподобных объектов (пространств) трёхмерием в теории с самопринадлежностью:

Теорема 7. (о размерности). Полностью ориентируемы только трёх- и менее мерные самоподобные упорядоченные объекты, пространства (т. е. четырёхмерие — неориентируемо).

Доказательство (краткоизложенное). Как и в трёхмерных пространствах в четырёх- и более мерных пространствах не имеется однозначной ориентации двухмерных подпространств, что проверяемо непосредственным построением (см. рис. 6)[29]. На рисунке — попытка изображения элемента четырёхмерного пространства (четырёхмерного куба) с нанесением линий ориентации граней всех кубов.

Легко заметить[30], что грани куба (с вершинами 1000, 1001, 0011, 0001, 0100, 0110, 0111, 1101) ориентированы неоднозначно, например, линия 1000–0110[31] и линия 0100–1010[32] пересекаются, как и в случае трёхмерных пространств.

Однако при попытке полного построения ориентирующих составляющих четырёхмерного пространства и его трёх- и двухмерных подпространств обнаруживается, что в плоскости (1000, 1010, 0111, 1101) ориентирующие линии (объекты) получаются направленными навстречу друг другу от вершины 1010 к вершине 0101 и от вершины 0101 к вершине 1010 [33], на рисунке эти линии выделены двойной линией (‖), поскольку отношение принадлежности — однонаправлено, то есть если $A \in B$ (и $A \neq B$), то $B \notin A$ [34], такой двунаправленной линии (двунаправленной нити с принадлежностью объектов в ту и в другую сторону) не может быть по определению отношения принадлежности (противоре-

---

[29] 4-координатный "вектор" ориентирован "векторами", направленными от имевшихся 3-координатных "векторов" к новому — 4-му.

[30] В трёхмерной модели, построенной, например, в "Автокаде", при объёмном вращении (см. рис. 6).

[31] Проекция ориентаций в плоскости, 1010–1100 и 0010–0100.

[32] Проекция ориентаций в плоскости, 0010–1000 и 0110–1100.

[33] Линии пересечения плоскостей, построенных на уже ранее построенных ориентирующих прямых, с означенной плоскостью.

[34] Не может быть, чтобы и $B \in A$ (тогда $B = A$, противоречие с начальным условием $B \neq A$).

чие), следовательно, показанный на рисунке объект не существует (как и $\varnothing$). □

Из изложенного следует, что четырёхмерное пространство — неориентируемо полностью [35].

§17. О связи с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов

Минимальный "элемент", образующий пространство размерности n, гомологичен (изоморфен) графу K_{n+1}.

По теореме о размерности имеются не более чем трёхмерные вполне упорядоченные структуры, образующий их минимальный элемент изоморфен графу K_4, граф K_4 — плоский, это значит, что фрагмент трёхмерного пространства (лежащий в пределах координатных осей — 1/8 часть трёхмерного пространства) допускает плоскую проекцию на раскрашиваемую плоскую область: координаты точки задаются относительной цветностью (1, 2, 3 цвета), величиной обратной интенсивности (яркости) задаётся удаление от начала координат — начало координат изображается точкой белого цвета максимальной яркости (при удалении от начала координат добавляется 4-й цвет — "чёрный").

Для четырёхмерных пространств (с образующим графом K_5) такая плоская проекция невозможна (таким образом, вышеозначенный результат связан с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов [47]).

Однако проекция трёхмерной области на плоскую область не сохраняет непрерывности отображения, таким образом, доступными для наглядного созерцания на плоскости остаются только двухмерные зависимости (см. теорему 6).

---

[35] Практическое приложение эта теорема имеет при истолковании (интерпретации) экономико-математических моделей в плане привязки меры стоимости к трёхразмерной материальной характеристике системы (вещной, временной, энергетический), любой 4-й фактор (например, деньги, оторванные по содержанию от упорядочивающих материальных факторов) дезориентирующ, т. е. денежная мера, практически, привязываема к 3 упомянутым факторам.

§18. О несамоподобии множества М

Для полноты картины представлений об упорядоченных структурах остаётся показать отличие множества всех множеств от самоподобных объектов.

Теорема 8 (о несамоподобии М). Множество всех множеств несамоподобно, т. е. в нём нет структурно-изоморфного ему собственного подмножества.

Доказательство. Предположим противное, т. е. в М есть M_1, $M_1 \neq M$, $M_1 \cong^{\in} M$, тогда по свойству структурного изоморфизма в M_1 найдётся M_2, $M_2 \cong^{\in} M_1$, и т. д. — бесконечный необрывающийся убывающий ряд структурно-изоморфных М множеств M_k (аналогичный рис 2, 3). Но тогда по свойству структурного изоморфизма $PO(M_{k-1})=M_k$ и ничто не запрещает строить последователи PO(…) и к М, поскольку свойства М таковы, как и у M_k, ввиду структурного изоморфизма, т. е. бесконечный ряд последователей $PO^r(M)=M_r$, но тогда в ряду самоподобных множеств M_k, …, М, …, M_r невозможно однозначно выделить объект, обладающий свойством быть множеством всех множеств, что противоречит вышедоказанному свойству единственности М. Теорема доказана. □

Таким образом, количество множеств во множестве всех множеств ещё более велико, чем в самоподобном множестве.

Глава 4. Исторические аналогии

§19. Последовательность усложнения математических понятий

В соответствии с наличием 6 уровней отражения действительности (рис. 1) в формировании математических понятий (как в истории, так и с возрастом) наблюдается 6 уровней абстракции: 1) появление понятия о числе (конкретном, как наборе предметов или загнутых пальцев); 2) абстрактное понятие о числе (как наборе единиц — Евклид) и об арифметических операциях (сложения, вычитания); 3) появление понятия о неизвестной величине и определения уравнения (Диофант); 4) появление представления о функции (Ферма, Декарт); 5) появление представлений о формальной системе (алгоритме, А. Лейвелс); 6) вероятностные, непредикативные представления.

С усложнением математических понятий изменяется и представление об упорядоченных структурах — числе и бесконечности. Это усложнение представлений об упорядоченных структурах (числе и бесконечности) соответствует структурам теории множеств с самопринадлежностью.

§20. Усложнение представлений о числе и бесконечности

Структуры, описанные в главе 3, соответствуют уже имевшимся ранее представлениям о бесконечном (о числах). Проследим это соответствие от простых (исторически более ранних структур) в упорядочении по историческим периодам усложнения научного знания:

1. Первичные единичные объекты чем-то схожи с "атомами", неделимыми объектами чувственного восприятия, описанными Демокритом (460–370 до н. э.) (см.: [25, с. 468]).

2. Простые несамопринадлежащие множества явно описываются в

математике несколько позже, Евклидом (III в. до н. э.), число мыслится как составленное из единиц[36] (без указания на их упорядоченность, как в нитях самопринадлежащих объектов), т. е. как простое, конечное, несамопринадлежащее множество. То же представление повторяется и позже (Прокл, Inst. th.): "§6. Всякое множество возникает или из объединённостей (εξ ηνωμενων), или из единичностей (εξ εναδων). Ясно ведь, что, во-первых, никакой [элемент] многого не есть [тем самым] просто само множество, и, наоборот во-вторых, множество не есть каждый из его элементов" [28, с. 460] — такие множества не едино-многие.

3. Представления о едино-многом (но не в форме множеств) имелось уже у того же Прокла (410–485) ("Единое и многое в их органическом сращении", заголовок А. Ф. Лосева) [28, с. 484]:
"(§67.) Каждая цельность или предшествует частям <единое>, или состоит из частей <многое>, или содержится в части <едино-многое>. … (§68.) Всякое целое, содержащееся в части, есть часть целого, состоящего из частей <едино-многое>."

Бесконечность, однако, в математическом (да и философском) мышлении Средневековья представлялась в упорядоченном виде, потенциальной (с актуально бесконечными последовательностями и бесконечными рядами не оперировали) либо актуальной, являвшейся пределом, не допускающим дальнейшего продолжения. Такова последовательность причин, сводимых к некоторой первопричине, упоминаемая Ибн-Синой (980-1037). Таковы же представления о бесконечности, являющейся пределом увеличения у Николая Кузанского [23; 26]: $\infty+1=\infty$.

4. На четвёртой стадии исторического развития возникает абстракция актуальной бесконечности. Так, Фонтенель (1657–1757; см. "Элементы бесконечного") употреблял операции с бесконечными вели-

[36] "1. *Единица* есть <то>, через что каждое из существующих считается единым.
2. *Число* же — множество, составленное из единиц." [12, т. 2, с.9-10] ("Начала". Кн. 7: определения.)

чинами (о чём упоминаел Маклорен (1698–1746; "Трактат о флюксиях")[37]: $\infty/n : \infty = 1/n$, и т. п., прогрессии 1, 2∞, 3∞, …∞^2, и т. п..

У Эйлера же (1707–1783) операции с числами "за бесконечностью" совершенно осмысленны и в отличие от предыдущего этапа (3) уровни бесконечного чётко отличимы [64, с.93–95]: "их <бесконечно малые> нужно непременно отличать друг от друга, если наше внимание обращено на то их соотношение, которое выражается геометрическим соотношением", "так как a/dx есть бесконечное количество A, то, очевидно, количество A/dx будет количеством, в бесконечное число раз большим, чем a/dx… Итак, <есть> бесконечно много ступеней бесконечных количеств, из которых каждая бесконечно больше предыдущей." И при описании "дифференцирования непредставимых функций" Эйлер употреблял последователи для бесконечных величин (последователей) [64, с. 512, 518 и след.]: "количества $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$ и т. д. будут составлять арифметическую прогрессию…"[38].

На 4-м уровне операции с бесконечными величинами используют представления о простых бесконечных последователях (PN-, PN^{PN}-последователях).

5. Кантор (1845–1918) мыслил бесконечные структуры аналогично недостижимым объектам, не предполагая ограниченности ряда "алефов" (письмо Дедекинду из Галле от 28 июля 1899 г.) [14, с. 367]:
"Система ת всех алефов
$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_{\omega 0}, \aleph_{\omega 0+1}, \ldots, \aleph_{\omega\, 1}, \ldots$
при их расположении по величине … образует бесконечную последовательность".

Недостижимые кардиналы, появившиеся в описании множеств немного позже (см. [7, с. 234–235; 22]), аналогичны недостижимым последователям[39] вида PO(∅).

---

[37] *Коренцова М. М.* Концепция бесконечного в "Трактате о флюксиях" Маклорена (Маклорен и Фонтенель) [5, с. 71–73].

[38] Индексы — PN(∅), P(PN(∅)),…

[39] При этом, поскольку "обобщённая континуум гипотеза [7, с. 235] влечёт, что вся-

см. след. стр. ⟶

Однако у Кантора нет ещё представления о том, что ряд всех алефов (включающий и недостижимые кардиналы) является частью множества всех множеств, это связано с тем, что Кантор исключал из рассмотрения самопринадлежащие объекты, оперируя только с несамопринадлежащими множествами.

6а. Самоподобные структуры, описывающие в теории с самопринадлежностью пространственные структуры, не имеют аналогов в предшествующих историко-математических представлениях.

6б. Бесконечные структуры в теории множеств с самопринадлежностью, заключённые внутри неизмеримого и неупорядочиваемого бесконечного множества всех множеств М, вбирают в себя описанные ранее (п. 1–6) представления о бесконечных структурах (см. текст главы 3).

§21. Самоописательность в теории множеств

Историческое усложнение представлений о бесконечных (упорядоченных) объектах совпадает с усложняющейся последовательностью структур теории множеств с самопринадлежностью. Таким образом, в теории множеств с самопринадлежностью, описывающей и более ранние, более простые представления о бесконечных упорядоченных структурах, имеется элемент самоописательности своего исторического становления — одна из составляющих теоретического критерия истинности, что также совпадает с наличием самоописательности в схеме отражения действительности в сознании (см. рис. 1 в гл. 1). Более того, возрастное изменение представлений о бесконечности аналогично прослеженному в истории. Таким образом, самоописательность относится и к возрастному становлению познания, а уже на основании его к историческому изменению представлений.

кое недостижимое кардинальное число является сильно недостижимым", она не верна, т. к. в теории с самопринадлежностью имеется бесконечный ряд (доминантных) недостижимых последователей, структурно не изоморфных один другому.

Таблица 3. **Соответствие структур множества M и исторически усложнявшихся представлений**

№ уровня	Объект теории с самопринадлежностью	Объект исторических представлений	Исторический период
1	Единичный объект	Конкретное число	1) древний
2	Несамопринадлежащее мн-во	Число как "куча" единиц[40]	2) Античность, с III в. до н. э.
3	Самопринадлежащий последователь	Едино-многие объекты[41]	3) Сред. века, со II в.
4	Бесконечные последователи, N, P(N), PN(∅) и т. д.	Абстракция актуальной бесконечности	4) Нов. время, с XV в.
5а	Недостижимые последователи PO(∅) и т. п.	Абстракция ряда "алефов", недостижимые кардиналы	5) с XIX в.
5б	Самоподобные объекты	…[42]	5) XX в.
6	Собственно мн-во всех мн-в, M		6) современность

[40] Из историко-философских сравнений — логика (отношений несамопринадлежащих классов) Аристотеля.

[41] Из философских категорий — представление о ряде последовательных причин в средневековой философии.

[42] Фрактальные объекты — отдалённый и лишь внешне похожий аналог, нестандартный анализ (А. Робинсон), в котором предполагается, что (на прямой) окрестность каждой точки подобна по устройству всей числовой прямой, отчасти схож с описанным самоподобием объектов.

Часть 2. Приложения основных результатов

Глава 5. О некоторых приложениях семантики самопринадлежности

Ниже кратко описаны приложения семантики самопринадлежности и полученных ранее результатов теории множеств с самопринадлежностью в различных областях, а именно:

Описано доказательство теоремы в теории множеств с самопринадлежностью о конечности области моделей для лямбда-исчисления; указано, что результат этой абстрактной теоремы совпадает с очевидным фактом конечности внутренних состояний электронной вычислительной машины [68].

Представлен краткий вариант доказательства теоремы о неполноте предикативной формальной системы [49]; описана модель двузначной логики с обоснованием закона исключения третьего.

Рассмотрено доказательство теоремы о стягивании циклов с самопринадлежностью в один объект (тождественности такого цикла одному объекту) и приложение её семантики в математической лингвистике — тождественность цикла непредикативных определений одному непредикативному определению.

Описано доказательство теоремы о конечной алгоритмизуемости (вычислимости) оптимального планирования (оптимальной нормы прибыли) с использованием более ранней теоремы о существовании неподвижной точки финансового оборота в условиях безынфляционности и результатов теории множеств с самопринадлежностью.

§22. Приложения к λ-теории

Введение

Лямбда-исчисление (λ-исчисление) описывает основания программирования на алгоритмических языках (см.: [4; 33]). Значимым вопросом в λ-теории является вопрос о построении моделей этой теории, причём, как отмечалось ещё в 60-е гг.[43], "в бестиповом λ-исчислении объекты служат как аргументами, так и функциями, которые применяются к этим аргументам" [4, с. 99]. Поэтому "ввиду бестипового характера этой теории было неясно, как строить модели для неё" [4, с.17], в идеале "семантика для λ-исчисления состояла <бы> из области D, такой, что её пространство функций D^D изоморфно D" [4, с. 99]. В теории несамопринадлежащих множеств такое вложение $D^D \to D$, или $\mathrm{Exp}(D) \to D$, невозможно, ввиду того что для несамопринадлежащих множеств если $D \notin D$, то $\mathrm{Exp}(D) \neq D$. Ниже описано построение модели в теории множеств с самопринадлежностью.

Доказательство теоремы о модельной области

В теории множеств с самопринадлежностью описывается ряд объектов, обладающих указанным выше для модельной области свойством: $\mathrm{Exp}(X) = X$. Это прежде всего такие объекты, как $\varnothing$ (пустое множество, ничто, $\mathrm{Exp}(\varnothing) = \varnothing$) и M (множество всех множеств, $\mathrm{Exp}(M) = M$), которые, однако, не могут являться модельной областью D, указанной выше ($\varnothing$, ничто, очевидно почему, а M "столь велико", что не обладает свойством полной упорядоченности (см.: [41], гл. 3). Из вполне упорядочиваемых объектов свойством $\mathrm{Exp}(X) = X$ ввиду транзитивности отношения принадлежности для самопринадлежащих множеств обладают натуральные (конечные числа), самопринадлежащие множества вида $1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д.

Как указано в главе 2, натуральный ряд в M выделяется как множество простых последовательных последователей к ничто (или к начальному, единичному элементу ряда):

$N = \{[x] \in M \mid ([x] \in \varnothing)$ или $([x] = P^n(\varnothing)$, где $n \in N$ и $P(V(P(x))) = x)$ [44]$\}$.

Свойства натурального ряда:

1. Натуральный ряд — неединственен.

---

[43] Скоттом в 1969 г. См.: Skott D. S. Models for the λ-calculis: Manuscript (unpublished). 1969. 53 p. (цит. по: [4, с. 99, 582]).

[44] Это условие означает, что у всякого объекта из N точно один простой последователь.

2. N — несамопринадлежаще, $N \notin N$.

3. Внутренность натурального ряда совпадает с самим натуральным рядом, $V(N) = N$, что означает невозможность обратного счёта от абстракции бесконечности объектов счётного числового ряда к конечным числам [45].

Теорема 9. (о модели лямбда-исчисления). В теории множеств с самопринадлежностью модельными областями для λ-исчисления являются только конечные натуральные числа.

Доказательство. По свойствам самопринадлежащих множеств, если $n \in N$, то $Exp(n) = n$, для $1=\{1\}$, $Exp(\{1\}) = 1$ — очевидно; для $2 = \{1, 2\}$ $Exp(2 = \{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ = (по транзитивности принадлежности для самопринадлежащих множеств $\{2\} = \{1, 2\}$) = $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}\}$ = (вычёркивание одинаковых записей) = $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$ = (слияние многого, взятого как многое в одно многое, удаление лишних скобок вида "{…}") = $\{1, 1, 2\}$ = (вычёркивание одинаковых записей) = $\{1, 2\} = 2$, и т. д. для остальных n из N.

Однако $Exp(N) \neq N$, т. к. $N \notin N$, то N как единичный объект принадлежит Exp(N), $[N] \in Exp(N)$, с другой стороны (см. выше), $[N] \notin N$, значит, $Exp(N) \neq N$.

Следовательно, для любого вполне упорядоченного объекта A из M, иного, чем конечные натуральные числа, $A \notin N$, $Exp(A) \neq A$, что означает, что модельной областью в теории множеств с самопринадлежностью для лямбда-исчисления являются только конечные натуральные числа, обладающие требуемым свойством: $Exp(n) = n$. Теорема доказана. □

Заключение

Результат теоремы о конечной вычислимости в его более пространном истолковании таков, что семантика языков программирования, задаваемая λ-исчислением, задаваема только на конечной вполне упорядоченной области (самопринадлежащих множеств, натуральных

[45] Более абстрактно — бесконечная последовательность внутренностей натурального ряда неубывающа и совпадает с самим натуральным рядом.

чисел). Доказанный результат удивительно точно совпадает с действительностью — в действительной цифровой электронной вычислительной машине множество её внутренних состояний определяется конечным (вполне упорядоченным) набором машинных слов (команд процессора и массива обрабатываемых данных) мощностью, равной $n = 2^m$, где m — количество разрядов в машинном слове[46].

§23. Приложения к логике

Предисловие

С допущением семантики непредикативных (самоссылочных) утверждений кратко описывается вполне очевидный факт того, что в предикативной формальной системе, такой, что следствия из аксиом и утверждений, выведенных из аксиом (причём в способах вывода нет ссылок на сами выводимые утверждения), не содержат утверждения о непротиворечивости всей этой формальной системы, потому что это утверждение в своём выводе ссылалось бы на само себя,

Ранее в главе 1 необходимое наличие в сознании таких утверждений было обосновано из гносеологических соображений[47] (см. также: [44]).

Простейший пример непредикативных конструкций, строгое определение понятия натурального числа как самопринадлежащего объек-

---

[46] Если чуть углубиться в философско-математическую область, то иерархия упомянутых теорий будет такова: 1) теория объектов, множеств с самопринадлежностью, допускающей бесконечные объекты сверхсчётной мощности, но замкнутые внутри множества всех множеств M; 2) теория обозначений и подстановок этих обозначений на место переменных, допускающая при некоторой неопределённости, открытости процесса обозначаемости настающих текущих событий потенциальную неопределённость ("бесконечность") вариантов обозначений; 3) собственно вычислимость (определённое λ-исчисление) на уже обозначенной и конечной, и ограниченной области объектов (конечная, исполняемая программа).

[47] Они основываются на онтологических представлениях о том, что самоосознание человека созерцает себя непосредственно и поэтому познаёт себя, и абстрактные категории, и вещественный мир — в основаниях своих и на высшем уровне абстракции непредикативно.

та приведены в работе [37], см. также главу 2 настоящей работы. Например, $1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д., т. е. $\varnothing\in\varnothing$ (по сути, $\varnothing$ — ничто, $\mathrm{Exp}\varnothing = \varnothing$), $1 \in 1$, $1 \in 2$, $2 \in 2$ и т. д. (как при счёте на пальцах, пальцы не поменять местами, в числе "двойка" они неравнозначны, хотя считаемые предметы могут быть равнозначны, например отдельные камешки,— в том разница между числами, которые являются абстрактными категориями, и вещественными предметами). Более подробно построение числовой системы со строгой формализацией уровней бесконечности описано в работе [41] и в главе 3 настоящей работы.

Итак, в семантике рассуждений вполне допустимы непредикативные самоссылочные конструкции, применение которых непротиворечиво и оправдывается практикой, что позволяет выразить математическим языком описание утверждения 1-го абзаца §23.

Предварительные рассуждения

Пусть существует *предикативная теория* T, такая, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i и выводимые утверждения B_j:

$(A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1},..., B_{jm}) \models B_{j0}$, (10)

причём при определённых правилах вывода общее свойство этих правил вывода по условию предикативности системы таково, что выводимое утверждение не содержится в том наборе утверждений, из которых оно выводится, не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в формуле (1),

$B_{j0} \notin \{A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1},..., B_{jm}\}$, (11)

и утверждения, из которых выводимо B_{j0}, невыводимы из него (т. е. по условию предикативности — отсутствие круга в выводе), неполучаемы с участием B_{j0},

$D_0 = \{A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1},..., B_{jm}\}$,

$\forall D_k \in D_0,\ B_{j0} \not\models D_k$. (12)

Говоря иначе, пусть VL — внутренность высказывания (выводимого высказывания или аксиомы) такова, что содержит все высказывания, из которых выводится данное высказывание. Для аксиом $VL(A_i) = \varnothing$, т. е. аксиомы в предикативной системе постулируются выводимыми из ничто[48], для самого $\varnothing$ — $VL(\varnothing) = \varnothing$, формально. Для высказываний аналогично $VL(B_{j0}) = D_0$. Очевидно, что внутренности некоторого выводимого высказывания образуют частично упорядоченную решётку $R(VL(B_{j0}))$ [49], тогда условие отсутствия круга в выводе записывается так:

$B_{j0} \notin R(VL(B_{j0}))$, (13)

или $\forall D_k \in R(VL(B_{j0}))$, $B_{j0} \not\models D_k$. (14)

Таким образом, условия построения предикативной системы описаны. Простейшим примером такой предикативной системы является школьный аксиоматический курс геометрии.

Описание доказательства теоремы

Пусть C — высказывание о непротиворечивости теории, т. е. в C утверждается, что все утверждения теории T таковы, что в этой теории не выводимы и их отрицания. И пусть T непротиворечива, т. е. высказывание C выполнимо на всех высказываниях этой теории[50], т. е. семантически C выводимо из множества всех высказываний теории, в том числе и из себя самого (т. к. отрицает собственное отрицание при наличии непротиворечивости):

$\{A_i, \ldots, B_j, \ldots, C\} \models C$, (15)

что противоречит условиям предикативности системы T. Следовательно, теорема о том, что *в предикативной системе недоказуема её непротиворечивость*, доказана.

---

[48] Это уже само по себе странно, т. е. абстрактный средний уровень мышления в этом случае формально оторван от высшего — созерцания в сознании, говоря онтологически. И если аксиомы случайно хоть отчасти отображают созерцательно правильные категории, то это уже хорошо и частично правильно (как в школьной геометрии).

[49] Содержит всевозможные степени внутренностей высказываний, из которых выведено B_{j0}, т. е. $VL_r(VL(B_{j0}))$ и т. д. до $\varnothing$, поскольку обратное прослеживание цепи выводов обрывается после начальных аксиом.

[50] Важным для использования семантики самоссылочных высказываний является допущение того, что это высказывание уже истинно.

Теорема 10 (Гёделя). В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость. □

Однако предположение о непредикативности системы являлось лишь начальным условием рассуждений, и в связи с доказанной теоремой допускается иная интепретация результата — *непротиворечивость теории недоказуема в предикативных системах*, т. е. доказательства непротиворечивости возможны только с допущением непредикативности (самоссылочности) в семантике рассуждений, как, например в теории множеств с самопринадлежностью.

Обсуждение результата

В доказательстве теоремы о неполноте, известном ранее (Гёдель, Клини [18; 19], Линдон [24]), которое является достаточно объёмным и где используется при построении определённого вида нумераций, при заданном виде формального алфавита системы тот факт, что Гёделев номер высказывания о непротиворечивости теории будет таков, что не будет совпадать с номерами выводимых формул (в процедуре диагонализации). Само построение таких формальных нумераций достаточно громоздко, при этом используется только семантика вещественной области мышления чисто предикативная, если говорить онтологическим языком. Иной пример использования непредикативных конструкций наблюдается в *теории множеств с самопринадлежностью* (*непредикативной*).

Вот пример теоремы, использующей непредикативную семантику (см. гл. 1):

Теорема 4. Пусть М — множество всех множеств. Тогда совокупность высказываний, описывающих существующие в М объекты, непротиворечива.

Доказательство. Если высказыванием L описан объект A, то отрицание этого высказывания описывало бы дополнение B к объекту A в M, но по теореме о недополнимости это невозможно (самопринадлежащий объект необразуем из объединения двух непересекающихся подмножеств, отличных от него самого), следовательно, высказывания об объектах из M непротиворечивы. Теорема доказана. □

Теорема о неполноте

Аналогичны рассуждения и о других ограничительных теоремах (5-го уровня развития абстрактного мышления), например при рассуждении о полноте системы.

Пусть F — высказывание о полноте системы, т. е. F утверждает, что в системе T выводимы все утверждения, в том числе и само F, но тогда F, если оно верно, семантически (самоссылочно) сказывается о себе самом:

$$\{A_i, \ldots, B_j, \ldots, F\} \models F, \qquad (16)$$

что противоречит условиям допущения чисто предикативности теории T.

Доказана следующая теорема.

Теорема 11 (о неполноте). Предикативная теория не полна. □

Дополнение о модели логики

Интересны также результаты описания вложения логики высказываний в означенную теорию множеств. Как известно [20, с. 43], базисом исчисления высказываний является набор логических операций,позволяющих построить полную систему логических функций. Одним из таких базисов является базис, состоящий из операций импликации и отрицания,— в терминах теории множеств этот базис построим следующим образом.

Таблица 4. **Сопоставление элементов теорий**

Элемент теории	Теория множеств	Исчисление высказываний
Константа "невыполнимость"	$\varnothing$	0
Константа "выполнимость"	M	1
Импликация	$\in$	$\Rightarrow$
Отрицание	$(\ldots \in \varnothing)$	$\neg$

Пусть имеются две константы $\varnothing$ (ничто) и M (множество всех множеств), тогда на этих константах посредством отношения принадлежности $\in$ выстраиваемы высказывания, аналогичные логическим, где отношение принадлежности аналогично отношению импликации, отрицание $\neg x$ — результату операции $(x \in \varnothing)$ и переменная x принимает значения $\varnothing$ или M, аналогичные логическим константам 0 и 1 (сопоставление систем см. в табл. 4).

Таблица 5. **Выполнимость**

X	y	$x \in \varnothing$	$x \in y$	$((x \in \varnothing) \in \varnothing)$
$\varnothing$	$\varnothing$	M	M	$\varnothing$
$\varnothing$	M	M	M	$\varnothing$
M	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	M
M	M	$\varnothing$	M	M

В качестве константы, обозначающей выполнимость логической операции ("выполнимость"), определим самопринадлежащий объект M (множество всех множеств)[51]. В этой двузначной логике однозначно выполняется закон исключения третьего $\neg\neg x = x$, $((x \in \varnothing) \in \varnothing) = x$ (см. табл. 5), а также иные аксиомы теории исчисления высказываний L

[51] Казалось бы, вместо константы M можно выбрать единичный объект [a] и на объектах [a] и $\varnothing$ задать двузначную логику, а в случае выбора константы вида $2 = \{[1], 2\}$, где [1] — единичный объект, получить 3-значную логику и т. п. бесконечное количество конечно-значных и бесконечно-значных логик — в зависимости от выбранного объекта-константы, но значение выполнимого логического высказывания, например $\varnothing \in [a]$, лежало бы вне области определённых логических констант [a] и $\varnothing$. Можно, конечно, пытаться ограничить универсум множеств объектами [a], $2 = \{[1], 2\}$ и т. п., пытаясь построить многозначные логики (заключая по теореме о непротиворечивости подтеории, что исчисления высказываний в таких логиках непротиворечивы), но это искусственный приём рассуждений.

[20, с. 46-47][52]. Тем самым посредством модели логики в теории множеств с самопринадлежностью доказана теорема.

Теорема 12 (о законе исключения третьего). В двузначной логике отрицание отрицания совпадает с первым отрицаемым, т. е. действует закон исключения третьего: $\neg\neg x = x$. □

Таким образом, вложение логики высказываний в теорию множеств с самопринадлежностью в достаточной мере очевидно[53].

Заключение

Таким образом, доказательства ограничительных теорем о формальных системах, при допущении семантики самопринадлежащих (самоссылочных, непредикативных) рассуждений, значительно упрощаются, что большую степень понимания их студентами[54]. К этому же рассуждению примыкает и более сильное ограничительное утверждение об алгоритмической неопределимости понятия вероятностной меры, также использующее семантику самопринадлежащих рассуждений, изложенное отдельно (имеющее приложение в теории управления). То есть использование самопринадлежащих конструкций является вполне приемлемым и позволяет получать фундаментальные математические результаты более ясным путём.

§24. Приложения в матлингвистике

Теоремы о стягивании циклов

---

[52] Причём описание логических констант в теории множеств с самопринадлежностью представляется наиболее естественным, в отличие, например, от описания посредством теории категорий [10, с. 138 и след.].

[53] Кроме того, поскольку для M (и для некоторых других самопринадлежащих множеств) выполняется условие равенства множества всех подмножеств множества самому множеству ExpM = M, то на M (и этих множествах) легко строится операция замыкания (отображения множества всех подмножеств на само множество [16]), конструирующая дедуктивную систему. Другое дело, что не все объекты из M могут быть объективно известны (к данному моменту процесса их описания).

[54] В том числе в курсе "Философии математики", прочитанном автором в Соликамском государственном педагогическом институте.

Рассмотрим цикл объектов с самопринадлежностью:

$A_1 \in A_2 \in \ldots \in A_n \in A_1$, (17)

где $A_i \in A_i$.

Тогда для объектов A_k и A_{k+1}, $k \in [1, n]$ (цикл для k: n+1=1, 1–1=n), предыдущий принадлежит последующему $A_k \in A_{k+1}$, по определению цикла (17) и по теореме о транзитивности принадлежности ([37], гл. 2) $A_{k+1} \in A_k$, последующий принадлежит предыдущему, значит, по следствию из определения равенства объектов [37] эти объекты совпадают, $A_k = A_{k+1}$, т. е. цикл тождественен единственному объекту. Доказана следующая теорема.

Теорема 13 (о стягивании простых циклов). Простой цикл (без ответвлений) самопринадлежащих объектов тождественен единственному объекту. □

Наличие ответвлений от цикла не изменяет содержания доказанного утверждения. Пусть цикл таков:

$$A_1 \in \underset{\underset{B}{\Cup}}{A_2} \in \ldots \in A_n \in A_1. \tag{18}$$

Тогда $B \in A_1$ по транзитивности принадлежности самопринаждежащих объектов A_k цикла (18), т. е. $B, A_1 \in A_2$ и $B, A_2 \in A_1$, значит, $A_1 = A_2$. Для произвольного A_k доказывается аналогично: A_1 отождествляется с A_2, n уменьшается на единицу и рассматривается отождествление следующих двух объектов и т. д. до оставшегося одного объекта, цикл стягивается к объекту вида $B \in A_{*1}$.

Если же, наоборот, объект цикла принадлежит некоторому объекту

$$A_1 \in \underset{\underset{B}{\Cap}}{A_2} \in \ldots \in A_n \in A_1, \tag{19}$$

то рассуждения аналогичны рассуждениям вышедоказанной теоремы, таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 14 (о стягивании циклов с самопринадлежностью). Цикл принадлежащих один другому объектов с самопринадлежностью (пусть даже и с ответвлениями) тождественен одному объекту. □

Приложение к определениям

Приложение семантики самопринадлежности в математической лингвистике. Пусть L — язык, допускающий непредикативные определения (близкий к естественному или даже естественный), и пусть конечное количество определений образуют цикл:
$O_1 \xrightarrow{\text{def}} O_2$ (O_1 определяет O_2), $O_k \xrightarrow{\text{def}} O_{k+1}$, $O_n \xrightarrow{\text{def}} O_1$, $k \in [1, n]$. Если все определения цикла непредикативны (самоссылочны), т. е. $O_i \xrightarrow{\text{def}} O_i$, $i \in [1, n]$[55], тогда в интерпретации самопринадлежности $O_{k+1} \in O_k$ образуется цикл с самопринадлежностью и по доказанной выше теореме определения O_i совпадают $O_i = O_j = O_{*1}$, т. е. круг непредикативных определений тождественен одному определению. Доказана теорема.

Теорема 15 (о стягивании круга определений). Круг непредикативных определений тождественен одному определению. □

§25. Приложение в матэкономике

Возможность конечной алгоритмизации (вычислимости) планирования экономики (построения оптимального плана как деятельности государства, так и составляющих его экономических субъектов) имеет, очевидно, необходимую прикладную значимость. Описание результатов решения этой задачи на основании недавних результатов о конечных моделях для лямбда-теории в семантике множеств с самопринадлежностью и составляет содержание следующего раздела.

Теорема о конечной вычислимости

Основной результат лямбда-теории (оснований теории языков программирования высокого уровня [4; 35]) составляет теорема о неподвижной точке [4, с. 140; § 6.1] и её следствие, гласящее, что если у оператора есть неподвижная точка, то она вычислима (конечно вычислима). Этот результат усилен в теореме о конечной области моделей для лямбда-исчисления в теории множеств с самопринадлежностью — из

[55] Ср. философские определения через род и ближайшее видовое отличие.

соображений построения моделей лямбда-теории, где D — совокупность λ-термов, $Exp(D) \to D$ ($Exp(D) = D$). Модельной областью для λ-теории в теории множеств с самопринадлежностью [37] являются конечные натуральные числа; по свойству этих чисел $Exp(n) = n$, где $n \in N$ (но $Exp(N) \neq N$). Подробное доказательство этой теоремы см. в §2.)

Таким образом, в интерпретации объединённый смысл вышеприведённой теоремы таков, что если имеется неподвижная точка оператора, то она вычислима посредством конечного алгоритма.

Кроме того, есть также более ранняя теорема о неподвижной точке финансового оборота (неподвижной точке оборота общественно необходимого времени в экономике) при условии безынфляционности, более подробно см. в работах [36; 39]. В другой интерпретации — теорема об оптимальной норме прибыли экономических субъектов, об оптимальной норме прибыли государственного бюджета и внутригосударственных экономических субъектов[56].

Объединяя смысл этих теорем и учитывая, что количество внутригосударственных экономических субъектов конечно (и норма прибыли стандартна), получается конечный результат:

Теорема 16 (о конечной алгоритмизуемости, вычислимости, оптимального планирования). При условиях безынфляционности задача планирования (определения неподвижной точки финансового оборота — оптимальной нормы прибыли — как государственного бюджета, так и бюджетов внутригосударственных субъектов) вычислима посредством конечного алгоритма (конечно вычислима). □

Дополнение об оптимуме управления

Приведённый общий результат имеет и узкоспециальное приложение в практике построения систем статистически оптимального управления сложными химико-технологическими процессами (см.,

[56] Позволяет прогнозировать нижнюю границу инфляции и многократно проверена по данным экономической статистики как СССР и России, так и в мировом масштабе (частично библиографию см. в [39]).

напр. [40; 45; 46]), а именно в этой предметной области теорема, получаемая аналогичным рассуждением, такова:

Теорема 17 (о конечной вычислимости параметра оптимального управления). При использовании метода пространства состояний (трёхмерного описания параметров химико-технологической системы) неподвижная точка (оптимум управления) вычислима посредством конечного алгоритма (конечно вычислима). □

Заключение

Описанная теорема как в предметной области математической экономики, так и в предметной области теории управления является фундаментальным обоснованием возможности решения указанных экономических[57] и прикладных задач.

---

[57] Теорема о конечной вычислимости оптимального плана в экономической предметной области такова, что если в качестве меры экономических ресурсов, как это неоднократно предлагали советские и российские философы [1, с. 72], в неограниченно продолжающемся будущем использовать меру электрической энергии (кВт/ч) — кстати, единственно возможный в долгосрочной перспективе выход — электрическая энергия, получаемая в единой энергосистеме посредством солнечных батарей (см. обзор в работе [38], поток электрической энергии при занятии 10% площади земной поверхности солнечными батареями таков, что на одного человека приходится мощность 100 кВт/ч за 1 час при 10^{10} человек населения — многократно больше, чем в развитых странах ныне),— в этом случае при условии стационарного состояния биосферы — совокупного нулевого производства энтропии, у оператора совокупного энергооборота (и энергооборота отдельных экономических субъектов) также имеется неподвижная точка — мера оптимума энергозатрат, направленная на самоподдержание экономики (материально-техническое обслуживание и инфраструктуру), такая, что и в этих условиях оптимальное планирование экономической деятельности конечным образом алгоритмизуемо (вычислимо).

Глава 6. Интерпретация теоремы о размерности

В этой главе описана одна интерпретация топологического определения размерности посредством приложения результатов теории множеств с самопринадлежностью (теоремы о размерности).

Описана интерпретация топологического определения размерности, связанная с теорией графов, показано соответствие между размерностью и хроматическим числом графа K_n, строимого на базисных векторах пространства, описано понятие ориентированного пространства, доказана иным способом, с привлечением теории графов, теорема об ограниченной размерности ориентированного пространства; указано на естественный способ построения ориентированных пространств в теории множеств с самопринадлежностью.

Определение размерности по Лебегу накрытиями для области и пространства таково: пространство (область) имеет размерность m, если имеет накрытие объединением m+1 выпуклых множеств.

§26. Интерпретация в терминах теории графов

Вышеприведённое определение размерности допускает такую интерпретацию. Область, общая для множеств накрытия, должна содержать минимально n+1 различных точек, принадлежащих всем n+1 минимально накрывающим множествам, где n — размерность пространства. При этом на этих n+1 точках, как на вершинах графа, соединяемых попарно рёбрами, строится граф K_{n+1}, являющийся n+1 раскрашиваемым графом.

Заметим, что в n-мерном пространстве вершины n базисных векторов и начало координат также являются вершинами графа K_{n+1}, более того, всякий фрагмент этого n-мерного пространства (в окрестности какой-либо точки, в которую переносится начало координат) устроен, в смысле структуры направлений базисных векторов, точно так же.

В связи с вышесказанным можно различать в геометрическом смысле одинаковые (и различающиеся только по обозначению) оси по раскраске графа, K_{n+1}, построенного на базисных векторах, однако такое различение не имеет геометрического смысла и является различением только по обозначению. В геометрическом же смысле оси пространства различаемы при введении дополнительных ориентирующих векторов, соединяющих попарно вершины базисных векторов, при этом теоретически возможно 2^n различных ориентаций n-мерного пространства.

§27. Ориентированные пространства

Как уже сказано, в ориентированном пространстве задаются дополнительные, соединяющие попарно вершины базисных векторов, ориентирующие направления (см. рис. 7 для двухмерного случая).

Ориентация задаваема также и посредством определяющих соотношений (с привлечением теоретико-групповых методов). Для указанного двухмерного случая рассмотрим группу по сложению, образованную единичными базисными векторами a и b.

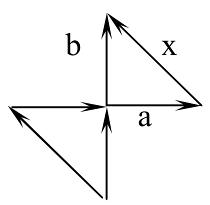

Рис. 7. Структура порядка плоскости

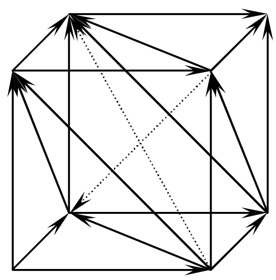

Рис. 8. Структура порядка 3-мерного пространства.

Эта группа коммутативна (знак операции сложения в записи для простоты опускаем), ab=ba (определяющее соотношение). Сами базисные вектора друг от друга ничем, кроме обозначения, неотличимы. Если же ввести ориентацию, то добавится ещё одно определяющее соотношение b=ax, где x соответствует ориентирующему плоскость вектору.

Аналогично для трёхмерного пространства (см. рис. 8, определяющие соотношения пропускаем). В трёхмерном случае наблюдается одно отличие от двумерия, если двумерие было абсолютно однозначно ориентировано, каждый фрагмент плоскости ориентирован одинаково, то в трёхмерии имеется плоскость, рассекающая куб по диагонали, соединяющей первые два базисные вектора и параллельная 3-й оси, такая, что она (плоскость) ориентирована неоднозначно,— эта неоднозначность ориентации каких-либо противоречий в определяющих соотношениях не влечёт. Но естественно задаться вопросом: а не накладывает ли ориентация ограничений на размерность пространства, т. е. не возникает ли в пространствах большей размерности каких-либо иных неоднозначностей ориентации, влекущих противоречия?

§28. Теорема об ограниченности размерности

Рассмотрим четырёхмерный случай (см. рис. 9). Для упрощения представления вершины куба обозначены в двоичной форме. Ей соответствует буквенное обозначение базисных векторов 1111=dcba. Определяющие соотношения таковы:

ab=ba, bc=cb, cd=dc, da=ad — задают базисные отношения, далее ориентирующие соотношения, b=ax (плоскость), c=by=az (куб), d=ap=qb=rc (четырёхмерный куб). Легко заметить, что плоскость P_1, соединяющая вершины (1000, 0100, 0101, 0110), и плоскость P_2 (0100, 1000, 1001, 0101), как и для трёхмерного пространства, неоднозначно ориентированы, поэтому вектор, соединяющий точки A и B (1010, 0101), является противоречиво ориентированным, что показывает, что ориентированного четырёхмерия не существует.

Рассмотрим то же в определяющих соотношениях. В плоскости P_1 диагональ, соединяющая вершины 1010 и 0100, равна элементу $bdPr_{P1}(y)$, где $Pr_{P1}(y)$ — проекция на плоскость P_1 (по направлению d) направления, задаваемого элементом (вектором) y. В плоскости P_2 диагональ (1000, 0101) — $acPr_{P2}(p)$, где $Pr_{P2}(p)$ — проекция на плоскость P_2 (по направлению c) направления, задаваемого элементом (вектором) p. Следовательно, при проекции этих двух направлений на отрезок AB получаем соотношение $abdPr_{P1}(y)=bacPr_{P2}(p)$, ввиду коммутативности выражение слева сокращается, значит, $dPr_{P1}(y)=cPr_{P2}(p)$, т. к. d=rc, то $rcPr_{P1}(y)=cPr_{P2}(p)$, по коммутативности $rPr_{P1}(y)=Pr_{P2}(p)$, что не имеет места,— поскольку получено противоречие, то четырёхмерное ориентированное пространство невозможно. Доказана следующая теорема.

Теорема 18 (об ограниченной размерности). Ориентированное пространство не более чем трёхмерно. □

Это доказательство носит характер отвлечённый от природы ориентируемых объектов (от их самопринадлежащих структур) и поэтому

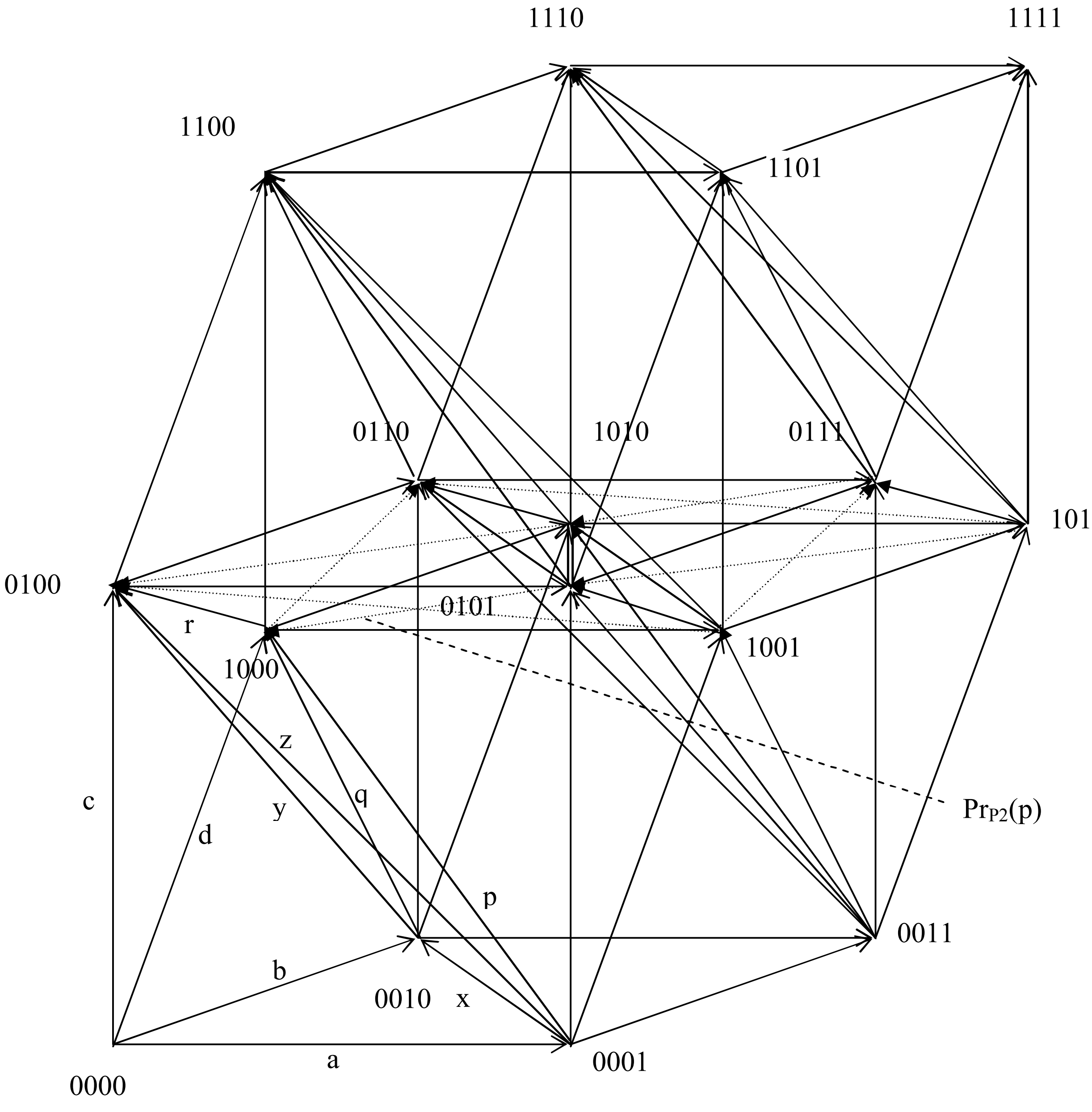

Рис. 9. Четырёхмерие фиктивное

действенно и для классического определения пространства (без привлечения семантики самопринадлежности).

В теории множеств с самопринадлежностью эта теорема доказывается аналогично: ориентация пространства задаётся посредством отношения принадлежности при выстраивании дополнительной ориентирующей структуры множеств, кроме как определяющей координатные направления (рисунки совершенно идентичны).

Таким образом, максимальный ориентирующий граф в ориентированном пространстве — это граф K_4 — максимальный плоский из графов вида K_n. Этим доказанная теорема связана с теоремой о 4-раскрашиваемости плоских графов [11, с. 253-254; 47].

Заключение

При введении понятия ориентированного пространства показано, что ориентированность пространства накладывает ограничения на его размерность — ориентированное пространство не более чем 3-мерно. Кроме того, изложенный материал иллюстрирует тесную связь и геометрических понятий (понятий "непрерывной" математики) и некоторый понятий теории графов и теории множеств ("дискретной" математики) в связи с понятием размерности.

Глава 7. Обход парадоксов

§29. Разрешение парадоксов принадлежности

Отсутствие в теории с самопринадлежностью парадокса Рассела показано ранее (см. гл. 2, §9).

Кроме парадокса Рассела в теории множеств без самопринадлежности известны сходные парадоксы [69], разрешимые аналогичным образом.

Парадокс класса всех фундированных классов (парадокс Мириманова): класс B называется фундированным (нефундированным), если есть (нет) такая последовательность классов. Парадокс заключается в том, что допущение фундированности класса всех классов либо допущение его нефундированности приводят к противоречию, аналогичному противоречию в парадоксе Рассела.

Класс всех фундированных классов при интерпретации этого его свойства в теории множеств с самопринадлежностью совпадает с объектом A (множеством Рассела) в разрешении парадокса Рассела. Класс всех нефундированных классов при той же интерпретации — это множество, содержащее все самопринадлежащие множества (а значит, и само M), совпадающее с M (по свойству транзитивности принадлежности для объектов, принадлежащих самопринадлежащим множествам). Таким образом, в теории множеств с самопринадлежностью описанный выше парадокс не то что бы не имеет места, но разрешён конструктивным образом.

Парадокс всех классов C без круга [69] является расширением парадокса Расселла, попытка построить в теории множеств без самопринадлежности класс C всех классов без круга, т. е. не содержащих кругов вида:

$$B \in B_{S_i} \in \ldots \in B_2 \in B_1 = B, \qquad (20)$$

при некоторых s_i, приводит к противоречию. То же самое при построении класса всех классов без n-членного круга ($s_i = n$).

По доказанным ранее теоремам о стягивании циклов цикл объектов (20) вышеозначенного парадокса тождественен единственному самопринадлежащему объекту. По теореме о недополнимости непустого объекта в М дополнение к множеству всех циклов (некоторого вида) — непостроимо, т. е. этот парадокс в теории множеств с самопринадлежностью отсутствует.

Таким образом, в непротиворечивой теории множеств с самопринадлежностью устранены конструктивным образом (а не исключением из рассмотрения) парадоксы круга принадлежности.

§30. Отсутствие парадокса Кантора

Парадокс Кантора — парадокс теории множеств, использующей только несамопринадлежащие множества, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств в этой теории ведёт к противоречиям.

Теорема Кантора [32], являющаяся отправной точкой рассуждений этого парадокса, о том, что мощность множества всех подмножеств множества больше мощности множества, $|Exp(A)| > |A|$, имеет место только для несамопринадлежащих множеств, поэтому "наибольшего" несамопринадлежащего множества не существует.

Для некоторых самопринадлежащих множеств имеет место $|Exp(B)| = |B|$, т. к. $Exp(B) = B$ (где $B \in B$; см. выше §22). Поэтому заключение теоремы Кантора в теории множеств с самопринадлежностью не создаёт парадокса. Действительно, $Exp(M) = M$ (где M — множество всех множеств) и бóльших множеств операцией взятия множества подмножеств не построить.

§31. Отсутствие парадокса Бурали-Форти

В теории множеств без самопринадлежности парадокс Бурали-Форти демонстрирует, что предположение о существовании множества всех порядковых чисел ведёт к противоречиям [32].

Утверждение о том, что объединение порядковых чисел — порядковое число, являющееся основой этого парадокса, имеет место только в теории, которая утверждает, что множество подмножеств пустого множества не пусто, что на самом деле, в теории с самопринадлежностью, не имеет места (см. §6) $\mathrm{Exp}(\varnothing) = \varnothing$, где $\varnothing \in \varnothing$. К тому же в теории множеств с самопринадлежностью натуральный ряд чисел не единственен (имеется больше двух структурно-изоморфных натуральных рядов, объединение которых не является порядковым множеством), что не даёт оснований для построения этого парадокса.

Наибольшим множеством, содержащим в себе все порядковые числа (упорядоченные нити последователей), является множество всех множеств, М, которое не является упорядоченной (самоподобной) нитью объектов, т. е. числом (см. §18). Таким образом, в теории с самопринадлежностью парадокс Бурали-Форти не имеет места.

Действительно, легко заметить, что теория множеств с самопринадлежностью свободна от парадоксов теории множеств Кантора, использовавшей только несамопринадлежащие множества.

Глава 8. Около континуум-гипотезы

В связи с доказанной ранее некорректностью диагонального метода (Зенкин) переобоснованы посредством семантики самопринадлежности теоремы Гёделя, а также утверждения о несчётности количества точек прямой; указано на возможность лишь счётного количества обозначений, построен пересчёт обозначений n-ичных разложений чисел на отрезке [0, 1).

В 1997 г. А. А. Зенкин опубликовал [13] результаты, подтверждающие некорректность диагонального метода Кантора. В связи с этим возникает потребность анализа и переобоснования базирующихся на этом диагональном методе утверждений, что и сделано далее с использованием семантики самопринадлёжности, введённой русским математиком Д. Миримановым ещё в 1917 г. [32].

§32. Краткое доказательство теорем Гёделя

Подробно основания структур с самопринадлежностью и сами эти структуры описаны отдельно [41; 37]; см. также главы 2, 3. Для понимания этого параграфа достаточно интуитивного представления о несамопринадлежащих ($X \notin X$) и самопринадлежащих ($Y \in Y$) объектах.

Теоремы Гёделя доказываются достаточно кратко. Пусть имеется *предикативная* теория Т, такая, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i, и выводимые утверждения B_j,

$(A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1}, \ldots, B_{jm}) \models B_{j0}$, (21)

причём выводимое утверждение не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в левой части формулы (1), которую безотносительно её содержания обозначим через L, $\{A_{i1}, \ldots, A_{in}, B_{j1}, \ldots, B_{jm}\} = L$, $B_{j0} \notin L$.

Теорема 10. В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость.

Теорема 11 (о неполноте предикативной системы). Предикативная теория — неполна.

Схемы доказательств этих теорем одинаковы: непредикативные утверждения о непротиворечивости или полноте предикативной теории T не являются в самой этой теории выводимыми, виду того, что эти утверждения в их выводе ссылаются на себя самих.

Пусть C — высказывание о непротиворечивости теории, т. е. в C утверждается, что все утверждения теории T таковы, что в ней (теории T) не выводимы и их отрицания. И пусть T непротиворечива, т. е. высказывание C выполнимо на всех высказываниях этой теории (важным для использования семантики самоссылочных высказываний является допущение того, что это высказывание уже истинно), т. е. семантически C выводимо из множества всех высказываний теории, в том числе и из себя самого (раз отрицает собственное отрицание при наличии непротиворечивости),

$\{A_i, \ldots, B_j, \ldots, C\} \models C,$ (22)

$C \in L$, что противоречит условиям предикативности системы T ($C \notin L$). Следовательно, теорема 1 о том, что *в предикативной теории недоказуема её непротиворечивость,* доказана. □

Пусть F — высказывание о полноте системы, т. е. F утверждает, что в системе T выводимы все утверждения, в том числе и само F, но тогда F, если оно верно, семантически (самоссылочно) выводится и из себя самого

$\{A_i, \ldots, B_j, \ldots, F\} \models F,$ (23)

$F \in L$, что противоречит условиям допущения чисто предикативности теории T ($F \notin L$). Теорема доказана. □

Однако предположение о непредикативности теории T являлось лишь начальным условием рассуждений, в связи с доказанными теоремами допускается и иная интепретация результата — *непротиворечивость теории недоказуема в предикативных системах*, т. е. доказательства непротиворечивости возможны только с допущением непредикативности (самоссылочности) в семантике рассуждений, как, например, в теории множеств с самопринадлежностью.

Теорема 19. Непротиворечивость и полнота теории недоказуемы средствами самой этой предикативной теории. □

Таким образом, без применения диагонального метода передоказаны теоремы Гёделя. Поскольку в этих теоремах (1–3) не упоминался совершенно тип логики, посредством которого осуществляется вывод в теории T [58], то эти теоремы действенны в отношении множества предикативных теорий с произвольными правилами вывода (в т. ч. на использующие многозначную, модальную и т. п. логики).

Следующие утверждения связаны с отношением счётности и несчётности множеств.

§33. Несчётность количества точек на прямой

При описании упорядоченных структур в теории множеств с самопринадлежностью было указано, что объекты, определяющие структуру прямой, самоподобны, т. е. обладают свойством структурной изоморфности объекта его собственному подобъекту.

Определение 5. Внутренность объекта A содержит объекты, принадлежащие объекту A, за исключением самого объекта A;

$V(A)=\{[x]\in M \mid ([x]\in\varnothing)$ или $([x]\in A$ и $A\notin V(A))\}$.

Определение 6. Два объекта структурно-изоморфны, если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^{\in} B$, если $A \cong B$ (изоморфизм $\varphi: A\to B$) и если для любых $a_1, a_2 \in A$, $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$, $b_1,b_2\in B$, имеет место $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Определение 7. Объект A собственно внутренний по отношению к объекту B, если он принадлежит B, но не принадлежит ряду внутренностей объекта B.

Определение 8. Объект самоподобен, если структурно-изоморфен подобъекту, собственно внутреннему по отношению к этому же объекту.

Для самоподобных объектов C и D одной прямой, $D \subset C$, или $C \subset D$ или $D = C$, причём в любом случает имеет место структурный изоморфизм $D \cong^{\in} C$. Для объектов натурального ряда (натуральных чи-

[58] Вообще эта логика может быть не только двузначной.

сел) свойство структурной изоморфности, очевидно, не выполняется,— натуральные числа одно другому структурно неизоморфны. Следовательно, самоподобные объекты — несчётны. Доказана теорема.

Теорема 20. Количество точек на прямой — несчётно. □

§34. Счётность количества обозначений

Очевидно также, что, располагая конечным алфавитом, можно иметь не более чем счётное количество обозначений. Множество подмножеств конечного множества конечно. Счётное повторение этой операции для начального конечного множества даёт счётное множество.

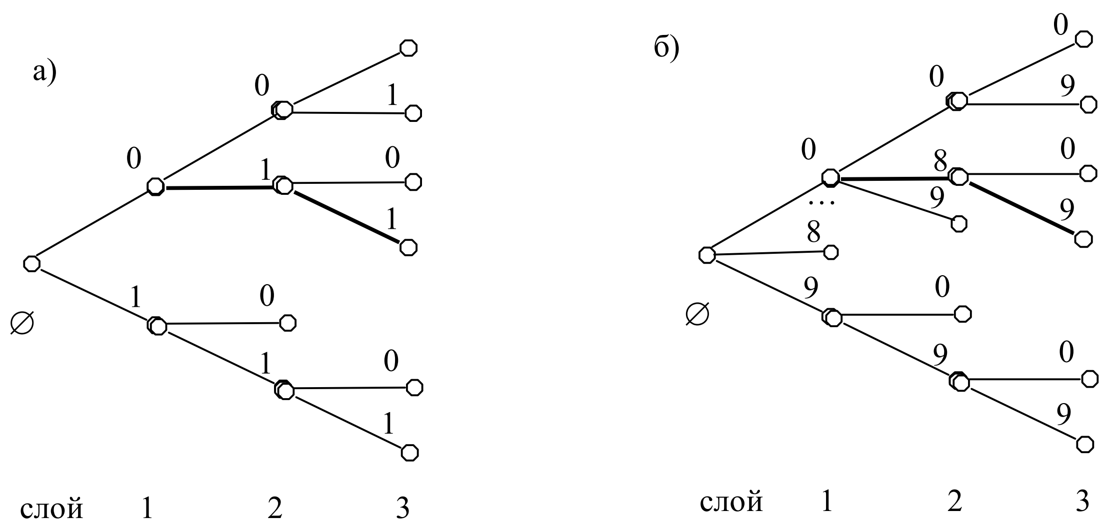

Рис. 10. Фрагменты 2-дерева (а) и 10-дерева (б)

Даже в случае, если имеется счётный алфавит, но сами обозначения содержат конечное число символов, итоговое количество обозначений счётно (ввиду счётности множества конечных подмножеств счётного множества).

Таким образом, следует различать точки на прямой (как показано выше, их несчётное количество) и их десятичные обозначения, которых по вышесказанным соображениям счётное количество. Остаётся построить пересчёт этих обозначений.

§35. Счётность простых деревьев

Представления чисел на отрезке [0, 1) в n-ичной системе счисления (с m разрядами) изоморфны n-дереву (глубины m), что очевидно. На рис. 10,а выделенная линия соответствует числу 0,011…, на рис. 10,б — 0,089…. (номер слоя соответствует порядковому номеру цифры за запятой).

Пересчёт n-дерева организуется следующим образом: считается 1-й слой, затем — 2-й, далее — 3-й и т. д. В m-дереве для всякой вершины r-го слоя её номер не более чем n^r. Для всех n и r из N, $n^r < N$, из чего следует счётность количества вершин дерева, а значит, и счётность количества n-ичных обозначений чисел на отрезке [0, 1).

Таким образом, несчётность множества точек на прямой и счётность количества n-ичных обозначений чисел на отрезке [0, 1) согласуются друг с другом. Доказана теорема

Теорема 21. Число десятичных обозначений чисел — счётно. □

Следствие. Число n-ичных обозначений чисел, где n конечно,— счётно. □

Как показано, классические утверждения (теоремы Гёделя, утверждения о несчётности числа точек на прямой) доказуемы и без диагональных рассуждений, в семантике самопринадлежности. Счётность количества обозначений — счётность количества n-ичных обозначений чисел на отрезке [0, 1) не противоречит тому, что объектов мысли (точек на прямой) несчётное число, не всё из существующего (мыслимого) можно обозначить.

§36. О мощности самоподобных множеств

Рассмотрим самоподобное множество A, задающее порядок на прямой, обозначим количество объектов в объекте A_i (его мощность) через α, $|A_i|=\alpha$, где A_i — некоторый недостижимый последователь, содержащийся в A. По изложенным выше соображениям (конечный алфавит обозначений) таких недостижимых последователей обозначениями можно выделить не более чем счётное (строго говоря конечное число). Интересен следующий вопрос: сколько объектов находятся между A_i и A_{i+1}?

С одной стороны, недостижимые последователи структурно-изморфны, то их мощности равны — $|A_i|=|A_{i+1}|=|A_j|=\alpha$. С другой стороны, если между A_i и A_{i+1} r объектов и $r<\alpha$, то, т. к. выделено счётное число A_i, имеем общее число объектов во всей бесконечной цепочке — $r\cdot|\mathbf{N}|<\alpha$, что противоречит начальному предположению о том, что $|A_j|=\alpha$. Значит, теорема доказана.

Теорема 22 (о количестве точек на прямой между двумя разными точками). Количество объектов в самоподобном объекте и между любыми его подъобъектами, соответствующих различным недостижимым последователям, равно одной величине — мощности этого множества. □

Записывая формально, имеем $\alpha+\alpha=\alpha$, сложение некоммутативно (не допускает обращения в вычитание, т. к. убывающие цепи внутренностей не обрываются). То есть α есть мощность упорядоченного (в простейшем случае на прямой) континуума.

Следующий вопрос, требующий разрешения,— о мощности множества всех множеств.

§37. Дополнение: о мощности множества M

По доказанной ранее теореме 8 множество всех множеств — несамоподобно, поэтому из предыдущей теоремы очевидно, что мощность множества M больше чем мощность самоподобного множества, $|M|=\mu>\alpha=|A|$, где A — самоподобно. (Иначе бы существовал изоморфизм M на A или на подмножество A, что противоречит тому, что в M имеется кроме A бесконечное количество самоподобных объектов.) Доказана теорема.

Теорема 23 (о мощности M) . Мощность множества M больше, чем мощность самоподобного объекта. □

Таким образом, мощность множества М является максимальной, однако М — не упорядочено отношением принадлежности.

Вопрос о том, имеются ли определённые мощности, промежуточные между мощностью самоподобного множества и мощностью множества всех множеств, является неразрешимым ввиду невозможности структурирования объектов, промежуточных между этими множествами в виде некоторых последователей.

Глава 9. Теорема о неподвижной точке

Описан аналог теоремы Какутани о неподвижной точке [15]. В теории множеств с самопринадлежностью эта теорема в интерпретации позволяет формализовать принцип самоприменимости (неотчуждаемости) экономической деятельности, созерцательно качественно описанный ранее [48].

О самоприменимости (конструктивных целей) экономической деятельности писали ранее исходя из тех соображений, что несамоприменимая (отчуждённая) деятельность большей частью деструктивна (как то: производители табака сами не курят и детям своим не позволяют, разве что пересыпают им старые вещи от моли…); ниже описана некоторая простая формализация этого принципа, достаточно хорошо совпадающая с действительностью.

§38. Формулировка теоремы

Предварительные сведения. Рассматривается теория множеств с самопринадлежностью, непротиворечивая, полная, но не аксиоматизируемая.

Рассмотрим отображение

$$f : X \to \mathrm{Exp}(X), \qquad (24)$$

где Exp(X) — множество всех подмножеств множества X.

Неподвижная точка x_0 отображения f понимается в обычном смысле: $f(x_0) = x_0$ [59].

---

[59] Строгость неподвижности может быть ослаблена, x_1 *слабо-неподвижная точка* отображения f если x_1 структурно-изоморфно подмножеству из $f(x_1)$ (определение структурного изоморфизма см. выше), экономические интерпретации в этом случае далее по тексту аналогичны, в (2) равенство B = Exp(B) заменяется на структурный изоморфизм, т. е. неподвижная точка x_1 такова, что $x_1 \in x_1$ и как один и тот же объект $x_1 \in\subseteq f(x_1)$, x_1 является частью его образа и одновременно, как тот же объект, ему принадлежит (что выполняется только для самопринадлежащих множеств $C \in C$, $C \in\subseteq \mathrm{Exp}(C)$).

см. след. стр. ⟶

Теорема 24 (о неподвижных точках). Неподвижными точками многозначного отображения множества всех множеств в множество всех его подмножеств, $g : M \to \mathrm{Exp}(M)$, являются:

а) единичные объекты, $[x] = g([x]) = x$ ($\mathrm{Exp}([x]) = [x]$);

б) самопринадлежащие множества, $A \in A$, $A = g(A)$ [60];

в) в том числе само множество M (т. к. $M \in M$ и $\mathrm{Exp}(M) = M$);

г) пустое множество, $\varnothing = g(\varnothing) = \varnothing$ ($\mathrm{Exp}(\varnothing) = \varnothing$),

обобщая а)…г), неподвижные точки — все самопринадлежащие объекты со свойством $X = \mathrm{Exp}(X)$.

Доказательство. Очевидно, следует из свойств множеств [61]. □

Эта теорема даёт абстрактное математическое выражение созерцательно усматриваемому прежде неё принципу самоприменимости целей экономической деятельности (в широком смысле — неотчуждаемости), который кратко описывается так: конструктивная (сохраняющая воспроизводство системы ценностей) деятельность и самопременима (несамоприменимость связана с деструкцией…).

§39. Интерпретация теоремы

Рассмотрим (созерцательно) экономическую систему, в которой производится некоторый набор товаров (в общем случае и услуг), в определённой системе управления (законов и т. п., которые в данном случае вне внимания, рассматривается собственно экономическая область), тогда циклы производства и обмена описываются общей схемой (по-

---

Определение. Два объекта структурно-изоморфны если они изоморфны и совпадают по структуре, т. е. $A \cong^{\in} B$ если $A \cong B$ и если для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $(a_1 \in a_2) \Leftrightarrow (b_1 \in b_2)$.

Пример. Объекты $A = \{[a], A\}$ и $2 = \{1, 2\}$ — структурно-изоморфны, объекты A и $C = \{[c_1], [c_2]\}$ — изоморфны, но не структурно ($A \cong^{\notin} C$), $A \not\cong [a]$.

60 В общем случае может быть и $A \neq \mathrm{Exp}(A)$, например, $C = \{a, b, C\}$, $[\{a, b\}] \notin C$, $[\{a, b\}] \in \mathrm{Exp}(C)$.

61 Эта теорема является аналогом теоремы Какутани о неподвижной точке (см.: [15, с. 630]), в теории множеств с самопринадлежностью.

скольку любой набор товаров (и услуг) есть некоторый товар (услуга), то весь набор товаров и услуг B таков, что B = Exp(B)):

$$B \xrightarrow{f_{t_1}} B = Exp(B) \xrightarrow{f_{t_2}} B = Exp(B) \xrightarrow{f_{t_3}} \text{и т. д. ,} \qquad (25)$$

в общем случае в стационарном состоянии $f_{t_i} = f_{t_j}$, $\forall i, j \in I$ (рекомбинация товаров и услуг в процессе производства).

Тогда неподвижные точки этого отображения суть экономические субъекты:

а) отдельные товары (и услуги), (— единичные объекты),

б) некие комплексы товаров (и услуг), производимые предприятиями и аналогичными по масштабу экономическими субъектами, (—самопринадлежащие объекты промежуточные между единичными и самим A, неединичные и неравные A)[62];

в) вся государственная экономика в целом (— A);

г) пребывание в созерцательном покое, вне обмена товарами (и услугами) (— ∅) [63].

Самопринадлежность истолковываема как самоприменимость по отношению к работникам (семьям трудящихся) этих товаров (и услуг), которые они производят.

То есть несамопринадлежащие объекты (несамоприменимые) не являются неподвижными точками, т. е. не являются подлинными экономическими единицами, о чём в качественном смысле много было сказано ранее.

Более того, такая формально-математическая троечастность неподвижных точек совпадает с действительной структурой экономики:

а) домашние хозяйства, производящие и потребляющие внутри себя единичные объекты потребления (как то: кашу на завтрак, выстиранную пелёнку или заплатку);

[62] Непустота этих объектов в экономическом смысле очевидна, в математическом следует из существования множеств, промежуточных между единичными объектами и M и отличных от натурального ряда, обладающих требуемым теоремой свойством.

[63] Примечательно, что этот частный случай вписывается в этой теории в общую схему.

б) промышленные предприятия и аналогичные по масштабу экономические субъекты;

в) государство в целом, о чём в связи со структурированием бюджетов трёх этих видов экономических субъектов писалось ранее [64].

Вне семантики самопринадлежности рекомбинация товаров и услуг, отображение (25), не может быть описана по теореме Кантора о мощности множества всех подмножеств несамопринадлежащего множества, которая в этом случае превышает мощность самого несамопринадлежащего множества.

Заключение

Таким образом, описанный аналог теоремы Какутани о неподвижной точке и его интерпретация дают формальное выражение основополагающему созерцательному принципу самоприменимости для выделения подлинных (конструктивно действующих) экономических субъектов. Хотя выяснить конкретную структуру самопринадлежащих множеств, являющихся неподвижными точками, соответствующими определённым комплексам товаров, вряд ли возможно (имеет небольшой прикладной смысл), более значимо и имеет дальнейшее практическое приложение именно наличие формального подтверждения принципа самоприменимости. К тому же экономические субъекты гораздо сложнее теории множеств, содержат самого человека (субъекта), поэтому обладают свойством открытости, в отличие от множеств, субъекта не содержащих, замкнутых в M. Поэтому применение формальных методов в описании систем с субъектом весьма ограниченно (кстати, даже если множества, являющиеся неподвижными точками, были описаны, то было бы методологически некорректным заключать от их структуры к структуре экономических субъектов, содержащих человека).

---

[64] Описание оборота общественно необходимого времени и нормирования доли (свободно распределяемой) прибыли (эквивалента меры стоимости) в этих экономических субъектах дано посредством основного логистического уравнения $x = 1 - x^x$ [48; 52; 53], выводимого из положений теории информации.

Дополнение

Описанная интерпретация теоремы о неподвижной точке является ярчайшим примером ограничения применимости математических методов к описанию систем, содержащих неотъемлемо и самого человека. Так, на 4-м уровне сложности математических понятий (функционально-интегрально-дифференциальных представлениях) невыразима свобода воли человека, неопределимая некоторой функцией. На 5-м уровне сложности (алгоритмические представления) математические понятия не отражают возрастной изменчивости представлений субъекта (комплексов знаний-умений-навыков). На 6-м же уровне даже непредикативные конструкции не в состоянии полностью соответствовать реальным процессам обмена в экономике, поскольку не отражают наличия субъекта как носителя определённой системы ценностей, которому подчинён этот обмен. Таким образом, математические понятия и структуры применимы лишь для упорядочения внешних по отношению к сознанию составляющих бытия — материальных потребностей, затрат времени и т. п.

Так что математический аппарат, пригодный для описания моделей и упорядочения процессов неживой природы в технике и технологиях или для упорядочения информационных процессов в электронных информационных системах, весьма ограниченно (и то более лишь для измерения параметров системы) применим для описания системы, включающей как неотъемлемую часть и самого человека с его сознательной и свободной деятельностью.

Глава 10. Внематематические приложения основных результатов

Выше были рассмотрены приложения основных результатов теории множеств с самопринадлежностью в собственно математической или экономико-математической области. Кроме этих приложений имеются и другие, относящиеся к областям иным, нежели собственно математическая теория.

§40. Приложение теоремы о размерности в теории управления

При интерпретации теоремы о размерности рассмотрены особенности управления качеством физико-химического технологического процесса. Описан общий подход к управлению качеством химико-технологических процессов путём представления их параметров в трёхмерном пространстве состояний.

Установлено, что при наличии одного главного параметра качества процесса и одного главного параметра управления пространство состояний химико-технологического процесса трёхмерно. Это условие является как необходимым, так и достаточным для преставления состояния химико-технологического процесса.

Пространство состояний (трёхмерное по вышедоказанным теоремам) соответствует трёхмерности параметров процесса: 1) мера качества процесса; 2) параметр управления; 3) экономический параметр. (Пример полной оптимизационной диаграммы в пространстве состояний, см. на рис. 11.)

Решение задачи управления при фундаментальной обоснованности трёхмерности пространства состояний системы: 1) параметр качества продукта (подпространство X); 2) параметр управления (подпространство Y); 3) экономический параметр (подпространство Z) — сводится при приложении результатов теории измеримости [63] $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{g} Z$, отображение g измеримо если измеримо f, к построению оптимизационной статистической диаграммы в трёхмерном пространстве состояний (см. рис. 11, на примере процесса отгонки), вычислению

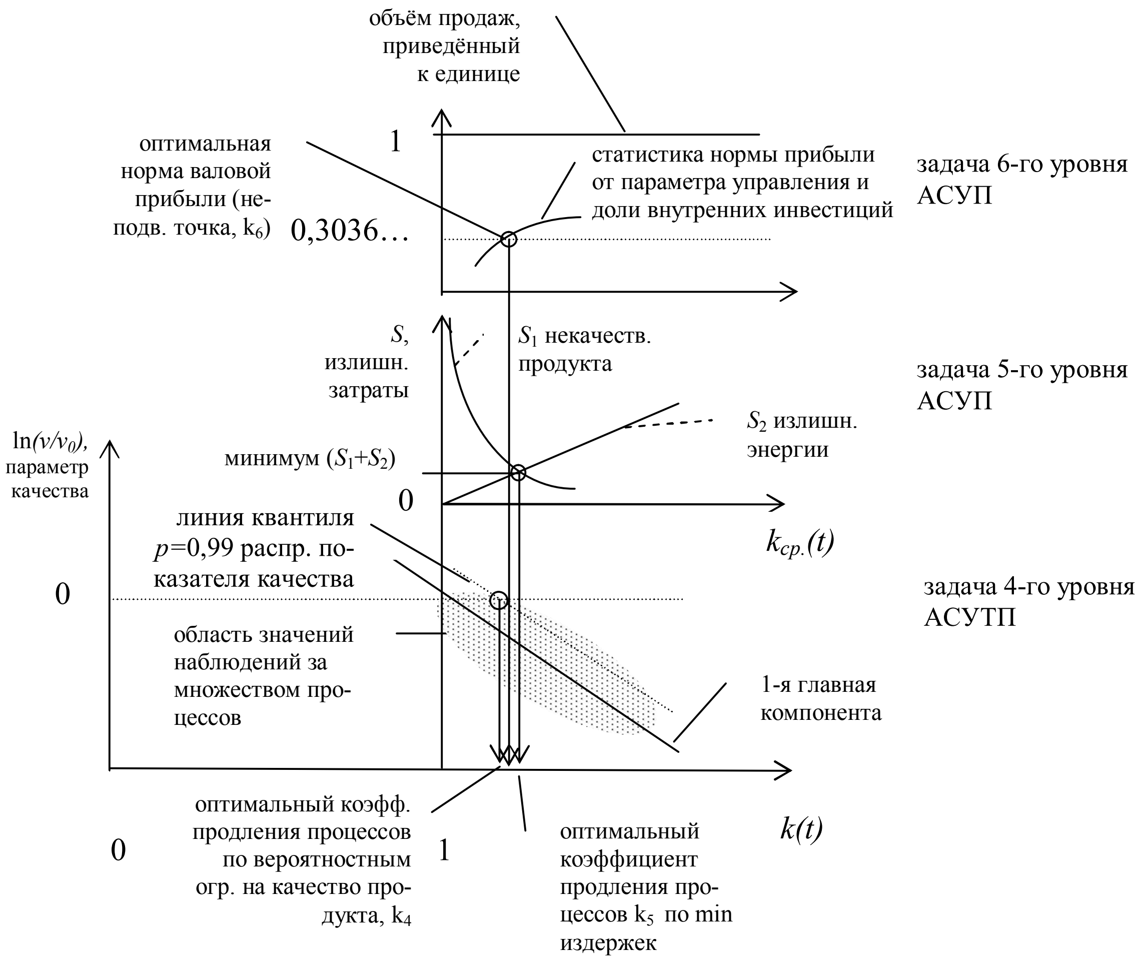

Рис. 11. Оптимизационная статистическая диаграмма управления

норм подпространств X, Y, Z,— $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$, перенормировке наблюдений соответственно вычисленных норм, а затем определению по статистической обработке данных оптимума — неподвижной точки оператора управления.

Отображение f — это отображение подпространства параметра качества X в подпространство параметра управления Y, отображение g — это отображение отображения f в подпространство экономического параметра. Оптимум управления находится как управление при получении продукта, соответствующего норме качества с заданной вероятностью при минимальных издержках. В этом заключается основное содержание метода пространства состояний управления качеством химико-технологических процессов.

Метод пространства состояний управления качеством химико-технологических процессов является устойчивым вследствие свойств устойчивости применяемых статистических методов и применим к процессам, допускающим выделение одного определяющего параметра качества и одного определяющего параметра управления.

Результаты приложения теоремы о размерности к построению информационных систем управления технологическими процессами описаны в [40; 45; 50; 51; 54–58; 60; 61; 65–67].

Вертикальная 6-уровневая структура информационных систем управления [43; 59] связана с гносеологическими основаниями, указанными в главе 1.

§41. Экономические приложения

Некоторые экономические приложения (теорема о неподвижных точках) описаны в предыдущих параграфах. Теорема 7 об ограничении размерности имеет также и экономическую интерпретацию, позволяющую описать трёхмерие системы потребностей и соответственно трёхмерную структуру бюджетов экономических субъектов (государства, предприятий, домашних хозяйств). Подробно это описано отдельно [52], здесь же указывается основная идея приложения этой теоремы.

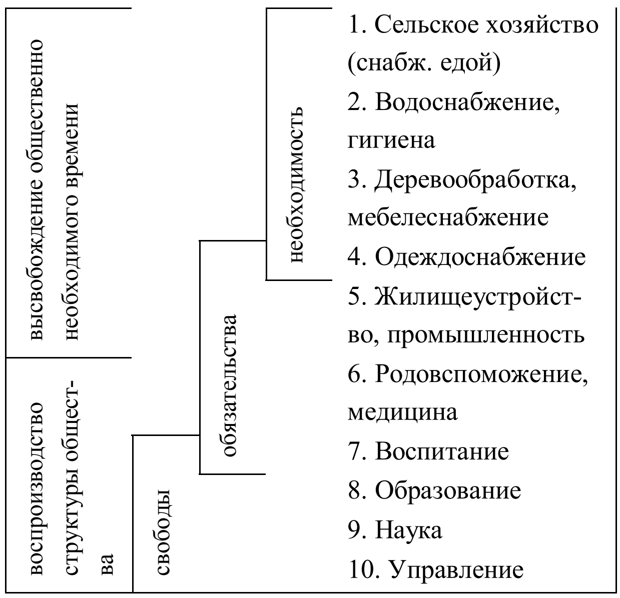

Рис. 12. Структура ценностей (отраслей хозяйства)

Поскольку сферы потребностей (см. рис 12) — i) необходимость, ii) обязательства, iii) свободы — качественно различны и несводимы друг к другу, то одномерная характеристика не может являться индикатором качества их удовлетворения, требуются учёт пропорциональности потребления и соответствия нижней границы потребления норме (физиологической границе для питания).

§42. Ограничения биологических моделей

В полигенной модели соответствия фенотипических признаков генотипу [29] используется предикативный подход, аналогичный предикативному выводу в формальных системах. (Ограничения предикативного подхода были указаны ранее для некоторых классов моделей [66]. В рассматриваемом случае ограничения аналогичны.) То есть даже без знания конкретных правил вывода фенотипа из генотипа фенотипические признаки представляются как некоторые предикативные выводы из генотипических аксиом:

$(G_1, \ldots, G_n) \models F_i,$ (26)

причём $F_i \cap (G_1, \ldots, G_n) = \varnothing$ (условие предикативности), где G_j — фрагменты генома, F_i — фенотипические признаки.

(Если же предполагать сложную, многоуровневую схему формирования признаков, то возможно

$(G_1, \ldots, G_n, F_{K1}, \ldots, F_{Kr}) \models F_i,$ (27)

$(G_1, \ldots, G_n, F_{K1}, \ldots, F_{Kr}) \cap F_i = \varnothing,$

т. е. формирование фенотипических признаков обусловлено наличием иных признаков, проявляющихся в той или иной мере зависимо и от влияния окружающей среды.)

Тогда на схемы (26) и (27) действуют ограничения теоремы Гёделя о неполноте (см. выше), т. е. в предикативной формальной теории L, содержащей правила вывода (26) или (27), имеются утверждения, невыводимые из аксиом $(G_1, \ldots, G_n)$. Это означает, что в L имеются утверждения (фенотипические признаки), не обусловленные генотипом и средой (которая также предикативно учитывается). Если привлекать к этим рассуждениям негенотипическую наследственность (наследственность через митохоиндральные РНК и т. п.), то ограничения остаются точно такими же. Таким образом, вследствие ограничений предикативного аппарата описания наследственности имеются фенотипические признаки, не обусловленные известной материальной наследственностью.

То есть "центральный постулат генетики <который> гласит, что развитие и свойства организма определяются дискретным фактором наследственности — геномом" [34], подлежит в свете вышеозначенных ограничений уточнению, в том плане, что существует некоторая мера этой определённости, меньшая единицы, ввиду, как следует из теорем Гёделя, наличия признаков, не определяемых геномом[65].

---

[65] Религиозному мировоззрению эти выводы лишний раз указали бы на наличие Творца, продолжающего и сейчас творить мир и всё живое и человека, поддерживая жизнь (как сказал поэт, "Творца, творящего творенье,— оно им живо и сейчас…"); но материалистическому мировоззрению эти ограничения лишь указывают на ограниченность научного знания в этой области на современном этапе развития науки.

Часть 3. Дополнения

Глава 11. О представлениях самопринадлежности

Описаны ограничения представления самопринадлежащих объектов в терминах несамопринадлежности; указано на невозможность полного вложения теории множеств с самопринадлежностью в теорию без самопринадлежности. С рассмотрением кроме отношения принадлежности и отношения обозначения указано на возможность лексикографичсекой записи обозначений самопринадлежащих объектов дублированием обозначения. Показано, что отношение обозначения использует семантику самопринадлежности.

§43. Ограничения представления в терминах несамопринадлежности

Очевидно, что полное "вложение" теории множеств с самопринадлежностью (ТМ) в теорию множеств без самопринадлежности (ТН) невозможно. Это следует из того, что множество всех множеств М, $M\in M$, $Exp(M)=M$, невозможно описать в терминах несамопринадлежности, хотя бы потому, что теорема Кантора, действенная только для несамопринадлежащих множеств, $\forall x,\ x\notin x\ |Exp(x)|>|x|$, не позволяет вложить в теорию без самопринадлежности множество всех множеств с его специфичными свойствами $|Exp(M)|=|M|$. Обратное вложение теории множеств без самопринадлежности в теорию множеств с самопринадлежностью имеет место вследствие выделения в М множества, содержащего все несамопринадлежащие множества

$A = \{[x]\in M \mid x\in\varnothing$ или $(x = a,\ a\notin a,\ a = V\alpha(A)$, где α — число $)\}$; см. (3).

Кроме того, теорема о непредставимости самопринадлежащего объекта в виде объединения двух его непустых непересекающихся объектов также непредставима в терминах несамопринадлежности.

Однако при такой невложимости теории с самопринадлежностью в целом в теорию без самопринадлежности интересны попытки представить если не всё множество М, то, по крайней мере, отдельные конечные самопринадлежащие множества в терминах несамопринадлежности — попытки построить их несамопринадлежащие модели.

§44. Попытки обозначения самопринадлежности

При описании теории множеств с самопринадлежностью уже отмечалась разница между объектами и их обозначениями (при описании свойств пустого множества). Полная иерархия обозначений такова:

i) отношения части и целого (отношения принадлежности),

ii) отношения обозначения,

iii) отношения потребности (включающие и самого субъекта).

(Описание отношений потребности вне пределов этой математической работы.)

Итак, рассматривается иерархия отношений обозначения и принадлежности — как самопринадлежащий объект (нематериализуемый в виде вещи), обозначается посредством несамопринадлежащих вещественных символов.

Обозначение самопринадлежащего объекта (мыслимого в сознании сразу едино-многим) посредством символов, находящихся вне сознания, требует удвоения обозначения самопринадлежащего объекта.

Пример. Объект "двойка", состоящий из "единицы" и самой "двойки", мыслимый в воображении как единое целое (едино-многое), требует при обозначении дублирования обозначения "двойки" — 2={1, 2}.

Другой пример — файл, имеющий вид
"имя_файла"={"имя_файла", "содержимое"}.

По теореме о транзитивности принадлежности если берётся имя файла, то будет браться (ввиду его самопринадлежности) и всё содержимое файла. Такие операции с файлами хорошо знакомы.

Таким образом, с одной стороны, лексикографическая запись обозначений самопринадлежащих объектов требует дублирования их обозначений [66].

---

[66] Это связано с удвоением образа действительности при его отражении в самоосоз-

см. след. стр. ⟶

С другой стороны, в самом отношении обозначения имеется самопринадлежность — обозначение обозначает своё содержимое и себя само — "знак"={"знак", "обозначаемое содержание"} [67].

Это проявляется при построении обобщающих понятий, например, на 1-м уровне обобщения (соответствующем 1-му психологическому возрасту) понятие о "вообще стуле" является обобщением восприятий множества конкретных стульев
"вообще стул"={"вообще стул", "стул 1", "стул 2",…, "стул n"}.

Посредством несамопринадлежащих множеств невозможно построить такие обобщающие конструкции понятий, обозначающих и себя, и своё содержимое. Центрирующим эти отношения самопринадлежности в обозначениях разного уровня обобщённости является высший, 6-й, уровень отражения действительности в самоосознании (см. рис. 1).

Заключение

Таким образом, самопринадлежащие конструкции непредставимы в терминах чистой несамопринадлежности. Однако даже в самом отношении обозначения наличествует самопринадлежность, вследствие того, что знак обозначает и себя, и своё содержимое.

нании (см. гл. 1).

[67] Наличие самопринадлежности в отношении потребности в экономическом смысле в виде самоприменимости экономической деятельности уже рассматривалось выше (см. гл. 9).

Глава 12. Об иерархии логических структур

Для рассмотрения наличной иерархии логических структур предварительно рассмотрена историко-психологическая иерархия логических представлений.

§45. Исторические аналогии

Описание современной иерархии логик сопоставимо в плане самоописательности современных логических теорий с историческим усложнением логических представлений.

Этапы развития логики

В истории осознания логических понятий и операций по мере усложнения структуры научных понятий в истории развития представлений о логических понятиях и операциях выделяют 6 стадий:

1. Первоначальное формирование понятий о чувственно воспринимаемых образах, возникновение письменности (1 тыс. л. до н. э.) [6, т. 19, с. 571–577].

2. При обобщении понятий об отдельных предметах и образах — возникновение осознанного представления об элементах языка, формирование логики объёмов понятий. (Работы Аристотеля в этом плане первоначальны IV в. до н. э. [2])

3. Возникновение логики суждений, осознание грамматических категорий. Если на предваряющей стадии основополагающим элементом рассуждения было отдельное понятие-слово, то на 3-м этапе анализу подвергается словосочетание или грамматическая категория (склонение, спряжение), как отношение, связующее отдельные слова или понятия (в логике высказывание — силлогизм). Первоначальны в этом плане грамматические учения (III в.) неоплатоников [31]. В дальнейшем при развитии символизма, символьного обозначения (первоначальное обозначение понятия буквой — у Диофанта, [68] II в.) и при возникнове-

---

[68] Кстати, впервые давшего отвлечённое определение понятия об уравнении (с неиз-

см. след. стр. ⟶

нии формального понятия о подстановке понятий на место переменных в логическом выражении возникает схоластическая логика — силлогистика, абстрактно оперирующая с понятиями (до XV в.): "Большое занимает место в школе Пселла (IX в.) изучение подстановки одних логических терминов на место других терминов, которая, по видимому, вряд ли была возможна без ясного различия логических постоянных и логических переменных…" [30, с. 114].

4. Примерно с XVI в. при обобщении формально-логических рассуждений и отвлечении от них начинается стадия оперирования абстрактно-определимыми понятиями (например, сила, скорость и т. п.) и начало осознанного применения гипотетических рассуждений (Ф. Бэкон, Г. Галилей, XVI в., до кон. XVIII в.). Абстрактное определение понятия обобщает множество силлогизмов, включающихся в определение термина. Возникает представление о модальной логике (Гегель, см. ниже).

5. Осознанное определение понятия об алгоритме возникает в 1-й пол. XIX в.[69], отличающееся от гипотетического мышления предыдущей стадии (не осознающего конечной цели построения гипотез и открытия законов), осознающего конечную цель логического построения, взаимосвязь множества отдельных законов, гипотез. С появлением понятия об алгоритме связано появление отвлечённого понятия о формальной (аксиоматической) системе, теории.

6. При обобщении множества теорий практика применения теоретического знания, осознание взаимосвязи физических, биологических и социальных процессов, требующее анализа ценности и значимости конечных целей (отчасти процессы глобализации и экологизации; с той же стадии окончательно оформляется вероятностное мышление — середина XX в), эта стадия развития логики научного знания длится и в настоящее время.

вестной величиной).

[69] Об определении алгоритма А. Лавлейс говорилось выше.

Структура прослеженных этапов такова, что на каждой новой исторической стадии наблюдается обобщение некоторого множества элементов предваряющей стадии, отвлечение от них и появление новой структуры, исторического новообразования. Возрастное развитие логических представлений содержит те же этапы, что и историческое (см.: [42]), наличие этих этапов обусловлено иерархией уровней обобщения, связанных с уровнями самоосознания, и с уровнями отражения действительности в сознании (см. рис. 1).

Иерархия суждений по Гегелю

По сравнению с описанной шестиуровневой иерархией логик имеются и более ранние описания этой иерархии, содержащие лишь начальную часть уровней. Так, у Гегеля, в "Науке логики" при описании суждений наблюдается следующая иерархия:

1. "Суждение наличного бытия", это суждение есть "согласие бытия и реальности" [9, с. 68], аналогичное упомянутому 1-му уровню абстракции (в последовательности отражения) именованию.

2. "Суждение рефлексии", соответствующее 2-му уровню абстракции в схеме отражения действительности в сознании. "Если нужно приводить примеры предикатов суждений рефлексии, то они должны быть другого рода, чем для суждений наличного бытия" [9, с. 83]. Логика этого уровня суждений — логика объёмов понятий, аналогичная Аристотелевому описанию логики.

3. "Суждение необходимости", содержащее в себе многозначность ("различие ей имманентно" [9, с. 90]) и заключающееся в подстановке на место логических переменных их конкретных значений.

4. "Суждение понятия", содержащее в себе категории модальности [9, с. 99].

Эта Гегелева иерархия логических суждений совпадает с первыми 4 историческими этапами развития логики и с первыми 4 уровнями логических рассуждений в современной шестиуровневой иерархии логик[70].

[70] Иерархия логических представлений Аристотеля занимает первые два уровня.

см. след. стр. ⟶

§46. Невложимость самопринадлежности в более простые логики

Итак, наличная иерархия уровней логик такова:
1) именование объектов;
2) логика объёмов понятий;
3) многозначная логика;
4) модальная логика;
5) алгоритмы, формализуемые лямбда-исчислением;
6) непредикативные, самопринадлежащие конструкции.
Причём интересно, что если самопринадлежащие конструкции несводимы к лямбда-исчислению, то остальные уровни допускают последовательное сведение к низшему логическому уровню.

В теории множеств с самопринадлежностью построена адекватная модельная область для лямбда-исчисления (см. §22). Обратное не имеет места, поскольку лямбда-исчисление оперирует с несамопринадлежащими конструктами [4], непредставимость самопринадлежности в терминах несамопринадлежности рассмотрена ранее (см. гл. 11).

Сводимость логических конструкций 5-го уровня и менее к низшим такова. (В работе [3] рассмотрено вложение λ-исчисления в модальную логику.)

Модальная логика вложима в трёхзначную логику. Пусть имеется трёхзначная логика L_3 с алфавитом (0, 1, 2), заданная таблицами логических функций (см. табл. 6)[71]. Тогда строится соответствие между L_3 и модальной логикой L_m следующим образом, 0 — 0, 1 — "возможно a", 2

Причём первый уровень — это именование, а второй — логика объёмов понятий, впервые им (Аристотелем) и описанная.

[71] Такая логика используется при моделировании сигналов в цифровых схемах [17, с. 206–207] L_3(0, *, 1), "0" и "1" — это логические 0 и 1, а "*" — состояние неопределённости между 0 и 1 (фронт изменения электрического сигнала в логической электронной схеме).

— "необходимо a". И модальная логика вкладывается тем самым в трёхзначную логику L_3.

Таблица 6. **Таблицы для L_3. (a или b, a и b, не a)**

или	0	1	2		и	0	1	2		не	
0	*0*	*1*	*2*		0	*0*	*0*	*0*		0	*2*
1	*1*	*1*	*2*		1	*0*	*1*	*1*		1	*1*
2	*2*	*2*	*2*		2	*0*	*1*	*2*		2	*0*

В свою очередь многозначные логики вложимы в декартово произведение двузначных логик. Так, трёхзначная логика L_3 вложима в декартово произведение трёх двузначных логик:

$L_3(0, 1, 2) \subseteq L_2(0, 1) \times L_2(1, 2) \times L_2(0, 2)$.

Двузначная же логика, кроме глобальной её модели посредством множества всех множеств, реализуема и на локальных моделях — на какой-либо непустой несамопринадлежащей области (см. пример на рис. 13). Это логика объёмов понятий (2-го уровня обобщённости), впервые описанная Аристотелем.

Рассуждения логики объемов понятий сводятся к рассуждению об именованиях предметов. Пусть A — имя одной совокупности предметов, B — наименование второй совокупности, тогда для выяснения, обладают ли некоторые предметы одновременно свойствами A и B, требуется перебрать совокупности этих предметов, дабы выяснить, что пересечение несамопринадлежащих множеств A и B не пусто (см. рис. 13).

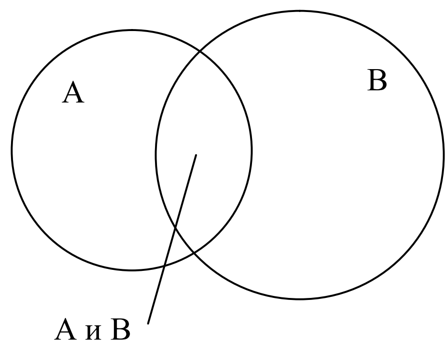

Рис. 13. Пример логики объёмов понятий на несамопринадлежащих множествах

Формально при кодировании информации в ЭВМ в них выполняются фактически операции нижнего, 1-го, уровня логики. К этим операциям сводятся более сложные — логика объёмов понятий (сравнение совокупностей), многозначная, а затем и модальная логики, а также λ-исчисление. Реализация же операций с собственно самопринадлежащими объектами неформализуема в ЭВМ.

Заключение

Таким образом, в иерархии логических структур непредикативные, самопринадлежащие конструкции занимают особое место вследствие их несводимости к алгоритмическим, предикативным, строго несамопринадлежащим представлениям. То есть не вся часть логических рассуждений может быть формализована внешним по отношению к сознанию образом, с чем связаны естественные ограничения искусственного интеллекта. Объективные цели и ценности, носителем и выразителем которых является сам субъект, носящие непредикативный характер, неформализуемы вне его сознания, однако рассуждения о целях и ценностях уже вне математики — над логико-информационным уровнем мышления — в созерцательной области.

Рассмотренная теория множеств с самопринадлежностью дополняет уже известные результаты классической теории множеств и иных разделов математики.

Послесловие

Истоки написания этой книги отчасти связаны с простым детским соображением, которым автор задавался в ту пору, когда научился читать: "*содержание* в книгах должно указывать на ту станицу, где оно само находится". Сделать это оказалось достаточно просто: см. стр. 4 и стр. 6 [72].

Начало же систематического описания автором множеств с самопринадлежностью относится к октябрю 1993 г. При работе над философией истории математики (имеющей те же гносеологические основания) было замечено, что теорема Кантора о порядке множества подмножеств имеет место только для несамопринадлежащих множеств. Впоследствии были описаны свойства множеств с самопринадлежностью, теоремы о порядках конечных множеств (не вошли в это издание), доказательство непротиворечивости теории (составляющие содержание 2-й главы).

Результаты, относящиеся к упорядоченным структурам, получены в 1997–2003 гг. Теорема об ограниченности размерности доказана в 2003 г. Тогда же уточнены аналогии между историческими представлениями о числе и бесконечности и структурами теории множеств.

Приложения теоремы о размерности к обоснованию метода пространства состояний управления качеством технологических процессов оформились в этот же и последующий период (с 2003 г.).

Отчасти вышеуказанные результаты опубликованы автором в журнальных статьях (см. список литературы).

Основные недавние результаты, вошедшие в книгу,— это теоремы о порядке множества всех множеств и о его несамоподобии.

(Отзывы о содержимом книги можно отправлять автору на адрес электронной почты chechulinvl@mail.ru .)

[72] Ссылка содержания на само содержание является неподвижной точкой отображения индексирования.

Список литературы

1. *Андреев И. Л.* Человек по имени «деньги» / И. Л. Андркеев // Вопросы философии.– 2003.– №11.– С. 60–72.

2. *Аристотель*. Собрание сочинений: в 4 т. / под. ред. З. Н. Микеладзе.– М.: Мысль, 1978. – Т. 2 — 687 с.

3. *Артёмов С. Н.* Погружение модального λ-исчисления в логику доказательств // Математическая логика и алгебра: труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова.– 2003 г.– Т. 242.–С. 44–58.

4. *Барендрегт Х.*, Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика / пер с англ. Г. Е. Минц.– М.: Мир, 1985.— 606 с.

5. *Бесконечность в математике:* философские и исторические аспекты / под ред. А. Г. Барабашева.– М.: Янус-К, 1997.— 400 с.

6. *Большая советская энциклопедия*: в 30 т.– М.: Советская энциклопедия, 1970—1978.

7. *Бурбаки Н.* Теория множеств / ред., пер. с фр. В. А. Успенский.– М.: Мир, 1965.— 458 с.

8. *Верещагин Н. К.* Начала теории множеств / Н. К. Верещагин, А. Шень – М.:МЦНМО, 1999.

9. *Гегель Г. В. Ф.* Наука логики.– Т. 3: Субъективная логика или учение о понятии.– М.:Мысль, 1972.— 376 с.

10. *Голдблатт Р.* Топосы, категорный анализ логики: пер. с англ. / Р. Голдблатт.– М.: Мир, 1983.— 488 с.

11. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В. А. Горбатов.– М.: Наука: Физматлит, 2000.— 544 с.

12. *Евклид.* Начала: в 3 т., пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовский, при участ. И. Н. Веселовского.– М.;Л., 1948–1950.

13. *Зенкин А. А.*, Принцип разделения времени и анализ одного класса квазифинитных правдоподобных рассуждений (на примере теоремы Г. Кантора о несчётности) / А. А.Зенкин // Доклады Академии наук.– 1997.– Т. 356, №6.– С. 733-735.

14. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / пер. с нем., ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич.– М.: Изд-во АН СССР, 1985.– Сер. "Памятники науки".
15. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.– М.: Наука, 1977.— 744 с.
16. *Карпенко А. А.*, Логика на рубеже тысячелетий / А. А. Карпенко // Логические штудии. "Logical studies": интернет-журнал, URL: www.logic.ru (дата обращения: 10.10.2006)
17. *Киносита К.* Логическое проектирование СБИС: пер. с яп. Д. А. Ковтуна, Л. В. Поспелова / К. Киносита, К. Асада, О. Карацу.– М.: Мир, 1988.— 305 с.
18. *Клини С. К.* Введение в метаматематику / С. К. Клини.– М.: Иностр. лит, 1957.
19. *Клини С. К.* Математическая логика: пер. с англ. Ю. А. Гастева / С. К. Клини.– М.: Комкнига, 2007.— 480 с.
20. *Колмогоров А. А.* Математическая логика / А. А. Колмогоров, Г. А. Драгалин.– М.: Изд-во МГУ, 2002.— 240 с.
21. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум гипотеза: пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина / П. Дж. Коэн.– М.: Мир, 1969.— 344 с.
22. *Куратовский К.,* Теория множеств / пер. с англ., ред. М. И. Кратко, А. Д. Тайманов / К. Куратовский, А. Мостовский.– М.: Мир, 1970.— 416 с.
23. *Кузанский Николай.* Соч.: в 2 т.: пер. с лат. А. Ф. Лосева.– М.: Мысль, 1980.— 488+472 с. Сер. "Философское наследие".
24. *Линдон Р.* Заметки по логике / Р. Линдон.– М.: Мир. 1981.
25. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики (ранняя классика) / А. Ф. Лосев.– М.: Высшая школа, 1963.— 584 с.
26. *Нечипоренко А. В.* Реконструкция онтологии Николая Кузанского с опорой на математические фрагменты / А. В. Нечипоренко // Философия науки.– 2009.– №1(40).– С. 155–167.
27. *Подосетник В. М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины / В. М. Подосетник // Вопросы философии.– 1954.– №5.– С. 77–81.
28. *Прокл*. Первоосновы теологии // Лосев А.Ф. История античной эстетики. Высокая классика.– М.: Искусство, 1974.— 600 с.

29. *Суслов В. В.* Дарвиновская эволюция и регуляторные генетические системы / В. В. Суслов В. В., Н. А. Колчанов // Вестник ВОГиС.– 2009.– Т. 13, № 2.– С. 410–439.
30. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики / Н. И. Стяжкин.– М.: Наука, 1967.— 508 с.
31. *Тронский И. М.* Античные теории языка и стиля / Тронский И. М.– М.;Л., 1936.
32. *Френкель А.* Основания теории множеств: пер с англ. Ю. А. Гастева, под. ред. А. С. Есенина-Вольпина / А. Френкель, И. Бар-Хиллел.– М.: Мир, 1966.—366 с.
33. *Хендерсон П.* Функциональное программирование : пер. с англ. / П. Хендерсон.– М.: Мир, 1983.
34. *Хесин Р. Б.* Непостоянство генома / Р. Б. Хесин.– М.: Наука, 1984.— 472 с.
35. *Чёрч А.* Введение в математическую логику: пер. с англ. / А. Чёрч.– М.: Иностр. лит., 1960.
36. *Чечулин В. Л.* О предельной норме прибыли / В. Л. Чечулин // Матер. регион. конф. "Социально-экономическая ситуация развития региона" Березники, 2005.– С. 270-283.
37. *Чечулин В. Л.* О множествах с самопринадлежностью / В. Л. Чечулин // Вестн. Перм. ун-та.– Сер. Математика. Механика. Информатика.– 2005.– Вып 2(2).– С. 133–138.
38. *Чечулин В. Л.* К обеспечению долгосрочного биосферного равновесия / Чечулин В. Л. // Экологический вестник России.– 2007.– №4.– С. 47–48.
39. *Чечулин В. Л.* О связи экономических моделей и теории информации / В. Л. Чечулин // Матер. Всерос. науч.-практ. конф. «Совершенствование управления корпоративными образованиями и региональная промышленная политика: проблемы и инновации».– Пермь 2007.– С. 303-305.
40. *Чечулин Л. П.* К информатизации процесса хлорирования титаносодержащих шлаков / Л. П. Чечулин, В. Л. Чечулин // Вестник Перм. ун-та.– Сер. Информационные системы и технологии.– 2007.– Вып 10 (15).– С. 94-98.

41. *Чечулин В. Л.* Об упорядоченных структурах в теории множеств с самопринадлежностью / В. Л. Чечулин // Вестн. Перм. ун-та.– Сер. Математика. Механика. Информатика.– 2008.– Вып. 6.– С. 37–45.
42. *Чечулин В. Л.* О психолого-гносеологических ограничениях преподавания курса программирования / В. Л. Чечулин, Н. В. Загородских // Рождественские чтения: матер. Всерос. конф.– Пермь, 2008.– С. 102–104.
43. *Чечулин В. Л.* К системному анализу структуры промышленной информационно-технологической системы / В. Л. Чечулин // Материалы Междунар. конф. Инфоком-2 при СевКав ГТУ.– Ставрополь, 2006.– С. 177–181.
44. *Чечулин В. Л.* О непредикативном определении понятия личности в психологии / В. Л. Чечулин // Материалы конф. "Проблемы и перспективы развития Верхнекамского региона".– Березники, 2006.– С. 108–112.
45. *Чечулин В. Л.* К информатизации процессов отгонки для обеспечения заданного качества продукта / В. Л. Чечулин, В. Н. Павелкин, Ю. П. Кирин и др. // Химическая промышленность.– 2007.– №8.– С. 408–414.
46. *Чечулин В. Л.* К информатизации процесса получения формалина / В. Л. Чечулин, В. Г. Ардавичус, О. В. Колбасина // Там же.– 2008.– №1.– С. 39–44.
47. *Чечулин В. Л.* Об одном варианте доказательства теоремы о 4-раскрашиваемости плоских графов / Чечулин В. Л. // Вестн. Пермского ун-та.– Сер. Математика. Механика. Информатика.– 2006.– Вып. 4 (4).– С. 86–87.
48., Анализ стационарного режима оборота общественно-необходимого времени, определяющего меру инфляции / Чечулин В. Л., Мясникова С. А. // Журн. экономической теории / РАН.– 2008.– №2.– С. 240–245.
49. *Чечулин В. Л.* О кратком варианте доказательства теорем Гёделя / В. Л. Чечулин // Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: матер. Междунар. конф. при ИПМ ДВО РАН.– Хабаровск, 2009.– С. 60–62.
50. *Чечулин В. Л.* Метод пространства состояний для управления качеством сложных химико-технологических процессов / В. Л. Чечулин //

Фундаментальные проблемы математики и информационных наук: матер. Междунар. конф. при ИПМ ДВО РАН.– Хабаровск, 2009.– С. 158–159.
51. *Чечулин В. Л.* Программа реализации алгоритма "Определение точки оптимума метода пространства состояний методом главных компонент" / В. Л. Чечулин, Е. В. Бабушкин // ОФАП РФ, свидетельство об отраслевой регистрации №12314; номер государственной регистрации 50200900340, 11 февр. 2009 г.
52. *Чечулин В. Л.* Об инфляционных циклах / В. Л. Чечулин // Вестн. Пермского ун-та.– Сер. Математика. Механика. Информатика.– 2009.– Вып. 7 (33).– С. 76–83.
53. *Чечулин В. Л.* Об инфляционных циклах / В. Л. Чечулин, А. С. Пьянков // Журн. экономической теории / РАН.– 2009.–№3.– С. 236-241.
54. *Чечулин В. Л.* Об условии повышения содержания рутильной формы TiO_2 в процессе парофазного гидролиза / В. Л. Чечулин // Журнал прикладной химии.– 2009.– Т. 82, №8.– С. 1401-1403.
55. *Чечулин В. Л.* К информатизации процесса флотации / В. Л. Чечулин, Е. В. Волчугова, А. Ш. Зайнуллина// Химическая промышленность.– 2006.– Т. 83.– №7.– С. 351-354.
56. *Чечулин В. Л.* К информатизации процесса сушки / Чечулин В. Л. // Промышленные АСУ и контроллеры.– 2008.– №8.– С. 27–29.
57. *Чечулин В. Л.* Об информатизации процесса плавки титановых концентратов в рудно-термических печах / В. Л. Чечулин // Цветная металлургия.– 2009.– №3.– С. 37–40.
58. *Чечулин В. Л.*, Об общей схеме построения систем оптимизации химико-технологических процессов / В. Л. Чечулин // Автоматизированные системы управления и информационные технологии: матер. Всерос. конф. при каф. АСУ ПермГТУ. Пермь, 2006.– С. 172–180.
59. *Чечулин В. Л.* О структурной организации информационно-промышленных систем управления … / Чечулин В. Л., Светлаков И. Ю. // Молодёжная наука верхнекамья: матер. регион. конф. при БФ ПГТУ.– Березники, 2006.– С. 126–131.
60. *Чечулин В. Л.* К информатизации производства алифатических аминов / В. Л. Чечулин // Новые технологии в азотной промышленности:

матер. 2-й Всерос. науч.-практич. конф. при Невиномысском технологическом ин-те.– Невинномысск, 2007.– С. 91–92.
61. *Чечулин В. Л.* Дополнительное обоснование метода пространства состояний управления химико-технологическими процессами / В. Л. Чечулин // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2009): сб. матер. IX Междунар. конф. при ИПУ РАН.– М., 2009.– С. 31.
62. *Чечулин В. Л.* Периодичность в строении материи и её отличие от иных структурных закономерностей / В. Л. Чечулин // Университетские исследования, 2009 (раздел: философия) [Электронное издание] URL: http://www.uresearch.psu.ru/files/articles/20_52906.rtf (дата обращения 11.08.2010)
63. *Шрагин И. В.* Условия измеримости суперпозиций / И. В. Шрагин // Доклады АН СССР.– 1971.– Т. 197.–С. 295–298.
64. *Эйлер Леонард.* Дифференциальное исчисление: пер с лат. М. Я. Выготского.– М.;Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1949.— 580 с.

65. *Chechulin V. L.* About informatization of distillation process for providing required quality of product / V. L. Chechulin, V. N. Pavelkin V. N., Yu. P. Kirin, Yu. F. Masitova, V. K. Grigalashvili, A. B. Tankeev// Russian Journal of Applied Chemistry, MAIK Nauka/Interperiodica.– 2008.– Vol. 81, No. 3.– P. 558–564.
66. *Chechulin V. L.* Informatization of the process of producing formalin / V. L. Chechulin, V. G. Ardavichus, O. V. Kolbasina // Ibidem.– 2008.– Vol. 81, No. 6.– P. 1112–1116.
67. *Chechulin V. L.* On the Condition of Rising the Content of the TiO_2 Rutile Form during a Vapor-Phase Hydrolysis / V. L. Chechulin // Ibidem .– 2009.– Vol. 82, No. 8.– P. 1501–1503.
68. *Chechulin V. L.* About the selfconsidering semantic in the mathematical logic. / V. L. Chechulin // Bull. Symbolic Logic.– 2010.– Vol. 16, P. 111–112 (European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic: Logic Colloquium '09.– Sofia, Bulgaria.– 2009.– July 31—August 5.)

69. *Yuting Shen.* Paradox of the class of all grounded classes / Yuting Shen // J. Symbolic Logic.– 1953.– Vol. 18, №2.– P. 114. (Реферат в РЖ Математика, 1954 г, №5027, референт А. В. Кузнецов)

Указатель имён

Предметный указатель

Index

Научное издание

Чечулин Виктор Львович

Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения)

Монография

Редактор Л. П. Северова
Корректор Л. П. Павлова
компьютерная вёрстка автора

Подписано в печать 20.08.2010. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,8.Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография
Пермского государственного университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15