

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра вычислительной и экспериментальной механики**

Авторы-составители: **Лутманов Сергей Викторович**

Рабочая программа дисциплины

**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Код УМК 94506

Утверждено  
Протокол №6  
от «16» июня 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Вариационное исчисление и методы оптимизации

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.01** Математика  
направленность Программа широкого профиля

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Вариационное исчисление и методы оптимизации** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.01** Математика (направленность : Программа широкого профиля)

**ОПК.1** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности

#### **Индикаторы**

**ОПК.1.2** Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направления подготовки</b>	01.03.01 Математика (направленность: Программа широкого профиля)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	11
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	4
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	144
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	56
<b>Проведение лекционных занятий</b>	28
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	88
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Защищаемое контрольное мероприятие (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Экзамен (11 триместр)

## **5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины**

### **КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Рассмотрены задачи оптимизации в конечномерных пространствах: задачи безусловной оптимизации, задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств и не равенств, линейное программирование

#### **1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Ставится задача оптимизации. Рассмотрены вопросы существования и единственности решения. Приведены примеры.

##### **Входной контроль**

##### **Лекция 1**

Постановка задач оптимизации. Примеры

##### **Лекция 2**

Существование и единственность решение задачи оптимизации

##### **Практика 1**

Решение классических (старинных) задач на экстремум

### **2. ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ**

Приводятся необходимые и достаточные условия в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств, в которых функции, участвующие в постановке задачи, являются непрерывно дифференцируемы

##### **Лекция 1**

Постановка задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств

##### **Лекция 2**

Необходимые условия минимума в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств

##### **Лекция 3**

Достаточные условия минимума в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств

##### **Практика 1**

Решения задач на достаточные условия минимума в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств

##### **Практика 2**

Решения задач на необходимые условия минимума в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств

#### **Контрольная по теме « ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ**

### **3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Рассмотрены различные постановки задач линейного программирования, графический метод их решения, симплекс метод

##### **Лекция 1**

Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения

## **Лекция 2**

Симплекс метод решения задач линейного программирования

### **Практика 1**

Решение задач линейного программирования графическим методом

### **Практика 2**

Решение задач линейного программирования симплекс методом

## **Индивидуальное задание по теме «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

### **ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Исследуется простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения на случай, когда под знаком интеграла находятся производные неизвестной функции высших порядков, несколько неизвестных функций и на случай условного экстремума.

#### **1. ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Рассмотрены: задача о брахистохроне, простейшая изопериметрическая задача, задача о наборе ракетой максимальной скорости

### **Лекция 1**

Вывод выражений для функционалов в задаче о брахистохроне и изопериметрической задаче.

### **Практика 1**

Анализ решения задачи о брахистохроне и изопериметрической задачи

#### **2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Вводится понятие вариации функционала первого и второго порядка. Формулируются необходимые условия экстремума функционала.

### **Лекция 1**

Определение вариации функционала. Вывод необходимых условий экстремума функционала.

### **Практика 1**

Определение расстояний первого и второго порядков между функциями

#### **3. ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА**

Приводится постановка простейшей вариационной задачи. Доказываются необходимые условия экстремума первого порядка и приводятся необходимые условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления

### **Лекция 1**

Вывод дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа

### **Лекция 2**

Частные случаи интегрирования уравнения Эйлера-Лагранжа

### **Лекция 3**

Необходимые условия минимума второго порядка. Достаточные условия минимума

### **Практика 1**

Решение дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа

### **Практика 2**

Применение необходимых условий минимума второго порядка при исследовании простейшей вариационной задачи

## **Контрольная по теме «ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»**

### **4. ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ**

Проводится обобщение простейшей вариационной задачи на случай производных неизвестной функции высшего порядка и случай неизвестной вектор-функции.

#### **Лекция 1**

Вариационные задачи, содержащие производные неизвестной функции высших порядков и содержащие неизвестные вектор функции

#### **Практика 1**

Решение вариационных задач, содержащих производные неизвестной функции высших порядков и содержащие неизвестные вектор функции

### **5. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Рассмотрены: простейшая изопериметрическая задача, задача Лагранжа с голономной и неголономной связями.

#### **Лекция 1**

Изопериметрическая задача, Задача Лагранжа

#### **Практика 1**

Решение изопериметрической задачи, и задачи Лагранжа с голономной и не голономной связью

## **ЭКЗАМЕН**

### **Экзамен**

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Лутманов С. В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учебное пособие для студентов, обучающихся по группе математических и механических специальностей/С. В. Лутманов.-Пермь,2010, ISBN 978-5-7944-1279-6.-200.-Библиогр.: с. 198-199
2. Лутманов С. В.,Аюпов В. В.,Гамилова Л. В. Задачи оптимизации в конечномерных пространствах: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по группе математических и механических специальностей/С. В. Лутманов, В. В. Аюпов, Л. В. Гамилова.-Пермь:Пермский государственный университет,2007, ISBN 5-7944-0929-0.-160.-Библиогр.: с. 157-159
3. Лутманов С. В. Курс лекций по методам оптимизации/С. В. Лутманов.-Ижевск:Издательство РХД,2001, ISBN 5-93972-061-7.-368.-Библиогр.: с. 361 - 363

### Дополнительная:

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика"/Ф. П. Васильев.-Москва:Наука,1988, ISBN 5-02-013796-0.-552.-Библиогр.: с. 531-545

## 9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ  
<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

## 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Вариационное исчисление и методы оптимизации** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);

- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;

- офисный пакет приложений «LibreOffice», Alt Linux;

При освоении материала и выполнении заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (**student.psu.ru**).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Вариационное исчисление и методы оптимизации**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ОПК.1**

**Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности**

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b>
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	В результате обучения студент должен знать основные положения вариационного исчисления, уметь применять полученные знания к решению задач в предметной области, владеть навыками применения методов оптимизации.	<p style="text-align: center;"><b>Неудовлетворител</b></p> Не знает положения вариационного исчисления, не умеет применять полученные знания к решению задач в предметной области, не владеет навыками применения методов оптимизации. <p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b></p> Знает базовые положения вариационного исчисления, пытается применять полученные знания к решению задач в предметной области. <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> Знает базовые положения вариационного исчисления, пытается применять полученные знания к решению задач в предметной области, имеет представление о методах оптимизации. <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> Знает положения вариационного исчисления, умеет применять полученные знания к решению задач в предметной области, владеет навыками применения методов оптимизации.

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Экзамен

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 44 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 44 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Входной контроль <b>Входное тестирование</b>	Проверка базовых знаний, необходимых для освоения курса.
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольная по теме « <b>ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ</b> » <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание положений по теме, умение решать задачи.
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Индивидуальное задание по теме « <b>ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> » <b>Защищаемое контрольное мероприятие</b>	Знание базовых положений по теории линейного программирования.
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольная по теме « <b>ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ</b> » <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание основ вариационного исчисления
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Экзамен <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	Итоговая проверка по курсу

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**  
Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
базовые знания по математическим дисциплинам.	10

### **Контрольная по теме «ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **10**  
Проходной балл: **5**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет решать предложенную задачу	5
Знает основные теоретические положения.	5

### **Индивидуальное задание по теме «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**  
Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**  
Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Знает теоретические основы линейного программирования.	10
Владеет навыками анализа полученного результата.	10
Умеет решать предложенную задачу.	10

### **Контрольная по теме «ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**  
Проходной балл: **9**

Показатели оценивания	Баллы
Умение решать предложенную задачу	10
Знание теоретических основ вариационного исчисления	10

### **Экзамен**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **4 часа**  
Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**  
Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**  
Проходной балл: **17**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Теоретические знания по задачам оптимизации	10
Решение вариационной задачи	10
Теоретические знания по вариационному исчислению	10
Решение задачи по линейному программированию	10