

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования "Пермский
государственный национальный исследовательский
университет"**

Фонды оценочных средств по дисциплине
ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Утверждено
Протокол №9
от «23» мая 2018 г.

Пермь, 2018

Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Элементы высшей математики** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

09.02.03 Программирование в компьютерных системах (направленность : не предусмотрена)

ОК.1 Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК.2 Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество

ОК.3 Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность

ОК.4 Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития

ОК.5 Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности

ОК.6 Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями

ОК.7 Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий

ОК.8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации

ОК.9 Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

ПК.1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент

ПК.1.2 Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля

ПК.2.4 Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных

ПК.3.4 Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев

Объем и содержание дисциплины

Направления подготовки	09.02.03 Программирование в компьютерных системах (направленность: не предусмотрена) на базе основного общего
форма обучения	очная
№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины	4,5
Объем дисциплины (з.е.)	5.3
Объем дисциплины (ак.час.)	192
Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:	128
Проведение лекционных занятий	64
Проведение практических занятий, семинаров	64
Самостоятельная работа (ак.час.)	64
Формы текущего контроля	Защищаемое контрольное мероприятие (3) Письменное контрольное мероприятие (4)
Формы промежуточной аттестации	Дифференцированный зачет (4 триместр) Дифференцированный зачет (5 триместр)

Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная:

1. Потапов, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 310 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01061-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/414899>
2. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 240 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09525-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/449037>
3. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебное пособие для среднего профессионального образования / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 246 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04900-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/454181>
4. Пахомова, Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 110 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08432-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/451706>

Дополнительная:

1. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 435 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8798-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/452620>
2. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 212 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04547-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/415236>
3. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9122-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/427070>
4. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия : учебник для среднего профессионального образования / И. И. Привалов. — 40-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 233 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8774-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/452584>

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине
Элементы высшей математики**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции и
критерии их оценивания**

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
ОК.7 Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий	Умеет обоснованно анализировать процессы в команде при выполнении практических задач на основе наблюдения, строить выводы и разрабатывать рекомендации	Неудовлетворител Перекладывает ответственность на членов команды за провал выполнения заданий Удовлетворительн Знает, какой вклад внёс каждый из членов команды, но решение задачи не было завершено Хорошо Берёт на себя ответственность за результат выполнения заданий, но не знает, какой вклад внёс каждый из членов команды Отлично Берёт на себя ответственность за результат выполнения заданий, знает какой вклад внёс каждый из членов команды
ПК.1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент	Знать основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии при выполнении разработки спецификаций отдельных компонент	Неудовлетворител Не может разработать спецификацию отдельных компонент Удовлетворительн Разрабатывает спецификаций отдельных компонент, но не представляет, как применить знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии к решению задания Хорошо Разрабатывает спецификаций отдельных компонент, но при применении основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии допускает ошибки Отлично Разрабатывает спецификаций отдельных компонент, при применении основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии не допускает ошибок
ОК.5	Умеет использовать	Неудовлетворител Не представляет, как использовать

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	информационно-коммуникационные технологии при изучении дифференциальных уравнений.	Неудовлетворител информационно-коммуникационные технологии для получения знаний Удовлетворительн Использует информационно-коммуникационные технологии как источник текстовой информации о решении дифференциальных уравнений Хорошо Использует информационно-коммуникационные технологии как метод представления текстовой информации о решении дифференциальных уравнений Отлично Использует информационно-коммуникационные технологии как метод представления разнообразной информации о решении дифференциальных уравнений
ОК.2 Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	Умеет рационально планировать собственную деятельность на практических занятиях; в полном объеме выполнять профессиональные задачи, используя методы дифференциального и интегрального исчисления; обосновывать их решение, объективно оценивать их эффективность и качество.	Неудовлетворител Не способен самостоятельно определить порядок своей деятельности для успешного решения конкретной задачи методами дифференциального и интегрального исчисления Удовлетворительн Способен самостоятельно определить порядок своей деятельности для успешного решения конкретной задачи методами дифференциального и интегрального исчисления, но не может следовать плану Хорошо Способен самостоятельно определить порядок своей деятельности для успешного решения конкретной задачи методами дифференциального и интегрального исчисления, может следовать разработанному плану, но в итоге либо решение не доведено до конца, либо существенно нарушены сроки решения Отлично Способен самостоятельно определить порядок своей деятельности для решения конкретной задачи методами дифференциального и интегрального исчисления, может следовать

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		Отлично разработанному плану в поставленные сроки, решение для конкретной задачи успешно выполнено
ОК.9 Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности	Умеет находить различные варианты выполнения заданий дифференциального и интегрального исчисления, принимать участие в разработке новых проектов, отслеживать и анализировать изменения технологий в профессиональной деятельности	Неудовлетворител Не иметь представления, как основы дифференциального и интегрального исчисления используются в современном мире Удовлетворительн Имеет представления о базисных методах работы с дифференциальным и интегральным исчислением Хорошо Имеет представления о разнообразных методах работы с дифференциальным и интегральным исчислением, но затрудняется указать, в каких технологиях они используются Отлично Имеет представления о разнообразных методах работы с дифференциальным и интегральным исчислением, указывает, в каких технологиях они используются
ОК.4 Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития	Умеет находить актуальную информацию о программах решения дифференциальных уравнений с заданной точностью. Умеет анализировать и оценивать источники информации о методах решения дифференциальных уравнений.	Неудовлетворител Не знает, где и как искать информацию, необходимую для решения дифференциальных уравнений Удовлетворительн Способен найти информацию, нужную для решения дифференциальных уравнений, но не знает, как её использовать Хорошо Способен найти информацию, нужную для решения дифференциальных уравнений, знает, как её использовать, но в результате решение задачи оказалось длительным и неэффективным Отлично Способен найти информацию, нужную для решения дифференциальных уравнений, знает, как её использовать для эффективного решения задачи
ПК.1.2 Осуществлять	Знать дифференциального и интегрального исчисления,	Неудовлетворител Не представляет, как при разработке

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля	необходимые для осуществления разработки кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля	Неудовлетворител программного кода можно использовать дифференциальное и интегральное исчисление Удовлетворительн Разрабатывает программный код на основе нескольких основных приемов дифференциального и интегрального исчисления, вне зависимости от конкретной задачи Хорошо Разрабатывает программный код на основе одного из основных приемов дифференциального и интегрального исчисления, определяя подходящий метод для конкретной задачи Отлично Разрабатывает программный код по любому из основных приемов дифференциального и интегрального исчисления, определяя наиболее подходящий для конкретной задачи
ПК.3.4 Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев	Знать основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые для разработки тестовых наборов и тестовых сценариев	Неудовлетворител Осуществляет разработку тестовых наборов и тестовых сценариев, не используя знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, или тесты рассчитаны только на "правильную"/корректную работу программы Удовлетворительн Осуществляет разработку тестовых наборов и тестовых сценариев, используя знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, но количество разнообразных тестов недостаточно Хорошо Осуществляет разработку тестовых наборов и тестовых сценариев, используя знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, но ошибается в определении достаточного количества разнообразных тестов в большую сторону

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		Отлично Осуществляет разработку тестовых наборов и тестовых сценариев, используя знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии для определения достаточного количества разнообразных тестов
ОК.1 Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	Демонстрирует устойчивый интерес к основам линейной алгебры и аналитической геометрии. Дает оценку сущности и социальной значимости своей профессии в процессе освоения учебного материала по математическому анализу.	Неудовлетворител Не представляет, как взаимосвязаны основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии и будущая профессия Удовлетворительн Объясняет, как знание линейной алгебры важно в деятельности профессии программиста Хорошо Объясняет, как знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии важны в процессе создания программного кода Отлично Объясняет, какие именно знания основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии важны в деятельности профессии программиста
ОК.3 Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность	Умеет решать стандартные задачи в области линейной алгебры. Умеет ориентироваться в нестандартных ситуациях в процессе освоения линейной алгебры, принимать решения и аргументировать их.	Неудовлетворител Определяет применение средств линейной алгебры только для стандартных задач, но результат решения не успешен Удовлетворительн Определяет, как решать задачи линейной алгебры только для стандартных задач, результат решения успешен Хорошо Определяет, как решать задачи линейной алгебры для стандартных и нестандартных задач, но результат решения не всегда успешен Отлично Определяет, как наиболее эффективно решать задачи линейной алгебры для стандартных и нестандартных задач, и успешно осуществляет это решение
ОК.6	Уметь выполнять операции над	Неудовлетворител

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями	матрицами и решать системы линейных уравнений при работе в коллективе и команде, эффективно общаясь с коллегами, руководством, потребителями	Неудовлетворител При выполнении операций над матрицами и решении системы линейных уравнений не может работает в коллективе, не может представить работу руководству или потребителям Удовлетворительн При выполнении операций над матрицами и решении системы линейных уравнений с трудом работает в коллективе и общается с коллегами Хорошо При выполнении операций над матрицами и решении системы линейных уравнений успешно работает в коллективе, равно общается с коллегами, но с трудом - с руководством и потребителями Отлично При выполнении операций над матрицами и решении системы линейных уравнений успешно работает в коллективе и команде, равно общается с коллегами и руководством
ПК.2.4 Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных	Знать основы дифференциального и интегрального исчисления, достаточные для реализации методов и технологий защиты информации в базах данных	Неудовлетворител Не может назвать ни один метод или одну технологию защиты информации в базах данных, основанных на знаниях дифференциального и интегрального исчисления Удовлетворительн Называет один метод или одну технологию защиты информации в базах данных, основанных на знаниях дифференциального и интегрального исчисления Хорошо Перечисляет несколько методов и технологий защиты информации в базах данных, основанных на знаниях дифференциального и интегрального исчисления Отлично Описывает, как реализовать методы и технологии защиты информации в базах данных, основанных на знаниях дифференциального и интегрального исчисления

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
ОК.8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации	Знать: способы определения задач профессионального развития, методы самообразования. Уметь: составлять план профессионального и личностного развития, планировать повышение квалификации.	Неудовлетворител Не знает способы определения задач профессионального развития, методы самообразования. Не умеет составлять план профессионального и личностного развития, планировать повышение квалификации. Удовлетворительн Слабо знает способы определения задач профессионального развития, методы самообразования. Не умеет составлять план профессионального и личностного развития, планировать повышение квалификации. Хорошо Знает способы определения задач профессионального развития, методы самообразования. Умеет составлять план профессионального и личностного развития, но не может спланировать повышение квалификации. Отлично Знает способы определения задач профессионального развития, методы самообразования. Умеет составлять план профессионального и личностного развития, в том числе планировать повышение квалификации.

Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

Вид мероприятия промежуточной аттестации : Дифференцированный зачет

Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации : Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

Максимальное количество баллов : 100

Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 45 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 45 балла

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
--------------------	--	---

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ОК.1 Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес ПК.1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент ПК.3.4 Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев ОК.6 Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями ОК.7 Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий ОК.8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации	Определители Письменное контрольное мероприятие	Вычисление определителей 2-го, 3-го и n-го порядков. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Нахождение обратной матрицы.
ОК.3 Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность	Системы линейных алгебраических уравнений Письменное контрольное мероприятие	Решить СЛАУ, по теореме Крамера. Построить обратную матрицу в решении СЛАУ. Знать методику решения СЛАУ методом Гаусса.

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ОК.1 Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес ПК.1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент ПК.3.4 Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев ОК.8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации	Кривые второго порядка Защищаемое контрольное мероприятие	Решение задач на нахождение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов. Решение геометрических задач векторным методом. Решение геометрических задач с использованием уравнений прямой и плоскости. Решение геометрических задач с кривыми 2-го порядка

Спецификация мероприятий текущего контроля

Определители

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставаемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **14**

Показатели оценивания	Баллы
Вычислить определитель 3-го порядка	10
Разложить определитель по элементам строки (столбца).	10
Найти обратную матрицу	5
Вычислить определитель 2-го порядка	5

Системы линейных алгебраических уравнений

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставаемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **14**

Показатели оценивания	Баллы
Решить СЛАУ методом Крамера.	10
Решить СЛАУ с помощью обратной матрицы.	10

Знать решение СЛАУ методом Гаусса.	10

Кривые второго порядка

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Уметь решать задачи на нахождение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.	10
Уметь решать геометрические задачи с кривыми 2-го порядка.	10
Уметь решать геометрические задачи с использованием уравнений прямой и плоскости.	10
Уметь решать геометрические задачи векторным методом.	10

Вид мероприятия промежуточной аттестации : Дифференцированный зачет

Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации : Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

Максимальное количество баллов : 100

Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 45 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 45 балла

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ОК.2 Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество ОК.9 Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности	Теория пределов Письменное контрольное мероприятие	Вычисление пределов элементарных и сложных функций. Исследование функций на непрерывность. Установление характера точек разрыва.

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ПК.1.2 Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля ПК.2.4 Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных	Интегральное исчисление функции одной переменной Письменное контрольное мероприятие	Вычисление неопределенных интегралов различными методами. Вычисление определенных интегралов различными методами. Описание геометрического и физического приложений определенного интеграла.
	Обыкновенные дифференциальные уравнения Защищаемое контрольное мероприятие	
ОК.4 Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития ОК.5 Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	Итоговый контроль Защищаемое контрольное мероприятие	Уметь выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений; Уметь применять методы дифференциального и интегрального исчисления; Уметь решать дифференциальные уравнения. Знать основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии; Знать основы дифференциального и интегрального исчисления.

Спецификация мероприятий текущего контроля

Теория пределов

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **14**

Показатели оценивания	Баллы
Вычислить пределы элементарных и сложных функций.	10
Установить характер точек разрыва.	10
Исследовать функцию на непрерывность.	10

Интегральное исчисление функции одной переменной

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **14**

Показатели оценивания	Баллы
Вычислить неопределенные интегралы различными методами.	10
Описать геометрические и физические приложения определенного интеграла.	10
Вычислить определенные интегралы различными методами.	10

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
-----------------------	-------

Итоговый контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Знать основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии	10
Уметь решать дифференциальные уравнения	10
Уметь применять методы дифференциального и интегрального исчисления. Знать основы дифференциального и интегрального исчисления	10
Уметь выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	10

АЛГЕБРА МАТРИЦ

1. Вычислить определитель 3-го порядка.
2. Выполнить действия с матрицами.
3. Решить матричное уравнение.
4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера.
5. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.
6. Решить систему алгебраических уравнений методом Гаусса.
7. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений.
8. При каких значениях a система уравнений имеет нетривиальные (ненулевые) решения ? Найти эти решения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.

1. Вычислить определитель 3-го порядка. Определитель можно вычислить по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - ((-3) \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + \\ + 1 \cdot 5 \cdot (-1)) = 71.$$

2. Выполнить действия с матрицами

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведение $A \cdot B$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Находим матрицу $M = A \cdot B$, элементы которой $m_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j}$, $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,2}$. Имеем

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 & (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -8 & 1 \\ -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Произведение $C \cdot D$ имеет смысл, так как тоже число столбцов матрицы C равно числу строк матрицы D . Находим матрицу $P = C \cdot D$, элементы которой $p_{ij} = c_{i1} \cdot d_{1j} + c_{i2} \cdot d_{2j}$, $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,2}$. Имеем

$$P = C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -4 & 2 \\ 11 & -6 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Разность $M - P$ имеет смысл, так как матрицы M и P имеют одинаковую размерность 4×2 . Находим искомую матрицу $X = M - P$, элементы которой $x_{ij} = m_{ij} - p_{ij}$, $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,2}$. Имеем

$$X = M - P = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -8 & 1 \\ -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -4 & 2 \\ 11 & -6 \\ -13 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17-11 & -1-(-7) \\ -8-(-4) & 1-2 \\ -3-11 & 6-(-6) \\ 12-(-13) & 15-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & -1 \\ -14 & 12 \\ 25 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ : Результатом действия данных матриц является матрица

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & -1 \\ -14 & 12 \\ 25 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение:

1) Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Исходное уравнение запишем в матричной форме

$$AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение вида $AX = B$ имеет решение, если матрицы A и B – квадратные матрицы одинакового порядка и матрица A – невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$. В этом случае для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} . Умножая слева обе части уравнения $AX = B$ на A^{-1} , получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \text{ где } A^{-1}A = E - \text{единичная матрица,} \\ X = A^{-1}B - \text{искомая матрица.}$$

Для данной матрицы A : $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Следовательно, существует

A^{-1} . Найдем ее по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое

дополнение элемента a_{ij} матрицы A . Для данной матрицы A :

$$A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -2, A_{22} = -1. \text{ Тогда } A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$X = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Исходное уравнение запишем в матричной форме

$$XA = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение вида $XA = B$ имеет решение, если матрицы A и B – квадратные матрицы одинакового порядка и $\det A \neq 0$, т.е. для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} . Умножая справа обе части уравнения $XA = B$ на A^{-1} , получим $XAA^{-1} = BA^{-1}$, где $AA^{-1} = E$ – единичная матрица, или $XE = BA^{-1}$, или

$X = BA^{-1}$ – искомая матрица.

Для данной матрицы A : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Следовательно,

существует A^{-1} . Найдем ее по формуле, указанной в примере 1), имеем $A_{11} = 3, A_{12} = -(-4) = 4, A_{21} = -(-1) = 1, A_{22} = 2$ и

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} (-6) \cdot 3 + 5 \cdot 4 & (-6) \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ (-10) \cdot 3 + 9 \cdot 4 & (-10) \cdot 1 + 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

4. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10; \\ 10x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 17; \\ 8x_1 + 17x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение.

Решение системы находим по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Для начала вычислим определитель системы

Обозначим через Δ определитель матрицы A . Пусть Δ_1 есть определитель матрицы A , в которой вместо первого столбца стоит столбец B . Пусть Δ_2 есть определитель матрицы A , в которой вместо второго столбца стоит столбец B . Наконец, пусть Δ_3 есть определитель матрицы A , в которой вместо третьего столбца стоит столбец B .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 10 & 9 & 10 \\ 8 & 17 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 10 & -7 \\ 17 & 9 & 10 \\ 8 & 17 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 10 & 17 & 10 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 17 \\ 8 & 17 & 8 \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то согласно правилу Крамера решение системы уравнений можно найти по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 10^+ & 10^- & -7^+ \\ 17 & 9 & 10 \\ 8 & 17 & 1 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 17 & 9 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot (-161) - 10 \cdot (-63) - 7 \cdot 217 = -2499; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1^+ & 10^- & -7^+ \\ 10 & 17 & 10 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-63) - 10 \cdot (-70) - 7 \cdot (-56) = 1029;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1^+ & 10^- & 10^+ \\ 10 & 9 & 17 \\ 8 & 17 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-217) - 10 \cdot (-56) + 10 \cdot 98 = 1323.$$

Следовательно, по формулам Крамера,

$$x_1 = \frac{-2499}{-147} = 17, x_2 = \frac{1029}{-147} = -7, x_3 = \frac{1323}{-147} = -9.$$

5. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

Решим теперь ту же систему уравнений *матричным способом*, с вычислением обратной матрицы.

Запишем ту же систему линейных уравнений в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 10 & 9 & 10 \\ 8 & 17 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку по определению обратной матрицы A^{-1} имеем

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B,$$

и так как $EX = X$, решение системы можно записать в виде

$$X = A^{-1}B.$$

Чтобы находить A^{-1} , необходимо научиться вычислять определитель $\Delta = \det A = |A|$ матрицы A .

Нам понадобятся два понятия: *знак* элемента матрицы и *минор* элемента. Для элемента a_{ij} , стоящего в i -й строке, j -м столбце матрицы A , *знак* a_{ij} равен числу $(-1)^{i+j}$. Удобно использовать следующее правило знако чередования: у элемента a_{11} первой строки, первого столбца знак равен +1, а у любых двух соседних по строке или столбцу элементов знаки различны.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель матрицы, которая получается вычеркиванием i -й строки и j -го столбца исходной матрицы A .

Определение определителя матриц начнем с матриц размера 2×2 . *Определитель матрицы размера 2×2* равен произведению элементов главной диагонали (то есть диагонали, идущей сверху вниз и слева направо) минус произведение элементов сопряженной диагонали,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

В частности, $\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 - 10 \cdot 17 = -161$.

Определитель матрицы размера (3×3) сводится к вычислению трех определителей матриц размера (2×2) по следующему правилу: надо выделить произвольную строку (или столбец) матрицы A , умножить каждый элемент этой строки (столбца) на знак этого элемента, и умножить на минор элемента, а затем все полученные произведения сложить. Это правило называется *разложением определителя по строке (столбцу)*. Можно показать, что результат не зависит от выбора строки или столбца.

Приведем результат разложения определителя матрицы 3×3 по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

В частном случае:

$$\begin{vmatrix} 1^+ & 10^- & -7^+ \\ 10 & 9 & 10 \\ 8 & 17 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (9 \cdot 1 - 10 \cdot 17) - 10 \cdot (10 \cdot 1 - 10 \cdot 8) - 7 \cdot (10 \cdot 17 - 9 \cdot 8)$$

$$1 \cdot (-161) - 10 \cdot (-70) - 7 \cdot 98 = -147.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, обратная матрица A^{-1} существует. Для вычисления A^{-1} используем формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A (заметим, что алгебраические дополнения элементов строк записываются в соответствующие столбцы). Получаем:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = -161, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 70, \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} = 98,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = -129, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 57, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} = 63,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 163, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = -80, \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = -91.$$

Обратная матрица, следовательно, имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{-147} \begin{pmatrix} -161 & -129 & 163 \\ 70 & 57 & -80 \\ 98 & 63 & -91 \end{pmatrix}.$$

Остается умножить матрицу A^{-1} на столбец $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{-147} \begin{pmatrix} -161 & -129 & 163 \\ 70 & 57 & -80 \\ 98 & 63 & -91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-147} \begin{pmatrix} -161 \cdot 10 - 129 \cdot 17 + 163 \cdot 8 \\ 70 \cdot 10 + 57 \cdot 17 - 80 \cdot 8 \\ 98 \cdot 10 + 63 \cdot 17 - 91 \cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-147} \begin{pmatrix} -2499 \\ 1029 \\ 1323 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Ответы совпали.

6. Решить систему методом Гаусса.

Рассмотрим ту же систему уравнений:

$$x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10;$$

$$10x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 17;$$

$$8x_1 + 17x_2 + x_3 = 8.$$

Решение.

Сначала нужно преобразовать систему уравнений так, чтобы переменная x_1 осталась только в одном уравнении системы, например, в первом. Затем уравнение, в которое входит x_1 , отбрасывают, и рассматривают систему из оставшихся уравнений, в котором число уравнений и число неизвестных уменьшилось. Эту редуцированную систему преобразуют так, чтобы переменная x_2 осталась только в одном уравнении. Затем уравнение, в которое входит x_2 , отбрасывают, и вновь рассматривают систему из меньшего числа уравнений. Преобразования с последовательным исключением неизвестных x_1 , x_2 , x_3 и т.д. продолжают до тех пор, пока к каждой неизвестной не будет применена процедура исключения. После этого значения x_1 , x_2 , x_3 , ... определяют сначала из последнего уравнения, затем из предпоследнего и т.д., вплоть до первого уравнения.

Итак, возьмем первое уравнение системы и с его помощью исключим переменную x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение перепишем без изменений, а второе и третье уравнения сложим с подходящими коэффициентами с первым уравнением системы. Сначала умножим первое уравнение системы на 10, второе – на -1 , а затем сложим полученные уравнения. Получим

$$\begin{array}{l|l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 & 10 \\ 10x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 17 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 10x_1 + 100x_2 - 70x_3 = 100 \\ -10x_1 - 9x_2 - 10x_3 = -17 \\ \hline 91x_2 - 80x_3 = 83 \end{array}$$

Аналогично, умножим первое уравнение системы на 8, второе – на -1 , а затем сложим.

$$\begin{array}{l|l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 & 8 \\ 8x_1 + 17x_2 + x_3 = 8 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x_1 + 80x_2 - 56x_3 = 80 \\ -8x_1 - 17x_2 - x_3 = -8 \\ \hline 63x_2 - 57x_3 = 72 \end{array}$$

Данное преобразование будем записывать в следующем виде:

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 & 10 & 8 \\ 10x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 17 & -1 & \\ 8x_1 + 17x_2 + x_3 = 8 & & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 \\ 91x_2 - 80x_3 = 83 \\ 63x_2 - 57x_3 = 72 \end{array}$$

Возьмем теперь второе уравнение и с его помощью исключим переменную x_2 из третьего уравнения системы. Для этого второе уравнение системы умножим на 63, третье уравнение умножим на -91 , и сложим полученные уравнения.

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 & & \\ 91x_2 - 80x_3 = 83 & 63 & \Leftrightarrow \\ 63x_2 - 57x_3 = 72 & -91 & \end{array} \begin{array}{l} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 \\ 91x_2 - 80x_3 = 83 \\ 147x_3 = -1323 \end{array}$$

Мы привели систему уравнений к так называемому верхне-треугольному виду. Теперь методом *обратного хода* можно определить

сначала значение переменной x_3 из последнего уравнения системы, затем значение переменной x_2 из второго уравнения, и, наконец, значение переменной x_1 из первого уравнения.

$$x_3 = -9;$$

$$91x_2 - 80 \cdot (-9) = 83 \Leftrightarrow 91x_2 = -637 \Leftrightarrow x_2 = -7;$$

$$x_1 + 10 \cdot (-7) - 7 \cdot (-9) = 10 \Leftrightarrow x_1 = 17.$$

Ответ: тот же - $(17, -7, -9)$.

7. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + 6y = 0 \end{cases}$.

Решение.

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу системы

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ к эквивалентной матрице $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которой соответствует уравнение

$5x + 3y = 0$, эквивалентное исходной системе. Таким образом, общее решение может быть записано в форме $y = -\frac{5}{3}x, x \in R$, или $x = -\frac{3}{5}y, y \in R$. Решений

бесчисленное множество – любая пара, связанная указанной зависимостью, обращает левые части уравнений данной системы в нуль. В системе $n = 2$ - число неизвестных и число уравнений. $\text{rang} A = \text{rang} B = 1 < n$, A – матрица системы,

B – расширенная матрица системы. В силу теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра ($n - r = 2 - 1 = 1$). Иногда общее решение удобнее использовать в форме

$$x = 3t, y = -5t, t \in R.$$

8. При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные (ненулевые) решения? Найти эти решения.

Решение.

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю. Из этого условия и найдем соответствующие значения a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 4.$$

Найдем теперь соответствующие решения.

1) При $a = -1$ система имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Определитель этой системы равен нулю. Это означает наличие линейной зависимости между уравнениями системы. Замечаем, что первое уравнение получается из второго и поэтому его можно отбросить. Имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1, x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и перенесем члены с x_3 в правые части уравнений :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases}.$$

Полученную систему можно решить по формулам Крамера :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_n}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_n},$$

$$\text{где } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -x_3 & -1 \end{vmatrix} = -2x_3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{vmatrix} = -3x_3.$$

Тогда $x_1 = -2x_3, x_2 = -3x_3$. Полагая $-x_3 = k$, где k — произвольное действительное число, получаем решение системы : $x_1 = 2k, x_2 = 3k, x_3 = -k$.

2) При $a = 4$ система имеет вид :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Можно решить эту систему и методом Гаусса. Составим расширенную матрицу **B** полученной системы :

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ и приведем ее к матрице ступенчатого вида :}$$

$$\begin{aligned} B &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Восстановим систему для полученной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases}.$$

Полагая $x_3 = 3t$, где t – произвольное действительное число, получаем решение системы : $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 3t$.

Ответ : При $a = -1$ система имеет нетривиальные решения : $x_1 = 2k, x_2 = 3k, x_3 = -k, k \in \mathbb{R}$. При $a = 4$ система имеет нетривиальные решения : $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 3t, t \in \mathbb{R}$.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

$$\begin{array}{ll} 1.1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} & 1.2. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ 1.3. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.4.-1.6. \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases} & 1.7. \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} & 1.8. \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 8x - y + az = 0 \end{cases} \end{array}$$

Вариант № 2

$$2.1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2.3. X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2.4. - 2.6. \begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ 3x + 2y - z = -2, \\ x + 2y - 2z = -3. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 2.7. \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} & 2.8. \begin{cases} 2x - 3y + az = 0 \\ 5x - 6y + 4z = 0 \\ ax - 3y + z = 0 \end{cases} \end{array}$$

Вариант № 3

$$3.1. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3.2. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$3.3. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.4. - 3.6. \begin{cases} x - 3y - z = 6 \\ -2x + 2y + 3z = 2, \\ -x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \quad 3.8. \begin{cases} ax + 2y - 5z = 0 \\ 2x - 4y + az = 0. \\ 3x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Вариант № 4

$$4.1. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.3. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.4. - 4.6. \begin{cases} x - y - z = -4 \\ -x + 4y + 3z = 7, \\ -3x + 3y + 2z = 9. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} 3y - x = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases} \quad 4.8. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax - 3y + 4z = 0. \\ 3x - ay + 5z = 0 \end{cases}$$

Вариант № 5

$$5.1. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$5.2. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5.3. \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.4. - 5.6. \begin{cases} 3x + y + 2z = -7 \\ -x + y - z = -2, \\ 2x - 2y + z = 3. \end{cases}$$

$$5.7. \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = 0 \end{cases} \quad 5.8. \begin{cases} ax + 2y + 4z = 0 \\ 5x + ay + 2z = 0. \\ 4x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Вариант № 6

$$6.1. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$6.2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6.3. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.4. -6.6. \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -3x + 4y - 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -2. \end{cases}$$

$$6.7. \begin{cases} x - 7y = 0 \\ 14y - 2x = 0 \end{cases} \quad 6.8. \begin{cases} 2x + ay - 4z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \\ ax - y + z = 0 \end{cases}$$

Вариант № 7

$$7.1. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$7.2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7.3. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$7.4. - 7.6. \begin{cases} -3x - y + z = 8 \\ -2x + 4y + 3z = 3, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} 5x - y = 0 \\ 2y - 10x = 0 \end{cases}$$

$$7.6. \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 6x + ay + 10z = 0 \\ 4x + y + az = 0 \end{cases}$$

Вариант № 8

$$8.1. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$8.2. \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8.3. X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8.4. - 8.6. \begin{cases} -5x - y + 2z = 2 \\ -3x + 4y + 3z = -9, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$$

$$8.7. \begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2y - 8x = 0 \end{cases} \quad 8.8. \begin{cases} ax + y - 3z = 0 \\ x + ay - 4z = 0. \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Вариант № 9

$$9.1. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$9.2. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$9.3. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9.4. - 9.6. \begin{cases} 2x + y + 3z = -5 \\ -x - 3y - z = 8, \\ 2x - 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$9.7. \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 4x = 0 \end{cases} \quad 9.8. \begin{cases} 2x - y + az = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Вариант № 10

$$10.1. \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ -1 & 7 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$10.2. \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$10.3. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10.4. -10.6. \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2y + 2z = -3, \\ 2x + 2y - z = -6. \end{cases}$$

$$10.7. \begin{cases} 6y - x = 0 \\ 2x - 12y = 0 \end{cases} \quad 10.8. \begin{cases} 4x + y + 4z = 0 \\ ax - 2y - z = 0 \\ 7x - y + az = 0 \end{cases} .$$

Вариант 2.

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $4A + X - 2B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 54 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ x + 4y = -13 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 5z = -5 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} -x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

Вариант 2.

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $4A + X - 2B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 54 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ x + 4y = -13 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 5z = -5 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} -x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

Вариант 3.

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $2A - X - 3B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ 3x + 4y - z = 8 \\ 4x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x - 2y - 12z = 0 \\ 5x + 4y + 10z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} -x - y + 3z = 4 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$

Вариант 4

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $6A - 2X + 5B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} x - 3y - 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 3 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 0 \\ x - 9y + 6z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} x + 4y - 3z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

Вариант 5

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $3A - 2X + 5B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 26 & 32 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 4x - 5y = 23 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} 4x + 5y + 2z = 5 \\ 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ 6x - y + z = 0 \\ 4x + y - 11z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3 \\ -x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + 9y - 4z = -5 \end{cases}$

Вариант 6

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $4A - 2X - 3B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 10 & -25 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} x - 3y - 4z = 5 \\ 2x + 4y + 3z = -3 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3 \\ x - 5y + 3z = 3 \\ 2x - y + z = 6 \end{cases}$

Вариант 7.

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $2A - X - 3B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 37 & 37 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y - 2z = -4 \\ 2x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} -3x - y + z = 8 \\ -2x + 4y + 3z = 3, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$

1. Найти обратную матрицу.

1.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

1.2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Решить матричное уравнение $AX=B$.

2.1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 24 & 3 & 1 \\ 31 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$.

3.1. $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -25 \\ -2 & 29 \end{pmatrix}$

3.2. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 40 \\ -33 & -38 \end{pmatrix}$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$

4.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 78 & -48 \end{pmatrix}$

4.2. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 32 \\ -42 & 50 \end{pmatrix}$

1. Найти обратную матрицу.

1.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

1.2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Решить матричное уравнение $AX=B$.

2.1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 24 & 3 & 1 \\ 31 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$.

3.1. $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -25 \\ -2 & 29 \end{pmatrix}$

3.2. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 40 \\ -33 & -38 \end{pmatrix}$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$

4.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 78 & -48 \end{pmatrix}$

4.2. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 32 \\ -42 & 50 \end{pmatrix}$

1. Решить матричное уравнение $AX=B$.

1.1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 24 & 3 & 1 \\ 31 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot A=B$.

2.1. $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -25 \\ -2 & 29 \end{pmatrix}$

2.2. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 40 \\ -33 & -38 \end{pmatrix}$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B=C$

3.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 78 & -48 \end{pmatrix}$

3.2. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 32 \\ -42 & 50 \end{pmatrix}$

4. Решить СЛАУ методом Крамера:

4.1.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -3 \\ 2x + 4y - z = 5 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

4.2.
$$\begin{cases} x - y + 7z = -3 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \\ x + 2y + 6z = 1 \end{cases}$$

5. Решить систему однородных уравнений:

5.1.
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

5.2.
$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 4x - y + 6z = 0 \end{cases}$$

6. Исследовать СЛАУ на совместность:

6.1.
$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 5 \\ x + \quad \quad 3z = -2 \end{cases}$$

6.2.
$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2 \\ -2x + 2y - z = -3 \\ x - 10y + 8z = 3 \end{cases}$$

6.3.
$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 3 \\ 3x + y + z = 5 \\ -x - 3y + 9z = 2 \end{cases}$$

7. Решить матричное уравнение $AX=B$.

$$7.1. \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 24 & 3 & 1 \\ 31 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7.2. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7.3. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A=B$.

$$8.1. X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -25 \\ -2 & 29 \end{pmatrix}$$

$$8.2. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 40 \\ -33 & -38 \end{pmatrix}$$

9. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B=C$

$$9.1. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 78 & -48 \end{pmatrix}$$

$$9.2. \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 32 \\ -42 & 50 \end{pmatrix}$$

10. Решить СЛАУ методом Крамера:

$$10.1. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -3 \\ 2x + 4y - z = 5 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad 10.2. \begin{cases} x - y + 7z = -3 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \\ x + 2y + 6z = 1 \end{cases}$$

11. Решить систему однородных уравнений:

$$11.1. \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \quad 11.2. \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 4x - y + 6z = 0 \end{cases}$$

12. Исследовать СЛАУ на совместность:

$$12.1. \begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 5 \\ x + 3z = -2 \end{cases} \quad 12.2. \begin{cases} x - 4y + 3z = 2 \\ -2x + 2y - z = -3 \\ x - 10y + 8z = 3 \end{cases} \quad 12.3. \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 3 \\ 3x + y + z = 5 \\ -x - 3y + 9z = 2 \end{cases}$$

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.**задачи**

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $3A - 2X + 4B = 0$.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Найти матрицу X из уравнения: $4A + X - 2B = 0$.

3. Найти матрицу $C = 2A + B$ и $D = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Можно ли вычислить } B * A? \text{ Если да, то вычислить } B * A.$$

5. Вычислить определители:

5.1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} =$

5.2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

6. В определителе $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

найти минор и алгебраическое дополнение A_{23} .

Вариант 1.

1 (16)	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X из уравнения: $3A - 2X + 4B = 0$.
2 (16)	Вычислить произведение матриц $C = A * B$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Можно ли вычислить $B * A$? Если да, то вычислить $B * A$.
3 (16)	Найти обратную матрицу к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4 (16)	Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & -24 \\ 28 & -7 \end{pmatrix}$
5 (16)	Решить систему уравнений методом обратной матрицы: $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 7x + 2y = 18 \end{cases}$
6 (26)	Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} 2x - 5y + z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$
7 (26)	Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$
8 (16)	Исследовать СЛАУ на совместность: $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 2x - 5y + 4z = 1 \\ 3x - 6y + 7z = 2 \end{cases}$

Вариант № 21.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 4)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -5)$. Привести полученное уравнение к общему виду, с угловым коэффициентом и в отрезках на осях. **Построить график.**
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 1, 2)$; $M_2(2, -5, 5)$, $M_3(1, 2, 0)$. Записать общее уравнение.
3. Записать уравнение прямой, зная, какие отрезки она отсекает от осей координат: $p = -4$, $q = 5$; где $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и виду с угловым коэффициентом. **Построить график.**
4. Определить площадь треугольника, образованного осями координат и графиком прямой $7x + 3y - 42 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, 2)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $4x + 2y - 7 = 0$.
6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-10, 12)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 10.
7. Найти **точку пересечения** прямых $2x - 5y - 9 = 0$ и $7x + 6y - 8 = 0$. Найти острый угол между прямыми.
8. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(-2; 3)$ к прямой $-4x + 3y + 8 = 0$.
9. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тысяч рублей в месяц, а переменные – 300 рублей за единицу продукции. Цена часов – 500 рублей. Составить функцию выручки и издержек. Построить графики. Составить функцию прибыли. Найти точку безубыточности.
10. При цене 100 рублей покупают 30 единиц товара, а при цене 140 рублей – только 20 единиц. Поставщик продаёт 8 единиц при цене – 150 рублей и 15 единиц при цене 255 рублей. Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

Вариант № 22.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4, -3)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-3, 2)$. Привести полученное уравнение к общему виду, с угловым коэффициентом и в отрезках на осях. **Построить график.**
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 1, 2)$; $M_2(2, -5, -1)$, $M_3(3, 5, 1)$. Записать общее уравнение.
3. Записать уравнение прямой, зная, какие отрезки она отсекает от осей координат: $p = 4$, $q = -5$; где $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и виду с угловым коэффициентом. **Построить график.**
4. Определить площадь треугольника, образованного осями координат и графиком прямой $x - 8y + 24 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5, 4)$ и составляющей 135° с осью Ox .
6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3, 4)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 8.
7. Найти точку пересечения прямых $3x + 4y - 10 = 0$ и $-x + 5y - 3 = 0$. Найти острый угол между прямыми.
8. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(3, 1)$ к прямой $-x + 5y - 3 = 0$.
9. Постоянные издержки при производстве некоторой продукции составляют 125 тысяч рублей в месяц, а переменные – 700 рублей за единицу продукции. Продукция продаётся по цене 1200 рублей за единицу. Составить функцию прибыли. Определить точку безубыточности. Построить график. Сколько единиц продукции необходимо произвести, чтобы прибыль составила 105 тысяч рублей в месяц.
10. Прибыль от продажи первого товара определяется функцией $12x - y = 23$, а от продажи второго $9x - 2y - 1 = 0$, где x – количество товара, а y – прибыль в тыс. руб. Определить, начиная с какого количества, продажа второго товара будет прибыльной.

Вариант № 23.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4, 0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-1, 4)$. Привести полученное уравнение к общему виду, с угловым коэффициентом и в отрезках на осях. **Построить график.**
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0, 1, -1)$; $M_2(2, -3, 1)$, $M_3(2, -2, 1)$. Записать общее уравнение.
3. Записать уравнение прямой, зная, какие отрезки она отсекает от осей координат: $p = -1$, $q = 3$; где $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и виду с угловым коэффициентом. **Построить график.**
4. Определить площадь треугольника, образованного осями координат и графиком прямой $7x + 5y - 140 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1, 2)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $3x - y + 5 = 0$.
6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-10, 12)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 10.
7. Найти **точку пересечения** прямых $3x + 4y - 2 = 0$ и $5x + 11y + 1 = 0$. Найти острый угол между прямыми.
8. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(-2; 3)$ к прямой $3x + 4y - 2 = 0$.
9. Фабрика продаёт одну единицу продукции по цене 1,2 рубля за штуку. Постоянные издержки составляют 300 рублей в день, а переменные – 0,9 рублей за штуку. Найти точку безубыточности построить график. Сколько единиц продукции фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?
10. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются функциями:

$$\begin{cases} y = 240 + 60x \\ y = 320 + 40x \end{cases}$$
, где x – сотни километров, а y – расходы в тыс. руб.
Определить, начиная с какого времени, перевозка вторым транспортным средством будет экономичнее.

Вариант № 24.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1, 6)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (4, -1)$. Привести полученное уравнение к общему виду, с угловым коэффициентом и в отрезках на осях. **Построить график.**
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 0, -1)$; $M_2(3, 1, -1)$, $M_3(0, -2, 1)$. Записать общее уравнение.
3. Записать уравнение прямой, зная, какие отрезки она отсекает от осей координат: $p = -1$, $q = 5$; где $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и виду с угловым коэффициентом. **Построить график.**
4. Определить площадь треугольника, образованного осями координат и графиком прямой $7x + 3y - 84 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5, -1)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $2x - 5y + 7 = 0$.
6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(12, -9)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 15.
7. Найти точку пересечения прямых $4x - y - 9 = 0$ и $x - 6y - 8 = 0$. Найти острый угол между прямыми.
8. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(-4, 1)$ к прямой $x - 6y - 8 = 0$.
9. Фабрика продаёт одну единицу продукции по цене 30 рублей за штуку. Постоянные издержки составляют 5000 рублей в день, а переменные – 15 рублей за штуку. Найти точку безубыточности построить график. Сколько единиц продукции фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 20% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?
10. Прибыль от продажи 80 шт. изделий составила 210 руб., а от 150 изделий – 450 рублей. Определить функцию прибыли, если считать, что она линейна. Построить график.

Вариант № 25.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, -1)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (4, 2)$. Привести полученное уравнение к общему виду, с угловым коэффициентом и в отрезках на осях. **Построить график.**
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 0, -3)$; $M_2(-2, -1, 3)$, $M_3(1, 2, 0)$. Записать общее уравнение.
3. Записать уравнение прямой, зная, какие отрезки она отсекает от осей координат: $p = -2$, $q = 1$; где $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и виду с угловым коэффициентом. **Построить график.**
4. Определить площадь треугольника, образованного осями координат и графиком прямой $8x - 3y + 48 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-5, 6)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $2x - y + 9 = 0$.
6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4, 0)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 6.
7. Найти **точку пересечения** прямых $7x + y + 3 = 0$ и $2x + 3y - 10 = 0$. Найти острый угол между прямыми.
8. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(1; -9)$ к прямой $8x + 6y - 1 = 0$.
9. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 20 тысяч рублей в месяц, а переменные – 600 рублей за единицу продукции. Цена часов – 900 рублей. Составить функцию выручки и издержек. Построить графики. Составить функцию прибыли. Найти точку безубыточности.
10. При цене 150 рублей покупают 30 единиц товара, а при цене 190 рублей – только 10 единиц. Поставщик продаёт 11 единиц при цене – 203 рубля и 5 единиц при цене 185 рублей. Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

1. Прибыль от продажи 50 шт. изделий составила 100 руб., а от 150 изделий – 240 рублей. Определить функцию прибыли, если считать, что она линейна. Построить график.
2. Расходы от перевозки первым транспортным средством определяются функцией $x - 3y - 14 = 0$, а вторым $4x + 3y - 11 = 0$, где x – сотни километров, а y – расходы в тыс. руб. Определить, начиная с какого времени, перевозка вторым транспортным средством будет экономичнее.
3. Настольные лампы продаются по цене 1200 рублей каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс руб в месяц, а переменные – 800 рублей за лампу. Найти точку безубыточности и построить график. Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?
4. Предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями:

$$\begin{cases} p = x + 100 \\ p = -2x + 250 \end{cases}$$
 Найти точку рыночного равновесия, построить графики.

Прямая и плоскость в пространстве.

6. Даны точки $P = (3; -1; 4)$ и $Q = (2; 2; -3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P и перпендикулярно отрезку PQ .
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M = (2; -1; 4)$, $N = (0; 2; -5)$ и $P = (1; 3; 0)$.
8. Найти угол между плоскостями $x + 2y + z - 11 = 0$ и $2x - 2y + 5z - 201 = 0$.
9. Через точку $A = (-1; 2; 5)$ провести плоскость, параллельную плоскости $4x + y - 4z + 5 = 0$.
10. Составить уравнение прямой ℓ_1 параллельной прямой $\ell: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-3}$ и проходящей через точку $K = (2; 2; -5)$.
11. Определить, при каком a прямые $\ell_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{4}$ и $\ell_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ пересекаются, и для найденного значения a составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.
12. Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-3}$ и плоскостью $\sigma: -6x + y - 3z + 13 = 0$.
13. Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-3}$ и плоскости $\sigma: -6x + y - 3z + 13 = 0$.

1. Прибыль от продажи 50 шт. изделий составила 100 руб., а от 150 изделий – 240 рублей. Определить функцию прибыли, если считать, что она линейна. Построить график.
2. Расходы от перевозки первым транспортным средством определяются функцией $x - 3y - 14 = 0$, а вторым $4x + 3y - 11 = 0$, где x – сотни километров, а y – расходы в тыс. руб. Определить, начиная с какого времени, перевозка вторым транспортным средством будет экономичнее.
3. Настольные лампы продаются по цене 1200 рублей каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс руб в месяц, а переменные – 800 рублей за лампу. Найти точку безубыточности и построить график. Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?
4. Предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями:

$$\begin{cases} p = x + 100 \\ p = -2x + 250 \end{cases}$$
 Найти точку рыночного равновесия, построить графики.

Прямая и плоскость в пространстве.

6. Даны точки $P = (3; -1; 4)$ и $Q = (2; 2; -3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P и перпендикулярно отрезку PQ .
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M = (2; -1; 4)$, $N = (0; 2; -5)$ и $P = (1; 3; 0)$.
8. Найти угол между плоскостями $x + 2y + z - 11 = 0$ и $2x - 2y + 5z - 201 = 0$.
9. Через точку $A = (-1; 2; 5)$ провести плоскость, параллельную плоскости $4x + y - 4z + 5 = 0$.
10. Составить уравнение прямой ℓ_1 параллельной прямой $\ell: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-3}$ и проходящей через точку $K = (2; 2; -5)$.
11. Определить, при каком a прямые $\ell_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{4}$ и $\ell_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ пересекаются, и для найденного значения a составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.
12. Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-3}$ и плоскостью $\sigma: -6x + y - 3z + 13 = 0$.
13. Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-3}$ и плоскости $\sigma: -6x + y - 3z + 13 = 0$.

1. Написать уравнение прямой и построить график, если известно, что она отсекает на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляет с осью Ox угол
1) 45° ; 2) 130° ; 3) 60° ; 4) 120° .
2. Найти углы, образуемые с осью Ox следующими прямыми:
1) $2x - 2y + 5 = 0$; 2) $3x + 3y - 7 = 0$; 3) $6x - 3y - 1 = 0$;
4) $7x + 10 = 0$; 5) $3y + 7 = 0$; 6) $15x + 5y - 14 = 0$.
3. Установите, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны, пересекаются; в случае пересечения найдите общую точку прямых:

1) $3y + 4x - 10 = 0$, $x + y - 3 = 0$;	2) $x - 2y + 4 = 0$, $-4x + 8y - 16 = 0$;	3) $3x - 4y = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
---	---	--
4. Найти углы между прямыми:
1) $y = \frac{4}{3}x - 2$ и $y = \frac{1}{7}x + 3$ 2) $y = \frac{5}{3}x + 1$ и $y = 4x - 5$. 3) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$
5. Среди прямых
 $3x - 2y - 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 9 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$,
 $9x - 6y + 17 = 0$, $-6x - 4y + 9 = 0$, $12x + 8y - 13 = 0$, $8x + 12y - 11 = 0$
указать параллельные и перпендикулярные.
6. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $4x + 5y - 20 = 0$. Сделать рисунок.
7. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $y = 4x + 3$. Сделать рисунок.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $y = -3x + 2$. Сделать рисунок.
9. Найти расстояние от точки $P(-3; -1)$ до прямой $6x + 8y + 1 = 0$. Сделать рисунок.
10. Найти точку пересечения прямых $2x - 3y - 5 = 0$ и $3x - 4y - 7 = 0$. Сделать рисунок.
11. Составить уравнение сторон треугольника с вершинами и найти его периметр
а) $A(-2; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(6; 2)$. б) $A(1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 8)$
12. Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6; -6)$ и $B(-3; -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3.
13. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.
14. Записать уравнение сторон трапеции с вершинами $A(-2; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 4)$, $D(6; 2)$.
15. Определить вершины треугольника, если его стороны лежат на прямых $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$ и $x - 4y - 6 = 0$.
Найти периметр треугольника и сделать рисунок.
16. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ в точках A и B . Найти длину отрезка AB . Сделать рисунок.
17. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(6; 2)$ к прямой $4x + 3y - 10 = 0$.
18. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -4)$ параллельно прямой $y = 5x - 7$.
19. Через точку $M(-2; 5)$ проведена прямая перпендикулярная прямой $y = 9 - 4x$. Найти её уравнение и сделать рисунок.

1. Написать уравнение прямой и построить график, если известно, что она отсекает на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляет с осью Ox угол
1) 45° ; 2) 130° ; 3) 60° ; 4) 120° .
2. Найти углы, образуемые с осью Ox следующими прямыми:
1) $2x - 2y + 5 = 0$; 2) $3x + 3y - 7 = 0$; 3) $6x - 3y - 1 = 0$;
4) $7x + 10 = 0$; 5) $3y + 7 = 0$; 6) $15x + 5y - 14 = 0$.
3. Установите, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны, пересекаются; в случае пересечения найдите общую точку прямых:

1) $3y + 4x - 10 = 0$, $x + y - 3 = 0$;	2) $x - 2y + 4 = 0$, $-4x + 8y - 16 = 0$;	3) $3x - 4y = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
---	---	--
4. Найти углы между прямыми:
1) $y = \frac{4}{3}x - 2$ и $y = \frac{1}{7}x + 3$ 2) $y = \frac{5}{3}x + 1$ и $y = 4x - 5$. 3) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$
5. Среди прямых
 $3x - 2y - 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 9 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$,
 $9x - 6y + 17 = 0$, $-6x - 4y + 9 = 0$, $12x + 8y - 13 = 0$, $8x + 12y - 11 = 0$
указать параллельные и перпендикулярные.
6. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $4x + 5y - 20 = 0$. Сделать рисунок.
7. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $y = 4x + 3$. Сделать рисунок.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $y = -3x + 2$. Сделать рисунок.
9. Найти расстояние от точки $P(-3; -1)$ до прямой $6x + 8y + 1 = 0$. Сделать рисунок.
10. Найти точку пересечения прямых $2x - 3y - 5 = 0$ и $3x - 4y - 7 = 0$. Сделать рисунок.
11. Составить уравнение сторон треугольника с вершинами и найти его периметр
а) $A(-2; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(6; 2)$. б) $A(1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 8)$
12. Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6; -6)$ и $B(-3; -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3.
13. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.
14. Записать уравнение сторон трапеции с вершинами $A(-2; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 4)$, $D(6; 2)$.
15. Определить вершины треугольника, если его стороны лежат на прямых $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$ и $x - 4y - 6 = 0$.
Найти периметр треугольника и сделать рисунок.
16. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ в точках A и B . Найти длину отрезка AB . Сделать рисунок.
17. Вычислить длину перпендикуляра, проведённого из точки $M(6; 2)$ к прямой $4x + 3y - 10 = 0$.
18. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -4)$ параллельно прямой $y = 5x - 7$.
19. Через точку $M(-2; 5)$ проведена прямая перпендикулярная прямой $y = 9 - 4x$. Найти её уравнение и сделать рисунок.

Вариант 1.

Вычислить пределы последовательностей:

1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^3 - 7n^5 + 8n^4 - 678}{5n^6 - 3n^4 + 7n^3 + n}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-3} - \sqrt{n+4}}{4n+5}$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} + 6^{n+1}}{6^n - 7^{n+1}}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n)!}{(3n+1)! + (3n-2)!}$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-6}{4n+7} \right)^{3n+5}$

Вариант 2.

Вычислить пределы последовательностей:

1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17n + 32n^2 - 16n^9}{(n^3 + 1)^3}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+7} - \sqrt{3n+1}}{2\sqrt{n}}$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1} + 5^{n-2}}{5^{n+2} - 8^n}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n)!}{(n+1)! + (n-1)!}$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+8}{6n-1} \right)^{3n+12}$

Вариант 3.

Вычислить пределы последовательностей:

1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^9 + 32n^6 - 4n + 1}{5n^6 - 3n^8 + 7n^5 + n^2}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{2n-2} - \sqrt{2n+4})$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 10^{n+2}}{10^{n+2} - 5^{n+1}}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! + (n+1)!}{(n+3)! + n!}$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^{3n^2 + 4}$

Вариант 4.

Вычислить пределы последовательностей:

1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2)^2 - (n^2 + 1)^2}{(2n + 4)^2}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+7} - \sqrt{3n+1}}{4\sqrt{n}}$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12^{n+3} + 5^{n+1}}{5^n - 12^{n+2}}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! + (n+2)!}{(n+1)! + (n-1)!}$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+12}{3n-1} \right)^{2n-2}$

1	Вычислить производную с помощью определения: $y(x) = 3x^2 - 7x + 4$
2	Найти производные от функций. 1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{7} + \frac{1}{4}x - 5$; 2) $y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{x^3} + 2^x$;
3	Вычислить приближённо: $\sqrt{9,12} \approx$
4	Найти промежутки монотонности функции: $y = (x - 2)^3 - 12x - 14$;
5	Найти точки экстремума функции: $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$
6	Издержки производства некоторой продукции имеют вид: $C(x) = 100 + 3x + x^2$, где x - число единиц продукции. Цена на товар составляет 47 у.е. Найти функцию предельной прибыли и найти ее значение в точке 30. Найти максимальную прибыль. При какой цене прибыль будет максимальной?
7	Фотограф заметил, что при цене 110 руб за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. Если повысить цену до 120 руб, то число клиентов снижается до 40. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найти функцию выручки. При каком значении цены выручка достигает своего максимального значения?
8	В гостинице 60 номеров. При цене 300 у.е. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 у.е. в сутки за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?
9	Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 120 д.е. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 д.е. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 д.е. в день, а переменные – 40 д.е. за обед. Найти функцию прибыли, считая линейным соотношение между числом посетителей и ценой за обед. Каково максимальное значение прибыли?
10	Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 тыс. у.е., а издержки производства одной единицы продукции – 7 тыс у.е. Хранение обходится в 3 тыс у.е. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

1	Вычислить производную с помощью определения: $y(x) = 3x^2 - 7x + 4$
2	Найти производные от функций. 1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{7} + \frac{1}{4}x - 5$; 2) $y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{x^3} + 2^x$;
3	Вычислить приближённо: $\sqrt{9,12} \approx$
4	Найти промежутки монотонности функции: $y = (x - 2)^3 - 12x - 14$;
5	Найти точки экстремума функции: $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$
6	Издержки производства некоторой продукции имеют вид: $C(x) = 100 + 3x + x^2$, где x - число единиц продукции. Цена на товар составляет 47 у.е. Найти функцию предельной прибыли и найти ее значение в точке 30. Найти максимальную прибыль. При какой цене прибыль будет максимальной?
7	Фотограф заметил, что при цене 110 руб за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. Если повысить цену до 120 руб, то число клиентов снижается до 40. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найти функцию выручки. При каком значении цены выручка достигает своего максимального значения?
8	В гостинице 60 номеров. При цене 300 у.е. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 у.е. в сутки за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?
9	Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 120 д.е. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 д.е. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 д.е. в день, а переменные – 40 д.е. за обед. Найти функцию прибыли, считая линейным соотношение между числом посетителей и ценой за обед. Каково максимальное значение прибыли?
10	Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 тыс. у.е., а издержки производства одной единицы продукции – 7 тыс у.е. Хранение обходится в 3 тыс у.е. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

Контрольная работа по математике.

Вариант № 1.

1. Вычислить пределы:

1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 4x}{2x^4 + 5x^3 - 3}.$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 15}$

1.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}.$

2. Вычислить производные функций:

2.1. $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

2.2. $y = x^3 \sin(3x - 6).$

3. Найти d^2y от функции $y = \sqrt{x - 1}.$

4. . Составить уравнение касательной к графику функции $y = 4x^5 - 7x + 3$ в точке $a = 0.$

5. Используя дифференциал, вычислить приближённо:

$$\sqrt[4]{80.5} \approx$$

6. Найти экстремумы функции и определить характер этих точек:

$$y = x^3 - 3x^2 + 5x - 123.$$

Контрольная работа по математике.

Вариант № 2.

1. Вычислить пределы:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x^4 - 3x + 1}{x^7 - 3x^7 + 4}.$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - x - 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 6x};.$

3. Вычислить производные:

3.1. $y = (x^2 + 2)^4,$

3.2. $y = \frac{4 - 5x}{1 + 7x}.$

4. Найти $d^2 y$ от функции $y = 4x^5 - 7x^2 + 3.$

5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 4x^5 - 7x + 3$ в точке $a = 0.$

6. Используя дифференциал, вычислить приближённо: $\sqrt[3]{215} \approx$

7. Найти экстремумы функции и определить характер этих точек:

$$y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$$

Контрольная работа по математике.

Вариант № 3.

1. Вычислить пределы:

1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{2x^3 - 4x + 2};$

1.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x - 5}$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 5x \cdot \operatorname{ctg} 6x; .$

2. Вычислить производные:

2.1. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x^3}$

2.2. $y = x \cdot e^{-x^2} .$

3. Найти $d^3 y$ от функции $y = x \cdot \sin x$.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x}$ в точке $a = -3$.

5. Используя дифференциал, вычислить приближённо: $\sqrt[3]{65} \approx$

6. Найти экстремумы функции и определить характер этих точек:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Контрольная работа по математическому анализу.
Вариант № 1.

1. Вычислить интеграл $\int (12x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 2)dx$.
2. Задана функция предельного дохода $R'(x) = 40 - 0,08x$. Найти функцию дохода и закон спроса. Каков будет доход при реализации 100 изделий?
3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0,9x^2 + 0,1x$.
 - 3.1. Какую часть дохода получают 12% наиболее низкооплачиваемого населения?
 - 3.2. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.
4. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеют следующий вид:
 $C'(t) = 5 + 2t, R'(t) = 37 - 6t$.
5. Известны законы спроса и предложения:
$$\begin{cases} p(x) = 98 + 11x - 2x^2 \\ p(x) = 4x - 26 \end{cases}$$
Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если установлено рыночное равновесие.

Контрольная работа по математическому анализу.
Вариант № 2.

1. Вычислить интеграл $\int (14x^6 + 12x^5 - 8x^3 + 5)dx$.
2. Задана функция предельного дохода $R'(x) = 64 - 0,04x - 0,006x^2$.
Найти функцию дохода и закон спроса.
3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0,87x^2 + 0,13x$.
 - 3.1. Какую часть дохода получают 8% наиболее низкооплачиваемого населения?
 - 3.2. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.
4. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеют следующий вид:
 $C'(t) = 13 + 4t, R'(t) = 43 - 6t$.
5. Известны законы спроса и предложения:
$$\begin{cases} p(x) = 44 - x^2 \\ p = x^2 + 2x + 20 \end{cases}$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если установлено рыночное равновесие.

Контрольная работа по математическому анализу.
Вариант № 3.

1. Вычислить интеграл $\int (5x^4 - 16x^3 + 6x + 14)dx$.
2. Задана функция предельного дохода $R'(x) = 53 - 0,02x - 0,003x^2$.
Найти функцию дохода и закон спроса.
3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0,96x^2 + 0,04x$.
 - 3.1. Какую часть дохода получают 8% наиболее низкооплачиваемого населения?
 - 3.2. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.
4. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеют следующий вид:
 $C'(t) = 15 + 5t, R'(t) = 39 - 7t$.
5. Известны законы спроса и предложения:
$$\begin{cases} p(x) = 89 - x^2 \\ 10x - 7p + 210 = 0 \end{cases}$$
Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если установлено рыночное равновесие.

Контрольная работа по математическому анализу.
Вариант № 4.

1. Вычислить интеграл $\int (15x^4 + 12x^3 - 6x + 4)dx$.
2. Задана функция предельного дохода $R'(x) = 62 - 0,03x - 0,006x^2$.
Найти функцию дохода и закон спроса.
3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0,84x^2 + 0,16x$.
 - 3.1. Какую часть дохода получают 10% наиболее низкооплачиваемого населения?
 - 3.2. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.
4. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеют следующий вид:
 $C'(t) = 11 + 5t, R'(t) = 47 - 3t$.
3. Известны законы спроса и предложения:
$$\begin{cases} p(x) = 124 - x^2 \\ p = 6x - 11 \end{cases}$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если установлено рыночное равновесие.

Вариант 21.

1. (2 балла) Вычисление угла между векторами. Условие перпендикулярности и коллинеарности векторов.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 3, 2)$; $M_2(1, 1, -5)$, $M_3(3, 4, -2)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+17}{3}$ и плоскости $\sigma: 3x - 4y + 2z + 11 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, -m, 3)$ и $\vec{d} = (m, -1, -44)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+17}{3}$ и плоскостью $\sigma: 3x - 4y + 2z + 11 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{199 + 277x + 321x^5 + 468x^6}{117x^6 - 499x^4 + 243}$; .
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 11x^2 - 9x + 15$
8. (3 балла) В гостинице 60 номеров. При цене 300 у.е. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 у.е. в сутки за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?

Вариант 22.

1. (2 балла) Точка пересечения прямой и плоскости. Формула для нахождения.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 2, -4)$; $M_2(-1, 1, 11)$, $M_3(3, 2, -2)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+9}{3}$ и плоскости $\sigma: x + 5y - z - 15 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, m, 56)$ и $\vec{d} = (m, -6, -2)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+9}{3}$ и плоскостью $\sigma: x + 5y - z - 15 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{323x^3 - 16x^2 + 108x^4}{244x^3 + 549x^2 - 81x^4}$;
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 31x^2 + 5x - 9$
8. (3 балла) Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 420 д.е. за обед бывает 60 посетителей, а при цене 360 д.е. за обед число посетителей возрастает до 90. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 1800 д.е. в день, а переменные – 160 д.е. за обед. Найти функцию прибыли, считая линейным соотношением между числом посетителей и ценой за обед. Каково максимальное значение прибыли? Какова должна быть цена?

Вариант 23.

1. (2 балла) Непрерывные функции. Определение. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3, 2, -6)$; $M_2(2, 3, -4)$, $M_3(3, 5, -4)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x-8}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-8}{5}$ и плоскости $\sigma: 4x - 2y + 3z + 10 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, m, -2)$ и $\vec{d} = (m, -9, 45)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x-8}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-8}{5}$ и плоскостью $\sigma: 4x - 2y + 3z + 10 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{398x^3 + 278x^2 - 812x^5}{114x^5 - 678x^3 + 946}$;
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 23 - 56x - 8x^2$
8. (3 балла) В гостинице 130 номеров. При цене 500 д.е. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 450 д.е. в сутки за номер, то занято 75 номеров. Суточные издержки составляют 120 д.е. за номер. Найти максимальное значение прибыли, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?

Вариант 24.

1. (2 балла) Точки разрыва и их классификация. Примеры.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 1, -5)$; $M_2(2, -4, 4)$, $M_3(3, 1, -3)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x-7}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ и плоскости $\sigma: -x + 3y + 2z - 9 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, -8m, 12)$ и $\vec{d} = (m, 3, 9)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x-7}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ и плоскостью $\sigma: -x + 3y + 2z - 9 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{629x^2 - 545x + 237x^7 - 288x^8}{347x^3 + 4x^8 - 679x^7};$$
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 78 - 35x - 33x^2$
8. (3 балла) Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 390 д.е. за обед бывает 50 посетителей, а при цене 330 д.е. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 1200 д.е. в день, а переменные – 130 д.е. за обед. Найти функцию прибыли, считая линейным соотношением между числом посетителей и ценой за обед. Каково максимальное значение прибыли? Какова должна быть цена?

Вариант 31.

1. (2 балла) Определение характера монотонности с помощью производной.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(4, 6, 4)$; $M_2(-1, 1, -11)$, $M_3(1, 3, -5)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{-3}$ и плоскости $\sigma: x + 2y - z - 12 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 2m, -9)$ и $\vec{d} = (m, 3, 24)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{-3}$ и плоскостью $\sigma: x + 2y - z - 12 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-6x^3}{3x^3+7x+10}$;.
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 17x^2 + 11x + 56$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -2x + 150$, где x - число единиц продукции. Фиксированные издержки производства составляют 360 у.е, а переменные 30 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 32.

1. (2 балла) Ортонормированные системы векторов.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 3, 17)$; $M_2(1, -1, 9)$, $M_3(-1, 1, 7)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-7}{3}$ и плоскости $\sigma: 3x + 2y - z + 8 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 2m, 7)$ и $\vec{d} = (m, 11, 16)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-7}{3}$ и плоскостью $\sigma: 3x + 2y - z + 8 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x-5x^4}{2x^4+5x^2-20x}$;
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 17x^2 - 8x - 49$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,01x + 70$, где x - число единиц продукции.
Фиксированные издержки производства составляют 900 у.е, а переменные 50 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 33.

1. (2 балла) Точка пересечения двух прямых. Формулы для нахождения этой точки.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 4, 1)$; $M_2(-1, 8, -1)$, $M_3(0, 2, 1)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $\sigma: -2x + y + 4z - 6 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, m, 4)$ и $\vec{d} = (m, -2, -72)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью $\sigma: -2x + y + 4z - 6 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x+3x^3}{2x^3-4x+2}$;
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 9x^2 - 15x + 26$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,4x + 400$, где x - число единиц продукции. Фиксированные издержки производства составляют 2800 у.е, а переменные 120 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 34.

1. (2 балла) Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0, 1, 10)$; $M_2(-1, 1, 7)$, $M_3(2, -8, 7)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+1}{4} = \frac{y+10}{-2} = \frac{z-4}{2}$ и плоскости $\sigma: 3x + y - z + 9 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 3m, -5)$ и $\vec{d} = (m, -7, 20)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+1}{4} = \frac{y+10}{-2} = \frac{z-4}{2}$ и плоскостью $\sigma: 3x + y - z + 9 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$;
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 10x^2 - 33x - 44$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,025x + 590$, где x - число единиц продукции.
Фиксированные издержки производства составляют 12 000 у.е, а переменные 230 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 35.

1. (2 балла) Левая и правая производные. Условие дифференцируемости функции.
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(6, -4, -4)$; $M_2(3, -2, -6)$, $M_3(1, 2, -2)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+7}{2} = \frac{y-12}{-5} = \frac{z+6}{3}$ и плоскости $\sigma: 2x + 2y - z - 7 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 7m, 49)$ и $\vec{d} = (m, 5, -6)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x+7}{2} = \frac{y-12}{-5} = \frac{z+6}{3}$ и плоскостью $\sigma: 2x + 2y - z - 7 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{123x^2 + 378x^4 + 390x^3}{216x^3 - 42x^4 + 1221}$.
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 34 - 41x - 19x^2$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,04x + 730$, где x - число единиц продукции. Фиксированные издержки производства составляют 213000 у.е, а переменные 322 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 36.

1. (2 балла) Угол между двумя плоскостями, условия перпендикулярности и параллельности плоскостей .
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 4, 1); M_2(-1, 8, -1), M_3(0, 2, 1)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла). Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-5}{2}$ и плоскости $\sigma: 2x + 6y + 15z - 48 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 8m, 21)$ и $\vec{d} = (m, 2, -16)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z-5}{2}$ и плоскостью $\sigma: 2x + 6y + 15z - 48 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1334 + 253x^6 - 456x^4 + 123x^2}{871x^5 - 11x^6 + 662x};$$
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 27x^2 + 38x + 276$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,06x + 350$, где x - число единиц продукции. Фиксированные издержки производства составляют 1400 у.е, а переменные 272 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.

Вариант 37.

1. (2 балла) Угол между двумя плоскостями, условия перпендикулярности и параллельности плоскостей .
2. (2 балла) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 3, 1)$; $M_2(5, -1, -6)$, $M_3(-2, 5, 5)$. Записать общее уравнение.
3. (3 балла) . Найти точку пересечения прямой $\ell : \frac{x+2}{-7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{1}$ и плоскости $\sigma : 2x - 5y + 4z + 9 = 0$.
4. (2 балла) Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{c} = (m, 1, -8)$ и $\vec{d} = (m, 2m, 21)$ будут взаимно перпендикулярны.
5. (3 балла) Найти угол между прямой $\ell : \frac{x+2}{-7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{1}$ и плоскостью $\sigma : 2x - 5y + 4z + 9 = 0$.
6. (2 балла) Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{199 + 277x + 321x^5 + 468x^6}{117x^6 - 499x^4 + 243}$;.
7. (3 балла) Вычислить производную с помощью определения:
 $y(x) = 26x^2 - 58x + 137$
8. (3 балла) Закон спроса на некоторый товар имеет вид:
 $p(x) = -0,08x + 382$, где x - число единиц продукции. Фиксированные издержки производства составляют 4800 у.е, а переменные 132 у.е. за единицу товара. Найти максимальную прибыль и определить, какова должна быть цена на товар, обеспечивающая максимальную прибыль.