

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**
**«Пермский государственный национальный исследовательский
университет»**

Колледж профессионального образования

Математика

Методические рекомендации

по выполнению практических заданий по дисциплине
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности 38.02.07 Банковское дело

Утверждено на заседании ПЦК
общеобразовательных и гуманитарных
дисциплин

Протокол № 10 от «25» мая 2022 г.

Пермь 2022

Составитель: Власова И.В, преподаватель Колледжа профессионального образования;

Журавлева Анастасия Валерьевна преподаватель Колледжа профессионального образования;

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Практические работы по дисциплине «Математика»	5
3. Список источников	115

1. ВВЕДЕНИЕ

В результате освоения дисциплины «Математика» обучающийся должен уметь:

- выполнять арифметические действия над числами;
- находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;
- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах;
- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;
- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

Практическая работа №1

Погрешности приближений и вычислений

Раздел 1. Действительные числа

Тема 1.1. Действительные числа. Приближённые вычисления и вычислительные средства.

Цель работы: Определение абсолютной и относительной погрешностей, применение правила округления и записи приближенных чисел

Краткая теория

Одним из самых основных понятий в математике является число.

Натуральные числа: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Целые числа: $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Рациональные числа: $Q = \{m/n, \text{ где } m - \text{целое число, а } n - \text{натуральное}\}$.

Рациональные числа - это бесконечные периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа – это числа, не представимые в виде обыкновенной дроби, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби. Например: $\pi = 3,1416\dots$, $e = 2,7182\dots$; $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

Все эти числа называют действительными числами – R .

Определение модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$.

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Основное свойство пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Определение процента: 1% - это 1/100 часть числа.

Пусть X - точное значение некоторой величины, а x - наилучшее из известных ее приближенных значений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения x определяется разностью $X-x$. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину:

$$e_x = |X - x|.$$

Величина e_x , называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения x , в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно точное значение X . Вместе с тем, на практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое (по возможности наименьшее) число Δx , для которого справедливо неравенство

$$\Delta x \geq |X - x|.$$

Число Δx называется *предельной абсолютной погрешностью*, или

границей абсолютной погрешности приближения x .

Предельная абсолютная погрешность приближенного числа x - это всякое число Δx , не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

Неравенство $\Delta x \geq |X - x|$ позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x,$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ) и верхней границы (ВГ) приближения x :

$$НГ_x = x - \Delta x; \quad ВГ_x = x + \Delta x.$$

Во многих случаях значения границы абсолютной ошибки Δx , так же как и наилучшие значения приближения x , получаются на практике в результате измерений. Пусть, например, в результате повторных измерений одной и той же величины x получены значения: 5,2; 5,3; 5,4; 5,3. В этом случае естественно принять за наилучшее приближение измеряемой величины среднее значение $x=5,3$. Очевидно также, что граничными значениями величины x в данном случае будут $НГ_x = 5,2$, $ВГ_x = 5,4$, а граница абсолютной погрешности x может быть определена как половина длины интервала, образуемого граничными значениями $НГ_x$ и $ВГ_x$,

$$\text{т.е. } \Delta x = \frac{5,4 - 5,2}{2} = 0,1.$$

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения характеризуется величиной *относительной погрешности*, которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X (когда оно неизвестно, то к модулю приближения x).

Предельной относительной погрешностью (или *границей относительной погрешности*) δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x :

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Формула позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:

$$\Delta x = |x| * \delta x.$$

Относительную погрешность выражают обычно в процентах.

Задачи:

1. Найти абсолютную погрешность приближения числа 3,9 числом 4.

2. Записать оценку величины n в виде двойного неравенства, если $n = 0,385 \pm 0,001$.
3. Округлить число 734,256 до десятых.
4. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14.
5. Записать число 0,00018 в стандартном виде.
6. Найти значение выражения $(2,5 \cdot 10^3) : (5 \cdot 10^{-2})$
7. Найти абсолютную погрешность приближения числа 7,4 числом 7.
8. Записать оценку величины n в виде двойного неравенства, если $n = 2,34 \pm 0,01$.
9. Округлить число 5641,8563 до сотен.
10. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ числом 0,7.
11. Записать число $3,6 \cdot 10^{-5}$ в виде десятичной дроби.
12. Найти значение выражения $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^2)$.

Практическая работа №2

Решение уравнений и неравенств первой и второй степени.

Раздел 1. Действительные числа

Тема 1.2. Уравнения и неравенства первой и второй степени

Цель работы. Закрепление навыков решения уравнений и неравенств первой и второй степени.

Теория

Линейные уравнения

Уравнение вида $ax + b = 0$, где x – переменная, a и b – некоторые действительные числа, называется уравнением степени не выше первой. Если $a = b = 0$, то решением уравнения $ax + b = 0$ является любое число. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

называется линейным и имеет ровно одно решение

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a , b и c – некоторые действительные числа, называется уравнением степени не выше второй. Если $a = 0$, то уравнение примет вид $bx + c = 0$

Определение: Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (1), в котором левая часть – многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая – нуль, называется уравнением второй степени или квадратным.

В нормальном виде квадратное уравнение записывают так: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, b и c – любые действительные числа, а x – неизвестное.

Если в уравнении $a = 1$, то уравнение называется *приведенным*.

Оно обычно записывается в таком виде: $x^2 + px + q = 0$, где p и q – любые числа.

Всякое уравнение вида (1) можно сделать приведенным; для этого достаточно все его члены разделить на a .

Число $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, а также дискриминантом уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В зависимости от значения дискриминанта D возможны три случая:

1. $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.
2. $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$.
3. $D > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, a \neq 0$.

Если второй коэффициент b четный ($b = 2k$), то для нахождения корней удобно пользоваться формулами: $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, a \neq 0$.

Старайтесь по возможности «работать» с квадратным трехчленом, у которого старший коэффициент a положителен. Этого всегда можно добиться при решении уравнений, неравенств с числовыми коэффициентами.

Если $a = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ является линейным, $bx + c = 0$ (если $b \neq 0$, то $x = -\frac{c}{b}$)

будет уравнением степени не выше первой, которое рассмотрено выше. Если $a \neq 0$, то уравнение рассматриваемого вида называется квадратным уравнением (или уравнением второй степени).

Неполные квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + vx = 0$.

Решим неполное квадратное уравнение $ax^2 + vx = 0$ в общем виде. Вынеся x за скобки, получим: $x(ax + v) = 0$.

- 1) $x_1 = 0$;
- 2) $ax + v = 0$, откуда $x_2 = -\frac{v}{a}$.

В частности, если $v = 0$, то получим: $x_2 = 0$, то есть уравнение имеет лишь один корень.

(Задание для учащихся: привести примеры 2-3 неполных квадратных уравнений данного вида и решить их).

Уравнения вида $ax^2 + c = 0$.

Перенесем свободный член c в правую часть и разделим уравнение на

а; тогда получим уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, равносильное данному.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1. Пусть a и c — одинакового знака (то есть либо оба положительны, либо оба отрицательны); тогда $\frac{c}{a}$ есть положительное число, $-\frac{c}{a}$ — отрицательное число. Но мы знаем, что $x^2 \geq 0$, а потому не может равняться отрицательному числу; в этом случае уравнение не имеет решений.

Так, например, уравнение $2x^2 + 3 = 0$ не имеет решений.

Случай 2. Пусть $c=0$. Тогда уравнение примет вид: $x^2 = 0$. Очевидно, что это равенство будет верным только при $x=0$. Значит, при $c=0$ уравнение имеет единственное решение $x=0$.

Случай 3. Числа a и c имеют противоположные знаки (одно из них положительно, а другое отрицательно). Тогда число $\frac{c}{a}$ отрицательно, а противоположное ему число $-\frac{c}{a}$ положительно.

В этом случае уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет два корня: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Следовательно, и исходное уравнение имеет два корня.

Примеры:

$$1) \quad 9x^2 - 4 = 0; x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{2}{3}. \quad 2) \quad x^2 - 1,69 = 0; x_{1,2} = \pm 1,3.$$

$$3) \quad x^2 - 5 = 0; x_{1,2} = \pm \sqrt{5}.$$

Решение неравенств

Цель: Применение полученных знаний для решения неравенств.

Неравенством называется запись, в которой функции соединены знаком (или несколькими знаками) отношения «<», «>», «≤», «≥».

Примеры таких неравенств:

$$f(x) > g(x), f(x) < g(x), f(x) \leq g(x), f(x) \geq g(x).$$

Неравенства $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, называются строгими, а неравенства $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ — нестрогими.

Решением неравенства называется всякое значение переменных, при котором данное неравенство верно. Например, решением неравенства

$f(x) > g(x)$ является всякое значение переменной $x = a$, при котором справедливо неравенство $f(a) > g(a)$, или функция $f(x)$ при $x = a$ принимает большее значение, чем функция $g(x)$.

Задание "решить неравенство" означает, что требуется найти множество всех его решений. Это множество может оказаться пустым — в случае, когда решений нет. Множество всех решений неравенства будем называть его

ответом.

Выделяют три основных свойства неравенств:

1. Можно перенести любой член неравенства из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Можно умножать или делить обе части неравенства на одно и то же положительное число, при этом знака неравенства не меняется.
3. Можно умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, при этом знак неравенства меняется на противоположный.

Наиболее универсальным способом решения неравенств является метод интервалов. Он позволяет свести решение неравенства $f(x) > 0$ ($<, \leq, \geq$) к решению уравнения $f(x) = 0$.

Метод заключается в следующем:

1. Находится ОДЗ неравенства.
2. Неравенство приводится к виду $f(x) > 0$ ($<, \leq, \geq$) (т.е. правая часть переносится влево) и упрощается.
3. Решается уравнение $f(x) = 0$.
4. На числовой оси отмечаются точки, соответствующие корням уравнения $f(x)$. Точки будут не закрашенные, если неравенство строгое, и закрашенные, если оно нестрогое.
5. Все точки, отмеченные на ОДЗ и ограничивающие его, разбивают это множество на так называемые интервалы знакопостоянства. На каждом таком интервале определяется знак функции $f(x)$.
6. Ответ записывается в виде объединения отдельных множеств, на которых $f(x)$ имеет соответствующий знак. Точки, отмеченные закрашенными кружками, в ответ входят, отмеченные пустыми - нет. Точки ОДЗ, являющиеся граничными, включаются (или не включаются) в ответ после дополнительной проверки.

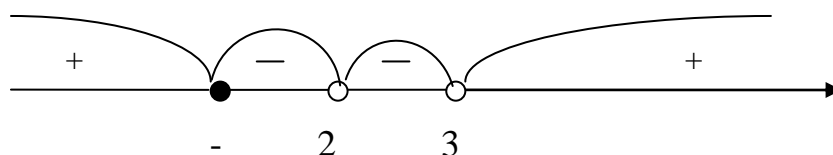
Рассмотрим неравенство $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

Решение:

Разложим числитель на множители $(x - 2)(x + 2)$, а знаменатель путем решения квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ на множители $(x - 2)(x - 3)$.

Перепишем неравенство в виде $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} \leq 0$.

Отметим нули полученного неравенства на координатной оси. Это точки $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$.



Ответом будут являться те интервалы, на которых стоит знак минус, так как исходное неравенство содержит знак « \leq ».

Ответ: $x \in [-2; 2) \cup (2; 3)$.

Задания

Решить уравнения:

- 1) $2 - 3(x + 2) = 5 - 2x$
- 2) $3 - 5(x + 1) = 6 - 4x$
- 3) $0,2 - 2(x + 1) = 0,4x$
- 4) $4x - 5,5 = 5x - 3(2x - 1,5)$
- 5) $4 - 5(3x + 2,5) = 3x + 9,5$
- 6) $5(2 + 1,5x) - 0,5x = 24$
- 7) $3(0,5x - 4) + 8,5x = 18$
- 8) $\frac{x}{3} + \frac{x}{12} = \frac{15}{4}$
- 9) $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3}{2}$
- 10) $\frac{x}{5} - \frac{x}{12} = -3$
- 11) $\frac{x+9}{3} - \frac{x}{5} = 1$
- 12) $\frac{x-4}{3} + \frac{x}{2} = 5$
- 13) $\frac{x-1}{2} = \frac{4+2x}{3}$
- 14) $\frac{x-4}{4} - 2 = \frac{x}{2}$
- 15) $\frac{1}{3}(4x+2) = 2x-1$
- 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- 2) $5x^2 - 7x + 2 = 0$
- 3) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
- 4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
- 5) $6x^2 + x - 1 = 0$
- 6) $-x^2 + 2x + 8 = 0$
- 7) $-x^2 + 7x - 10 = 0$
- 8) $(10x - 4)(3x + 2) = 0$
- 9) $(3x + 1)(6 - 4x) = 0$
- 10) $(3x + 18)(2 - x) = 0$
- 11) $(6 - x)(5x + 40) = 0$
- 12) $(3x - 1)(x + 2) = 20$
- 13) $18x - 3x^2 = 0$
- 14) $4x^2 - 20x = 0$
- 15) $3x^2 + 4x = 0$

Решить неравенства

- 1) $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$
- 2) $\frac{x - 4}{(2x - 5)(3x - 1)} \geq 0$
- 3) $\frac{12 - x}{(18x - 3)(9x - 2)} \geq 0$
- 4) $2x - 5 < 4 - 3(x - 2)$
- 5) $x^2 - 5x + 4 < 0$
- 6) $x^2 > 3x - 2$
- 7) $x^2 - 7x + 12 > 0$
- 8) $x^2 + 4 > 5x$
- 9) $4x - 6 > 1 - 2(x + 1)$
- 10) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$
- 11) $\frac{x-5}{x+2} \leq 0$
- 12) $(x - 1)^2 > x^2 + 2x - 3$
- 13) $(x + 2)^2 < x^2 + 8x + 5$

Практическая работа №3

Вычисление определителей.

Решений систем линейных уравнений

Раздел 1. Действительные числа

Тема 1.3. Определители

Цель. Формировать умения и навыки вычисления определителей второго и третьего порядка, решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными с помощью определителей.

Определителем n -го порядка называется число Δ_n , составленное по определенному правилу и записываемое в виде квадратной таблицы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Где $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ - числовые коэффициенты

Значение определителя Δ_n находится по следующему правилу.

Для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

Пример 1.

Вычислить определитель:

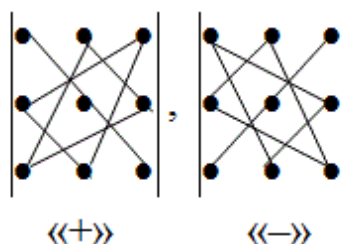
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 8 = 12 - 32 = -20$$

Ответ: -20

Для вычисления определителей третьего порядка существуют такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пример 2. Вычислить определитель методом треугольников.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -$$

$$6 + 9 + 8 + 18 + 24 + 1 = 54 \quad \text{Ответ. } 54$$

Правило Крамера для системы с двумя неизвестными

Рассмотрю систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = s_1 \\ a_2x + b_2y = s_2 \end{cases}$$

На первом шаге вычислю определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы*.

В случае если $\Delta = 0$ правило Крамера не поможет. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$$

Корни уравнения находим по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Пример 3.

Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

Решение: Решим систему по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = -4 + 6 = 2 \neq 0$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, заданная система может быть решена методом Крамера.

Вычислим определитель Δ_x , для этого заменим первый столбец в *главном определителе* на столбец свободных членов, получим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 7 = -4 + 14 = 10,$$

Аналогично, заменяя второй столбец в *главном определителе* на столбец свободных членов, получим

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 3 = 7 - 3 = 4$$

Далее по формулам Крамера находим неизвестные переменные:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: $x=5, y=2$

Правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Случай «три на три» принципиально ничем не отличается от случая «два на два», столбец свободных членов последовательно «прогуливается» слева направо по столбцам главного определителя.

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решу систему по формулам Крамера. Обозначу главный определитель D , тогда

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $x_1=5$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

При решении системы линейных уравнений *методом Крамера* могут встретиться три случая:

Если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение (система совместна и определённа)

Если $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = 0$, система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений (система совместна и неопределённа)

Если $\Delta_{x_1} \neq \Delta_{x_2} \neq \dots \neq 0$, то система линейных уравнений решений не имеет (система несовместна)

Итак, система линейных уравнений с n называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

Задания.

Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$$

1)

$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

2)

$$3) \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 6; \\ 2x - y + z = 3; \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

Практическое занятие №4

Определение свойств функций по графику функции.

Раздел 2. Последовательности и функции

Тема 2.1. Числовая функция, её свойства и график

Цель: Применение полученных знаний для исследования графиков функции.

Задание: Исследовать функции.

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практического занятия.
2. Оформить исследование функции в тетради.

Вариант 1

1. Найти область определения функции $y = x^{-2}$.
2. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$.
Указать, при каких значениях x функция убывает.

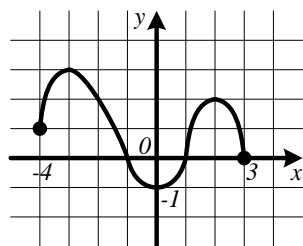


Рис.1

3. Указать функцию, графиком которой является гипербола.

1) $y = \frac{3}{x}$

2) $y = \frac{x}{3}$

3) $y = \frac{x^2}{3}$

4) $y = x^3$

4. Указать функцию, графиком которой **НЕ** является прямая.

- 1) $y = 2x - 8$ 2) $y = \frac{x+2}{8}$ 3) $y = x^2 + 2$ 4) $y = 8x$

5. Соотнести аналитическое и графическое задания функций (рис.2 а – г).

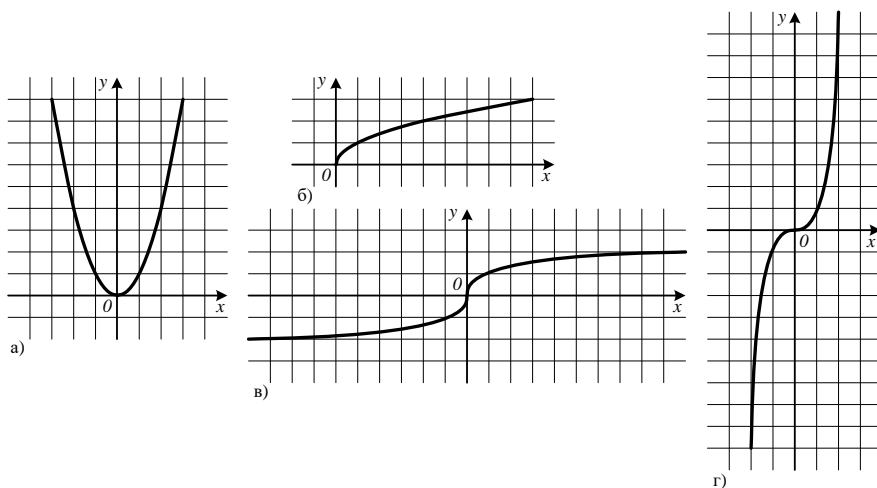


Рис.2

- 1) $y = x^3$ 2) $y = x^2$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = \sqrt[3]{x}$

6. На рисунке 3 изображен график функции $y = f(x)$.

При каких значениях x , выполняется неравенство $f(x) < 0$?

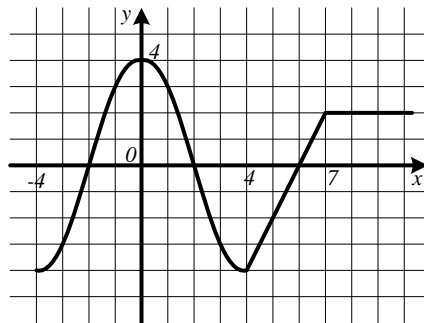


Рис.3

7. Указать функцию, которая убывает на всей числовой прямой.

- 1) $y = \sqrt[3]{x}$ 2) $y = \sqrt{x}$ 3) $y = x^{-3}$ 4) $y = -x^4$

8. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке 4.

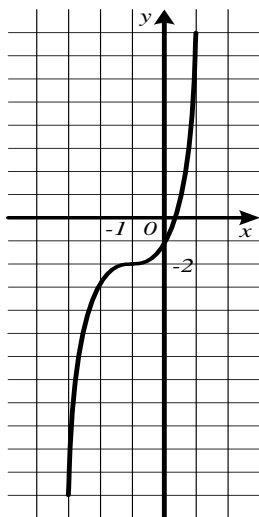


Рис.4

Вариант 2

1. Найти область определения функции $y = (x - 1)^{-2}$.

2. Найти множество значений функции $y = x^4 - 5$.

3. Определить функцию, которая является четной.

1) $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$

2) $y = -x^3 + \frac{1}{x}$

3) $y = x^2 - 2x + 5$

4) $y = x^4 - 22$

4. Указать промежутки возрастания функции $y = \frac{6}{(x-1)^2}$.

1) $(1; +\infty)$
 $(-\infty; 1)$

2) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

3) $(-\infty; +\infty)$

4)

5. На рисунке 5 изображена часть графика функции $y = f(x)$.

Найдите $f(6)$, если известно, что функция $y = f(x)$ нечетная.

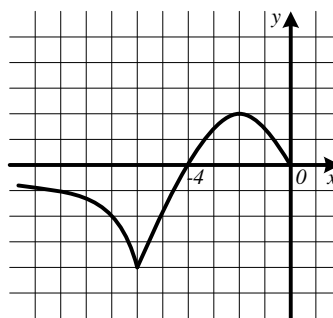


Рис.5

6. На рисунке 6 изображен график функции $y = f(x)$.

Определить, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень.

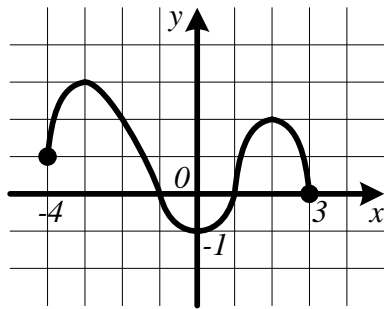


Рис.6

7. Задать аналитически функцию, график которой изображен на данном рисунке 7.

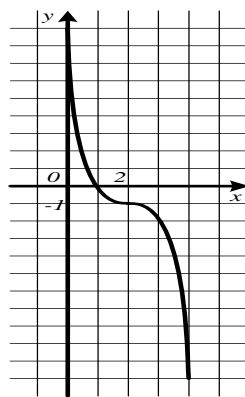


Рис.7

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $y = -(x + 2)^2 - 1$ | 2) $y = -(x - 2)^3 - 1$ |
| 3) $y = (x - 2)^3 - 1$ | 4) $y = -(x - 1)^3 + 2$ |

8. Функция задана формулой $y = \frac{k}{x + 4}$. Определить значение коэффициента k , если известно, что график функции проходит через точку $(-8; 2,4)$.

Практическая работа №5

Вычисление пределов последовательностей и функций.

Раздел 2. Последовательности и функции

Тема 2.3. Предел функции.

Цель. Формировать умения и навыки вычисления пределов.

Краткая теория

Теоремы о пределах.

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0.$$

Следствия.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

2. Если n - натуральное число, то $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

Правила раскрытия неопределённостей:

1) Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и

знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить на множитель, приводящий к неопределённости.

2) Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, зависящую от

иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределённости.

Задания. 1. Вычислите пределы последовательностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{n+6}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+3}{1+2n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+16}{9n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(n-1)^2 - (n+1)^2}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 16n}$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-7} - \sqrt{n+2})$$

2. Вычислите пределы функций:

$$1). \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2x+1} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x}{3x^2 + 5x^3} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 3} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{4x^3 - 6} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4} =$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{4x^2 - 3x} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 27}{x + 3} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 5x - 14}{x + 7} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 15} =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 4} =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^3}{3x^2 - 2x^4} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 5x - 3}{1 - 10x^2 + 2x} =$$

Практическая работа №6

Решение систем уравнений.

Раздел 2. Последовательности и функции

Тема 2.4. Системы уравнений.

Цель. Отработка навыков решения систем

Краткая теория

1. Метод подстановки
2. Метод алгебраического сложения
3. Метод введения новых переменных
4. Графический метод

1. Метод подстановки

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными x, y методом подстановки:

1. Выразить одну переменную через другую из одного уравнения системы (более простого).
2. Подставить полученное выражение вместо этой переменной в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение и найти одну из переменных.
4. Подставить поочерёдно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения в уравнение, полученное на первом шаге, и найти вторую переменную.
5. Записать ответ в виде пар значений, например, $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвёртом шагах.

Пример 1

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy = 6 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Решение

1. Выразим x через y из второго (более простого) уравнения системы $x = 5 + y$.
2. Подставим полученное выражение вместо x в первое уравнение системы $(5 + y) \cdot y = 6$.
3. Решим полученное уравнение:
 $(5 + y)y = 6$;
 $5y + y^2 - 6 = 0$;
 $y^2 + 5y - 6 = 0$;
 $y_1 = -6$,
 $y_2 = 1$.
4. Подставим поочерёдно каждое из найденных значений y в уравнение $x = 5 + y$, тогда получим:
 если $y_1 = -6$, то $x_1 = 5 + (-6) = 5 - 6 = -1$,
 если $y_2 = 1$, то $x_2 = 5 + 1 = 6$.
5. Пары чисел $(-1; -6)$ и $(6; 1)$ — решения системы.

Ответ: $(-1; -6)$ и $(6; 1)$.

2 Метод алгебраического сложения

.

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными x, y методом сложения:

1. Уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных.
2. Сложить или вычесть уравнения.
3. Решить полученное уравнение с одной переменной.

4. Подставить поочерёдно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.
5. Записать ответ в виде пар значений, например, $(x; y)$, которые были найдены.

Пример 2.

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

Решение

Сложим уравнения и решим полученное уравнение с одной переменной:

$$2 \cdot x^2 = 50 | :2$$

$$x^2 = 25;$$

$$x = \pm 5.$$

Подставим поочерёдно каждый из найденных корней уравнения в одно из уравнений исходной системы, например, во второе, и найдём второе неизвестное:

$$x^2 + y^2 = 29.$$

если $x = -5$, то

$$(-5)^2 + y^2 = 29;$$

$$25 + y^2 = 29;$$

$$y^2 = 29 - 25;$$

$$y^2 = 4;$$

$$y_1 = -2, y_2 = 2$$

если $x = 5$, то

$$25 + y^2 = 29;$$

$$25 + y^2 = 29;$$

$$y^2 = 29 - 25;$$

$$y^2 = 4;$$

$$y_3 = -2, y_4 = 2$$

Пары чисел $(-5; -2)$, $(-5; 2)$, $(5; -2)$ и $(5; 2)$ — решения системы.

Ответ: $(-5; -2)$, $(-5; 2)$, $(5; -2)$ и $(5; 2)$.

3 Метод введения новых переменных

.

При решении систем двух уравнений с двумя переменными метод введения новых переменных можно применять двумя способами:

1. вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы;

2. вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы.

Пример 3.

$$\begin{cases} (xy)^2 - 16xy + 39 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Пусть $xy = t$

Подставим новую переменную и решим полученное уравнение:

$$t^2 - 16t + 39 = 0$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 13$$

Выполним обратную замену и решим получившиеся системы:

$$\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 13, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \pm 3, \\ y_2 = \pm 1. \\ x_1 = \pm 1, \\ x_2 = \pm 3. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

4 Графический метод

.

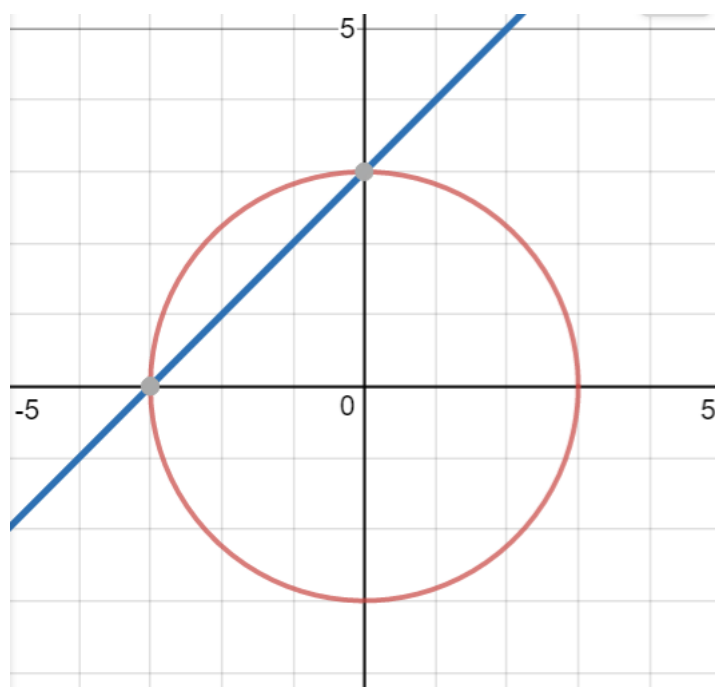
Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя неизвестными графическим методом:

1. строим график первого уравнения;
2. строим график второго уравнения;
3. находим точки пересечения графиков (координаты каждой точки пересечения служат решением системы уравнений).

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Построим графики функций:



Ответ: (3;0) и (0;-3).

Задания.

1. Решить системы уравнений методом подстановки.

1) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8y - x = 7 \\ 2x - 21y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x = y + 0,5 \\ 3x - 5y = 13 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -8x + 15y = 7 \end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом сложения.

1) $\begin{cases} 40x + 3y = 10 \\ 20x - 7y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x - 2y = 12 \\ 15x - 3y = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 33x + 42y = 10 \\ 9x + 14y = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 13x - 12y = 14 \\ 11x - 4 = 18y \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 9y = 8 \\ 21y + 15x = 0,5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 9y + 8x = -2 \\ 5y = -4x - 11 \end{cases}$

3. Решить системы уравнений графическим методом:

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x + 4y = 14 \end{cases}$

4. Решите систему уравнений методом замены переменных:

$$\text{а) } \begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ xy + (x+y) = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3(x-y)^2 + 2(x+2y)^2 = 5, \\ 2(x+2y) - x + y = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5(x+y) + 4xy = 32, \\ xy(x+y) = 12; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2(x+y)^2 + 3(x+2y) = 5, \\ 3(x+2y) - 2x - 2y = 5. \end{cases}$$

Практическая работа №7

Решение уравнений и неравенств с параметрами.

Раздел 2. Последовательности и функции

Тема 2.5. Уравнения и неравенства с параметрами

Цель. Формировать умения и навыки решения уравнений и неравенств с параметрами.

Краткая теория

Уравнение, корень уравнения, посторонний корень, равносильные уравнения, неравенство, решение неравенства, равносильные, неравенства, область допустимых значений переменной.

Если в уравнении (неравенств) некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то эти коэффициенты называются параметрами, а уравнение (неравенство) – уравнением с параметрами (неравенством с параметрами).

При решении уравнения или неравенства с параметрами необходимо:

- 1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;
- 2) найти множество решений, соответствующее каждой допустимой системе значений параметров.

Основной принцип решения уравнений с параметрами можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на такие промежутки, что при изменении параметра на каждом из них получающиеся уравнения решались одним и тем же методом. Отдельно для каждого промежутка находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра. Используемые при этом приёмы такие же, как и при решении

уравнений с числовыми коэффициентами.

Пример 1. Решим уравнение $(a+2)x = a^2 - 4$ для каждого значения параметра a .

Рассмотрим два случая.

- 1) Пусть $a = -2$, тогда данное уравнение имеет вид: $0 \cdot x = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое действительное значение x .
- 2) Пусть $a \neq -2$, тогда данное уравнение является линейным уравнением и его единственным решением: $x = a - 2$.

Ответ: x – любое число при $a = -2$, $x = a - 2$ при $a \neq -2$.

Пример 2. При каких значениях, a уравнение $4^x - (a+3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень?

Рассматривая данное уравнение как квадратное уравнение относительно 2^x , устанавливаем, что оно равносильно совокупности уравнений $2^x = a - 1$ и $2^x = 4$. Уравнение $2^x = a - 1$ при $a = 5$ имеет одно решение, а при $a \leq 1$ не имеет решения.

Уравнение $2^x = 4$ при любом значении, a имеет единственное решение.

Пример 3. Решим уравнение: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$

Замечаем, что значения 0 и $-(a+b)$ не являются допустимыми значениями для x . Параметры a и b тоже неравны нулю. Освобождаем уравнение от знаменателей. Получаем:

$$(a+b+x)bx + (a+b+x)ax + (a+b+x)ab - abx = 0$$

$$(a+b)x^2 + (a+b)^2 x + (a+b)ab = 0$$

Если $a+b=0$, то уравнению (1) удовлетворяют все значения x , кроме $x=0$.

Исходное уравнение в этом случае принимает вид: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

Если $a+b \neq 0$, то, разделив уравнение (1) на $a+b$, получим квадратное уравнение: $x^2 + (a+b)x + ab = 0$. Корни его: $x_1 = -a$,

Ответ: любое действительное число, кроме $x=0$ при $a+b=0$; $x=-a$ и $x=-b$ при $a+b \neq 0$.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$

Допустимые значения переменной x и параметра, a в данном уравнении

определяются системой неравенств:

$$\begin{cases} 1+ax \geq 0, \\ 1-ax \geq 0 \end{cases} \text{ или } |ax| \leq 1.$$

Кроме того, если a и x имеют одинаковые знаки ($0 < ax \leq 1$), то

$\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} > 0$ и решением уравнения может быть только положительное

значение переменной, а это значит, что и $a > 0$. Если a и x имеют разные знаки

($-1 \leq ax < 0$), то $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} < 0$ и решением уравнения может быть только

отрицательное значение переменной, но при этом также и $a > 0$. Таким

образом, уравнение имеет отличные от нуля решения, если $a > 0$; $x = 0$ при $a = 0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}$ и возведём обе его части в

квадрат. После преобразований получим: $x(x + 2\sqrt{1-ax} - 2a) = 0$, откуда:

1) $x_1 = 0$ при произвольных значениях a ;

2) $x + 2\sqrt{1-ax} - 2a = 0$, или $2\sqrt{1-ax} = 2a - x$.

Последнее уравнение имеет решения, если $2a - x \geq 0$. Возведём обе части этого

уравнения в квадрат и после упрощения получим: $x^2 = 4(1-a)^2$, откуда при

$|a| \leq 1$ находим:

$x_2 = -2\sqrt{1-a^2}$, $x_3 = 2\sqrt{1-a^2}$. Найденные значения будут корнями данного

уравнения, если:

$$\begin{cases} a > 0, \\ |a| \leq 1, \\ x \leq 2a, \\ |ax| \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ \pm \sqrt{1-a^2} \leq a, \\ \left| \pm 2a\sqrt{1-a^2} \right| \leq 1 \end{cases}$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 1-a^2 \leq a^2, \\ a^2(1-a^2) \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 1-2a^2 \leq 0 \\ (2a^2-1)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Третье неравенство последней системы неравенств выполняется при любом значении a . Поэтому решением последней системы неравенств является

общее решение неравенств $0 < a \leq 1$ и $1 - 2a^2 \leq 0$ т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$

Пример 5. Решим неравенство $x^2 + ax + 4 \geq 0$.

Дискриминант уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ будет $D = a^2 - 16$.

Рассмотрим три случая: $D < 0, D = 0, D > 0$.

- 1) При $D < 0$ или $a^2 - 16 < 0$ получаем: $-4 < a < 4$. Следовательно, для каждого $a \in (-4; 4)$ данное неравенство имеет решение и его решением является любое действительное число.
- 2) При $D = 0$ или $a^2 - 16 = 0$ получается: $a = 4$ и $a = -4$. Следовательно, здесь также для каждого $a = 4$ и $a = -4$ данное неравенство имеет решение и его решением является любое действительное число.
- 3) При $D > 0$ или $a^2 - 16 > 0$ получится: $a > 4$ и $a < -4$. Следовательно, на каждом из промежутков $(-\infty; -4)$ и $(4; +\infty)$ данное неравенство имеет решение и его решение имеет вид: $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$, где:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}, x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$

Ответ: x – любое действительное число при $a \in [-4; 4]$

$$a \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} \right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}; +\infty \right) \text{ при } a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$$

Пример 6. Решим неравенство: $|x + 3| > -a^2$.

Решение. 1) При $a \neq 0$ правая часть неравенства отрицательна, тогда при любом значении x левая часть неравенства больше правой.

- 3) При $a = 0$ исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа, кроме $x = -3$.

Задания

- 1) Решите уравнение

$$\frac{a}{2a - x} = 3$$

Ответ: при $a = 0$ нет решений, при $a \neq 0$, $x = \frac{5}{3}a$

2) Решите уравнение

$$\frac{a}{a-2x} = 3$$

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{a}{3}$, при $a = 0$, нет решений

3) Решите уравнение

$$\frac{a}{2a-x} = 2$$

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{3}{2}a$, при $a = 0$, нет решений

4) Решите уравнение

$$\frac{a}{a-2x} = 2$$

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{a}{4}$, при $a = 0$, нет решений

5) Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ является корнем уравнения

$$|x+2a| \cdot x+1-a=0.$$

Ответ: значений, a нет

6) Найдите все значения a , при которых число $x = -3$ является решением неравенства

$$4-|x-2a|<x^2$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

7) Найдите все значения a , при которых число $x = -2$ является корнем уравнения

$$|x-a| \cdot x+1-2a=0$$

Ответ: $a = -\frac{3}{4}$

8) Может ли при каком-нибудь значении, a уравнение $2x^6 - x^4 - a^2 = 1$ имеет три корня?

Ответ: нет

9) Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $(a - 3x^2 - \sin \frac{11\pi}{4} x) \sqrt{11 - 3ax}$

Ответ: $\frac{11}{6}$

10) Найдите все значения параметра a , такие, чтобы уравнение $x|x + 2a| + 1 = a$ имело 2 различных корня.

Ответ: $a = -2; a = -\frac{1}{2}$

Практическая работа №8

Вычисление значений показательных выражений.

Преобразование показательных выражений.

Раздел 3. Показательная, логарифмическая и степенная функции Тема 2.4.

Системы уравнений.

Тема 3.1. Степень и её свойства

Цель.

Научить:

- а) находить значение степени с рациональным показателем на основе определений и основных свойств;
- б) выполнять тождественные преобразования степенных выражений;

Краткая теория

Основные свойства степени

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$3) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

4)

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$5) (ab)^x = a^x b^x$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$7) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$8) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$9) \sqrt[2k+1]{c^{2k+1}} = c, c \in R, k \in N$$

$$10) \sqrt[2k]{c^{2k}} = |c|.$$

Задания

- 1) Запишите в виде степени с рациональным показателем:

а) $\frac{a^4\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a^2}}$; б) $\frac{\sqrt{a^7}\sqrt[4]{a^7}}{a^3\sqrt[3]{a^2}}$; в) $\frac{\sqrt{a^7}\sqrt[3]{a^2}}{a^4\sqrt{a^6}}$; г) $\frac{\sqrt{a^3}\sqrt[4]{a^2}}{a^3\sqrt{a^5}}$; д) $\frac{a^3\sqrt[3]{a^8}}{\sqrt{a^5}\sqrt[4]{a^6}}$; е) $\frac{a\sqrt{a^7}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^9}}$; ж) $\frac{\sqrt{a^3}\sqrt{a}}{a^3\sqrt[4]{a}}$

2) Запишите в виде степени с рациональным показателем:

а) $(b^2\sqrt[3]{b})^9\sqrt{b^3}$; б) $(\sqrt[9]{b^8}\sqrt[3]{b^4})^3\sqrt{b^2}$; в) $(b^9\sqrt[6]{b})^6\sqrt[7]{b}$; г) $(\sqrt[3]{b^8}b^2)^2\sqrt[3]{b^8}$; д) $(\sqrt[3]{b^2}b^2)^3b^9$; е) $(b^2\sqrt[3]{b^4})^9b^6$; ж) $(\sqrt[9]{b^7}b^3)^3\sqrt[3]{b}$

3) Запишите как степень 2:

а) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[7]{64}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[7]{16}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{4}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[7]{8}}$; д) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}$; е) $\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[3]{128}}$; ж) $\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{32}}$ \

4) Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; (\sqrt{2})^5; 4^{-\frac{3}{4}}$; в) $1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 4^{-\frac{3}{4}}; (\sqrt{2})^7; \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; г) $9^{-\frac{3}{4}}; (\sqrt{3})^3; \frac{1}{\sqrt{3}}; 1; \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; д) $\frac{1}{(\sqrt{2})^7}; 4^{-\frac{5}{4}}; (\sqrt{2})^7; \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}; 1$; е) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}; (\sqrt{5})^5; \frac{1}{(\sqrt{5})^5}; 1; 25^{-\frac{7}{4}}$; ж) $\frac{1}{(\sqrt{2})^5}; 4^{-\frac{3}{4}}; (\sqrt{2})^5; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; 1$; з) $\frac{1}{(\sqrt{3})^3}; \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}; (\sqrt{3})^3; 1; 9^{-\frac{5}{4}}$

5) Вычислите:

а) $2^{-3} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 5^0$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^{-3}$; г) $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{7}\right)^0 - 3^{-3}$; д) $3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^0 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} + 2^{-3}$; е) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4^0 \cdot 5^1$; ж) $\left(\frac{5}{3}\right)^0 \cdot 5^{-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

6) Найдите значение выражения:

а) $4^{5a} * 4^{4a}$, при $a = \frac{1}{6}$; б) $8^{3b} * 8^{-5b}$, при $b = \frac{1}{6}$; в) $b^{2,5} : b^{-0,5}$, при $b = \sqrt[3]{6}$; г) $16^{5a} * 16^{-2a}$, при $a = \frac{1}{12}$; д) $9^{5a} : 9^{-4a}$, при $a = \frac{1}{18}$; е) $4^{5a} * 4^{4a}$, при $a = \frac{2}{9}$; ж) $16^{11a} * 16^{-2a}$, при $a = \frac{1}{12}$

7) Упростите:

а) $(k^{\sqrt{7}} - m^{\sqrt{3}}) \cdot (k^{\sqrt{7}} + m^{\sqrt{3}})$; б) $(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}) \cdot (a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})$; в) $(a^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; г) $(b^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; д) $(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}) \cdot (m^{\sqrt{2}} + n^{\sqrt{3}})$; е) $(t^{1+\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}$; ж) $(a^{\sqrt{7}} + b^{\sqrt{5}}) \cdot (a^{\sqrt{7}} - b^{\sqrt{5}})$

8) Вычислите:

а) $0,1 * \sqrt{20} : \sqrt{45} - 2\frac{17}{30}$; б) $\sqrt{125} * \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$; в) $\sqrt[4]{512} * \sqrt{8} * \sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[3]{108 * 16} - \sqrt[4]{8 * 162}$; д) $\sqrt[3]{32} : 2^{\frac{2}{3}} - \sqrt{121}$; е) $\sqrt{125} * 5^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{216}$; ж) $\sqrt[4]{(-3)^2 * 2 * \sqrt[4]{8 * 9}}$

9) Упростите выражение:

а) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{5b^3} : \sqrt[4]{\frac{5a^3b^4}{125a^7}}$; б) $\sqrt[3]{16ab^{12}} : \sqrt[3]{2a^4b^9}$; в) $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$;

г) $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\frac{d^9}{4c^3}}$; д) $\sqrt{24a^3b^4} : \sqrt[4]{32a^4b^6}$; е) $\sqrt[3]{\frac{375n^2}{3n^{14}}} : \sqrt[4]{8n} \cdot \sqrt[3]{3b^4}$;

ж) $\sqrt[4]{\frac{567a^3}{\sqrt{7b^{15}}}} \cdot \sqrt[3]{9a^5} \cdot \sqrt[3]{3b^4}$

10) Вычислите

а) $\sqrt[4]{9\sqrt{-27}} \cdot \sqrt[4]{27+9\sqrt{11}} \cdot \sqrt[4]{8}$; б) $\sqrt[4]{8\sqrt{10}-24} \cdot \sqrt[4]{24+8\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{64}$; в) $\sqrt{8-\sqrt{28}} - \sqrt{8+\sqrt{28}}$;

г) $\sqrt[4]{8\sqrt{10}-16} \cdot \sqrt[4]{16*8\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{54}$; д) $\sqrt[3]{6\sqrt{7}-12} \cdot \sqrt[3]{6+3\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{32}$; е) $\sqrt[4]{9\sqrt{10}-18} \cdot \sqrt[4]{6+3\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{128}$;

ж) $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$

Практическая работа №9

Вычисление значений логарифмических выражений. Преобразование логарифмических выражений.

Раздел 3. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Цель. Формировать умения и навыки вычисления и преобразования логарифмических выражений.

Тема 3.2. Логарифмы и их свойства

Краткая теория

$$\log_a b = x$$

Логарифмом x положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называют *показатель степени*, в который нужно возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$a^x = b$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$$\log_{10} a = \lg a$$

Логарифм числа по основанию 10 называется *десятичным логарифмом*:

Логарифм числа по основанию e (число $e \approx 2,71$ – экспонента) называется

$$\log_e b = \ln b$$

натуральным логарифмом:

Свойства логарифма

при $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

Задания.

1. Вычислите значение логарифма:

1) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3}$;

2) $\log_4 \frac{1}{32}$;

3) $\log_4 \frac{1}{32}$;

4) $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{7}$;

5) $\log_{36} \frac{1}{6}$;

6) $\log_{25} \frac{1}{125}$;

7) $\log_4 \frac{1}{128}$

2. Вычислите значение логарифма:

1) $\log_{27} \log_5 125$;

2) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;

3) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$;

5) $\log_{64} \log_9 81$;

6) $\log_4 \log_3 9$

7) $\log_{81} \log_{\sqrt[3]{2}} 16$

3. Вычислите значение числа:

1) $125^{\log_5 20}$;

2) $81^{\log_9 4}$

3) $49^{\log_7 49}$

4) $25^{\log_5 9}$

- 5) $125^{\log_{25} 36}$
 6) $27^{\log_{81} 64}$
 7) $81^{\log_9 4}$
4. Вычислите:
- 1) $\log_{16} 144 - \log_{16} 36$
 - 2) $\log_{15} 3 + \log_{15} 75$
 - 3) $\log_3 162 - \log_3 6$
 - 4) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$
 - 5) $\log_4 192 - \log_4 3$
 - 6) $\log_8 12 - \log_8 192$
 - 7) $\log_{12} 36 + \log_{12} 48$
5. Вычислите значение числа:
- 1) $4^{2+\log_{16} 2}$
 - 2) $16^{0,5+\log_8 5}$
 - 3) $4^{2+\log_{16} 2}$
 - 4) $49^{0,5+\log_7 5}$
 - 5) $2^{2-\log_4 5}$
 - 6) $49^{0,5+\log_7 3}$
 - 7) $27^{\frac{1}{3}-\log_3 7}$
6. Вычислите значение числа:
- 1) $32^{\frac{3}{\log_5 4}}$
 - 2) $27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}}$
 - 3) $64^{\frac{2}{\log_9 8}}$
 - 4) $2^{\frac{4}{\log_{4\sqrt{3}} 8}}$
 - 5) $49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$
 - 6) $64^{\frac{1}{3\log_{27} 8}}$
 - 7) $125^{\frac{4}{\log_3 25}}$
7. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{\log_5 27 - 2\log_5 3}{\log_5 45 + \log_5 0,2}$
 - 2) $\frac{2\log_{0,3} 4 + \log_{0,3} 0,5}{\log_3 6 - \log_{0,3} 12}$
 - 3) $\frac{3\log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9}$
 - 4) $\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$
 - 5) $\frac{\log_4 3 - \log_4 75}{\log_4 45 + 2\log_4 3}$
 - 6) $\frac{\lg 14 - \lg 7}{\lg 0,5 + 3\lg 4}$
 - 7) $\frac{\log_7 9 + \log_7 3}{\log_7 24 - 3\log_7 2}$
8. Найдите логарифм при указанном условии:
- 1) $\log_a 125$, если $\log_{\sqrt{a}} 25 = 8$
 - 2) $\log_{\sqrt[3]{a}} 27^3$, если $\log_9 \sqrt{a} = 4,5$
 - 3) $\log_a 81$, если $\log_9 \sqrt{a} = 4$
 - 4) $\log_{\sqrt[3]{a}} 34,3$, если $\log_{\sqrt{a}} 49 = 8$
 - 5) $\log_a 6$, если $\log_6 \sqrt{a} = 4$
 - 6) $\log_a 25$, если $\log_{\sqrt{a}} 125 = 4$
 - 7) $\log_a 27$, если $\log_{\sqrt{a}} 9 = 2$
9. Определите, при каких значениях x имеет смысл выражение:
- 1) $\log_{x-2} (x^2 + x - 6)$
 - 2) $\log_{x+1} (x^2 + 2x + 7)$
 - 3) $\log_{2-x} (x^2 - 49)$
 - 4) $\log_x (x^3 + x^2 - 2x)$
 - 5) $\log_{x-4} \frac{x-2}{x+3}$
 - 6) $\log_{x+1} (x^2 - 4x + 3)$
 - 7) $\log_x (x^3 + x^2 - 6x)$
10. Вычислите:
- 1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$
 - 2) $\frac{2\log_5 3 - \log_5 27}{\log_5 0,2 + \log_5 45}$
 - 3) $\frac{\log_3 576}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 64}{\log_{216} 3}$
 - 4) $\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$
 - 5) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$
 - 6) $\frac{\log_3 21}{\log_{63} 3} - \frac{\log_3 7}{\log_{189} 3}$

$$7) \frac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$$

Практическая работа №10

Построение показательных логарифмических и степенных графиков функций.

Раздел 3. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Тема 3.3. Показательная, логарифмическая и степенная функции, их свойства и графики

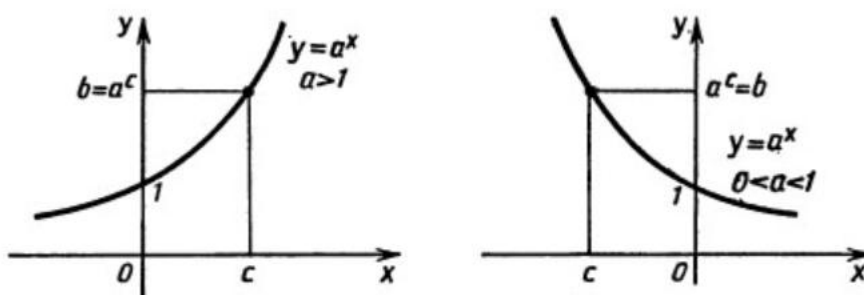
Цель. Формировать умения и навыки построения графиков и определения свойств показательной, логарифмической и степенной функций.

Краткая теория

1. Показательной называют функцию вида $y = a^x$, где a – основание, $a > 0, a \neq 1$;

x – показатель, $x \in R$.

Графики показательной функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

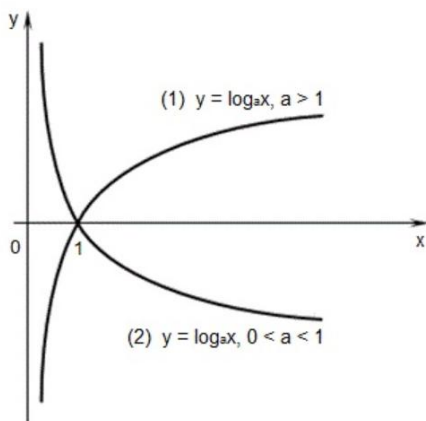


Свойства показательной функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1. $D(x) = (-\infty; +\infty)$,
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Нулей не имеет;
4. Точка пересечения с осью Oy : $(0; 1)$, т. к. $y(0) = a^0 = 1$.
5. При $a > 1$ функция возрастает; при $0 < a < 1$ функция убывает на R .
6. Ни чётная функция, ни нечётная.
7. Не ограничена сверху, ограничена снизу прямой $y = 0$.
8. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
9. Непрерывна.
10. Выпукла вниз.

2. Логарифмической называют функцию вида $y = \log_a x$, где a – основание логарифма, $a \neq 1$, $a > 0$; $x \in R_+$;

Графики логарифмической функции



Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$:

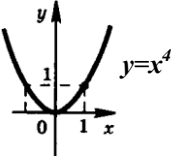
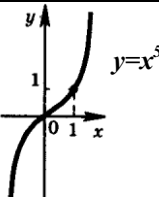
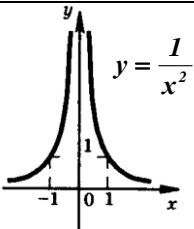
1. $(x) = (0; +\infty)$,
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. Ни четная функция, ни нечетная.
4. Нули функции: $y = 0$ при $x = 1$;
5. Точек пересечения с осью ординат Oy нет.
6. При $a > 1$ функция возрастает на $(0; +\infty)$;

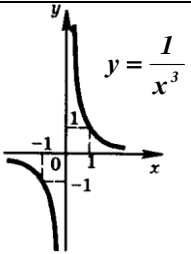
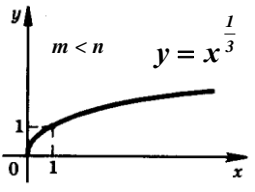
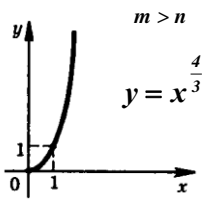
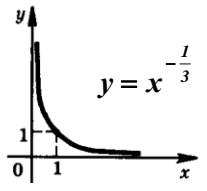
при $0 < a < 1$ функция убывает на $(0; +\infty)$.

7. Не ограничена сверху, не ограничена снизу. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции.
8. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
9. Непрерывна.
10. При $a > 1$ функция выпукла вверх; при $0 < a < 1$ функция выпукла вниз.

Примеры функций: $y = \log_5 x$; $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; $y = \log_{\frac{5}{6}} x$.

3. Степенная функция $y = x^p$, p – заданное действительное число

p	график	свойства				
		$D(y)$	$E(y)$	четность	возрастает	убывает
$p = 2n$		R	$y \geq 0$	четная	$x \geq 0$	$x \leq 0$
$p = 2n-1$		R	R	нечетная	R	———
$p = -2n$		$x \neq 0$	$y > 0$	четная	$x < 0$	$x > 0$

$p = -(2n-1)$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечетная	—	$x > 0$ $x < 0$
Положителън ое действителън ое нецелое число $p = \frac{m}{n}$	 	$x \geq 0$	$y \geq 0$	—	$x \geq 0$	—
Отрицателън ое действителън ое число $p = -\frac{m}{n}$		$x > 0$	$y > 0$	—	—	$x > 0$

Задания.

- Изобразите схематически график функции и напишите его свойства:

1) $y = x^2$

2) $y = \log_{0,5} x$

3) $y = 2^x$

4) $y = 2 \setminus x$

5) $y = x^{0,5}$

6) $y = 3^x$

7) $y = \log_3 x$

8) $y = x^4$

9) $y = x^3$

10) $y = x \setminus 2$

11) $y = \log_2 x$

12) $y = 0,5^x$

13) $y = 0,2^x$

14) $y = \log_{0,25} x$

15) $y = x^{-1}$

16) $y = -x^3$

2. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_{(2-x)} (x+5)$

2) $y = \log_{(3+x)} (x+1)^2$

3) $y = \log_{(5-x)} (x+6)$

4) $y = \log_{(4+x)} (x+3)^2$

5) $y = \log_{(x+6)} (x+7)$

6) $y = \log_{(6+x)} (x+2)^2$

7) $y = \log_{(2+x)} (x-5)$

8) $y = \log_{(8+x)} (x+2)^2$

Практическая работа №11

Решение показательных уравнений и неравенств .

Раздел 3. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Тема 3.4. Показательные уравнения и неравенства

Цель. Формировать умения и навыки решения показательных уравнений и неравенств.

Краткая теория

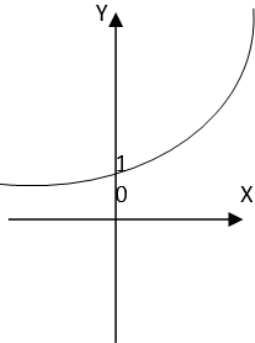
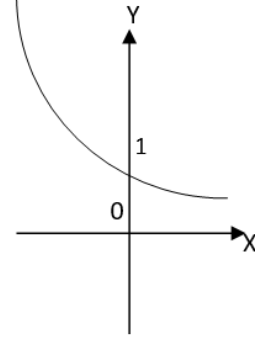
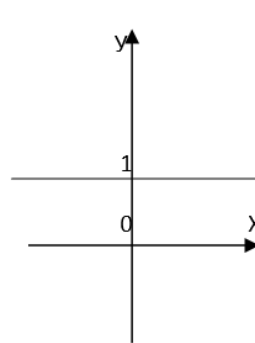
Опорные формулы и соотношения	Графики функции $y = a^x$ ($a > 0$)		
Формулы	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
<div data-bbox="188 230 491 481"> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ </div> <p data-bbox="167 488 534 633">Любая возрастающая (убывающая) на промежутке функция принимает каждое свое значение только в одной точке из этого промежутка</p> <div data-bbox="172 660 363 723"> $a^c = b$ $a > 0, a \neq 1, b > 0$ </div> <div data-bbox="220 757 435 813"> $\Leftrightarrow C = \log_a b$ </div>	 <p data-bbox="606 716 758 750"><u>Возрастает</u></p>	 <p data-bbox="949 716 1061 750"><u>Убывает</u></p>	 <p data-bbox="1220 739 1364 772"><u>Постоянная</u></p>

Схема выполнения равносильных преобразований простейших показательных уравнений и неравенств

Уравнения	Неравенства
<div data-bbox="204 1008 746 1075"> $a > 0$ $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ </div> <div data-bbox="236 1108 319 1142">$a \neq 1$</div> <div data-bbox="603 1108 670 1142">$a = 1$</div> <div data-bbox="204 1187 443 1276"> $f(x) = g(x)$ </div> <div data-bbox="555 1187 762 1276"> x – любое число из ОДЗ </div>	<div data-bbox="829 996 1396 1075"> $a > 0, a \neq 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ </div> <div data-bbox="922 1108 1005 1142">$a > 1$</div> <div data-bbox="1225 1108 1340 1142">$0 < a < 1$</div> <div data-bbox="837 1176 1077 1265"> $f(x) > g(x)$ </div> <div data-bbox="1165 1176 1396 1265"> $f(x) < g(x)$ </div> <div data-bbox="826 1276 1045 1332">Знак неравенства не меняется</div> <div data-bbox="1173 1276 1380 1355">Знак неравенства <u>меняется</u> на противоположный</div>

Если в левой и в правой части заданного показательного уравнения (неравенства) стоят только произведения, частные, корни или степени, то это уравнение (неравенство) непосредственно сводится к простейшему с помощью использования опорных формул или решается логарифмированием обеих частей уравнения.

Примеры решений простейших показательных уравнений

1. $2^{x+1} = 8$ Решение. $2^{x+1} = 2^3$ $x+1 = 3$. $x=2$. Ответ: 2	2. $5^{x-3} = 1$ Решение. $5^{x-3} = 5^0$ $x-3 = 0$. $x=3$. Ответ: 3.	3. $3^{x+4} = -3$ Решение. Корней нет (т.к. $3^t > 0$ для все. Ответ: корней нет.	4. $7^{x-1} = 3$ Решение. $x-1 = \log_7 3$ $x = 1 + \log_7 3$ Ответ: $1 + \log_7 3$
5. Приведение к одному основанию $\frac{100^{x-1}}{\sqrt[3]{10^x}} = 2^x \cdot 5^x.$ Решение: $\frac{10^{2(x-1)}}{10^{\frac{x}{3}}} = (2 \cdot 5)^x \cdot 10^{2(x-1)-\frac{x}{3}} = 10^x$. $2(x-1) - \frac{x}{3} = x$. $x=3$. Ответ: 3.		6. Логарифмирование обеих частей уравнения $5^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x = 15.$ Решение. ОДЗ: $x \neq 0$. Логарифмируя обе части по основанию 3, получаем равносильное уравнение $\frac{1}{x} \log_3 5 + x = \log_3 (3 \cdot 5)$. $\log_3 5 + x^2 = x(1 + \log_3 5)$. Решение этого квадратного уравнения: $x = \frac{1 + \log_3 5 \pm (1 - \log_3 5)}{2}$. $x = 1$ или $x = \log_3 5$. Ответ: 1; $\log_3 5$.	

Схема поиска решений показательных уравнений, не сводящихся непосредственно к простейшим

1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней (используя опорные формулы) 2. Пробуем все степени (с переменной в показателе) привести к одному основанию и выполнить замену переменной	Пример 1. $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$. Решение. Избавляясь от числового слагаемого в показателе степени, имеем $4 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$. Приведя все степени к одному основанию, получаем $4 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$. Замена $2^x = t, t > 0$, дает $\begin{cases} 4t^2 + 7t - 2 = 0, \\ t > 0. \end{cases}$ Решение системы $\begin{cases} t = -2, \\ t = \frac{1}{4}, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$. Обратная замена дает $2^x = \frac{1}{4}$, откуда $2^x = 2^{-2}$, т.е. $x = -2$. Ответ: -2.
3. Если нельзя привести к одному основанию, то пробуем привести все степени к двум основаниям так, чтобы получилось однородное уравнение	Пример 2. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$. Решение. Разделим левую правую часть уравнения на 3^{2x} . Имеем $4 \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x 3^x}{3^{2x}} - 18 = 0$. $4 \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0$. Замена $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0$, дает $\begin{cases} 4t^2 - t - 18 = 0, \\ t > 0. \end{cases}$ Решение системы $\begin{cases} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{9}{4}$. Обратная замена дает $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$, откуда $x = -2$. Ответ: -2.

Примеры решений простейших показательных неравенств

1. $2^{x+1} > 8$ Решение. $2^{x+1} > 2^3$. Т.к. $y = 2^t$ – возрастающая, то $x+1 > 3$. $x > 2$. Ответ: $(2; \infty)$	2. $2\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > \frac{1}{9}$ Решение. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Т.к. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ – убывающая, $x-1 < 2$. $x < 3$. Ответ: $(-\infty; 3)$.	3. $3^{x+4} < -3$ Решение. Корней нет (т.к. $3^t > 0$ для всех t). Ответ: решений нет.	4. $7^{\frac{1}{x}} > -3$ Решение. Т.к. $7^t > 0$ для всех t , то x – любое действительное число из ОДЗ. Т.е. $x \neq 0$. Ответ: $\mathbb{R}, x \neq 0$.
---	---	---	---

Решение показательных неравенств, не сводящихся непосредственно к простейшим

С помощью *равносильных преобразований* (по схеме решения показательных уравнений) *заданное неравенство сводится к известному типу неравенств* (квадратному, дробному и т.д.) и после решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам.

Пример 3. $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$. Решение. Выполним те же преобразования, что и в примере 1, имеем $4 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$. Замена $2^x = t, t > 0$, дает $\begin{cases} 4t^2 + 7t - 2 > 0, \\ t > 0. \end{cases}$ Решение системы

$$\begin{cases} t < -2, \\ t > \frac{1}{4} \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t > \frac{1}{4}. \text{ Обратная замена дает } 2^x > \frac{1}{4}, \text{ откуда } 2^x > 2^{-2}. \text{ Т.к. } y = 2^t - \text{возрастающая, то.}$$

$$x > -2.$$

Ответ: $(-2; \infty)$

Показательно – степенные уравнения и неравенства.

Функция $y = f(x)^{g(x)}$ не является показательной. Существует две точки зрения, оценивающие область определения данной функции. Первая исходит из требования $f(x) > 0$, вторая позволяет $f(x)$ принимать отрицательные значения при условии, что $g(x)$ принимает целые значения, или $f(x) = 0$ при условии $g(x) > 0$.

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0; \\ f(x) = 1, \\ g(x), h(x) - \text{определены.} \end{cases}$$

Задания.

1. Решите уравнение

$$1) \left(\frac{5}{3}\right)^{5x^2-2x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+5}$$

$$2) \left(\frac{7}{11}\right)^{5x^2+24} = \left(\frac{11}{7}\right)^{3x^2-56}$$

$$3) \left(\frac{4}{7}\right)^{3x^2+9x} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-5x^2-17x}$$

$$4) \left(\frac{5}{8}\right)^{4x^2-17} = \left(\frac{8}{5}\right)^{5x^2-19}$$

$$5) \left(\frac{5}{2}\right)^{8x^2+5x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x^2-8x}$$

$$6) \left(\frac{2}{9}\right)^{4x^2-23} = \left(\frac{9}{2}\right)^{5x^2-13}$$

$$7) \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+x^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$$

$$8) \sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}$$

$$9) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-0,5} = 4\sqrt{2}$$

$$10) \sqrt{36^{2-3x}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$11) \left(\frac{1}{7}\right)^{x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$12) \sqrt[4]{27^{2-x}} = \frac{9}{\sqrt[5]{3}}$$

$$13) 25^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5\sqrt{125}$$

$$14) \sqrt[4]{16^{x-3}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$15) 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 = 0$$

$$16) 9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0$$

$$17) 2^{x+1} + 4^x = 80$$

$$18) 4^x + 2^{x+1} = 80$$

$$19) 3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x = 4$$

$$20) 4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$$

$$21) 4^{2x-3} - 3 \cdot 4^{x-2} - 1 = 0$$

2. Решите неравенство

1) $2^{-x^2+3x} < 4$

9) $(x+1)^{x^2-1} \leq 1$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2} \geq \frac{9}{4}$

10) $(x+3)^{x^2-9} \leq 1$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-x^2+8}$

11) $(x-4)^{x^2-\frac{1}{4}} \leq 1$

12) $(x+3)^{x^2-25} < 1$

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{x-2}} < 5$

13) $(x+1)^{x^2-\frac{1}{25}} > 1$

14) $(x-2)^{x^2-\frac{1}{9}} \leq 1$

5) $3^{\frac{x-1}{x+2}} \geq \frac{1}{9}$

15) $(x-3)^{x^2-36} < 1$

6) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$

16) $(x-5)^{x^2-\frac{1}{16}} > 1$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} < 9$

8) $(0,5)^{\frac{6x-1}{3-x}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

3. Решите уравнение

1) $5^{2x+5} - 2^{2x+10} + 3 \cdot 5^{2x+2} - 2^{2x+8} = 0$

2) $4 \cdot 3^{2x} - 2^{2x-1} - 3^{2x+1} - 2^{2x} = 0$

3) $3^{4x+5} 2^{4x+7} - 3^{4x+3} - 2^{4x+4} = 0$

4) $4 \cdot 7^{2x+4} - 3^{2x+6} + 2 \cdot 7^{2x+3} + 3^{2x+3} = 0$

5) $2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} = 0$

6) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+1}$

7) $3^{4x+5} - 2^{4x+7} - 3^{4x+3} - 2^{4x+4} = 0$

Практическая работа №12

Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Раздел 3. Показательная, логарифмическая и степенная функции

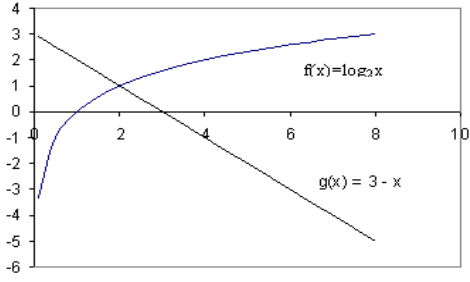
Тема 3.5. Логарифмические уравнения и неравенства

Цель. Формировать умения и навыки решения логарифмических уравнений и неравенств.

Краткая теория

1. Методы решения логарифмических уравнений:

Метод решения	Вид неравенства	Решение
1. По определению логарифма.	$\log_a x = b$	$x = a^b$
2. Потенцирование	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $f(x) = g(x)$
3. Введение новой переменной	$k \cdot \log_a^2 x + m \cdot \log_a x + n = 0$	$\log_a x = t$ $kt^2 + mt + n = 0$
4. Логарифмирование обеих частей уравнения.	$x^{\lg x + 3} = 10000$	$\lg x^{\lg x + 3} = \lg 10000$ $D: x > 0$ $(\lg x + 3) \cdot \lg x = \lg 10^4$ $(\lg x + 3) \cdot \lg x = 4$ $\lg x = t$ $(t + 3)t = 4$ $t^2 + 3t - 4 = 0$ $t_1 = -4; t_2 = 1$ $\lg x_1 = -4; \lg x_2 = 1$ $x_1 = 10^{-4} = 0,0001; x_2 = 10^1 = 1$
5. Приведение к одному основанию.	$\log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 6$	$D: x > 0$, перейдем к основанию 3 $\log_3 x - \frac{2 \log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 6$ $\log_3 x + 2 \log_3 x = 6$ $3 \log_3 x = 6$ $\log_3 x = 2$

		$x = 3^2 = 9$
6. Функционально - графический метод.	$\log_2 x = 3 - x$	 <p>$x = 2$</p>

Логарифмические неравенства:

Неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Простейшее логарифмическое неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

сводится к одной из двух систем неравенств:

1 случай, при $a > 1$: \uparrow	2 случай, при $0 < a < 1$: \downarrow
$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$
$\log_3(5 - 2x) > 2$ $\begin{cases} \log_3(5 - 2x) > \log_3 9 \\ 5 - 2x > 0 \\ 5 - 2x > 9 \end{cases}$ <p>ОДЗ: 1). $-2x > -5$ $x < 2,5$ 2). $-2x > 4$ $x < -2$ $x \in (-\infty; -2)$</p>	$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2$ $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9 \\ 5 - 2x > 0 \\ 5 - 2x < 9 \end{cases}$ <p>ОДЗ: 1). $-2x > -5$ $x < 2,5$ 2). $-2x < 4$ $x > -2$ $x \in (-2; 2,5)$</p>

Задания.**1. Решите уравнение**

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 2$

2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+6) = \log_{81} \frac{\sqrt{27}}{9}$

3) $\log_3(4x+2) - \log_3 2 = \log_3 x^2$

4) $\log_{\frac{1}{3}}(5-x) = -2$

5) $\log_{\frac{1}{3}}(x+7) = \log_{64} \frac{2}{\sqrt{8}}$

6) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 3$

7) $\log_3(x-2) = 2$

8) $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) = \log_3 \frac{1}{27}$

9) $\lg(2x-9) - \lg x = \lg(x-3)$

10) $\log_{\frac{1}{2}}(4+x) = -1$

11) $\log_{\frac{1}{4}}(x+4) = \log_{\sqrt{3}} 81$

12) $\log_4(x+3) + \log_4(x-1) = \log_4 2$

13) $\log_2(x+3) = 1$

14) $\log_{\frac{1}{2}}(x+10) = \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81}$

15) $\log_3 x + \log_3(x-4) = \log_3(x+2)$

16) $\log_{\frac{1}{2}}(7+x) = -2$

17) $\log_{\frac{1}{3}}(x+9) = \log_8 \frac{1}{16}$

18) $\lg(x^2+75) - \lg(x-4) = 2$

19) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = 3$

20) $\log_{\frac{1}{4}}(x+6) = \log_{81} \frac{1}{27}$

21) $\log_2(x+14) = \log_2 64 - \log_2(x+2)$

2. Решите уравнение

1) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 = 4$

2)

3) $\log_4^2 x - \log_4 x^6 + 8 = 0$

4) $\log_2^2 x - \log_2 x^3 - 4 = 0$

5)

6) $\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 5 = 9$

7) $\lg^2 x - \lg x^5 + 1 = 0$

8)

9) $2\log_3^2 x - \log_3 x^7 = 3$

10) $\lg^2 x + \lg \sqrt{x} = 0,5$

11)

12) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 = -2$

13) $\log_5^2 x - \log_5 x^7 + 10 = 0$

14)

15) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$

3. Решите неравенство

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7) > -1$$

$$2) \log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) \geq 0$$

$$3) \log_{0,2}(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$4) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 8) \geq -1$$

$$5) \log_{\frac{1}{9}}(2 - 2x - x^2) \geq -2$$

$$6) \log_{0,3}(x^2 + 4x - 5) \geq 0$$

$$7) \log_{\frac{1}{10}}(x^2 + x + 4) \leq -1$$

$$8) \log_{0,5}(3 - x - x^2) < -1$$

$$9) \log_{0,5}(x^2 + 3x) < -2$$

$$10) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

Практическая работа №13

Изображение углов на единичной окружности.

Определение значения тригонометрических функций по единичной окружности.

Преобразование тригонометрических выражений.

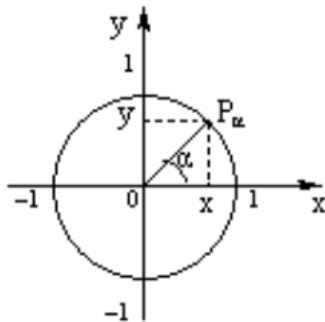
Раздел 4. Тригонометрические функции

Тема 4.1. Тождественные преобразования

Цель. Изучение основных понятий тригонометрии и отработка навыков работы с тригонометрическими формулами при решении различных заданий.

Краткая теория

Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.



$$\begin{aligned} P_{\alpha}(x; y) \\ x &= \cos \alpha \\ y &= \sin \alpha \\ |\cos \alpha| &\leq 1 \\ |\sin \alpha| &\leq 1 \end{aligned}$$

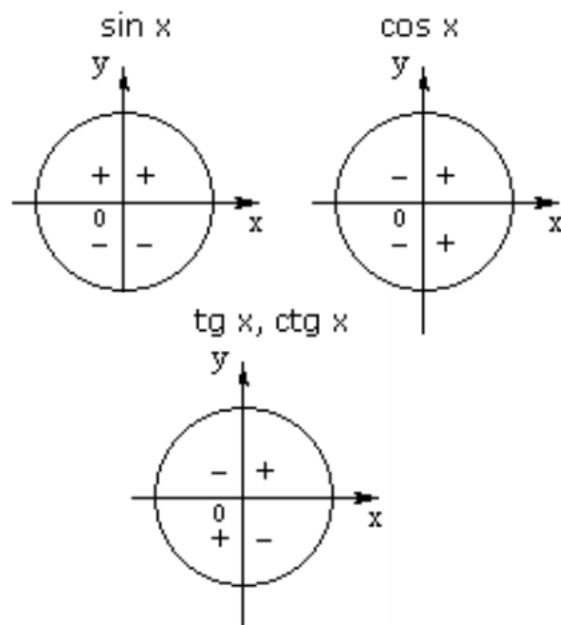
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Переход от градусной меры к радианной $x = \pi \alpha / 180^\circ$, где x – величина угла в радианах, α – величина угла в градусах.

Переход от радианной меры к градусной $\alpha = 180^\circ x / \pi$, где α – величина угла в градусах, x –

Знаки тригонометрических функций



величина угла в радианах.

α	градусов	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\alpha)$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}(\alpha)$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}(\alpha)$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

<u>Тригонометрические тождества</u> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	<u>Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и $-\alpha$</u> $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
<u>Формулы сложения</u> $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$	<u>Синус, косинус, тангенс и котангенс двойного угла</u> $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
<u>Синус, косинус, тангенс и котангенс половинного угла</u> $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	<u>Формулы понижения степени</u> $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$
$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

Задания.

1. Данные углы переведите в радианную меру с точностью до 0,01

1) а) 17° ; б) 315° ; в) 4°

2) а) 6° ; б) 56° ; в) 175°

3) а) 24° ; б) 320° ; в) 3°

2. Данные углы переведите в градусную меру с точностью до 1°

1) а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) 9π

2) а) 7π ; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{18}$

3) а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $1\frac{3}{4}\pi$; в) 7π

4) а) 72° ; б) 5° ; в) 140°

5) а) 26° ; б) 2° ; в) 290°

6) а) 8° ; б) 72° ; в) 331°

7) а) 23° ; б) 7° ; в) 125°

8) а) 64° ; б) 160° ; в) 5°

4) а) $\frac{5\pi}{6}$, б) $2\frac{1}{6}\pi$ в) 5π

5) а) $\frac{11\pi}{12}$, б) $\frac{23}{8}\pi$ в) 11π .

6) а) $\frac{7\pi}{12}$, б) $\frac{21}{4}\pi$ в) 3π

7) а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) 9π

8) а) 15π ; б) $\frac{7\pi}{4}$; в) $\frac{11\pi}{12}$;

3. Определите четверть, в которой лежит
данный угол

1) а) $\frac{\pi}{12}$; б) -156° ; в) 12

2) а) $\frac{11\pi}{12}$, б) 315° ; в) -2

3) а) $-\frac{21\pi}{4}$; б) 160° ; в) 1,5

4) а) $\frac{3\pi}{8}$; б) 320° ; в) -23

5) а) 223° ; б) $-\frac{7\pi}{6}$; в) 0,3

6) а) $\frac{39\pi}{10}$; б) 432° ; в) -5

7) а) -264° ; б) $\frac{21}{4}\pi$; в) 4

8) а) 624° ; б) $\frac{7\pi}{4}$; в) -2,7

5. Запишите все углы, на которые нужно
повернуть точку $P(1,0)$, чтобы получить
точку с координатами

1) а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $(-1;0)$

2) а) $(1;0)$; б) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Постройте на числовой окружности точки,
соответствующие данным углам (числам)

1) а) -264° ; б) $\frac{21}{4}\pi$; в) 4

2) а) 624° ; б) $\frac{7\pi}{4}$; в) -2,7

3) а) $-\frac{5\pi}{6}$, б) 316° ; в) 1,4

4) а) $\frac{3\pi}{5}$, б) 148° ; в) -1,2

5) а) $\frac{7\pi}{3}$; б) -259° ; в) 7

6) а) $\frac{\pi}{12}$; б) -156° ; в) 12

7) а) $\frac{11\pi}{12}$, б) 315° ; в) -2

8) а) $-\frac{21\pi}{4}$; б) 160° ; в) 1,5

6. Найдите координаты точки, полученной
поворотом точки $P(1,0)$ на данный угол

1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

2) $-7\pi + 2\pi n$

$$3) \text{ а) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \text{ б) } (0; 1)$$

$$4) \text{ а) } (0; -1); \text{ б) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$5) \text{ а) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \text{ б) } (-1; 0)$$

$$6) \text{ а) } (1; 0); \text{ б) } \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$7) \text{ а) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \text{ б) } (0; 1)$$

$$8) \text{ а) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \text{ б) } (0; -1)$$

$$3) -\frac{7\pi}{2} + 2\pi n$$

$$4) \frac{9\pi}{2} + 2\pi n$$

$$5) 5\pi + 2\pi n$$

$$6) \frac{5\pi}{2} + 2\pi n$$

$$7) 11\pi + 2\pi n$$

$$8) -\frac{11\pi}{2} + 2\pi n$$

7. Определите значения

тригонометрических функций с

помощью тригонометрического круга

$$1) \text{ а) } \sin \frac{7\pi}{6} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-315^\circ) \quad \text{д) } \cos 150^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-240^\circ)$$

$$2) \text{ а) } \sin \frac{7\pi}{4} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-120^\circ) \quad \text{д) } \cos 315^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-225^\circ)$$

$$3) \text{ а) } \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-210^\circ) \quad \text{д) } \cos 120^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-300^\circ)$$

$$4) \text{ а) } \sin \frac{7\pi}{6} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-315^\circ) \quad \text{д) } \cos 150^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-240^\circ)$$

$$5) \text{ а) } \sin \frac{7\pi}{4} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-120^\circ) \quad \text{д) } \cos 315^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-225^\circ)$$

$$6) \text{ а) } \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-210^\circ) \quad \text{д) } \cos 120^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-300^\circ)$$

$$7) \text{ а) } \sin \frac{5\pi}{3} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-300^\circ) \quad \text{д) } \cos 225^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-150^\circ)$$

$$8) \text{ а) } \sin \frac{4\pi}{3} \quad \text{б) } \cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right) \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{г) } \sin(-150^\circ) \quad \text{д) } \cos 135^\circ \quad \text{е) } \operatorname{tg}(-210^\circ)$$

8. Определите по тригонометрическому кругу

все углы α , для которых:

$$1) \text{ а) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2) \text{ а) } \sin \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$3) \text{ а) } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -1; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$$

$$4) \text{ а) } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = 1; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5) \text{ а) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$6) \text{ а) } \sin \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$7) \text{ а) } \sin \alpha = -1; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$8) \text{ а) } \sin \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -1$$

9. Найдите значение выражения:

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

2) $\sin 2\alpha - 2 \cos 9\alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha$ при $\alpha = 30^\circ$

3) $\sqrt{3} \sin \alpha + 0,5 \cos \alpha - 0,25 \operatorname{ctg} \alpha$ при $\alpha = 60^\circ$

4) $-\sin 2\alpha + 3 \cos \alpha - 0,5 \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

5) $2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \pi$

6) $\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$

10. Докажите тождество

1) $(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{4 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$

2) $(1 - \operatorname{tg} \alpha) \cos 2\alpha = (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 - \sin 2\alpha)$

3) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha$

4) $(1 - \operatorname{tg} \alpha) \cos 2\alpha = (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 - \sin 2\alpha)$

5) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

6) $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

7) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

11. Найдите

1) $\sin \frac{\alpha}{2}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) $\sin \frac{\beta}{2}; \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, если $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

3) $\sin \frac{\alpha}{2}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

4) $\cos \frac{\beta}{2}; \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, если $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

5) $\cos \frac{\alpha}{2}; \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

6) $\cos \frac{\beta}{2}; \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, если $\sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\sin \frac{\alpha}{2}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

12. Упростите выражение

1) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\alpha - \pi) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$

2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha - 2\pi) \cdot \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

3) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(2\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \sin(\pi + \alpha)}$

4) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\alpha - \pi) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$

5) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\alpha - 2\pi) \cdot \sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(3\pi + \alpha)}$

6) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha - 2\pi) \cdot \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

13. Определите, верно ли равенство

1) $\sin 5 \cos 7 - \sin 10 \cos 2 = -\sin 5 \cos 3$

2) $\cos 4 \cos 6 - \sin 1 \sin 3 = \cos 7 \cos 3$

3) $\sin 1 \sin 3 - \cos 4 \cos 6 = -\cos 7 \cos 3$

4) $\cos 6 \cos 4 - \sin 3 \sin 1 = \cos 3 \cos 7$

5) $\sin 3 \sin 1 - \cos 6 \cos 4 = -\cos 7 \cos 3$

6) $\cos 4 \cos 6 - \sin 1 \sin 3 = \cos 7 \cos 3$

$$\frac{\cos(\alpha - 2\pi) \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi + \alpha)}$$

$$\cos 6 \cos 4 - \sin 3 \sin 1 = \cos 3 \cos 7$$

Практическая работа №14

Построение графиков и определение свойств тригонометрических функций.

Раздел 4. Тригонометрические функции

Тема 4.2. Свойства и графики тригонометрических функций

Цель. Построение и изучение графиков тригонометрических функций.

Задания.

1. Построить график $y = \cos x$ и написать свойства.
2. Построить график $y = \sin x$ и написать свойства.
3. Построить график $y = \operatorname{tg} x$ и написать свойства
4. Построить график $y = \operatorname{ctg} x$ и написать свойства

Практическая работа №15

Исследование тригонометрических функций.

Раздел 4. Тригонометрические функции

Тема 4.3. Возрастание и убывание тригонометрических функций. Экстремумы

Цель. Формирование и отработка навыков построения и преобразования любых тригонометрических функций.

Краткая теория

Для построения графиков тригонометрических функции необходимо знать, как строятся графики простейших функций, таких как $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.

Дальнейшие преобразования выполняются с учетом следующих правил:

- график функции $y = f(x + \varphi)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на $(-\varphi)$ единиц вдоль оси абсцисс;
- график функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на (a) единиц вдоль оси ординат;
- график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его сжатия в k раз (при $k > 1$) вдоль оси абсцисс;
- график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его растяжения в k раз (при $0 < k < 1$);
- для построения графика функции $y = kf(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси ординат.

Задания

1. Дополните предложения

- 1) График функции $y = 2 \sin x$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 2) График функции $y = \frac{1}{2} \sin x$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 3) График функции $y = \sin(x + 60)$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 4) График функции $y = \sin(x - 30)$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 5) График функции $y = \sin 2x$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 6) График функции $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 7) График функции $y = \sin x + 2$ получается из графика функции $y = \sin x$
- 8) График функции $y = \sin x - 3$ получается из графика функции $y = \sin x$

2. Построить график функции

- 1) Постройте график функции $y = \sin x - 1$;

- 2) Постройте график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
- 3) Постройте график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;
- 4) Постройте график функции $y = \sin x + 0,5$;
- 5) Постройте график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

Практическая работа № 16

Решение тригонометрических уравнений

Раздел 4. Тригонометрические функции

Тема 4.4. Решение простейших тригонометрических уравнений

Цель. Знать методы решения тригонометрических уравнений, формулы для нахождения корней, уметь использовать полученные знания при решении уравнений.

Краткая теория

Таблица 1 Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $ a \leq 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ при $ a > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	при $ a \leq 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ при $ a > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	a - любое число $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	-
$\operatorname{ctg} x = a$	a - любое число $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	-

Таблица 2 Тригонометрические уравнения

Уравнение	Способ решения	Формулы
1. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0$ $a \cos^2 f(x) + b \cos f(x) + c = 0$ и т.д.	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. Однородное уравнение I степени вида $a \sin x + b \cos x = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)	Деление обеих частей на $\cos x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg} x + b = 0$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
3. Однородное уравнение II степени вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cdot \cos f(x) + k \cos^2 f(x) = 0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + k = 0$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
4. Уравнение вида $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Задания.**1. Решите уравнения**

- | | | | |
|--|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 2) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ | 3) $\sin x = 2\cos x$ | 4) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$ |
| 5) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4}) = -1$ | 6) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ | 7) $\sin x - 2\cos x = 2$ | 8) $4\cos^2 x + \cos 2x = 5$ |
| 9) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 10) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ | 11) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ | 12) $1 + \sin^2 x = \sin 2x$ |
| 13) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 14) $4\cos x - \sin^2 x - 4 = 0$ | 15) $2\sin x + \cos x = 2$ | 16) $\sin 2x - \cos x = 0$ |
| 17) $\cos(3x + \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 18) $4\sin x - \cos^2 x - 4 = 0$ | 19) $\sin x - 2\cos x = 2$ | 20) $4\sin^2 x - \cos 2x = 5$ |
| 21) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 22) $\sin^2 x - 2\cos x = -2$ | 23) $\sin x = 2\cos x$ | 24) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$ |
| 25) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 26) $4\cos^2 x - 3\sin x = 3$ | 27) $\sin x + \cos x = 1$ | 28) $\sin 4x + \cos^2 2x = 2$ |
| 29) $\operatorname{ctg}(3x + \pi) = -\sqrt{3}$ | 30) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ | 31) $2\sin x + \cos x = 2$ | 32) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$ |

2. Решите уравнение

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$ | 2) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$ |
| 3) $\sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0$ | 4) $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$ |
| 5) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$ | 6) $1 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$ |
| 7) $\cos x + \cos 3x - 4\cos 2x = 0$ | 8) $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 1 = 0$ |
| 9) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$ | 10) $5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ |
| 11) $\sin 3x + \sin x + \cos x = 0$ | 12) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ |
| 13) $\cos x + \cos 3x = 4\cos 2x$ | 14) $1 - 8\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$ |
| 15) $\cos 3x - \cos 5x - \sin 4x = 0$ | 16) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$ |
| 17) $\cos 7x = \cos 5x + \sin x$ | 18) $2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x$ |
| 19) $\sin 7x - \sin x - \cos 4x = 0$ | 20) $-3\sin x \cos x + \cos^2 x + 1 = 0$ |
| 21) $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$ | 22) $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 1 = 0$ |

Практическая работа № 17

Решение тригонометрических неравенств

Раздел 4. Тригонометрические функции

Тема 4.5. Решение простейших тригонометрических неравенств

Цель. Знать методы решения тригонометрических неравенств, уметь использовать полученные знания при решении неравенств.

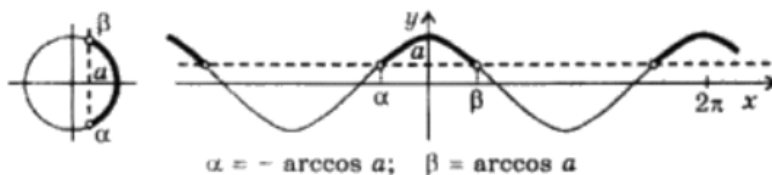
Краткая теория

Неравенства:

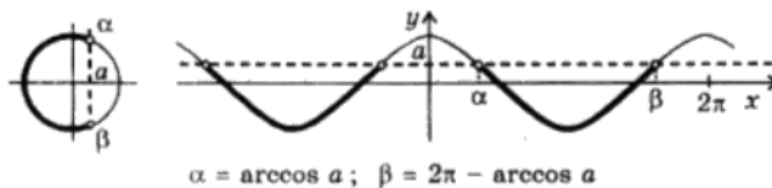
$$\cos x > a; \cos x \geq a; \cos x < a; \cos x \leq a.$$

$$|a| < 1$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

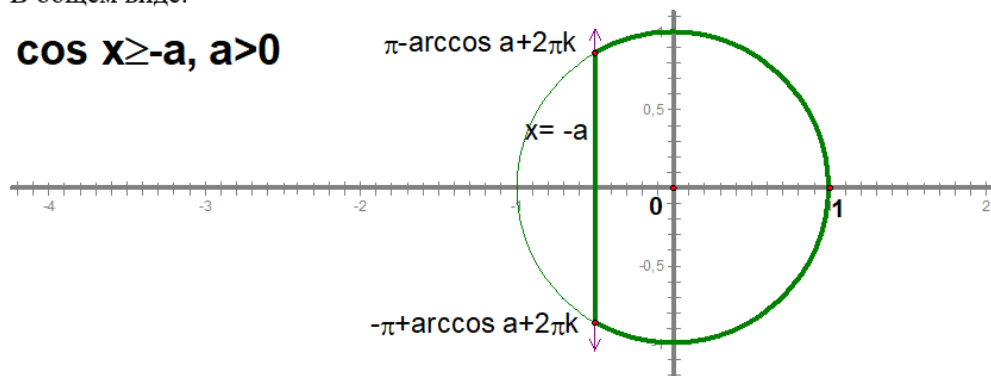


Пример : $\cos x < \frac{1}{2}.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

В общем виде:

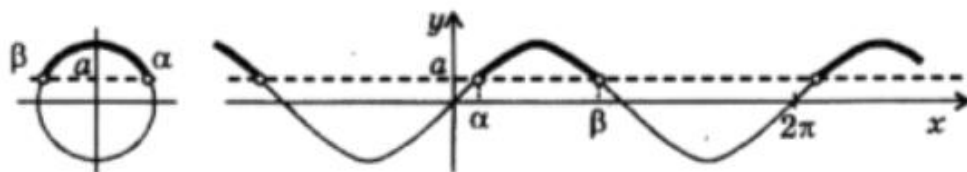
$$\cos x \geq -a, a > 0$$



Ответ: $-\pi + \arccos a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

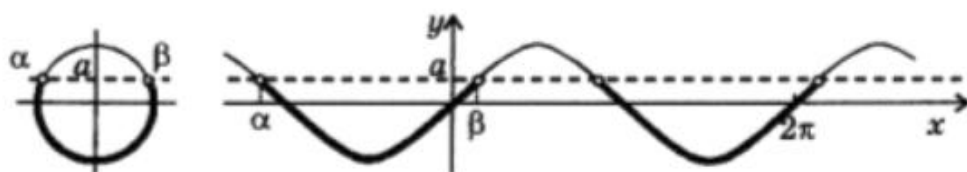
Неравенства : $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$

$$\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\alpha = \arcsin a; \beta = \pi - \arcsin a.$$

$$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



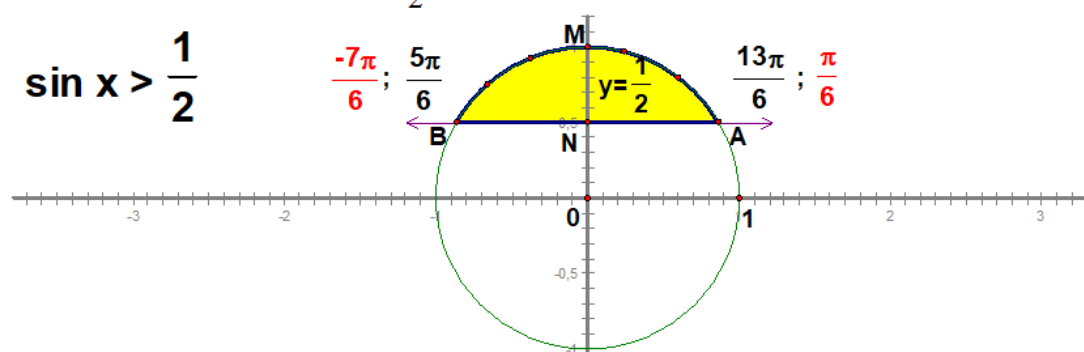
$$\alpha = -\pi - \arcsin a; \beta = \arcsin a.$$

Пример | Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$

На единичной окружности проводим прямую $y = \frac{1}{2}$, которая пересекает окружность в точках А и В.

Все значения y на промежутке NM больше $\frac{1}{2}$, все точки дуги AMB удовлетворяют данному неравенству. При всех углах поворота, больших $\frac{\pi}{6}$, но меньших $\frac{5\pi}{6}$, $\sin x$ будет принимать значения больше $\frac{1}{2}$ (но не больше единицы).

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

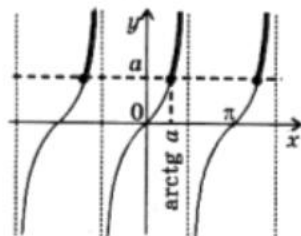


Неравенства:

$\operatorname{tg} x > a$; $\operatorname{tg} x \geq a$; $\operatorname{tg} x < a$; $\operatorname{tg} x \leq a$.

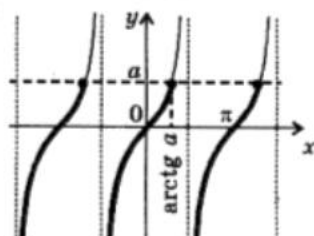
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x > a \\ \arctg a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \geq a \\ \arctg a + \pi n \leq x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x < a \\ -\pi/2 + \pi n < x < \arctg a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \leq a \\ -\pi/2 + \pi n < x \leq \arctg a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Задания

1. Решить уравнения

1) $\sin 2x > \frac{1}{2}$;

12) $\cos \frac{x}{2} \geq -\frac{1}{2}$;

2) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

13) $\cos 5x < \frac{1}{2}$;

3) $\sin x \geq 0$;

14) $\cos 2x < -\frac{1}{3}$;

4) $\sin x < 1$;

15) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin x < \frac{1}{3}$;

16) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\sin x < 0$;

17) $\cos \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

8) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

18) $\cos x > 0$;

9) $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$;

19) $\cos 2x \leq 0$;

10) $\sin \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

20) $\sqrt{2} \cos 2x \leq -1$;

21) $\cos x < \frac{4}{5}$;

11) $\sin \frac{3x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

22) $\cos x < \frac{5}{2\sqrt{2}}$

Практическая работа № 18

Геометрический и механический смысл производной. Геометрический смысл дифференциала.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление

Тема 5.1. Понятие о производной. Правила вычисления производной функции

Цель. Знать основные определения производной, геометрический и механический смысл производной. Отработка полученных знаний.

Краткая теория

Производная и ее механический смысл.

Из формулы (1) сформулируем *механический смысл производной*:

Механический смысл производной заключается в том, что *мгновенная скорость материальной точки в момент времени t равна производной закона пути движения* этой точки:

$$v(t) = s'(t)$$

Пример 1.

Вычислить мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t=1$, двигающейся по закону $s(t)=t^2-3t+1$

Решение

По определению механического смысла производной получим закон скорости материальной точки:

$$v(t) = s'(t) = (t^2 - 3t + 1)' = 2t - 3$$

$$v(1) = -2$$

Ответ: -2

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x - точка этого промежутка и число $h \neq 0$, такое, $x+h$ также принадлежит данному промежутку.

Определение 2.

Предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$ (если этот предел существует)

называется *производной функции $f(x)$ в точке x* и обозначается $f'(x)$ (читается «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (2)$$

В формуле (1) число $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом $x+h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x , то это функция называется *дифференцируемой в этой точке*.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то это говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Пример 2.

Найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение

Составим разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$

Если $h \rightarrow 0$, то $2x + h \rightarrow 2x$, поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$

Ответ: $2x$.

Пример 3. Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

Решение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k(x+h) + b - kx - b}{h} = k$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k = k.$$

$$(kx + b)' = k$$

Ответ: k .

Геометрический смысл производной.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке $(x_0; f(x_0))$

Если $y = kx + b$ – искомое уравнение, то по формуле (1) $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Следовательно, $y = f'(x_0)x_0 + b$. Подставим координаты точки $(x_0; f(x_0))$, получим

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Итак, уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке $(x_0; f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

Пример 4.

Найти угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$ и

осью Ox и написать уравнение этой касательной.

Найдем значение функции $f(x) = \cos x$ и ее производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f'(x_0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ и осью Ox равен $-\arctg \frac{1}{2}$. По формуле (2) искомое уравнение касательной:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{2}x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$$

Задания.

1. Пользуясь определением, найти производные функций:

1) $f(x) = 4;$

6) $f(x) = 3x^2 + 6x;$

2) $f(x) = 3x + 2;$

7) $f(x) = x - 2x^3;$

3) $f(x) = 5x + 7;$

8) $f(x) = 3x^2 - 5x;$

4) $f(x) = 4x;$

9) $f(x) = 5x^2 - 2x + 7;$

5) $f(x) = 6x^3;$

10) $f(x) = 7x^2 + x - 1.$

2. Вычислить мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t=2$, движущейся по закону:

1) $s(t) = 2t + 1;$

2) $s(t) = 2 - 3t;$

3) $s(t) = \frac{3}{2}t^2;$

4) $s(t) = 5t^2$

5) $s(t) = t^2 + 4t - 1.$

3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0

1) $f(x) = x^3, x_0 = 1;$

5) $f(x) = x^5 - 3x, x_0 = 1;$

9) $f(x) = \frac{18}{4x+1}, x_0 = 0,5;$

2) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4};$

6) $f(x) = 2\sqrt{x} - 7, x_0 = \frac{1}{4}$

10) $f(x) = 11 - 2\cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

;

3) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

7) $f(x) = \frac{4}{x} - 3; , x_0 = -\frac{1}{2};$

4) $f(x) = e^x, x_0 = \ln 3;$

8) $f(x) = \sqrt{16x + 21}, x_0 = \frac{1}{4};$

4. Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3, x_0 = 1;$

4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}, x_0 = 3;$

2) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1;$

5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}, x_0 = 0;$

3) $f(x) = 2\sqrt{x}, x_0 = 3;$

6) $f(x) = \ln(2x + 1), x_0 = 2;$

5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , если:

1) $f(x) = 3x^2 + 4x + 5, x_0 = -1$;

3) $f(x) = \sqrt{2x-3}, x_0 = 6$

2) $f(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = -2$;

4) $f(x) = 2x - \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

Практическая работа № 19.

Нахождение производных функций.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление

Тема 5.2. Производная сложной функции

Тема 5.3. Производные тригонометрических функций

Тема 5.4. Производная показательной функции

Тема 5.5. Производная логарифмической функции

Цель. Знать таблицу и правила нахождения производной простых, сложных и обратных функций. Отработка полученных знаний.

Краткая теория.

Формулы дифференцирования основных функций

$(C)' = 0$;	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности:
$(kx + b)' = k$;	$(x)' = 1, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(e^x)' = e^x$;
$(\cos x)' = -\sin x$;	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$(a^x)' = a^x \ln a$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила вычисления производных

1) Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

Пример 4.

Найти производную функции:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$$

Решение

$$\begin{aligned} f(x)' &= (x^3 - x^2 + x - 3)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' \\ &= 3x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(k \cdot u)' = ku', \text{ где } k - \text{const.}$$

Данное правило доказывается аналогично первому правилу.

Пример 5.

Найти производную функции:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$$

Решение

$$\begin{aligned} f(x)' &= \left(\frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17 \right)' \\ &= \left(\frac{1}{4}x^5 \right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' \\ &= \frac{1}{4}(x^5)' - 3(x^3)' + 7(x)' - (17)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7 \end{aligned}$$

3) *Производная произведения:*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Пример 6. Найти производную произведения двух функций:

$$f(x) = (3x^2 - 5) \text{ и } g(x) = (2x + 7)$$

Решение

$$(f(x)g(x))' =$$

$$\begin{aligned} ((3x^2 - 5)(2x + 7))' &= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' = \\ &= 6x(2x + 7) + 2(3x^2 - 5) = 18x^2 + 42x - 10 \end{aligned}$$

4) *Производная частного:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5) *Производная сложной функции:*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример 7.

Найти производную функций:

1) $\sin(2x+1)$;

2) e^{3x} ;

Решение:

$$1) (\sin(2x+1))' = \sin'(2x+1) (2x+1)' = 2\cos(2x+1);$$

$$2) (e^{3x})' = e^{3x} (3x)' = 3e^{3x};$$

3. Используя формулы дифференцирования, найдите производную функции:

- | | | | | |
|---------------|--------------------------|---------------------------------|---------------|-------------------|
| 1) x^6 ; | 9) $x^{\frac{1}{2}}$; | 17) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; | 25) e^x ; | 33) 5^x ; |
| 2) x^7 ; | 10) $x^{\frac{1}{3}}$; | 18) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; | 26) $\ln x$; | 34) $\log_2 3$; |
| 3) x^{11} ; | 11) $x^{\frac{-2}{7}}$; | 19) 1; | 27) $5x+2$; | 35) $\log_5 x$; |
| 4) x^{13} ; | 12) $x^{\sqrt{3}}$; | 20) 2; | 28) $2x$; | 36) $\log_4 x$; |
| 5) x^{-2} ; | 13) $\frac{1}{x^5}$; | 21) 1000000; | 29) $-5x$; | 37) $\arccos x$; |
| 6) x^{-3} ; | 14) $\frac{1}{x^9}$; | 22) $\cos x$; | 30) $7-3x$; | 38) $\arctg x$; |
| 7) x^{-4} ; | 15) $\sqrt[4]{x}$; | 23) $\sin x$; | 31) $1-2x$; | 39) $\tg x$; |
| 8) x^{-7} ; | 16) $\sqrt[3]{x^2}$; | 24) $4x-3$; | 32) $2-5x$; | 40) π |

4. Найдите производную функции:

- | | | | |
|--------------------------------|---------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x^2 + x$; | 7) $x^2 - x$; | 13) $-17x^2$; | 20) $13x^2 + 26$; |
| 2) $3x^2 - 5x + 5$; | 8) $3x^5 - 6x$; | 14) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; | 21) $\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x^2}$ |
| 3) $e^x + 1$; | 9) $e^x + x^2$; | 15) $5^x + 3e^x$; | 22) $x^6 + \frac{1}{x}$ |
| 4) $2^x + e^x$; | 10) $6^x + \log_{11} x$; | 16) $\frac{e^x}{\cos x}$; | 23) $\log_7 x \sin x$ |
| 5) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$; | 11) $x - \cos x$; | 17) $\frac{3^x}{\sin x}$; | 24) $x^2 + 6x + 8 \ln x$; |
| 6) $\sin x + x^2$; | 12) $e^x + 2x^3$ | 18) $\ln x \cos x$; | 25) $\frac{1}{2}x - \sin x$ |

5. Найдите производную функции:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------------------|
| 1) $(4x-1)^2$; | 11) $\sin(2x-1)$; | 21) e^{2x} ; |
| 2) $(5x+2)^{-3}$; | 12) $\cos(x+2)$; | 22) $e^{3x + \ln(x^2 - 2x)}$; |
| 3) $(2x)^3$; | 13) $\sin(3-x)$; | |
| 4) $\sqrt{2x+7}$; | | |

5) $\sqrt[4]{7-3x}$;

6) $\sqrt[3]{5x}$;

7) $(-5x)^4$;

8) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}$;

9) $\frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}$;

10) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$;

14) $\cos(x^3)$;

15) $\sqrt{\sin x}$;

16) $\sqrt[3]{\cos x}$;

17) $\frac{1}{\cos^2(3x+5)}$;

18) $\ln(\cos x)$;

19) $2^{\cos x+1}$;

20) $\sin^{100}(6x)$;

23) $0,5^{1+\sin x} + \frac{1}{(x+2)^2}$;

24) $\log_2(4x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$;

25) $\ln \frac{2x+3}{5} + (\log_{15}(5x+1))^2$;

26) 8^{3x^4+2x} ;

27) $\frac{2^x - \log_2(x)}{\sin x}$;

28) $\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x}$;

29) $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$;

30) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$;

6. Найдите производную:

1) $y = \frac{4x^4}{25} - 3x^2 - 3x + 2$

4) $y = \frac{3x^2}{5} - 5x^7 + 4x + 4$

7) $y = \frac{2x^3}{7} + 3x^6 - 3x - 1$

10) $y = \frac{3x^4}{14} - 8x^2 - 5x + 3$

13) $y = \frac{x^2}{5} - 5x^7 + 4x - 2$

16) $y = \frac{4x^4}{10} - 2x^2 - 2x + 8$

19) $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^6 + 3x + 3$

22) $y = \frac{4x^4}{15} - 5x^2 - 2x + 9$

25) $y = \frac{3x^4}{12} - 7x^2 - 6x + 4$

2) $y = (x^2 - 5x)(4x - 5)$

5) $y = (3x^2 - 2x)(5x + 6)$

8) $y = (6x^2 + 3x)(4x - 1)$

11) $y = (x^2 + 5x)(4x + 5)$

14) $y = (x^2 - 5x)(4x - 5)$

17) $y = (x^2 - 5x)(4x - 2)$

20) $y = (x^2 + 3x)(8x - 2)$

23) $y = (x^2 + 5x)(4x + 5)$

26) $y = (3x^2 + 2x)(5x - 6)$

3) $y = \frac{3x^2 - 5x + 8}{3 + 5x^3}$

6) $y = \frac{3x^2 - 5x + 8}{3 + 5x^3}$

9) $y = \frac{4x^2 + 5x - 6}{1 - 5x^2}$

12) $y = \frac{4x + 5x^2 - 6}{2 + 5x}$

15) $y = \frac{3x^2 - 5x + 8}{3 - 5x^3}$

18) $y = \frac{4x + 5x^2 - 6}{2 + 5x}$

21) $y = \frac{3x^2 - 5x + 8}{3 + 5x^3}$

24) $y = \frac{4x^2 - 5x - 6}{-5x^2 - 1}$

27) $y = \frac{4x + 5x^2 - 6}{2 + 5x}$

$$28) y = \frac{6x^2}{7} - 8x^7 + 2x + 5$$

$$29) y = (6x^2 - 3x)(4x + 1)$$

$$30) y = \frac{3x^2 + 5x - 8}{3 + 5x^3}$$

$$31) y = \frac{2x^3}{17} + 9x^6 - 5x + 1$$

$$32) y = (7x^2 - 3x)(4x - 5)$$

$$33) y = \frac{4x + 5x^2 - 6}{2 + 5x}$$

7. Найдите производную

$$1) y = (2x^3 - 5x)^4$$

$$2) y = \operatorname{ctg}(4x - 5)$$

$$3) y = 5^{(x^2 - 5x)}$$

$$4) y = \arcsin(2x)$$

$$5) y = (5x^6 + 3x)^8$$

$$6) y = \sin(5x + 6)$$

$$7) y = 7^{(x^2 + 5x)}$$

$$8) y = \arccos(4x)$$

$$9) y = (2x^3 - 5x)^4$$

$$10) y = \cos(4x - 1)$$

$$11) y = 10^{(6x^2 + 3x)}$$

$$12) y = \operatorname{arccctg}(14x)$$

$$13) y = (x^3 - 5x^7)^5$$

$$14) y = \operatorname{tg}(4x + 5)$$

$$15) y = \lg(x^2 + 5x)$$

$$16) y = \operatorname{arccctg}(-3x)$$

$$17) y = (2x^3 - 5x)^4$$

$$18) y = \operatorname{ctg}(4x - 5)$$

$$19) y = e^{(x^2 + 5x)}$$

$$20) y = \arcsin(5x)$$

$$21) y = (x^6 - 3x)^8$$

$$22) y = \sin(4x + 5)$$

$$23) y = \log_3(x^2 + 5x)$$

$$24) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 3$$

$$25) y = (x^3 - 5x^7)^5$$

$$26) y = \cos(4x - 1)$$

$$27) y = e^{(x^2 + 5x)}$$

$$28) y = \operatorname{arctg}(27x)$$

$$29) y = (2x^3 - 5x)^4$$

$$30) y = \operatorname{tg}(4x + 5)$$

$$31) y = \log_4(x^2 + 5x)$$

$$32) y = \operatorname{arctg}(8x)$$

$$33) y = (2x^3 - 5x)^4$$

$$34) y = \operatorname{ctg}(5x + 6)$$

$$35) y = \lg(3x^2 - 2x)$$

$$36) y = \operatorname{arccctg}(-x)$$

$$37) y = (5x^6 + 3x)^8$$

$$38) y = \sin(4x - 1)$$

$$39) y = \ln(6x^2 + 3x)$$

$$40) y = \arcsin(6x)$$

$$41) y = (x^3 - 5x^7)^5$$

$$42) y = \cos(4x + 5)$$

$$43) y = \log_2(x^2 + 5x)$$

$$44) y = \arccos(19x)$$

Практическая работа № 20

Исследование функции с помощью производной

Раздел 5. Дифференциальное исчисление

Тема 5.6. Исследование функции с помощью производной

Цель. Формирование умений на нахождения промежутков возрастания и убывания функции, экстремумов функции, промежутков выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба. Отработка полученных знаний для построения графика функции, нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке и отрезке.

Краткая теория.

1. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0 .

Точка x_0 называется *точкой максимума*, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) > f(x)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума*, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) < f(x)$.

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума функции*.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Справедлива теорема.

Теорема 1.

Если x_0 – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$.

Теорема 2.

Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является *точкой максимума*, если с «-» на «+», то *точкой минимума*.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$.

Если на промежутке $f'(x) < 0$, то на этом промежутке функция *убывает*; если на промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке функция *возрастает*.

4. Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является *точкой максимума*, если с «-» на «+», то *точкой минимума*.
5. Определить точки минимума и максимума и записать ответ.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

Пример 1.

Найти промежутки возрастания и убывания; точки экстремума функции: $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Решение:




1. Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2. Найдем критические точки, решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$;

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2$$

Исследуем поведение производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		max 0		min -4	

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

функция убывает при $x \in (0; 2)$

точка минимума функции $x = 2$; точка максимума функции $x = 0$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке $[a; b]$.

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок $[a; b]$.
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке $[a; b]$
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок $[a; b]$. Для этого, находим производную функции, приравняем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при $x=a$ и $x=b$.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 2.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ на отрезке $[1; 4]$;

$$1) D(f) = x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$[1; 4] \in D(f)$$

2) Находим производную функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} \right)' = \frac{(x^3 + 4)'x^2 - (x^3 + 4)(x^2)'}{x^4} = \frac{3x^4 - (x^3 + 4)2x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезка $[1;4]$.

$$3) \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$$

$$x = 2 \in [1;4]$$

4) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке:

$$f(1) = 5;$$

$$f(2) = 3;$$

$$f(4) = 4\frac{1}{4}$$

$$5) y_{\max} = 5; y_{\min} = 3.$$

Ответ: $y_{\max} = 5; y_{\min} = 3.$

Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Исследование функций и построение их графиков следует проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать, является ли функция четной или нечетной.
3. Исследовать, является ли функция периодической.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства, то есть промежутки на которых $y < 0$ или $y > 0$.
5. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.
6. Построить график функции.

Пример 3.

Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$ и построить ее график.

Проведем исследование по схеме:

1) $D(f) = \mathbb{R}$, т.к. $f(x)$ -многочлен.

2) Так как $f(-x) = f(x)$, тогда функция является четной. График симметричен отн. Оу.

3) Точки пересечения графика с осью Ох:

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$(-2,782;0); (-0,5;0) (0,5;0) (2,782;0).$$

При $x=0$; $y=1$

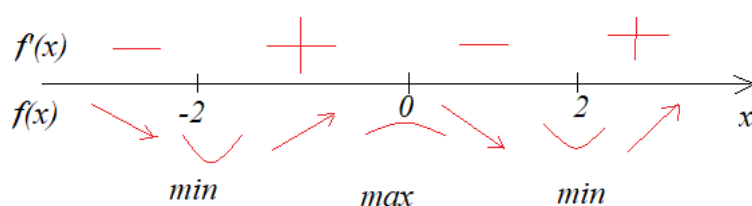
$(0;1)$ -точка пересечения графика с осью Оу

4) Функция не является периодической.

$$5) f'(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x+2)(x-2)$$

$$2x(x+2)(x-2) = 0$$

$x=0$; $x=2$; $x=-2$ -критические точки



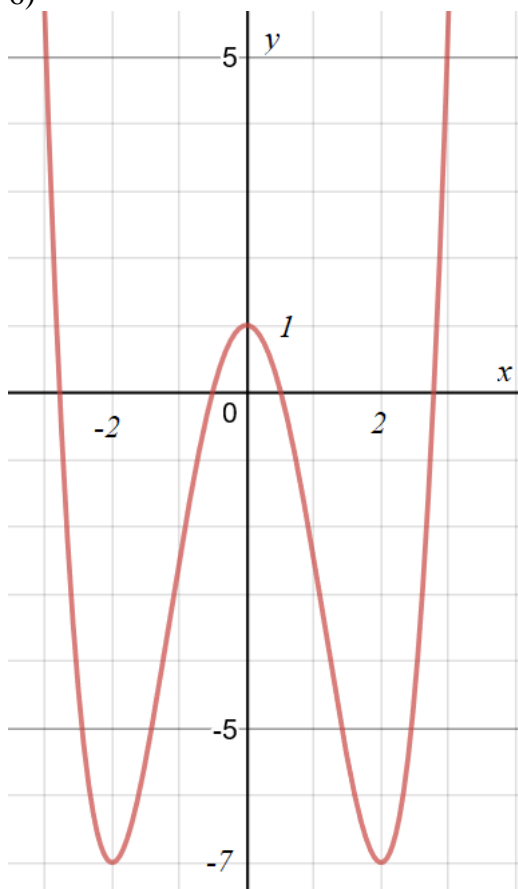
Функция убывает при $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 2]$.

Функция возрастает при $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty]$.

$(-2; -7); (2; -7)$ -min

$(0; 1)$ -max.

б)



Для более точного построения графика функции можно найти асимптоты и промежутки выпуклости, точки перегиба

Определение асимптот графика функции с помощью производной.

Прямая $x = a$ на плоскости XOY называется *вертикальной асимптотой* функции $f(x)$, если один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равен $\pm \infty$.

Таким образом, прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если точка a - точка разрыва второго рода для функции $f(x)$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $f(x) - kx - b \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \rightarrow \infty$ выполнялись условия:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad k \in \mathbf{R},$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b, \quad b \in \mathbf{R}.$

Определение направлений выпуклости графика функции и точек перегиба.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Тогда существует касательная к графику функции $f(x)$ в любой точке $M(x, f(x))$, $x \in [a, b]$, причем эти касательные не параллельны оси OY .

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз)* на $[a, b]$, если график функции в пределах $[a, b]$ лежит не выше (не ниже) любой из своих касательных.

Теорема 4.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$. Тогда если $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) на (a, b) , то функция выпукла вниз (вверх) на $[a, b]$.

Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости функции $f(x)$.

Теорема 5.

Если в точке перегиба x_0 функции $f(x)$ вторая производная существует и непрерывна, то она в этой точке равна нулю.

Теорема 6.

Если $f''(x_0) = 0$ и

- 1) $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0 , то x_0 - точка перегиба функции $f(x)$;
- 2) $f''(x)$ не меняет знака при переходе через x_0 , то x_0 не является точкой перегиба функции $f(x)$.

Пример 4.

Исследовать функцию $f(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Решение.

1. Найдем область определения функции.

$D(f) = \mathbf{R}$, так как данная функция – многочлен.

2. Исследуем функцию на монотонность, найдем точки экстремума.

Найдем вначале критические точки функции.

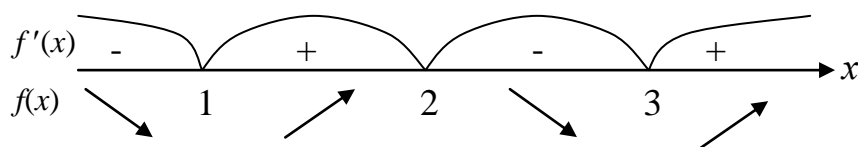
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-3) = 2(x-1)(x-3)(x-3+x-1) = \\ &= 2(x-1)(x-3)(2x-4) = 4(x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

$D(f') = \mathbf{R}$, так как производная тоже является многочленом.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = 2$, или $x = 3$. Следовательно, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ – критические точки функции.

Нанесем критические точки функции на числовую прямую и определим знаки производной в каждом из получившихся промежутков.

На промежутках $(-\infty; 1]$, $[2; 3]$ функция убывает, на промежутках $[1; 2]$, $[3; +\infty)$



функция возрастает.

Точки $x = 1$ и $x = 3$ – точки минимума функции, $\min f(x) = f(1) = f(3) = 0$.

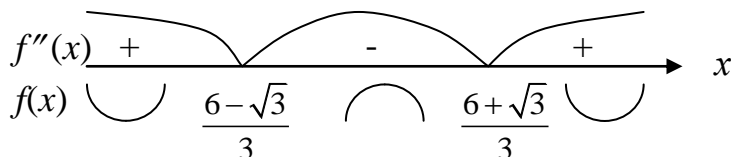
Точка $x = 2$ – точка максимума функции, $\max f(x) = f(2) = 1$.

3. Исследуем функцию на направление выпуклости, найдем точки перегиба.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4((x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)) = \\ &= 4(x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4x + 3 + x^2 - 3x + 2) = 4(3x^2 - 12x + 11). \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Нанесем точки x_1 и x_2 на числовую прямую и определим знаки второй производной в каждом из получившихся промежутков.



На промежутках $\left(-\infty; \frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, на промежутке $\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}; \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$ функция выпукла вверх. Точки $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$ являются точками перегиба.

Пример 5.

Исследовать функцию $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Решение.

1. Найдем область определения функции.

$$D(f): \begin{cases} x > 0, \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

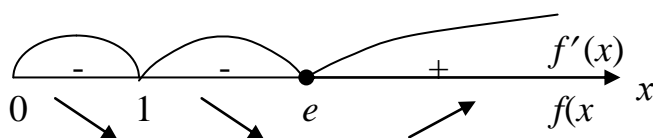
2. Исследуем функцию на монотонность, найдем точки экстремума.

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \quad D(f') = (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Следовательно, $x = e$ – критическая точка функции.

Нанесем область определения функции и критическую точку на числовую прямую. Определим знаки производной на каждом из получившихся промежутков.

На промежутках $(0; 1)$, $(1; e)$ функция убывает, на промежутке $(e; +\infty)$ функция возрастает. Точка $x = e$ – точка максимума, $\max f(x) = f(e) = e$.

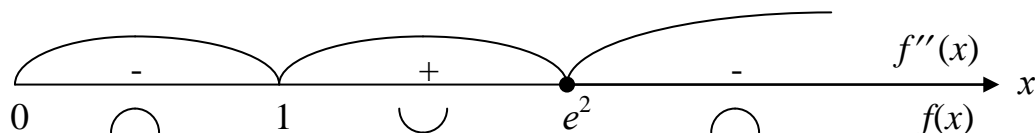


3. Определим направление выпуклости графика функции и найдем точки перегиба.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1)}{\ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - 2 \ln^2 x + 2 \ln x}{x \ln^4 x} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x \ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

$$D(f'') = (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$$

Точка $x = e^2$ - точка возможного перегиба. Определим знаки второй производной в промежутках $(0; 1)$, $(1; e^2)$, $(e^2; +\infty)$.



На промежутках $(0; 1)$, $(e^2; +\infty)$ функция выпукла вверх, на промежутке $(1; e^2)$ функция выпукла вниз. Точка $x = e^2$ - точка перегиба.

Пример 4.6.

Провести полное исследование функции $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$ и построить ее график.

Решение.

$$1. D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}.$$

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не является периодической.

4. Найдем точки пересечения графика с осями координат и промежутки знакопостоянства. Ось Ox график не пересекает, так как $y \neq 0$ для всех $x \in D(f)$. Ось Oy :

$$x = 0, \quad y = \frac{e^3}{3} \approx 6,7.$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-3; +\infty), \quad y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -3).$$

5. Функция непрерывна на области определения, так как является элементарной, $x = -3$ - точка разрыва. Исследуем характер разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{e^{x+3}}{x+3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{e^{x+3}}{x+3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = -3$ - точка разрыва второго рода, прямая $x = -3$ - вертикальная асимптота графика функции.

6. Исследуем поведение функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = 0. \quad \text{Следовательно, прямая } y = 0 -$$

горизонтальная асимптота графика функции при $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Так как } k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+3}}{(x+3)x} = 0, \text{ то других наклонных асимптот при}$$

$x \rightarrow -\infty$ нет.

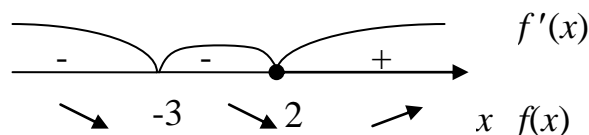
Выясним, есть ли наклонные асимптоты при $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x^2 + 3x} = +\infty. \quad \text{Следовательно, при } x \rightarrow +\infty \text{ наклонных}$$

асимптот нет.

7. Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

$$y' = \frac{e^{x+3}(x+3) - e^{x+3}}{(x+3)^2} = \frac{e^{x+3}(x+2)}{(x+3)^2}, y'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

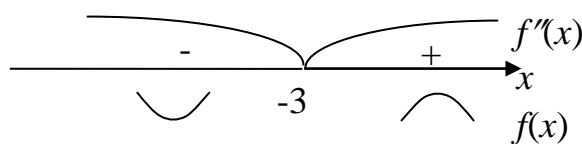


$x = -2$ – точка минимума, $y(-2) = e$ – минимум.

8. Исследуем функцию на направление выпуклости и перегиб.

$$y'' = \frac{(e^{x+3}(x+2) + e^{x+3})(x+3)^2 - 2e^{x+3}(x+2)(x+3)}{(x+3)^4} =$$

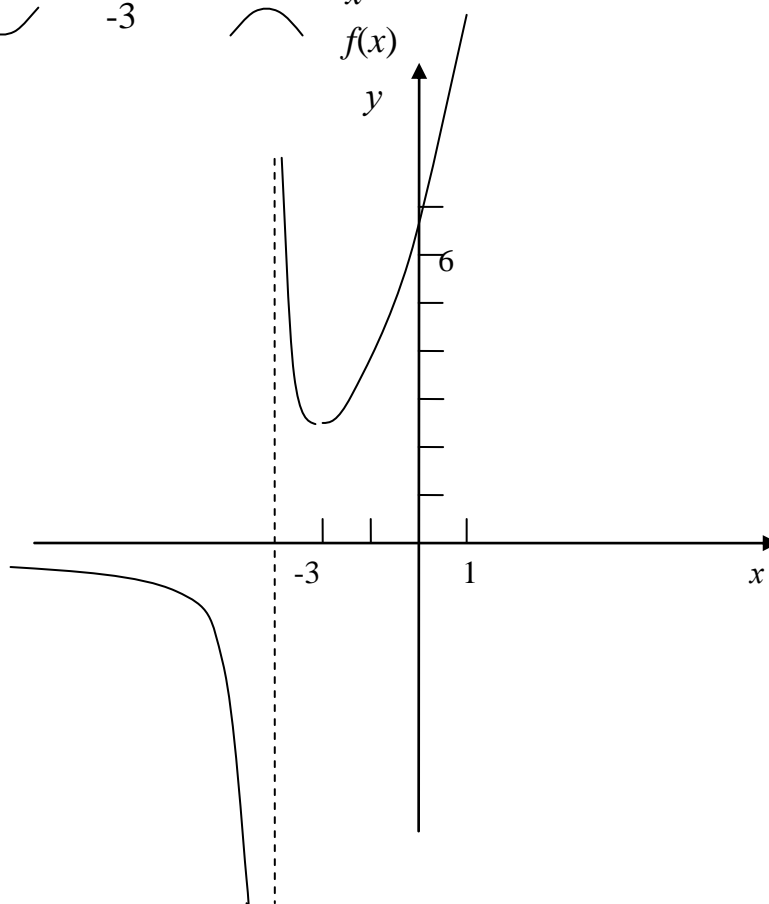
$$= \frac{e^{x+3}(x+3)^3 - 2e^{x+3}(x+2)(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{e^{x+3}((x+3)^2 - 2(x+2))}{(x+3)^3} = \frac{e^{x+3}(x^2 + 4x + 5)}{(x+3)^3}.$$



$$y'' \neq 0$$

на $D(f)$, y'' не существует в точке $x = -3$. Точек перегиба нет.

9. Построим график функции



Задания.

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=f(x)$:

1) $f(x) = x^3 + 2x$;

6) $f(x) = \sqrt{1-2x}$;

2) $f(x) = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

7) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$;

3) $f(x) = -2x^2 + x^4 - 3$;

8) $f(x) = \frac{3}{x}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x} + 1$;

9) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$;

5) $f(x) = \frac{1-2x}{3+2x}$;

10) $f(x) = x^3 - 3x^2$.

2. Найти точки экстремума и экстремумы функции $y=f(x)$:

1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$;

2) $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 13$;

3) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

4) $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$;

5) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$;

6) $f(x) = 2\cos x + x$;

7) $f(x) = (x-1)^{\frac{6}{7}}$;

8) $f(x) = \cos 3x - 3x$;

9) $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на $[-3; 2]$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на $[-4; 0]$;

3) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$, $[0; \pi]$;

4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на $[-2; 1]$;

5) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на $[-2; 0,5]$;

6) $f(x) = \sin x + \cos x$ на $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$;

7) $f(x) = x + e^{-x}$ на $[-1; 2]$;

8) $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$, $[0; \pi]$.

4. Исследовать функцию $y=f(x)$ и построить ее график:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

6) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$;

2) $f(x) = 2 + 3x - x^3$;

7) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$;

3) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$;

8) $f(x) = 6x^4 - 4x^6$;

4) $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 16$;

5) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$;

5. Исследовать функцию $y=f(x)$ и построить ее график:

$$1) f(x) = 2 + 5x^3 - 3x^5; \quad 5) f(x) = 3x + \frac{1}{3x};$$

$$2) f(x) = 4x^5 - 5x^4; \quad 6) f(x) = \frac{4}{x} - x;$$

$$3) f(x) = 3x^5 - 5x^3; \quad 7) f(x) = xe^x;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x; \quad 8) f(x) = xe^{-x}.$$

6. Найти $f''(x)$, если:

$$1) f(x) = x^2 \cos x; \quad 3) 1) f(x) = x^3 \sin x;$$

$$2) f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2; \quad 4) f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6.$$

7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

$$1) f(x) = e^{-x^2}; \quad 3) f(x) = x^5 - 10x^2 + 7x - 9;$$

$$2) f(x) = \cos x;$$

8. Найти асимптоты графиков функции:

$$1) f(x) = \frac{3x}{x+2};$$

$$2) f(x) = e^{\frac{-1}{x}};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}.$$

Ответы.

1. 1) Возрастает на \mathbb{R} ; 2) Возрастает на $[-5; 3]$, убывает на $(-\infty; -5]$ и на $[3; +\infty)$;
3) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$, возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$;

4) Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; 5) Убывает на $(-\infty; -1,5)$ и на $(-1,5; +\infty)$;

6) Убывает на $(-\infty; 0,5]$; 7) Убывает на $(-\infty; 1,25]$, возрастает на $[1,25; +\infty)$;

8) Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; 9) Возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 2]$;

10) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$; убывает $[0; 2]$.

2. 1) $x=1$ -точка максимума, $y_{\max}=-3$; $x=2$ - точка минимума, $y_{\min}=-4$;

2) $x=-1$ -точка максимума, $y_{\max}=26$; $x=2$ - точка минимума, $y_{\min}=-163$;

3) $x=2$ -точка максимума, $y_{\max}=4$; $x=-2$ - точка минимума, $y_{\min}=-4$;

4) $x=3$ -точка минимума, $y_{\min}=1$;

5) $x=0$ -точка максимума, $y_{\max}=3$; $x=-2; 2$ - точки минимума, $y_{\min}=-13$;

6) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ - точка максимума, $y_{\max} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ - точка минимума, $y_{\min} = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

7) Точек экстремума нет;

8) Точек экстремума нет;

9) $x = -1$ - точка максимума, $y_{\max} = 0,25$; $x = 0; 4$ - точки минимума, $y_{\min} = 0; 10 \frac{2}{3}$.

3. 1) $y_{\max} = 5$; $y_{\min} = -11$; 2) $y_{\max} = 0$; $y_{\min} = -4$; 3) $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $y_{\max} = 68$; $y_{\min} = -31$;
5) $y_{\max} = -2$; $y_{\min} = -2,5$; 6) $y_{\max} = -1$; $y_{\min} = -\sqrt{2}$; 7) $y_{\max} = 2 + e^{-2}$; $y_{\min} = 1$; ; 8) $y_{\max} = 1,5$; $y_{\min} = -3$.

4.1) $2\cos x - 4\sin x - x^2 \cos x$; 2) $20x^3 + 12x - 2$; 3) $-x^3 \sin x + 6\sin x + 6x^2 \cos x$;

4) $12x^2 - 18x$.

5.1) Выпукла вверх $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, выпукла вниз $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и на $(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$, $x_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}$

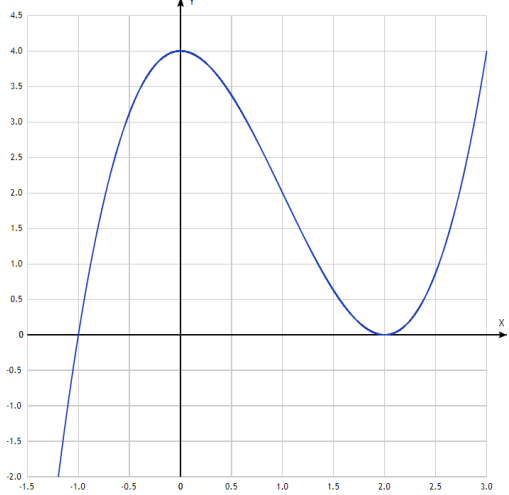
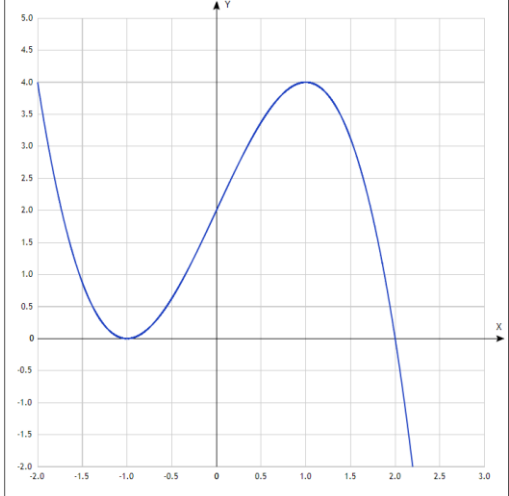
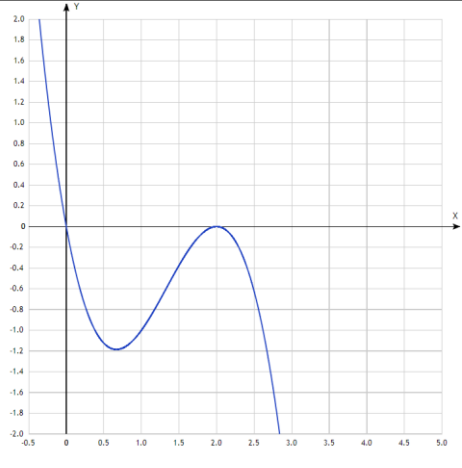
точки перегиба; 2) Выпукла вверх $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$, выпукла вниз

$[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$ $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $x = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$...-точки перегиба; 3) Выпукла

вниз $(1; +\infty)$, выпукла вверх $(-\infty; 1)$ и на $(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$, $x = 1$ - точки перегиба.

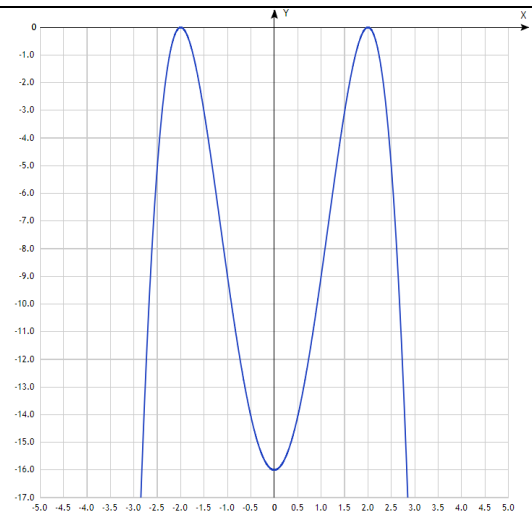
6.1) $x = -2$ - вертикальная асимптота, $y = 3$ - горизонтальная асимптота; 2) $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y = 1$ - горизонтальная асимптота; 3) $x = 1$ и $x = -6$ - вертикальные асимптоты, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

7. График

Функция	График
<p>1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;</p> <p>(0;4)-max; (2;0)-min</p>	
<p>2) $f(x) = 2 + 3x - x^3$;</p> <p>(-1;0)-min; (1;4)-max.</p>	
<p>3) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$;</p> <p>(2/3;-1,2)-min; (2;0)-max.</p>	

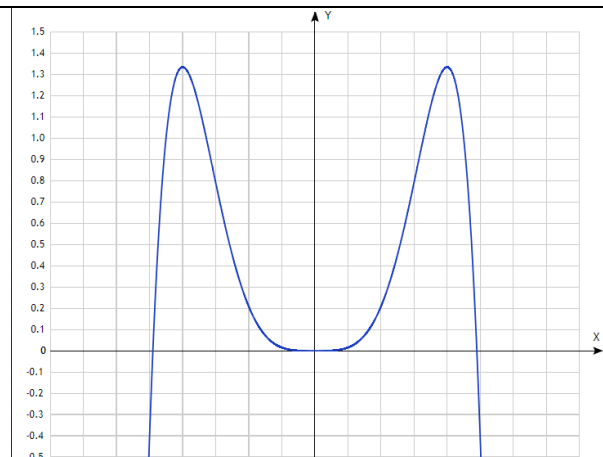
$$4) f(x) = -x^4 + 8x^2 - 16;$$

(0;-16)-min; (-2;0), (2;0)-max.



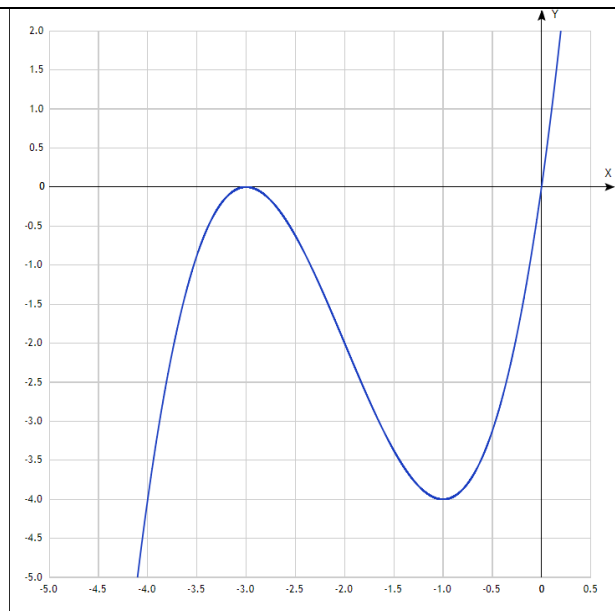
$$5) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6;$$

(0;0)-min; (-2;1,33), (2;1,33)-max



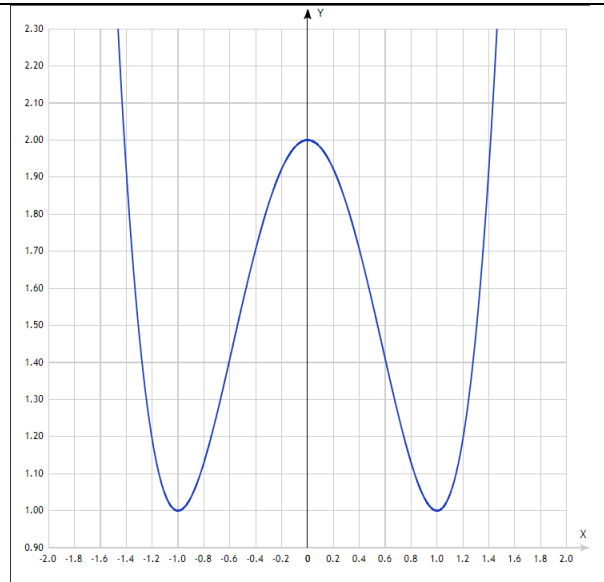
$$6) f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x;$$

(-1;-4)-min; (-3;0)-max



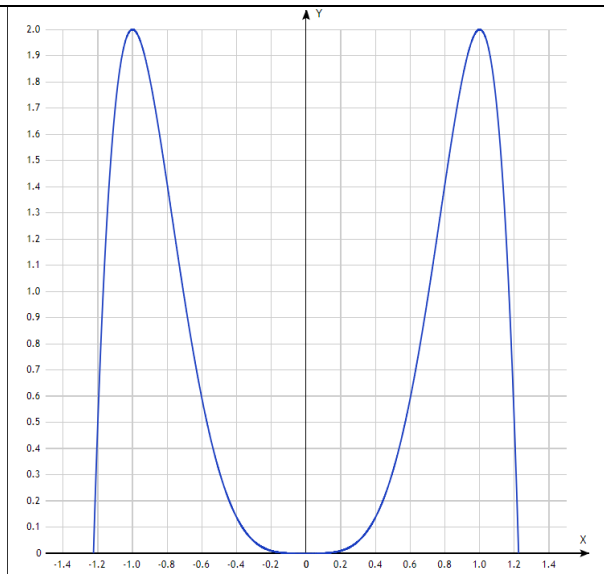
7) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$;

(1;1) , (-1;1)-min;(0;2)-max

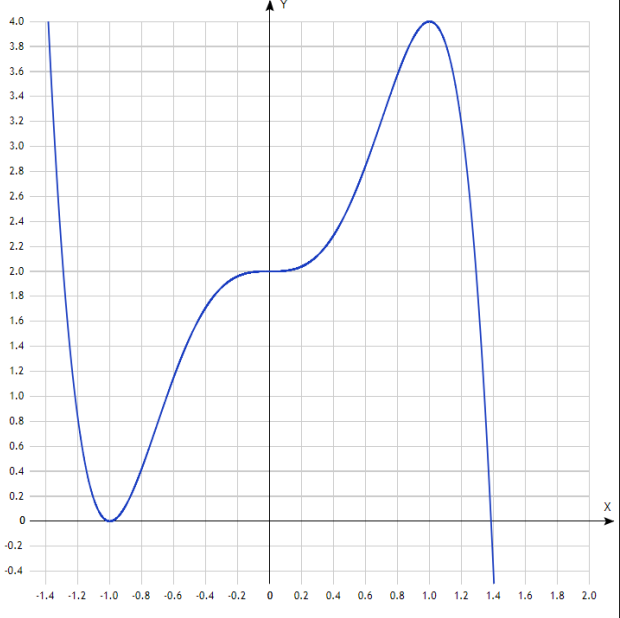
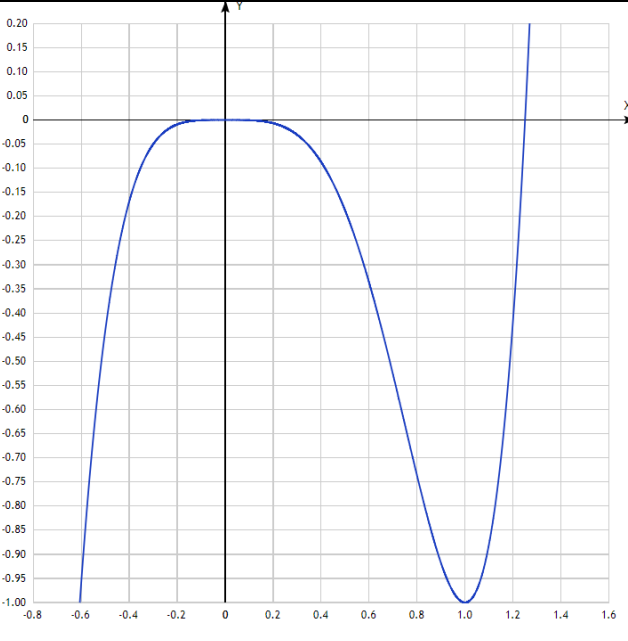


8) $f(x) = 6x^4 - 4x^6$

(1;2) , (-1;2)-max;(0;0)-min

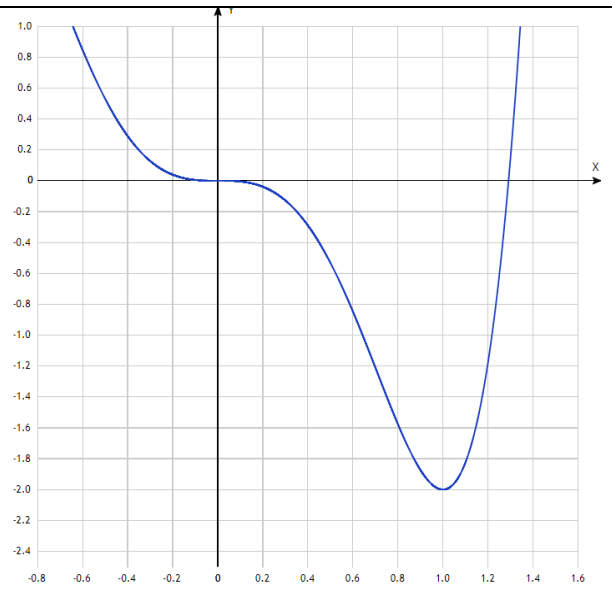


7.Графики

Функция	График
<p>1) $f(x) = 2 + 5x^3 - 3x^5;$</p> <p>(1;4)-max;(-1;0)-min</p>	
<p>2) $f(x) = 4x^5 - 5x^4;$</p> <p>(0;0)-max;(1;-1)-min</p>	

3) $f(x) = 3x^5 - 5x^3;$

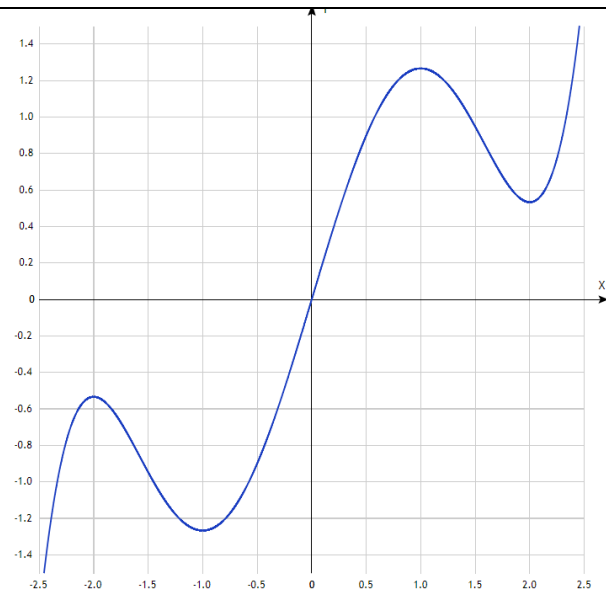
(1;-2)-min



4) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x;$

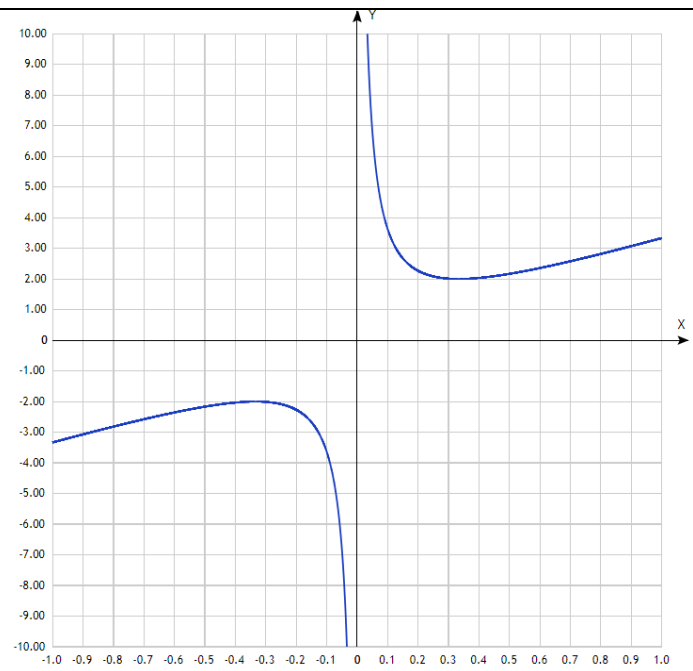
(-2;-0,53), (1;1,27)-max;

(2;0,53), (-1;-1,27)-min

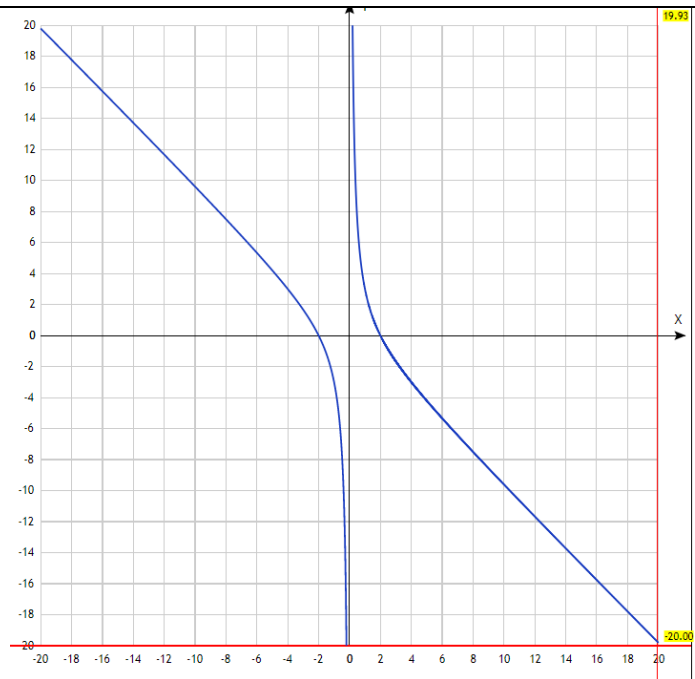


$$5) f(x) = 3x + \frac{1}{3x}$$

$(-0,3;-2)$ max; $(0,3;2)$ -min

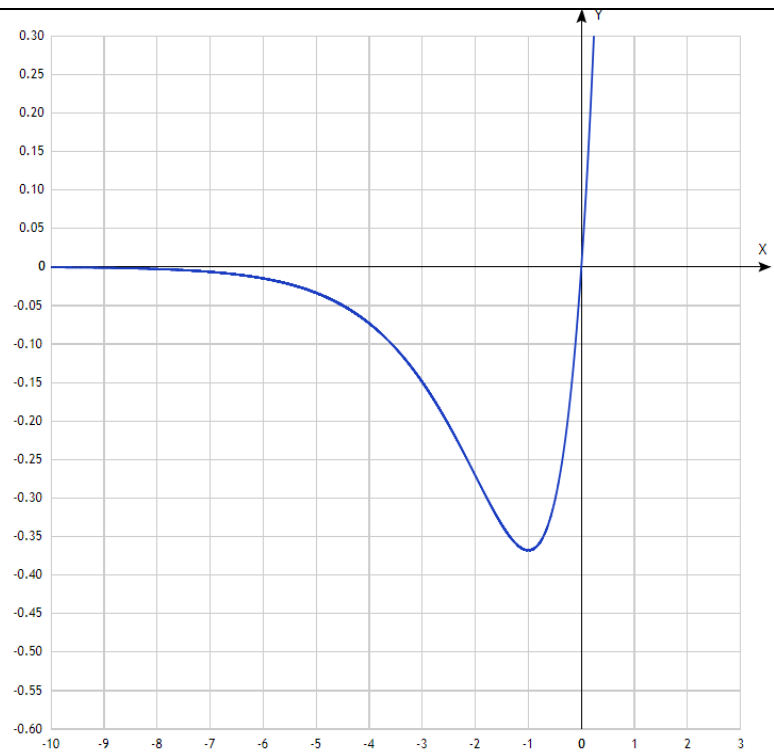


$$6) f(x) = \frac{4}{x} - x$$



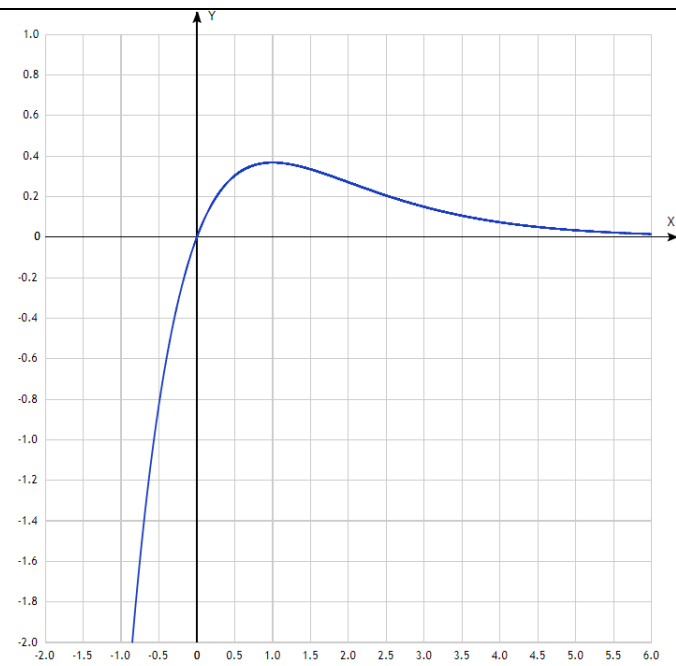
7) $f(x) = xe^x$

$(-1; -0,368)$ -min



8) $f(x) = xe^{-x}$

$(1; 0,37)$ -max



Практическая работа № 21

Нахождение неопределённого интеграла.

Раздел 6. Интегральное исчисление

Тема 6.1. Неопределённый интеграл

Цель. Формирование умений находить неопределённый интеграл и отработка полученных знаний

Краткая теория.

Понятие неопределённого интеграла. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда множество всех её первообразных – это семейство функций вида $F(x) + C$. Это семейство функций называют **неопределённым интегралом** (от) функции $f(x)$ и обозначают символом $\int f(x)dx$,

т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, а $F'(x) = f(x)$.

(Коротко: неопределённый интеграл от функции $f(x)$ – это множество всех её первообразных). При этом произведение $f(x)dx$ называют **подынтегральным выражением**, функцию $f(x)$ – **подынтегральной функцией**, а переменную x – **переменной интегрирования**.

Пример. Пусть $f(x) = x^3$. Её неопределённый интеграл равен $\int x^3 dx = x^4/4 + C$

Ответ проверяется просто: достаточно найти производную функции $x^4/4 + C$.

Свойства неопределённых интегралов:

$$1) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$2) \int k f(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k = \text{const}, k \neq 0)$$

Таблица основных интегралов:

Таблица	
$\int 0 dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C$

Основные методы интегрирования. При вычислении производных обычно пользуются стандартным набором правил и формул, что превращает дифференцирование в единообразную, выполняемую по одним и тем же схемам, работу.

Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы основных интегралов и свойств неопределённых интегралов называют **непосредственным интегрированием**.

Пример 1. Вычислить $\int (2x^3 - 3e^x + 1)dx = \int 2x^3 dx - \int 3e^x dx + \int dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int e^x dx + \int dx = 2/4 x^4 - 3e^x + x + C$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} & \int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{tg} 5 \right) dx = \\ & = \int x dx + \int \sqrt{x} dx - \int 3x^5 dx + \int \frac{2dx}{x^3} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \operatorname{tg} 5 dx = \\ & = \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^5 dx + 2 \int x^{-3} dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \operatorname{tg} 5 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{1}{6}x^6 + 2 \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot x^{-2} - (-\operatorname{ctgx}) + \operatorname{tg}5 \cdot x + C^{(4)} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \operatorname{ctgx} + \operatorname{tg}5 \cdot x + C, \text{ где } C = \operatorname{const}
\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Интеграл табличный. Поэтому можно переходить к непосредственному интегрированию, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

Задания

1 Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\int x^3 dx$ | 2) $\int x^{11} dx$ | 3) $\int 5 dx$ |
| 4) $\int \frac{dx}{4}$ | 5) $\int x\sqrt{2} dx$ | 6) $\int \frac{2}{3}x^4 dx$ |
| 7) $\int \frac{dx}{x^5}$ | 8) $\int (x - 5e^x) dx$ | 9) $\int (\frac{5}{x} + \sin x) dx$ |
| 10) $\int (2^x - 1) dx$ | 11) $\int \frac{dx}{16+x^2}$ | 12) $\int \frac{3a}{\cos^2 x} dx$ |
| 13) $\int (5x^4 - 7x^6 + 3) dx$ | | |

2 Найти неопределенный интеграл, преобразуя выражение стоящие под знаком интеграла.

- | | |
|--|---|
| 14) $\int \frac{3+2x-x^2}{x} dx$ | 15) $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^2} dx$ |
| 16) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ | 17) $\int (2+x)^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx$ |
| 18) $\int \frac{x^2+7x+12}{x+3} dx$ | 19) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ |
| 20) $\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx$ | |

3. Найти неопределенный интеграл:

- | | | |
|------------------------|---------------------------------------|---|
| 1) $\int (2x+7)^8 dx$ | 2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ | 3) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ |
| 4) $\int 4e^{3x-2} dx$ | 5) $\int \frac{x dx}{x^2-1}$ | 6) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}$ |

7) $\int \cos(4x+4)dx$

8) $\int x^2\sqrt{x^3-1}dx$

9) $\int \cos^5 x \sin x dx$

10) $\int (4x+8)^{10}dx$

11) $\int \frac{3x^2 dx}{x^3-1}$

12) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$

13) $\int \cos(4x+1)dx$

14) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

15) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x + 10}}$

16) $\int \frac{8}{(4x+3)^2}dx$

17) $\int \frac{3x dx}{2x^2-2}$

18) $\int e^{2\sin x+1} \cos x dx$

19) $\int e^{4x-1} dx$

20) $\int \frac{2x dx}{3x^2+5}$

21) $\int \sqrt{2\sin x + 1} \cos x dx$

22) $\int \frac{6dx}{\sin^2(2-5x)}$

23) $\int 3^{x^2} x dx$

24) $\int (3 + \sin x)^2 \cos x dx$

25) $\int 5^{2x+1} dx$

26) $\int \frac{5x dx}{5x^2+3}$

27) $\int \frac{\cos x dx}{(2-\sin x)^2}$

28) $\int \frac{5dx}{\cos^2(8+4x)}$

29) $\int \frac{x^2 dx}{(7+2x^3)^4}$

30) $\int e^{\sin x+5} \cos x dx$

31) $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

32) $\int \frac{3e^x dx}{e^x+5}$

33) $\int (4x+5)e^x dx$

34) $\int \frac{5x}{2} \cos 3x dx$

35) $\int \frac{\ln(x+1) dx}{x+1}$

36) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

37) $\int (x+1)e^x dx$

38) $\int x \sin 3x dx$

39) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

40) $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$

41) $\int (1-6x)e^x dx$

42) $\int x \cos 3x dx$

43) $\int \frac{\arctg^4 x}{x^2+1} dx$

44) $\int \frac{3 \operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$

45) $\int (1+2x)2^x dx$

46) $\int x \cos 4x dx$

47) $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$

48) $\int \frac{3 \ln^2 x}{x} dx$

49) $\int (2x+3)e^x dx$

50) $\int \sin 5x dx$

51) $\int \frac{8dx}{\operatorname{tg} x * \cos^2 x}$

52) $\int \frac{\ln(3+x)}{4+x} dx$

53) $\int e^x(2+5x) dx$

54) $\int 3x \cos \frac{x}{3} dx$

- 55) $\int \frac{\ln(x-2)}{x-2} dx$ 56) $\int \frac{dx}{x(\ln x + 1)}$ 57) $\int (2-3x)e^x dx$ 58) $\int \sin \frac{x}{2} 2x dx$
- 59) $\int \frac{5dx}{\operatorname{ctg} x * \sin^2 x}$ 60) $\int \frac{2e^x dx}{(5+e^x)^2}$ 61) $\int e^x(4-3x) dx$ 62) $\int 4x \cos 5x dx$
- 63) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2} dx$ 64) $\int \frac{3 \operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$ 65) $\int e^x(3x+2) dx$ 66) $\int \frac{x}{2} \sin 3x dx$
- 67) $\int \frac{\ln(x-2)}{x-2} dx$ 68) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 69) $\int e^x(8x+3) dx$ 70) $\int \cos \frac{x}{2} 30x dx$
- 71) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$ 72) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 5}$ 73) $\int e^x(4x-1) dx$ 74) $\int \sin 20x \frac{x}{3} dx$

Практическая работа № 22

Геометрический смысл определённого интеграла.

Нахождение определённого интервала.

Раздел 6. Интегральное исчисление

Тема 6.2. Определённый интеграл

Цель. Отработка навыков вычисления определённого интеграла площадей различных фигур.

Краткая теория.

Определённый интеграл

Если у интеграла указаны пределы интегрирования, то интеграл называется *определённым* и его можно вычислить.

Обозначение:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

где \int - знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, dx – знак

дифференциала, a, b – пределы интегрирования.

Свойства определённых интегралов

1. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
2. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Вычисляется определённый интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Этапы вычисления определенного интеграла следующие:

- 1) Сначала находим первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Константа C в определенном интеграле никогда не добавляется.
- 2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.
- 3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.
- 4) Рассчитываем разность $F(b) - F(a)$, то есть, находим число.

Пример 1.

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение.

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Пример 2.

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &\stackrel{(1)}{=} 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 \stackrel{(3)}{=} \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36 \end{aligned}$$

При оформлении задания можно использовать более краткую запись:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \\ &= \left(32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36 \end{aligned}$$

С помощью интеграла решаются следующие задачи:

- вычисление площадей фигур,
- вычисление объёмов тел вращения,
- вычисление длины дуги кривой.

Вычисление площадей фигур

Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

Формула и способ вычисления зависит от того, как заданы линии, ограничивающие фигуру: декартовыми координатами, параметрическими уравнениями или в полярной системе координат.

Если линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, то площадь фигуры вычисляется по следующим формулам:

1. $S = \int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ – функция, график которой ограничивает фигуру, $[a; b]$ – отрезок на оси OX , ограничивающий фигуру. (см. Рис.2.)

2. Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ – сверху, $y = f_2(x)$ – снизу, слева прямой $x = a$ справа прямой $x = b$

определяется формулой $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$ (см. Рис.3.)

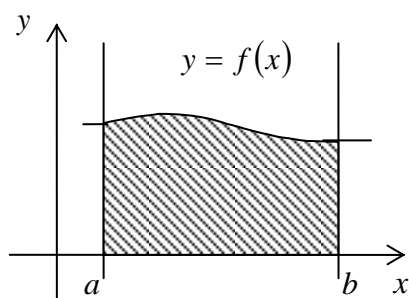


Рисунок 2.

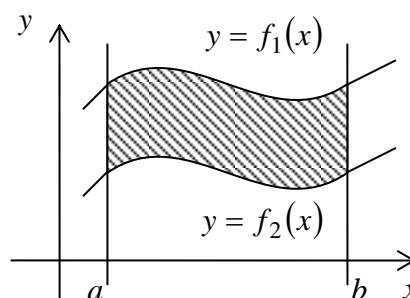


Рисунок 3.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

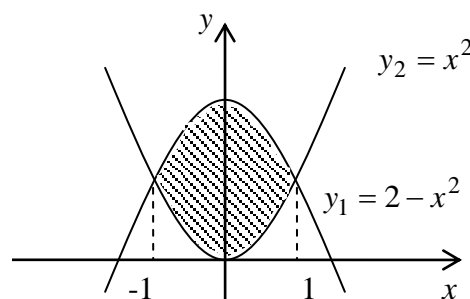
Решение. Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \\ &= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3}; \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.



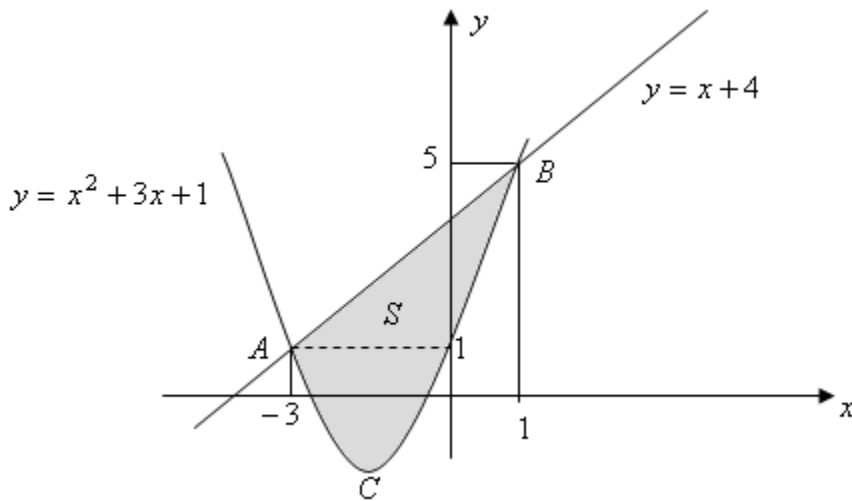
Пример 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$f(x) = x + 4$ и $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Изобразите эту фигуру на координатной плоскости.

Решение. Графиком функции $g(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вычисляем производную функции $g'(x) = 2x + 3$ и находим координаты вершины параболы C :

$$g'(x_B) = 0 \Leftrightarrow x_B = -\frac{3}{2}; \quad y_B = g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}; \quad C\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right).$$



Найдем точки пересечения графиков функции: $g(x) = f(x)$.

$$x^2 + 3x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что для $f(x) = x + 4$ $f(-3) = 1$, $f(1) = 5$. Графиком функции $f(x) = x + 4$ является прямая, которую можно построить по двум точкам $A(-3; 1)$ и $B(1; 5)$.

Пусть S – площадь фигуры ABC , ограниченной графиками функций. Так как $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [-3; 1]$, то

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-3}^1 (x + 4 - x^2 - 3x - 1) dx = \\ &= \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

Пример 5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

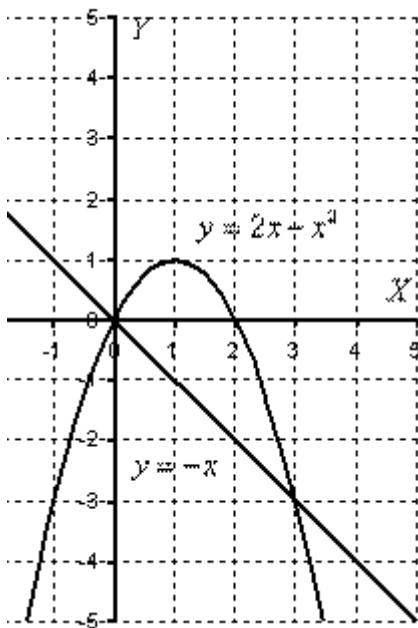
$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$.



Нам важно, какой график ВЫШЕ (относительно другого графика), а какой – НИЖЕ.

В рассматриваемом примере, очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x - x^2$ необходимо вычесть $-x$

Завершение решения может выглядеть так:

Искомая фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ сверху и прямой $y = -x$ снизу.

На отрезке $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$, по соответствующей формуле:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ответ:

$$S = 4\frac{1}{2} \text{ ед}^2$$

Задания

1. Вычислите определенный интеграл.

1. $\int_0^2 x^2 dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\cos^2 x}$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot dx$

2. $\int_0^2 4x^3 dx$

14. $\int_4^5 (4 - 2x)^3 dx$

26. $\int_{-1}^1 (e^{4x} + 1) dx$

3. $\int_1^3 x^4 dx$

15. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) \cdot dx$

27. $\int_0^2 (x - 2e^x) \cdot dx$

4. $\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$

28. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot dx$

5. $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$

17. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

29. $\int_2^8 (x-9) dx$

6. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$

18. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2}$

30. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \cdot dx$

7. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot dx$

31. $\int_{-1}^2 (2x-1)^3 dx$

8. $\int_1^3 e^{2x} dx$

20. $\int_0^1 3^{2x+1} dx$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2 2x}$

9. $\int_0^1 e^{3x} dx$

21. $\int_1^2 4x^3 \cdot dx$

33. $\int_{-1}^2 \left(\frac{x}{2} - 1 \right)^3 dx$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{5x+2}$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cdot dx$

34. $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$

11. $\int_2^3 \frac{dx}{3x-1}$

23. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

35. $\int_0^1 2^{x+1} dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot dx$

24. $\int_{-1}^2 (4x-1)^3 dx$

36. $\int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) \cdot dx$

3. Найти площади фигур ограниченных линиями.

$y = x^3$ $x = 1$ $x = 2$ $y = 0$	$y = x^2 + 2x - 4$ $y = 6 - x^2$	$y = \sin x$ $x = 0; x = 2\pi; y = 0$
$y = 2^x - 1$ $y = \sqrt{x}$	$y = x^2 - 2x - 1$ $y = -x^2 + 6x - 1$	$y = \frac{7}{x}$ $x + y = 8$

$y = \sin x$ $y = \cos x$ $x = 0$	$y = -x^2 - 2x + 5$ $y = x^2 + 4x + 5$	$y = x^3$ $x + y = 2$ $y = 0$
$y = e^x$ $y = e^{-x}$ $x = 1$	$y = x^3 - 2$ $y = 4x - x^2 + 2$	$y = \frac{6}{x}$ $x + y = 7$
$y = 8 - 7x$ $y = 2x + 16; x = 0$	$y = x^2 - 1 - 2x$ $y = 6x - 1 - x^2$	$y = \operatorname{tg} x$ $x = \frac{\pi}{3}; y = 0$
$y = 2^x$ $x = -1; y = 0$	$y = -0,5x^2 + 2x$ $y = 0,5x$	$y = \sin x + 1$ $y = 1,5 \quad x \in [0; \pi]$
$y = \sqrt{x - 2}$ $y = 0; x = 6$	$y = 5 - 2x - x^2$ $y = x^2 + 5 + 4x$	$y = \sin x$ $y = \frac{1}{2} \quad x \in [0; \pi]$
$y = 2^x$ $x = 0; y = 4$	$y = -0,5x^2 + 1$ $y + x = 1$	$y = x^3 - 2$ $y = 4x + 2 - x^2$
$y = 3^{x-1} - 2$ $x = 1; y = 1$	$y = 3 + 4x - x^2$ $y = 3 - 2x + x^2$	$y = \frac{3}{x}$ $x + y = 4$
$y = \sqrt{x}$ $y = x - 2; x = 0$	$y = -x^2 + 7x - 6$ $x - y + 2 = 0$	$y = \sin x$ $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi; y = 0$

Практическая работа № 23

Вычисление площадей и объёмов с помощью определённого интеграла.

Решение прикладных задач с помощью определённого интеграла.

Раздел 6. Интегральное исчисление

Тема 6.3. Площадь криволинейной трапеции определённого интеграла

Цель. Сформировать умения и навык использования интеграла при решении различных практических задач и задач на вычисление объёмов тела.

Решение прикладных задач с помощью определённого интеграла»

Краткая теория.

Задача о вычислении пути

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть

мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное

равенство в пределах от t_1 до t_2 получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$ выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1)$$

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ (м/с).

Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение.

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2) dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2 = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275 \text{ (м)}$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75 \text{ (м)}$$

Таким образом, $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$ (м).

2. Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s , то как известно из курса физики, работа A этой F вычисляется по формуле:

$$A = F \cdot s$$

Работу переменной силы $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находим по формуле (3):

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Решении задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F , растягивающая или

сжимающая пружину, пропорциональна этому растяжению или сжатию, т.е. $F=kx$, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

Пример 1. Сила упругости F пружины, растянутой на $l^1 = 0,05$ м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0,1$ м?

Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: $3=k \cdot 0,05$, т.е. $k=60$, следовательно, сила упругости выражается соотношением $F=60x$. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что $a=0$; $b=0,1$:

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3 \text{ Дж}$$

3. Задача о силе давления жидкости

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле $P=\rho ghS$, (4)

Где g – ускорение свободного падения в м/с^2 ;

ρ – плотность жидкости в кг/м^3 ;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м^2 .

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$.

Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонтальных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY). На глубине x выделим одну из них и обозначим через $f(x)$ ее длину, а через Δx ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь $S = f(x) \cdot \Delta x$.

$$P = \rho g f(x) \cdot \Delta x \cdot x$$

Найдем дифференциал dP этой функции.

$$dP = \rho g f(x) \cdot x dx$$

Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = \rho g \int_a^b x f(x) dx \quad (3)$$

Пример

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды

(плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $0,4 \text{ м} \times 0,7 \text{ м}$.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)=0,7x$, $x \in [0; 0,4]$. Так как пределы интегрирования $a=0$ и $b=0,4$, то получим:

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 * 0,7 * x dx = 700 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

Задания.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = -5$. Сделать чертёж.
2. Скорость движения точки $v = 18t - 3t^2 \text{ м/с}$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.
3. Пружина в спокойном состоянии имеет длину $0,1 \text{ м}$. Сила в 20 Н растягивает её на $0,01 \text{ м}$. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от $0,12$ до $0,14 \text{ м}$?
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$ и $y = 0$. Сделать чертёж.
5. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = 29,4 - 9,8t \text{ м/с}$. Найдите наибольшую высоту подъёма тела.
6. При сжатии пружины на $0,05 \text{ м}$ совершается работа 30 Дж . Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на $0,08 \text{ м}$?

Вычисление объёмов с помощью определённого интеграла.

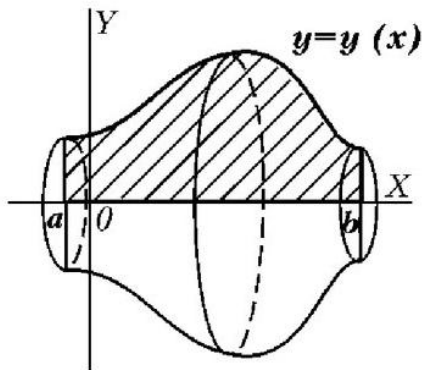
Краткая теория.

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) > 0$, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

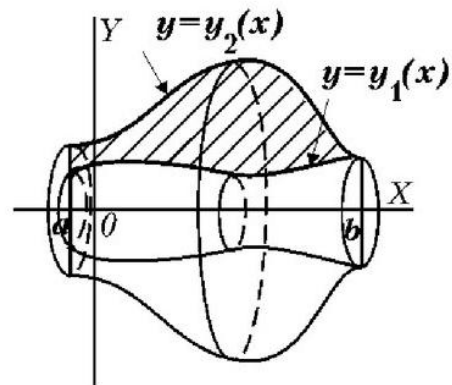
Полученная при вращении фигура называется **телом вращения**.

Вращение вокруг оси Ox .

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

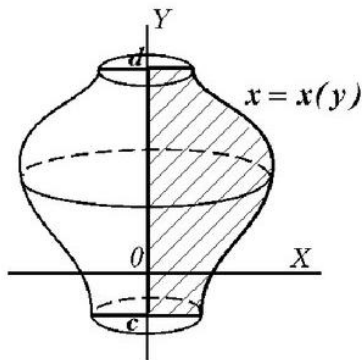


$$V_{ox} = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx$$

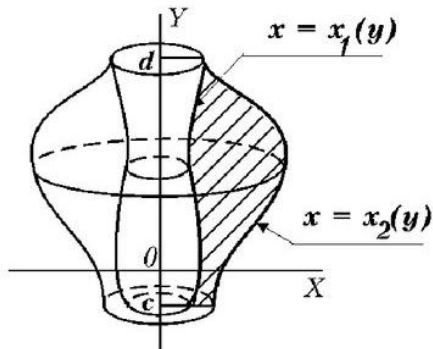


Вращение вокруг оси Oy.

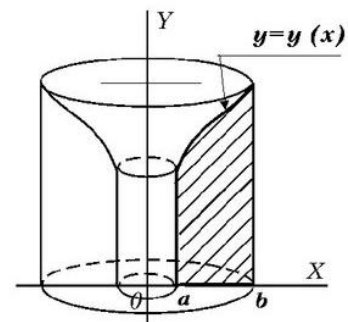
При



$$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2(y) dy$$



$$V_{oy} = \pi \int_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)] dy$$

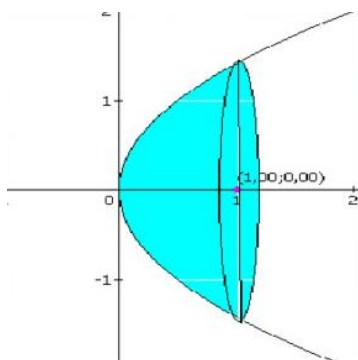


$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx$$

Пример1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oх фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x, y = 0, x = 1$.

Решение:

$$V = \pi \int_0^1 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^1 = \pi \text{ (куб. ед)}$$



Пример2. Найти объем конуса, полученного вращением вокруг оси Oх

прямоугольного треугольника, если радиус основания, полученного конуса R и высота H .

Решение:

Очевидно, $f(x) = kx$, тогда $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}$. Получаем: $f(x) = \frac{Rx}{H}$.

Вычислим объем:

$$V = \int_0^H \pi f^2(x) dx = \int_0^H \pi \frac{R^2 x^2}{H^2} dx = \frac{\pi R^2 x^3}{H^2 \cdot 3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Задания:

Вычислите объем тела вращения, ограниченной линиями.

	Вариант 1.		Вариант 2.
1	$y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0$	1	$y = -x^3, x = 0, x = 2, y = 0$
2	$y = -\frac{4}{x}, x = -4, x = -1, y = 0$	2	$y = \frac{5}{x}, x = 1, x = 5, y = 0$
3	$y = -x^2 + x, y = 0$	3	$y = 4 - x^2, y = 0$
4	$y = \sin, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, y = 0$	4	$y = \cos, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}, y = 0$
5	$y = 3\cos, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, y = 0$	5	$y = 2\sin, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, y = 0$
6	$y = 1 + x^2, x = 1, x = 2, y = 0$	6	$y = e^x, x = -2, x = 0, y = 0$

Практическая работа № 24

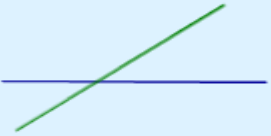
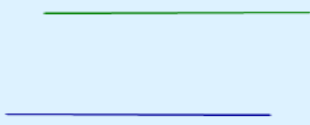
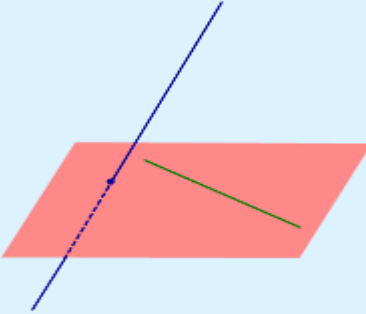
Определение взаимного расположения прямых в пространстве.

Раздел 7. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 7.2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Угол между двумя прямыми

Цель. Повторить и обобщить знания по теме взаимное расположение прямых в пространстве; систематизировать полученные знания.

Краткая теория.

Фигура	Рисунок	Определение
Две <i>пересекающиеся</i> прямые		Две прямые называют <i>пересекающимися прямыми</i> , если они имеют единственную общую точку.
Две <i>параллельные</i> прямые		Две прямые называют <i>параллельными прямыми</i> , если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек
Две <i>скрецающиеся</i> прямые		Две прямые называют <i>скрецающимися прямыми</i> , если не существует плоскости, содержащей обе прямые.

Задания.

1. Ответь на предложенные вопросы. В каждом ответе обоснуй свою точку зрения.

- Верно ли, что если концы отрезка лежат в данной плоскости, то и его середина лежит в этой плоскости?
- Могут ли две плоскости иметь общую точку, но не иметь общей прямой?
- Точка A не лежит в плоскости KMN . Назовите прямую пересечения плоскостей AMN и AKM .
- Даны точки A, B, C и D . Плоскость α проходит через прямую AB , но не проходит через точку C . Прямые AD и BC пересекаются в точке E . Сколько данных точек лежит в плоскости α ?
- В пространстве даны прямая и точка. Сколько различных плоскостей можно через них провести?
- Верно ли, что если три данные точки лежат в одной плоскости, то они не лежат на одной прямой?
- Могут ли три прямые иметь общую точку, но не лежать в одной плоскости?

- 8) Плоскости CBD и EDC пересекаются по прямой a . Назовите две точки, лежащие на прямой a .
- 9) Даны точки A, B, C и D . Плоскость α проходит через точки B, C и D , но не проходит через точку A . Назовите три из данных точек, которые могут лежать на одной прямой.
- 10) Три прямые пересекаются в точке A . Через данную точку необходимо провести плоскость, содержащую ровно две из трёх данных прямых. Сколько таких плоскостей можно провести?
- 11) Верно ли, что если через четыре точки проходит плоскость, то такая плоскость – единственная?
- 12) Могут ли три прямые, пересекающиеся в одной точке, определять в пространстве ровно две плоскости?
- 13) Прямые AB, AC и AD не лежат в одной плоскости. Точка E лежит в плоскости BCD . Назовите прямую пересечения плоскостей ABE и BCD .
- 14) Даны точки A, B, C, D и E . Плоскость α проходит через точки A и B , но не проходит через точки C, D и E . Среди данных точек назовите точку, которая не может лежать на прямой AD .
- 15) В пространстве даны две пересекающиеся прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Сколько различных плоскостей, содержащих все три данные фигуры, можно провести в пространстве?

2. Определите число вершин, рёбер и граней: а) 5-угольной призмы; б) n – угольной призмы.

- 1) Найдите число диагоналей: а) 6-угольной призмы; б) n – угольной призмы.
- 2) Решить задачи по вариантам
- 3) Дана плоскость β и прямые a, b и c . Известно, что одна из данных прямых параллельна плоскости β . Назовите эту прямую, если прямая a параллельна прямой c , прямые a и b пересекаются, а прямая c лежит в плоскости β . Сделайте рисунок и прокомментируйте его с помощью математических знаков.
- 4) Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1 , если $AA_1=3$ м, $BB_1=17$ м, причём отрезок AB не пересекает плоскость α .
- 5) Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые B_1 и C_1 . Найдите длину отрезка BB_1 , если $CC_1=26$ см, $AB : AC = 15 : 13$.
- 6) Дана плоскость β и прямые a, b и c , причём две из трёх данных прямых параллельны. Назовите параллельные прямые, если прямая a лежит в плоскости β , прямая b параллельна плоскости β , а прямая c пересекает плоскость β . Сделайте рисунок и прокомментируйте его с помощью математических знаков.
- 7) Через концы отрезка AB и его середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1 . Найдите длину отрезка MM_1 , если отрезок AB не пересекает плоскость α и если $AA_1=10$ м, $BB_1=14$ м.
- 8) Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые B_1 и C_1 . Найдите длину отрезка BB_1 , если $AB=8$ см, $AC : CC_1 = 2 : 3$.

Практическое занятие 25

Перпендикуляр и наклонная

Раздел 7. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 7.6. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

Цели: применение полученных знаний при решении задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»

Задания.

Решить задачи.

1. Из точек A и B , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB , если $AD=4\text{м}$, $BC=7\text{м}$, $CD=1\text{м}$.

2. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как $1:2$, а проекции наклонных равны 1см и 7см .

3. Телефонная проволока длиной 13 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 10 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 15м . Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

4. Отрезок AB пересекает плоскость в точке O . Прямые AD и BC , перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках D и C соответственно. Найдите длину отрезка AB , если $AD=12\text{см}$, $BC=4\text{см}$, $OC=3\text{см}$.

2. Решить задачи:

1. Из точек A и B , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB , если $AD=BC=5\text{м}$, $CD=1\text{м}$

2. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 17 см и 15 см . Проекция одной из них на 4 см больше проекции другой. Найдите проекции наклонных

3. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 4м , соединены перекладиной. Высота одного столба 7м , а другого – 10 м . Найдите длину перекладины.

4. Отрезок AB пересекает плоскость в точке O . Прямые AD и BC , перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках D и C соответственно. Найдите длину отрезка AB , если $AD=18\text{см}$, $BC=6\text{см}$, $OC=4,5\text{см}$.

Практическое занятие № 26

Вычисление площади поверхностей и объёмов многогранников

Раздел 8. Геометрические тела и поверхности

Тема 8.4. Объёмы геометрических тел

Тема 8.5. Площади поверхностей

Цели: вычисление площадей поверхностей и объёмов многогранников.

Краткая теория

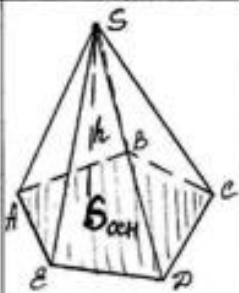
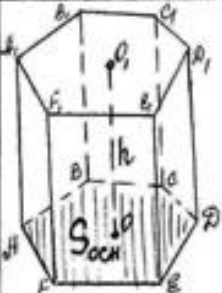
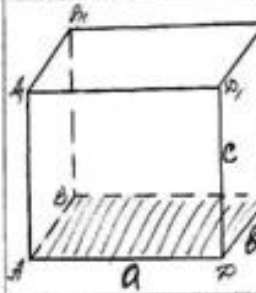
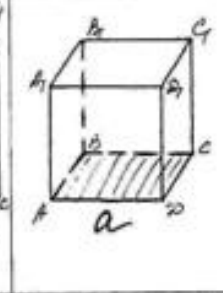
Многогранники				
Название многогранника	Пирамида	Призма	Параллелепипед	Куб
Рисунок (чертёж)				
Формула для вычисления объёма	$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h$	$V = S_{осн} \cdot h$	$V = a \cdot b \cdot c$	$V = a^3$
Формула для вычисления высоты или стороны многогранника	$h = \frac{3 \cdot V}{S_{осн}}$	$h = \frac{V}{S_{осн}}$	$c = \frac{V}{a \cdot b}$	$a = \sqrt[3]{V}$

Рис.1 Формулы и чертежи многогранников

Задание: Решить задачи.

- В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 6 см. Площадь боковой поверхности равна 120 см^2 . Найдите высоту призмы.
 - Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 см и 5 см, острый угол 60° . Большая диагональ параллелепипеда равна 10 см. Найдите высоту параллелепипеда.
 - Основанием пирамиды MABCD служит квадрат ABCD. MB – высота пирамиды и $MB=AB=4 \text{ см}$. Найдите площадь грани MDC.
 - Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $3\sqrt{3} \text{ см}$, а ее боковое ребро $3\sqrt{5} \text{ см}$. Найдите: а) боковую поверхность пирамиды, б) двугранный угол при основании.
 - Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?
 - Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.
 - Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.
2. Решить задачи:
- Боковое ребро правильной четырехугольной призмы равно 6 см, а диагональ боковой грани – 10 см. Найдите боковую поверхность призмы.
 - Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 5 см, а диагональ боковой грани 13 см. Найдите боковую поверхность призмы.
 - Основанием пирамиды KABCD служит квадрат ABCD. MB – высота пирамиды и $MB=AB=7 \text{ см}$. Найдите площадь грани KDC.
 - Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $5\sqrt{3} \text{ см}$, а ее боковое ребро $5\sqrt{5} \text{ см}$. Найдите: а) боковую поверхность пирамиды, б) двугранный угол при основании.
 - Объем куба равен 8 м^3 . Найдите площадь его поверхности.
 - Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.

7. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.

Практическое занятие № 27

Вычисление площади поверхности и объемов круглых тел

Раздел 8. Геометрические тела и поверхности

Тема 8.6. Объем шара и площадь сферы

Цели: применение полученных знаний для вычисления объемов и площадей.

Краткая теория

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

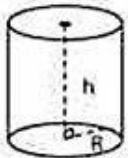
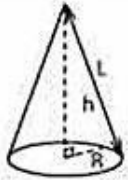

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 <p>цилиндр</p> $V = \pi R^2 h$ <p>R – радиус основания h – высота</p>	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
 <p>конус</p> $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi R^2 + \pi RL$ <p>L – образующая</p> $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 <p>шар</p> $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

Рис.1 Формулы и чертежи круглых тел

Задание:

1. Решить задачи

1. Требуется отлить металлический шар диаметром 5 см из шаров диаметром 1 см. Сколько для этого потребуется шаров?
2. Цилиндрическая цистерна, внутренний радиус которой 18 м, имеет высоту 10,5 м. Какое количество нефти вмещает цистерна, если плотность нефти 850 кг/м³? Выполните вычисления с точностью до 1 т.
3. Вы руководитель предприятия. Поставщик, указывая на кучу угля, имеющую коническую форму, предлагает вам вывезти ее, утверждая, что в ней такое-то количество тонн. Какие измерения вы можете выполнить, чтобы узнать объем этой кучи и убедиться, что вас не вводят в заблуждение?
4. Почему консервные банки делают цилиндрической формы, а не кубической или шарообразной?
5. Сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси, служит квадрат, площадь которого равна 20 дм². Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если его диагональ равна 10 дм.

6. Радиус основания конуса равен $7\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.

2. Решить задачи

1. Высота цилиндрической консервной банки, вместимость которой 4000 см^3 , равна диаметру дна. Найдите высоту и радиус банки.

2. Куча щебня имеет форму конуса, образующая которого равна 5 м, а радиус основания 4 м. Сколько рейсов должен совершить 3 – тонный грузовик, чтобы перевезти кучу щебня? Плотность щебня 2200 кг/м^3 .

3. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

4. Вычислить, сколько метров тесьмы намотано на бабину в форме цилиндра, если внешний диаметр равен 44см, внутренний диаметр 6см, высота 30см, толщина тесьмы 0,3см.

5. Боковая поверхность цилиндра разворачивается в квадрат с диагональю, равной 2π см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

6. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения равен. Найдите площадь основания конуса.

Практическое занятие № 28

Вычисление площади поверхности и объемов круглых тел

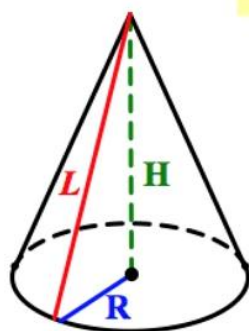
Раздел 8. Геометрические тела и поверхности

Тема 8.5. Площади поверхностей

Цели: применение полученных знаний для вычисления объемов и площадей.

Краткая теория

КОНУС

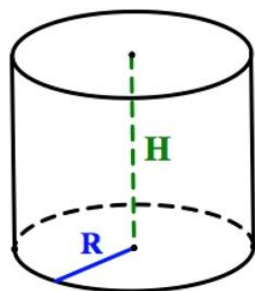


L - образующая

$$S_{\text{бок}} = \pi RL$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R^2 + \pi RL$$

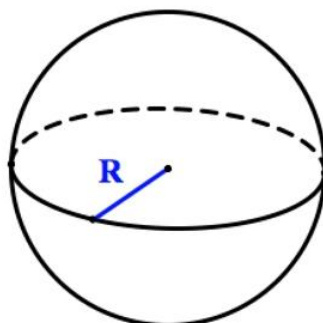
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

ЦИЛИНДР

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

$$V = \pi R^2 H$$

ШАР

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Рис.1 Формулы и рисунки тел вращения

Задание:

1. Решить задачи.

- 1) Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.
- 2) Длина образующей конуса равна $2\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120° . Найдите площадь основания конуса.
- 3) Сечение шара плоскостью имеет площадь 36π . Чему равен радиус шара, если сечение удалено от его центра на расстояние 8?
- 4) Площадь осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{\pi}$ дм², а площадь основания цилиндра равна 25 дм². Найдите высоту цилиндра.
- 5) Стороны треугольника ABC касаются шара. Найдите радиус шара, если AB=8см, BC=10см, AC=12см и расстояние от центра шара O до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$ см.

2. Решить задачи.

- 1) Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 12 см. Найдите радиус основания цилиндра.
- 2) Длина образующей конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° . Найдите площадь основания конуса.
- 3) Сечение шара плоскостью имеет площадь 25π . Чему равен радиус шара, если сечение удалено от его центра на расстояние 12?
- 4) Площадь осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{\pi}$ дм², а площадь основания цилиндра равна 25 дм². Найдите высоту цилиндра.
- 5) Стороны треугольника ABC касаются шара. Найдите радиус шара, если AB=4см, BC=5 см,

$AC=7\text{ см}$ и расстояние от центра шара O до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$ см.

Практическое занятие № 29 Действия над векторами

Раздел 9. Векторы и координаты

Тема 9.1.. Векторы на плоскости и в пространстве

Цели: применение полученных знаний

Краткая теория

Координаты вектора

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

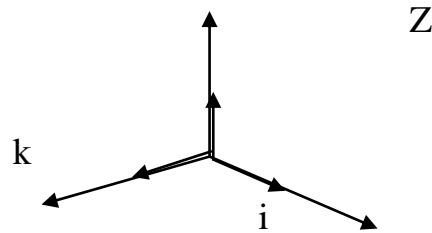


Рис.1

1°

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

$$\alpha\vec{a} = \{\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1\}$$

2°

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

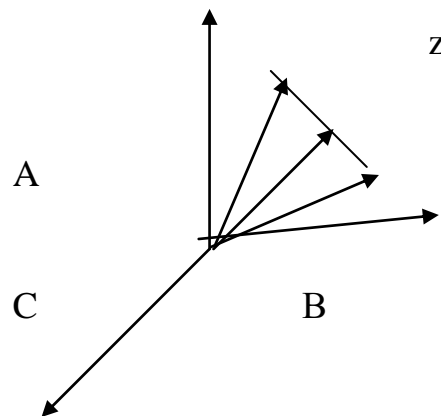


Рис.2

3°

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4°

$$\vec{MM_1} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{MM_1}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

5° Скалярное произведение двух векторов.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

6°

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

7°

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

8° Деление отрезка в данном отношении

AB делится (.) C в отношении AC:CB; координаты (.) C

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{1} \quad y_c = \frac{y_a + y_b}{1} \quad z_c = \frac{z_a + z_b}{1}$$

9° Направляющие косинусы

Направление вектора \vec{a} определяется углами $\alpha; \beta; \gamma$, образованными им с осями координат Oх; Oу; Oz.

$$\cos \alpha = \frac{ax}{a} = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}} \quad \cos \beta = \frac{ay}{a} = \frac{ay}{\sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{az}{a} = \frac{az}{\sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}}$$

Если: (.) A ($x_1; y_1; z_1$) (.) B ($x_2; y_2; z_2$)

$$|\vec{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d} \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Задание: 1. Решить задачи.

1. Найдите координаты точки К, если A(0; 3; 4) и B(1; 4; 4), а точка К – середина отрезка АВ.
2. Точка К – середина отрезка АВ. Найдите координаты точки А, если K(1; -1; -1) и B(-1; -3; 4)
3. Известны координаты вершин треугольника ABC: A(2; -1; 3), B(-3; 5; 2), C(-2; 3; -5). BM – медиана треугольника. Найдите длину BM.

4. Даны векторы $\vec{a} \{7; -1; 2\}$ и $\vec{b} \{4; 3; 1\}$. Найдите векторы а) $-2\vec{a}$; б) $4\vec{b}$; в) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; г) $2\vec{c}$.
5. Найдите координаты вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} \{2; 0; -3\}$, $\vec{b} \{5; -1; 2\}$
2. Решить задачи.
1. Найдите координаты точки К, если А(3; -2; 1) и С(-2; 3; 1), а точка К – середина отрезка АС.
2. Точка К – середина отрезка АС. Найдите координаты точки А, если К(1; -1; -1) и С(2; 3; -9)
3. Известны координаты вершин треугольника KDE: К(8; 2; 6), D(4; -2; 5), E(-2; -6; 4). DA – медиана треугольника. Найдите DA.
4. Найдите координаты вектора $2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} \{-4; 1; 5\}$, $\vec{b} \{3; -5; -1\}$
5. Даны векторы $\vec{a} (7; -1; 2)$ и $\vec{b} (4; 3; 1)$. Найдите векторы а) $3\vec{a}$; б) $-2\vec{b}$; в) $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $2\vec{c}$.

Практическое занятие № 30

Определение коллинеарности и компланарности векторов.

Скалярное произведение векторов

Раздел 9. Векторы и координаты

Тема 9.2. Метод координат в пространстве

Тема 9.3. Скалярное произведение векторов

Цели: применение полученных знаний

Краткая теория

Вектором называется отрезок, у которого указано, какой из концов является началом, а какой – концом (направленный отрезок), обозначается \vec{a} , \overrightarrow{AB} , где A - начало вектора, B - конец.

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых.

Векторы называются ортогональными, если угол между ними 90° .

Векторы можно складывать (по правилам треугольника и параллелограмма), можно умножать на число:

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} ; \quad k\vec{a} = \{ka_1, ka_2, ka_3\} .$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad \text{Модуль вектора } \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ равен}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Если заданы начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора \overrightarrow{AB} , то его координаты и длина находятся следующим образом:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} ; \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Проекция вектора на направление:

Образец выполнения:

Задание

- 1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$
- 2 Найти длины векторов \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CD}
- 3 Найти косинусы углов между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{CD}
- 4 Найти $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AD}$
- 5 Найти $\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$
- 6 Выяснить, коллинеарны ли векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD}
- 7 Выяснить, ортогональны ли векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD}

Даны точки $A(6, 3, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(3, 1, 1)$, $D(0, 4, 5)$.

Решение:

Задание 1

$$\overrightarrow{AB} = \{-1 - 6; 0 - 3; -2 - 3\} = \{-7; -3; -5\};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{3 + 1; 1 - 0; 1 + 2\} = \{4; 1; 3\};$$

$$\overrightarrow{CD} = \{0 - 3; 4 - 1; 5 - 1\} = \{-3; 3; 4\};$$

$$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD} = \{-7 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3); -3 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3; -5 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4\} = \{-31; 6; 2\}$$

Задание 2

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{34}$$

Задание 3

$$\cos \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC} = \frac{-7 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 3}{\sqrt{83} \sqrt{26}} = \frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD} = \frac{4 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{\sqrt{26} \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Даны точки $A(6, 3, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(3, 1, 1)$, $D(0, 4, 5)$.

$$\overrightarrow{AB} = \{-7; -3; -5\}; \quad \overrightarrow{CD} = \{-3; 3; 4\};$$

$$\overrightarrow{AD} = \{0 - 6; 4 - 3; 5 - 3\} = \{-6; 1; 2\};$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \{-7 + (-3), -3 + 3, -5 + 4\} = \{-10, 0, -1\}$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AD} = -10 \cdot (-6) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 58$$

Задание 5

$$\overrightarrow{AB} = \{-7, -3, -5\},$$

$$\overrightarrow{BD} = \{0 - (-1), 4 - 0, 5 - (-2)\} = \{1, 4, 7\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{3 - 6, 1 - 3, 1 - 3\} = \{-3, -2, -2\},$$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \{1 + (-3), 4 + (-2), 7 + (-2)\} = \{-2, 2, 5\}.$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{-7 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 + (-5) \cdot 5}{\sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{83}}.$$

Задание 6

$$\overrightarrow{AB} = \{-7, -3, -5\}, \quad \overrightarrow{CD} = \{-3, 3, 4\}$$

$$\frac{-7}{-3} \neq \frac{-3}{3} \neq \frac{-5}{4} \Rightarrow \text{векторы не являются коллинеарными.}$$

Задание 7

$$\overrightarrow{AB} = \{-7, -3, -5\}, \quad \overrightarrow{CD} = \{-3, 3, 4\}$$

$-7 \cdot (-3) + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 4 = -8 \neq 0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

Задание: Решить задачи.

Задания к практической работе.

- 1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
- 2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
- 3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
- 4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
- 5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
- 6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
- 7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
- 8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
- 9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
- 10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)
- 11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)
- 12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)
- 13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)
- 14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)
- 15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)
- 16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)
- 17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)
- 18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)
- 19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)
- 20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)
- 21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)
- 22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)
- 23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)
- 24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)
- 25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)

.

Практическое занятие № 31
Решение комбинаторных задач.

Раздел 10. Основы комбинаторики**Тема 10.1. Элементы комбинаторики**

Цель: Научиться решать комбинаторные задачи и уравнения.

Краткая теория

В комбинаторике используется в основном три понятия: перестановки, сочетания, размещения.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

В таблице №1 представлены основные формулы комбинаторики (без повторений).

Таблица 1 Формулы комбинаторики

Виды комбинаций (без повторений)	Формулы
Перестановки	$P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ – факториал. По определению $0! = 1$.
Размещения	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots}_{k \text{ множителей}}$
Сочетания	$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Существуют два основных правила применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило суммы. (“или”=“+”) Если некоторый объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами, а объект B может быть выбран n способами, то выбрать **либо** A , **либо** B можно выбрать $m+n$ способами.

Правило произведения. (“и”=“×”) Если объект A можно выбрать из некоторой совокупности m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов A и B в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 1

Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4 .

$$\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Получаем $= (7-4)! = 3!$

Пример 2

Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Пример 3

Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$

равно .

Задание:

1. Решить задачи.

- 1) Определите вид комбинаторного соединения: В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно назначать двух дежурных (размещение, перестановка, сочетание)?
- 2) Для освещения событий в одной из стран ближнего зарубежья решено отправить трех корреспондентов газеты. Сколькими способами это можно сделать, если в штате 32 сотрудника?
- 3) В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?
- 4) Сколькими способами могут девять человек сесть на девять стульев, стоящих в ряд?
- 5) В группе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?
- 6) В вазе 7 ромашек и 5 колокольчиков. Сколькими способами можно составить букет, состоящий из 5 ромашек?
- 7) В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

2. Решить задачи.

- 1) Выберите вид комбинаторного соединения: В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать 28 человек для осеннего кросса (размещение, перестановка, сочетание)?
- 2) Для выполнения боевого задания решено отправить трех разведчиков. Сколькими способами это можно сделать, если вызвались идти на задание 27 человек?
- 3) В классе 25 учеников. Сколькими способами из них можно составить команду из четырех человек для участия в конкурсе эрудитов, конкурсе чтецов, в танцевальном конкурсе?
- 4) Сколькими способами могут семь человек сесть на семь стульев, стоящих в ряд?
- 5) Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?
- 6) Сколькими способами из 10 рабочих можно выделить 5 для работы на определенном участке.
- 7) В кухне 5 лампочек. Сколько существует способов освещения?

3. Решить задачи.

- 1) Сколькими способами можно рассадить 10 учеников на экзамене по математике за 10-ю партами.
- 2) Сколькими способами можно составить код на двери домофона, состоящий из двух цифр.
- 3) Сколькими способами можно достать все карандаши из коробки - 8 цветов, вытаскивая каждый раз по одному.
- 4) Составьте комиссию из 3 членов для экзамена по математике, если в колледже всего 7 математиков. Сколько таких комиссий можно составить.

- 5) Из Вашей группы собираются отправить на практику в ДОРОС. Сколько всевозможных бригад из 5 человек можно составить из студентов нашей группы - 24 человека.
- 6) В семье – 6 человек, и за столом в кухне стоят 6 стульев. Семья решила каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти стулья по-новому. Сколько дней члены семьи смогут осуществлять задуманное?
- 7) Максим подсчитал, что существует 378 способов выбора из группы 2 на вождение. Сколько студентов в этой группе?

Практическое занятие № 32

Решение практических задач с применением вероятностных методов

Раздел 10. Основы комбинаторики

Тема 10.2. Элементы теории вероятности

Цели: Формировать умение: находить сумму двух событий при решении практических задач; применять понятие вероятности при решении задач.

Краткая теория

Событие A называется частным случаем события B , если при наступлении A наступает и B . То, что A является частным случаем B , записываем $A \subset B$.

События A и B называются равными, если каждое из них является частным случаем другого. Равенство событий A и B записываем $A = B$.

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: A или B .

Теорема о сложении вероятностей: Вероятность появления одного из двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если случайные события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу несовместных событий, то имеет место равенство

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Произведением событий A и B называется событие AB , которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: A и B одновременно.

Случайные события A и B называются совместными, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

Теорема о сложении вероятностей 2:

Вероятность суммы **совместных** событий вычисляется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

События событий A и B называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие A называется зависимым от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Теорема об умножении вероятностей: Вероятность произведения независимых событий A и B вычисляется по формуле:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Пример 1 Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 - по 15000 руб., на 15 - по 10000 руб., на 25 - по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение. Пусть A , B , и C - события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события A , B и C несовместны, то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0,3.$$

Пример 2 На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов A , B и C . Вероятность поступления контрольной работы из города A равна 0,6, из города B – 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города C .

Решение. События «контрольная работа поступила из города A », «контрольная работа поступила из города B » и «контрольная работа поступила из города C » образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0,6 + 0,1 + p = 1, \text{ т.е. } p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Пример 3. Вероятность того, что день будет ясным, $p = 0,85$. Найти вероятность g того, что день будет облачным.

Решение. События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

$$p + g = 1, \text{ т.е. } g = 1 - p = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Задание: Решить задачи.

- 1) Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) двойного промаха, в) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.
- 2) В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.
- 3) Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок – мальчик, родится второй мальчик.
- 4) Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента
- 5) Два несовместных события, образующих полную группу называются...
- 6) Взятая наудачу деталь может оказаться либо первого (событие A), либо второго (событие B), либо третьего (событие C) сорта. Что представляет собой событие: $\overline{A + C}$?
- 7) В урне a – белых, b – черных, c – красных шаров. Вероятность какого события определяется формулой $\frac{a+c}{a+b+c}$
- 8) Автомобилист проезжает два поста дорожно-патрульной службы. Вероятность того, что его остановят на первом посту, равна 0,4, на втором – 0,1. Найти вероятность того, что автомобилиста остановят хотя бы на одном посту.
- 9) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность того, что, хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.
- 10) Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?
- 11) Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.
- 12) В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Практическое занятие №33
Решение прикладных задач.

Раздел 10. Основы комбинаторики**Тема 10.3. Элементы математической статистики****Цели:** решение практических задач**Задание:** 1. Решить задачи

- 1) Участники Интернет-форума указали города, где они проживают. Получился следующий список:
Москва, Смоленск, Москва, Москва, С.-Петербург, Челябинск, Назрань, Москва, Норильск, Уфа, Москва, Волгоград, С.-Петербург, Ногинск, Москва, Москва, Челябинск, Москва, С.-Петербург, С.-Петербург, Москва, Челябинск, Дмитров, Москва, Ижевск, Мурманск, Волгоград, Москва, Ярославль.
Составьте таблицу подсчета и таблицу распределения участников форума по городам.
- 2) В сосуд с теплой водой погрузили 10 термометров. Термометры показали следующие результаты:
34,5°; 35,1°; 34,4°; 34,2°; 34,7°; 34,6°; 35,0°; 34,2°; 34,5°; 34,8°.
 - а) Чем может объясняться изменчивость в показаниях термометров? Назовите хотя бы две возможные причины.
 - б) Расположите полученные значения по возрастанию.
 - в) Найдите среднее значение температуры и размах полученного набора.
- 3) Пользуясь результатами задачи 1, составьте таблицу отклонений показаний термометров от среднего значения. Сколько показаний меньше, чем среднее? Сколько показаний больше, чем среднее?
- 5) Пользуясь результатами задачи 1. найдите медиану показаний термометров. Сколько показаний больше и сколько показаний меньше медианы?
- 6) За практическую работу по физике преподаватель поставил 7 пятерок, 9 четверок, 8 троек и 2 двойки. Постройте столбиковую диаграмму по этим данным. Вычислите среднюю оценку.
- 7) В понедельник и во вторник магазин продал по 5 автомобилей, в среду—6, в четверг—4, в пятницу—8, а в субботу—12 автомобилей. Вычислите среднее число автомобилей, проданных за день. Постройте по этим данным столбиковую диаграмму «число проданных автомобилей по дням».
- 8) В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник – и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель.
- 9) В басне Ивана Андреевича Крылова «Квартет»: «проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка» устроили любопытный эксперимент, они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения.
 Проказница-Мартышка, Осёл, Козёл, да косолапый Мишка
 Затеяли сыграть Квартет.
 Достали нот, баса, альты, две скрипки
 И сели на лужок под липки — пленять своим искусством свет.
 Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
 «Стой, братцы, стой! — кричит Мартышка. — Погодите!
 Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
 Ты с басом, Мишенька, садись против альты,
 Я, прима, сяду против вторы;
 Тогда пойдёт уж музыка не та: у нас запляшут лес и горы!»
 Расселись, начали Квартет;
 Он всё-таки на лад нейдёт.
 «Постойте ж, я сыскал секрет, —

Кричит Осёл: — мы, верно, уж поладим, коль рядом сядем».

Послушались Осла: уселись чинно в ряд;

А всё-таки Квартет нейдёт на лад.

Вот пуще прежнего пошли у них разборы

И споры, кому и как сидеть.

Случилось Соловью на шум их прилететь.

Тут с просьбой все к нему, чтоб их решить сомненье:

«Пожалуй, — говорят: — возьми на час терпенье,

Чтобы Квартет в порядок наш привести:

И ноты есть у нас, и инструменты есть;

Скажи лишь, как нам сесть!» —

«Чтоб музыкантом быть, так надобно уменье

И уши ваших понежней, —

Им отвечает Соловей: — А вы, друзья, как ни садитесь,

Всё в музыканты не годитесь».

Марышка, Осёл, Козёл и Мишка пересаживались, считая, что от этого зависит звучание музыки. И если бы не вмешался Соловей, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты.

Так сколько же существует способов, чтобы рассадить, например в один ряд, четырех музыкантов?

Примечание:

*Для студентов с ОВЗ и инвалидностью предусмотрена возможность продления времени сдачи контрольной точки.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2017. – 271 с.
2. Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2016. – 272 с.
3. Башмаков М.И. Математика. Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2017. – 416 с.
4. Башмаков М.И. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2017. – 256 с.
5. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2017. – 431 с.
6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2016. – 464 с.
7. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М. : просвещение, 2017. – 255 с.
8. Пратусевич М.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М. : Просвещение, 2017. – 415 с.
9. Пратусевич М.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М. : Просвещение, 2018. – 463 с.