МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Колледж профессионального образования

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по практической работе

для студентов Колледжа профессионального образования

по специальностям 38.02.07 Банковское дело

Утверждено на заседании ПЦК
Информационных технологий
Протокол № 9 от «21» мая 2019г.
председатель _____Н.А. Серебрякова

Пермь 2019

Составитель: Шилина А.В.

Финансовая математика: методические рекомендации по практической работе для студентов Колледжа профессионального образования по специальности 38.02.07 Банковское дело / сост. М.А. Ежова; Шилина А.В, Колледж проф. образ. ПГНИУ. – Пермь, 2019. – 16 с.

Предназначены для студентов Колледжа профессионального образования ПГНИУ специальности 38.02.07 Банковское дело.

1. Перечень тем для практических работ

Простые проценты. Наращение и дисконтирование.	2
Сложные проценты.	4
Наращение с учетом налогов и инфляции	4
Потоки платежей	4
Финансовые ренты.	4
Учет векселя	2
Кредитные операции	4
Анализ долгосрочных инвестиций.	2
Расчеты при проведении валютных операци	4

1.1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Схема простых процентов **предполагает неизменность суммы, на которую происходит начисление процентов**. Простые проценты используются в краткосрочных финансовых операциях (со сроком менее периода начисления процентов) или когда проценты периодически выплачиваются и не присоединяются к основному капиталу.

Рассмотрим два вида вклада: простой и срочный.

1) По **простому вкладу** (деньги по такому вкладу можно снять в любой момент) за **t** дней будет начислено

$$FV+PV(1+\frac{t}{T}r)=0 \qquad (1.4)$$

где T - число дней в году. Коэффициент наращения при этом

$$K=(1+\frac{t}{T}r).$$

В зависимости от определения T и t применяют следующие методики.

1. ***Точные проценты***. В России, США, Великобритании и во многих других странах принято считать T =365 в обычном году и T =366 - в високосном, а t -число дней между датой выдачи (получения) ссуды и датой ее погашения. Дата выдачи и дата погашения считаются за один день.
2. ***Банковский метод***. В этом методе t определяется как точное число дней, а число дней в году принимается за 360. Метод дает преимущества банкам особенно при выдаче кредита на срок более 360 дней и широко используется коммерческими банками.
3. ***Обыкновенные проценты с приближенным числом дней***. В некоторых странах, например во Франции, Бельгии, Швейцарии принимают T =360, а t -приближенным, так как считается, что в месяце 30 дней.

2) По **срочному вкладу** (деньги кладутся в банк на определенный срок: полгода, год или другой) проценты начисляются через определенные

периоды. Обозначим

m -число периодов в году.

1. m =12 - при ежемесячном начислении процентов;
2. m =4 - при ежеквартальном начислении;
3. m =2 - при начислении раз в полугодие;
4. m =1 - при начислении раз в год.

В этом случае процентная ставка за один период составит величину $\frac{r}{m}$, и уравнение эквивалентности запишется в виде

$$FV+PV(1+\frac{r}{m})=0 \qquad (1.5)$$

Коэффициент наращения $K=(1+\frac{r}{m})$.

1.3 Сложные проценты.

Схема сложных процентов предполагает их ***капитализацию***, таким образом, базовая сумма, с которой происходят начисления, постоянно растет. Сложные проценты применяются в среднесрочных и долгосрочных финансовых операциях, то есть ***срок операции составляет несколько периодов начисления процентов.***

Пусть Вы положили в банк срочный вклад в сумме PV на k лет под годовую процентную ставку r. Число периодов начисления процентов в году m .Тогда в соответствии с формулой (1.4) к концу первого периода, т.е. после первого начисления процентов, у Вас окажется сумма FV, определяемая соотношением

$$FV + PV\ (1+\frac{r}{m})=0.$$

Если Вы не забрали причитающиеся Вам проценты, то к началу нового периода первоначальная сумма составит уже PV(1+r/m), а к концу второго периода на нее снова нарастут проценты и Ваша сумма вклада будет определяться из соотношения

$$FV + PV(1+\frac{r}{m})^2 = 0$$

и так далее. К концу года Ваш вклад будет равен

$$FV + PV(1+\frac{r}{m})^m = 0 .$$

Сумма, накопленная Вами в банке через k лет при годовой ставке r и начислениях процентов m раз в году, составит $FV + PV(1+\frac{r}{m})^{m \cdot k} = 0$

$$FV + PV(1+\frac{r}{m})^{m \cdot k} = 0 \qquad (1.6)$$

Эквивалентное уравнение (1.6) называют ***формулой сложных процентов***.

Из уравнений (1.4) - (1.6) можно определить одну из величин:

FV - будущую сумму;

PV - текущую сумму;

r - номинальную процентную ставку;

t или k - срок сделки в днях или годах, выразив их через остальные известные величины.

1.3.1 Определение текущей стоимости. Дисконтирование

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной будущей сумме FV, которую следует уплатить или получить через некоторое время, необходимо рассчитать современную, текущую сумму PV полученной ссуды или вклада в банк. Такая ситуация может возникнуть: при разработке контракта, при определении текущей стоимости векселя (см. главу "Операции с векселями") и в обычных жизненных условиях.

По формуле простых процентов (1.4)

$$\text{PV} = -\frac{FV}{1+\frac{t}{T}r}, \qquad (1.9)$$

где t - срок финансовой сделки в днях, T - число дней в году, r - годовая процентная ставка. Знак минус указывает на то, что в финансовых операциях настоящая и будущая суммы всегда имеют противоположные знаки.

Расчет PV по FV необходим и тогда, когда проценты с суммы удерживаются вперед, непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма FV ***дисконтируется***, или ***учитывается***, сам процесс начисления процентов и их удержания называют ***учетом***, а удержанные проценты - ***дисконтом***, или скидкой D.

$$D=FV-PV, \qquad (1.10)$$

где FV и PV берутся в (1.10) по абсолютной величине.

Отношение v=PV/FV называют ***дисконтным*** или ***дисконтирующим множителем***. По формуле простых процентов

$$v=1/(1+\frac{t}{T}\cdot r). \qquad (1.11)$$

По формуле сложных процентов (1.6) текущая сумма вклада или текущая стоимость векселя записывается в виде

$$PV=-\frac{FV}{(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k}}, \qquad (1.12)$$

где m - число раз начисления процентов в году, k - срок дисконтирования. Дисконтирующий множитель

$$v=\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k}}. \qquad (1.13)$$

1.3.2 Определение срока ссуды (вклада)

По формуле простых процентов (1.4) срок финансовой сделки определяется в днях t

$$t=\frac{T}{r}\left(\frac{FV}{PV}-1\right), \qquad (1.14)$$

где T принятое число дней в году (см. раздел 1.2).

По формуле сложных процентов (1.6) срок финансовой сделки определяется в годах k

$$k = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right)}. \qquad (1.15)$$

В выражениях (1.14) и (1.15) r - номинальная ставка; текущая PV и будущая FV суммы берутся по абсолютной величине.

1.3.3 Определение размера процентной ставки

Нередко возникает вопрос, под какую ставку нужно дать кредит в сумме PV, чтобы через определенный срок получить обратно сумму FV?

По формуле простых процентов

$$r = \frac{T}{t}\left(\frac{FV}{PV} - 1\right). \qquad (1.16)$$

По формуле сложных процентов

$$r = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot k]{\frac{FV}{PV}} - 1\right). \qquad (1.17)$$

Величину годовой процентной ставки r часто называют **номинальной** ставкой в отличие от процентной ставки за период r t/T или 1/m.

Для сравнения эффективности предложений различных банков по кредитным операциям их пересчитывают к ***эффективной процентной ставке*** $r_{эф}$, обеспечивающей ту же доходность, но при начислении процентов один раз в году. Сравнивая (1.6) с

$$FV + PV(1 + r_{эф})^k = 0,$$

получим $$(1 + \frac{r}{m})^{m \cdot k} = (1 + r_{эф})^k,$$

откуда $$r_{эф} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \qquad (1.7)$$

Замена в договоре номинальной ставки r при m - разовом начислении процентов на эффективную $r_{эф}$ не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.

Вообще **разные по величине номинальные ставки являются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну и ту же величину.**

1.4 Начисление налогов и проценты.

Во многих странах проценты облагаются налогом. Очевидно, что налог на проценты уменьшает наращенную сумму и реальную процентную ставку банка.

Пусть процентная ставка банка r, ставка налога на проценты *н*, начальная сумма банковского вклада PV, задан срок размещения вклада.

1) **Простые проценты**

Наращенная сумма вклада: $FV = PV\ (1+ \frac{t}{T} r)$, где FV и PV взяты по абсолютной величине.

Проценты: $I = FV-PV = PV \frac{t}{T} r$

Проценты после уплаты налога: $I_н = I.\cdot(1- н) = PV\cdot \frac{t}{T}\cdot r\cdot(1- н)$

Наращенная сумма после уплаты налога:

$$FV=PV+I_н=PV\cdot[1+\frac{t}{T}\cdot r\cdot(1-н)]. \qquad (1.18)$$

2) **Сложные проценты**

Наращенная сумма вклада: $FV = PV\cdot(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k}$.

Проценты: $I = FV-PV = PV\cdot[(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k} - 1]$.

Проценты после уплаты налога: $I_н = I\cdot(1- н) = PV\cdot[(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k} - 1]\cdot(1- н)$.

Наращенная сумма после уплаты налога

$$FV=PV+I_н = PV\cdot[1+[(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k} - 1]\cdot(1- н)], \quad \text{откуда}$$

$$FV = PV\cdot[(1\pm \frac{r}{m})^{m\cdot k}\cdot(1- н)+н] \qquad (1.9)$$

1.5 Проценты и инфляция.

1.5.1 Основные понятия

Инфляция – это обесценивание денег, обусловленное чрезмерным увеличением выпущенной в обращение массы бумажных денег и безналичных выплат по сравнению с реальным предложением платных товаров и услуг.

Проявляется инфляция в росте цен на товары. На одни товары цены могут расти, на другие – уменьшаться, но если наблюдается устойчивая тенденция массового повышения цен, то это уже инфляция.

Изменение цен на товары и услуги определяется при помощи индекса цен. Индекс цен численно равен отношению цен на товары, услуги или работы в один период времени к ценам этих же товаров, услуг или работ в другой период времени. Вводят понятие агрегатного индекса цен. Агрегатный индекс цен численно равен отношению цены группы товаров (услуг) за данный период к цене той же группы в базисном периоде. Индекс цен на потребительские и промышленные товары регулярно публикуется. Процентное изменение индекса потребительских цен называется уровнем инфляции.

Пусть S - некоторая сумма денег, имеющаяся у человека в данный момент; S_τ - сумма денег через некоторое время t , покупательная способность которой равна S . Вследствие инфляции $S_\tau > S$ и $S_\tau = S + \Delta S$, где ΔS - некоторая сумма денег, которая добавляется к S для сохранения стоимости годовой "потребительской корзины".

Основными показателями инфляции являются

1. средний годовой уровень инфляции $\tau = (S_\tau - S)/S = \Delta S/S$
2. годовой индекс инфляции $IN = S_\tau/S = 1+\tau$

1.5.1 Учет инфляции

1) **Простые проценты**

Определим годовую процентную ставку r_τ, которая бы обеспечила прибыль от наращения по годовой ставке r и покрывала потери от инфляции. Пусть без инфляции будущая сумма

$$FV = PV\ (1+\frac{t}{T}\ r). \qquad (1.20)$$

Наращенная сумма с учетом инфляции, имеющая ту же покупательную способность, что и без инфляции

$$FV_\tau = PV\cdot(1+\frac{t}{T}\ r_\tau). \qquad (1.21)$$

Естественно, что FV_τ больше FV,

$$FV_\tau = FV\cdot(1+\frac{t}{T}\tau). \qquad (1.22)$$

Из (1.20)-(1.22) получаем

$$FV_\tau = PV\cdot(1+\frac{t}{T}\ r_\tau)= PV\ (1+\frac{t}{T}\ r)\ (1+\frac{t}{T}\tau) \qquad (1.23)$$

и годовая процентная ставка, покрывающая инфляцию, должна быть больше, чем без инфляции.

$$r_\tau=r+\tau+\frac{t}{T}r\cdot\tau \qquad (1.24)$$

Коэффициент наращения с учетом инфляции

$$К_\tau=(1+\frac{t}{T}\ r)\ (1+\frac{t}{T}\tau). \qquad (1.25)$$

Он должен быть больше, чем без инфляции $К=(1+\frac{t}{T}r)$.

Пусть клиент делает вклад в размере PV в условиях инфляции с годовым уровнем τ. Банк обеспечивает ставку r_τ . Какова реальная годовая процентная ставка прибыли r?

Из (1.24) получаем

$$r = \frac{r_\tau -\tau}{1+\frac{t}{T}\tau} \qquad (1.26)$$

Следовательно, реальная покупательная стоимость будущего вклада составит

$$FV=PV\cdot\left(1+\frac{t}{T}\cdot\frac{r_\tau-\tau}{1+\frac{t}{T}\tau}\right).$$

2) Сложные проценты и инфляция

Абсолютная величина будущей суммы по формуле сложных процентов находится из (1.6). Напомним, что k - это число лет вклада, а m - количество раз начисления процентов в году. Если известен средний коэффициент инфляции за k лет τ, то наращенная сумма с учетом инфляции

$$FV_\tau = PV\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot k}\cdot(1+\tau)^k. \qquad (1.28)$$

С другой стороны,

$$FV_\tau = PV\cdot\left(1+\frac{r_\tau}{m}\right)^{m\cdot k}. \qquad (1.29)$$

Из сравнения (1.28) и (1.29) получаем $\left(1+\frac{r_\tau}{m}\right)^{m\cdot k}=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot k}\cdot(1+\tau)^k$, откуда

$$r_\tau=\left(1+\frac{r}{m}\right)\cdot\left((1+\tau)^{1/m}-1\right)\cdot m \qquad (1.30)$$

Коэффициент наращения в условиях инфляции должен быть больше, чем без инфляции

$$K=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot k}\cdot(1+\tau)^k. \qquad (1.31)$$

Реальная процентная ставка банка при инфляции ниже указанной банком r_τ. Из (1.30)

$$r=\left(\left(1+\frac{r_\tau}{m}\right)/(1+\tau)^{1/m}-1\right)\cdot m \qquad (1.32)$$

1.6. Примеры решения задач.

1.1. Фирма взяла ссуду в банке на расширение производства в размере 1 млн.

руб. под 18% годовых с 20.01 по 05.10 включительно. Какую сумму она должна вернуть в конце срока при начислении процентов один раз в

год?

Определите коэффициент наращения.

Решение. Пусть год не високосный T=365. Точное число дней между указанными датами **t** =258, а приближенное - t=255.

1. Из (1.4) по точному методу получим

$$FV= -1\ 000\ 000\left(1+ \frac{258}{365} 0{,}18\right)= -1\ 127\ 233 \text{ руб.}$$

Итак, в конце срока фирме придется отдать (FV отрицательно) на 127 233руб. больше, чем она брала.

Коэффициент наращения в этом случае

$$К=\left(1+ \frac{258}{365} 0{,}18\right)=1{,}1273$$

2. По банковскому методу

$$FV= -1\ 000\ 000\left(1+ \frac{258}{360} 0{,}18\right)= -1\ 129\ 000 \text{ руб.}$$

$$К=\left(1+ \frac{258}{360} 0{,}18\right)=1{,}129$$

3. По обыкновенному методу с приближенным числом дней

$$FV= -1\ 000\ 000\left(1+ \frac{255}{360} 0{,}18\right)= -1\ 127\ 500 \text{ руб.}$$

$$К=\left(1+ \frac{258}{360} 0{,}18\right)=1{,}1275.$$

1.2. Пенсионер положил 6000 руб. на срочный пенсионный вклад на полгода под 12% годовых. Какая сумма у него накопится в конце срока, и какой процент он сможет снять? Каков коэффициент наращения?

Решение. Поскольку пенсионер отдал свои деньги банку, то первоначальная сумма отрицательна; m =2, так как начисления - раз в полгода.

$$FV = -(-6000)(1+0,12/2)=6360 \text{ руб.}$$

$$I= FV- PV=360$$

руб.

$$K=1+0,12/2=1,06$$

1.3. Через 180 дней после подписания договора фирма обязуется уплатить 240 тыс. руб. Кредит выдан под 15% годовых. Какова первоначальная сумма кредита?

Решение. В конце срока фирма должна вернуть деньги, следовательно, будущая сумма - отрицательная величина, а первоначальная - положительная. Воспользуемся формулой:

FV+PV(1+$\frac{r}{m}$)=0. Выражая из этой формулы PV, получим:

$$PV = -\frac{-240000}{1+\frac{180}{365}0{,}15} = 223469{,}39\,руб.$$

1.4. От продажи родительского дома у Вас оказалось 50 тыс. руб. Вы знаете, что в течение 5 лет Вам эти деньги не понадобятся, и Вы решили открыть счет в банке. Годовая ставка банка 12%. Банк предлагает следующие виды вкладов:

1. с ежемесячным начислением процентов;
2. с ежеквартальным начислением процентов;
3. депозит на 6 месяцев;
4. депозит на 12 месяцев.

Какой из вкладов принесет больший доход через 5 лет?

Решение. Воспользуемся формулой $FV + PV(1+\frac{r}{m})^{m\cdot k} = 0$.

В нашем примере PV= -50 000, r =0,12, k =5.

В первом случае m =12 и $FV = -(-50000)\cdot(1+\frac{0{,}12}{12})^{12\cdot 5} = 90834{,}83$ руб.

Во втором - m =4 и $FV = -(-50000)\cdot(1+\frac{0{,}12}{4})^{4\cdot 5} = 90305{,}56$ руб.

В третьем случае - m =2 и $FV = -(-50000)\cdot(1+\frac{0{,}12}{2})^{2\cdot 5} = 89542{,}38$ руб.

В последнем варианте - m =1 и $FV = -(-50000)\cdot(1+0{,}12)^{5} = 88117{,}08$ руб.

1.5. Клиент должен получить в конце года 10000 руб. На какой вклад емувыгоднее положить деньги: простой или срочный с ежемесячным начислением процентов. Годовая процентная ставка в обоих случаях16%.

Решение.

Дисконтирующий множитель по простым процентам

$$v=1/(1+r\ t/T)=1/(1+0,16)=0,862069,$$

$$PV= - FV\cdot v =10000\cdot 0,862= - 8620,69$$

руб.

Дисконтирующий множитель по сложным процентам

$$v = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot k}} = \frac{1}{\left(1+\frac{0,16}{12}\right)^{12}} = 0,853$$

$$PV=-FV\ v=10000\cdot 0,853= - 8530,45 \text{ руб.}$$

1.6. Фирме предстоит через 10 лет уплатить за кредит банку $100 000. Номинальная ставка 28%. Проценты начисляются раз в полгода. Определите текущую стоимость кредита и дисконт банка.

Решение.	Текущая стоимость PV=-(-
FV= -$100000	100000)/(1+0,28/2)^(2·10)=$7276,17
r=0,28	Такую ничтожную сумму фирма получит в
качествеm=2	кредита.
k=10	Дисконт банка D=FV- PV =100000-
7276,17=$92723,8	
PV=? D=?	Такую величину составит доход банка.

1.7. Сколько лет нужно копить деньги при первоначальном взносе 5000 руб.,годовой процентной ставке 18% и ежеквартальных начислениях, чтобы накопить 10000 руб.?

Решение.

$$k=\ln(FV/PV)/\ln(1+r/m)/mPV=5000 \text{ руб.}$$

FV=10000 руб. $k= \ln(10000/5000)/\ln(1+0{,}18/4)/4=3{,}937\approx 4$ года.

r=0,18

m=4 k=?

1.8. Фирма дала в кредит дочерней фирме 50 000 руб. сроком на 3 года с ежегодным начислением процентов. Под какой процент нужно дать кредит, чтобы вернуть 60 000 руб.?

Решение. r=m·((FV/PV)^(1/(m·k))-1)

PV=50 000 руб.

FV=60 000 руб

k=3

m=1

r=?

r=(6/5)^(1/3)-1=0,06266

$r \approx 6{,}27\%$

1.9. Определим эффективную годовую ставку в первых трех случаях примера 1.4.

Решение. Очевидно, что в четвертом случае, при ежегодных начислениях процентов, она составляет 12%. Для

m = 12 $r_{эф}$ =(1+0,12/12)^12-1=0,1268;

m = 4 $r_{эф}$ =(1+0,12/4)^4-1=0,1255;

m = 2 $r_{эф}$ =(1+0,12/2)^2-1=0,1236.

Как и следовало ожидать, ежемесячное начисление обеспечивает самую большую эффективную ставку.

1.10. Клиент внес в банк 1000 $ на год. Процентная ставка банка 16%. Налог на проценты 8%. Требуется определить сумму налога N, процент и наращенную сумму в двух случаях: 1) простых процентов; 2) сложных процентов при ежемесячном начислении процентов.

Решение. ***Простые проценты***

PV=1000 $

r=0,16

$н$=0,08

t=T

k=1

m=12

$I_н$=?, FV=?

а) Без налога

$I = PV \cdot \frac{t}{T} \cdot r = 1000 \cdot 0{,}16 = 160$ \$,

FV=PV+I=1160\$.

б) С налогом

$N = PV \cdot \frac{t}{T} \cdot r \cdot н = 1000 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$ \$

$Iн = PV \cdot \frac{t}{T} \cdot r \cdot (1 - н) = 1000 \cdot 0{,}16 \cdot (1\text{-}0{,}08) = 147{,}2$ \$

Можно записать

Iн = I- N=160-

12,8=147,2 \$FV=PV+

Iн =1147,2 \$

FV=PV+I=1172,27 \$

2) Сложные проценты

а) Без налога

$I = PV \cdot [(1 + \frac{r}{m})^{m \cdot k} - 1] = 1000 * [(1+0{,}16/12)\text{^}12\text{-}1] = 172{,}27$ \$

б) С налогом

$Iн = PV \cdot [(1 + \frac{r}{m})^{m \cdot k} - 1] \cdot (1 - н) = 172{,}27 * (1\text{-}0{,}08) = 158{,}49$ \$

FV=PV+ Iн =1158,49 \$; N=I-

Iн=172,27-158,49=13,78 \$

1.11. Фирма договорилась с банком о выделении кредита размером 300 тыс. руб. сроком на полгода под 22% годовых без учета инфляции (проценты простые). Ожидаемый годовой уровень инфляции 14%.Какую процентную ставку с учетом инфляции возьмет банк, каков при этом коэффициент наращения и дисконт банка?

Решение.

PV=300

тыс.руб.

По формуле: $\mathbf{r_\tau = r + \tau + \frac{t}{T} r \cdot \tau}$

$r_\tau = r + \tau + t$ $r \cdot \tau = 0{,}22 + 0{,}14 + 0{,}5 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}14 = 0{,}4454$, т.е.

$\overline{T}$

r=0,22 r_τ=44,54%

τ=0,14 Согласно (1.25)

t/T=0,5 $K_\tau=(1+\frac{t}{T}r)\ (1+\frac{t}{T}\tau)=(1+0,5\cdot0,22)\cdot(1+0,5\cdot0,14)=$

r_τ=? K_τ=? D=? 1,1877

Наращенная сумма

FV=PV·K_τ=300·1,1877=356,31 тыс. руб. - такую сумму фирме придется вернуть банку с учетом инфляции.

Дисконт банка D=FV-PV=356,31-300=56,31 тыс.руб.

Без учета инфляции пришлось бы вернуть

FV=PV(1+r·t/T)=300(1+0,5·0,22)=333 тыс. руб.

1.12. Клиент оформляет вклад в размере 10000 руб. на 3 месяца под простые проценты из расчета 24% годовых. Годовой уровень инфляции 15%. Определите реальную годовую ставку банка и реальную покупательную способность будущего вклада

Решение

PV=10000 руб.t/T=0,25

r_τ=0,24

τ=0,15

r=?

В соответствии с $r=\frac{r_\tau-\tau}{1+\frac{t}{T}\tau}$

$r=\frac{r_\tau-\tau}{1+\frac{t}{T}\tau}$ =(0,24-0,15)/(1+0,25·0,15)= 0,086747,

т.е. r=8,67%

На руки клиент получит

FV=PV·$(1+\frac{t}{T}\cdot r)$=10000· (1+0,25·0,24)= 10600 руб.

Их покупательная способность по формуле (1.27)

составит $FV=PV\cdot(1+\frac{t}{T}\cdot\frac{r_\tau-\tau}{1+\frac{t}{T}\tau})=10000\cdot$

$(1+0{,}25\cdot 0{,}086747)=10216{,}87$ руб.

Инфляция "съела" большую часть дохода.

1.13. Банк выдал ссуду в размере 80 тыс. руб. на три года с начислением процентов каждые полгода. Процентная ставка банка 28%. Среднегодовая инфляция ожидается на уровне 16%. Определите сумму, которую придется выплатить в конце срока, реальную ставку банка.

Решение

$PV=80$

$r_\tau=0{,}28$

$\tau=0{,}16$

$k=3$

$m=2$

$FV=?$ $r=?$

Из формулы: $FV_\tau=PV\cdot(1+\frac{r_\tau}{m})^{m\cdot k}$

$FV=PV\cdot(1+\frac{r_\tau}{m})^{m\cdot k}$ =80*(1+0,28/2)^(2*3)= 175,5978 тыс. руб.

Из формулы $r=\left(\left(1+\frac{r_\tau}{m}\right)/(1+\tau)^{1/m}-1\right)\cdot m$

$r=\left(\left(1+\frac{r_\tau}{m}\right)/(1+\tau)^{1/m}-1\right)\cdot m=$

= ((1+0,28/2)/(1+0,16)^(1/2)- 1)*2=0,116927

r=11,69% - по такой ставке банк получит реальный доход.

1.14. Ссуда в 15000 долларов выдана на 2,5 года под ставку 25% годовых с ежеквартальным начислением процентов. Определите сумму конечного платежа и коэффициент наращения.

Решение.

Для решения используем формулу сложных процентов:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t},$$

где PV – начальная сумма, r – процентная ставка, m – число начисленийв году, t – число лет, которое длится данная финансовая операция.

В данном случае

$PV = 15000,\ r = 0{,}25;\ m = 4$(*ежеквартальное начисление*), $t = 2{,}5.$

Подставляем в формулу и получаем наращенную сумму:

$$FV = 15000\cdot\left(1+\frac{0{,}25}{4}\right)^{4\cdot 2{,}5} = 15000\cdot(1{,}0625)^{10} = 15000\cdot 1{,}83353577 = 27503{,}0366 \approx 2750$$

.

Таким образом наращенная сумма составила 27503,04$.

Коэффициент наращения К= $1{,}83353577 \approx 1{,}834$.

1.15. Годовая процентная ставка коммерческого банка 24%. Начисление процентов ежемесячное. На какой минимальный срок нужно поместить клиенту вклад в 30 тысяч рублей, чтобы наращенная сумма составила не менее 35 тысяч рублей?

Решение.

Для решения задачи используем ту же формулу наращения по сложным процентам:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t}$$

$FV = 35000,\ PV = 30000,\ r = 0{,}24,\ m = 12$ (ежемесячное начисление).Найти*: t.*

Прологарифмируем данное равенство и выразим t:

$$\frac{FV}{PV} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t} \Rightarrow \ln\frac{FV}{PV} = m\cdot t\cdot\ln\left(1+\frac{r}{m}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{FV}{PV}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}.$$

Подставляя данные в формулу, получим:

$$t = \frac{\ln \frac{35000}{30000}}{12 \cdot \ln\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)} = \frac{\ln 1,16667}{12 \cdot \ln 1,02} \approx 0,6487\,(\text{лет}) \approx 237\,\text{дней}.$$

1.16. Сумма наращивается по сложной процентной ставке 18% с начислением раз в квартал. Определите эффективную ставку.

Решение.

Рассмотрим формулу эффективной процентной ставки:

$$r_{эфф} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

В задаче дано: $r = 0,18;\ m = 4$(начисление раз в квартал).

Подставляем в формулу:

$$r_{эфф} = \left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^4 - 1 = (1 + 0,045)^4 - 1 \approx 1,1925 - 1 = 0,1925$$.Таким образом эффективная ставка составляет 19,25%.

1.17. Выдан кредит 200000 руб. на три года. Проценты начисляются раз в квартал. Определите величину процентной ставки за период, если по договору возврат должен составить 250000 руб.

Решение.

Для решения воспользуемся формулой наращения по сложным процентам:

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Поскольку в задаче не указано как часто производится начисление в году, ь\то берем однократное начисление, т.е. один раз в год. Таким образом, *m=1.*

$FV = 25000,\ PV = 20\ 000,\ t = 3,\ m = 1$.Выразим r из формулы начисления :

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t}=\frac{FV}{PV}\Rightarrow 1+\frac{r}{m}=\sqrt[m\cdot t]{\frac{FV}{PV}}\Rightarrow r=m\cdot\left(\sqrt[m\cdot t]{\frac{FV}{PV}}-1\right).$$

Вычисляем: $r=1\cdot 3\sqrt{\frac{25000}{20000}}-1=\sqrt[3]{1,25}-1\approx 1,0772-1=0,0772$.

Что составляет 7,72% годовых.

1.18. Определите доход клиента и налоговые деньги по срочному депозиту в 8 млн. руб. не 6 мес. с номинальной процентной ставкой 28% годовых, если процентная ставка налога 13%. Начисление процентов производится поквартально.

Решение.

Вычисляем при m=4.

Используем формулу: $r=m\cdot\sqrt[m\cdot t]{\frac{FV}{PV}}-1$. Подставляем данные:

$r=4\cdot\left(\sqrt[4\cdot 3]{\frac{25000}{20000}}-1\right)=4\cdot\left(\sqrt[12]{1,25}-1\right)=4\cdot(1,018769-1)\approx 0,075$, что составляет 7,5 %.

1.7. Пример заданий для самостоятельной работы.

ВАРИАНТ 1.

1	Ссуда в размере 220 тыс. руб. выдана с 27 марта по 27 ноября включительно под ставку 22,3 % годовых. Какую сумму заплатитдолжник в конце срока? Рассчитать тремя методами.
2	Банк предлагает кредиты на 5 лет с ежеквартальным начислением процентов и на 4,5 года с ежемесячным начислением процентов. В обоихслучаях годовая процентная ставка составляет 19%. Какой кредит выгоднее фирме? Сравните ***эффективные ставки*** в обоих случаях.
3	Выдан кредит 420 000 руб. на 4 года. Проценты начисляются раз в квартал. Определите величину процентной ставки за период, если подоговору возврат должен составить 700 000 руб.
4	Клиент внес в банк 160 тыс. рублей сроком три квартала. Процентная ставка банка 9 %, налог на проценты 3 %. Определите наращенную сумму и сумму налога в случае простых процентов и сложных процентовпри ежеквартальном начислении налогов.
5	Фирма договорилась с банком о выделении кредита в 500 тыс. руб. на год под 17,9% (проценты простые) без учета инфляции. Ожидаемый годовой уровень инфляции 11,5%. Определите процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращения и дисконт банка.

ВАРИАНТ 2.

1	Ссуда в размере 340 тыс. руб. выдана с 25 апреля по 25 октября включительно под ставку 22 % годовых. Какую сумму заплатит должникв конце срока? Рассчитать тремя методами.

2	Банк предлагает кредиты на 4 года с ежеквартальным начислением процентов и на 3,5 года с ежемесячным начислением процентов. В обоихслучаях годовая процентная ставка составляет 18 %. Какой кредит
	выгоднее фирме? Сравните ***эффективные ставки*** в обоих случаях.
3	Рассчитайте коэффициент наращения вклада под 14 % годовых через 1,2, 3 года при ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.
4	Клиент внес в банк 660 тыс. руб. на год. Процентная ставка банка 11 %. Налог на проценты 5 %. Требуется определить сумму налога N, проценти наращенную сумму в двух случаях: 1) простых процентов; 2) сложных процентов при ежемесячном начислении процентов.
5	Месячные уровни инфляции 1,2 %. Какой процент за годовой кредит должна взять финансовая компания, чтобы обеспечить доходность неменее 16 % , если они начисляются ежеквартально?

ВАРИАНТ 3.

1	Клиент внес в банк 150 тыс. руб. на срок с 28 марта по 28 мая того жегода. Годовая процентная ставка 9%, проценты простые. Определите наращенную сумму при расчете по: а) точным процентам с точным числом дней; б) банковскому методу; в) обыкновенным процентам сприближенным числом дней.
2	Сумма наращивается по сложной процентной ставке 17 % с начислениемраз в месяц. Определите эффективную ставку.
3	Банк принимает срочные вклады на 4 месяца с объявленной годовойставкой 16 %, на полгода с годовой ставкой 18 % и на год с годовой ставкой 19,5 %. Как выгоднее положить вклад на два года?
4	Клиент внес в банк 330 тыс. руб. на год. Процентная ставка банка 21,5%. Налог на проценты 4 %. Требуется определить сумму налога N,процент и наращенную сумму в двух случаях: 1) простых процентов; 2) сложных процентов при ежемесячном начислении процентов.
5	Фирма получила кредит в 350тыс. руб. на 18 мес. под годовую процентную ставку 16%. Проценты простые. Месячный уровень инфляции 1,5%. Определите месячную процентную ставку с учетом инфляции и наращенную сумму. Определить реальную покупательную способность будущего суммы.

ВАРИАНТ 4.

1	Клиент внес в банк 510 тыс. руб. на срок с 11 мая по 11 декабря то гоже года. Годовая процентная ставка 22 %, проценты простые. Определите наращенную сумму при расчете по: а) точным процентам с точным числом дней; б) банковскому методу; в) обыкновенным процентам с приближенным числом дней.
2	Сумма наращивается по сложной процентной ставке 16 % с начислением раз в квартал. Определите эффективную ставку.
3	Банк принимает срочные вклады на 4 месяца с объявленной годовой ставкой 14 %, на полгода с годовой ставкой 15,5 % и на год с годовой ставкой 17,5 %. Как выгоднее положить вклад на 4 года?
4	Клиент внес в банк 260 тыс. руб. на год. Процентная ставка банка 18,8 %. Налог на проценты 9 %. Требуется определить сумму налога N, процент и наращенную сумму в двух случаях: 1) простых процентов; 2) сложных процентов при ежемесячном начислении процентов.
5	Молодоженам выдана льготная ипотечная ссуда на покупку квартиры 40тыс. долларов под 15 % годовых сроком на 4 года. Начисление процентов ежеквартальное. Средний годовой уровень инфляции 8,8 %. Определите процентную ставку с учетом инфляции и ту сумму, которуюпридется вернуть в конце срока.

2. ПОСТОЯННЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

2.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При проведении большинства финансовых операций возникают ***денежные потоки*** - чередующиеся в течение ограниченного или неограниченного

промежутка времени поступления и выплаты денежных средств. Поток состоит из отдельных ***элементов потока*** - ***платежей***. **Поступления** денег считаются ***положительными платежами***, а **выплаты** - ***отрицательными***. В первой главе мы рассмотрели одноразовые поступления и выплаты и наращенные на них проценты. Денежный поток - это последовательность платежей разных направлений. Денежные потоки делятся:

- по распределению во времени - на ***регулярные*** (*периодические*) и ***нерегулярные***;
- по величине элементов - на ***постоянные*** и ***переменные.***

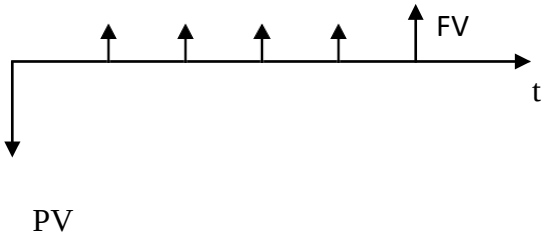
Периодические платежи могут осуществляться в конце периода - ***постнумерандо*** (обыкновенные) или в начале периода - ***пренумерандо***.

Денежный поток, элементы которого C*i* поступают через равные промежутки времени, называются ***финансовой рентой***. *Постоянная рента* предполагает получение или выплату одинаковых сумм C в течение всего срока операции.

В этой главе будут рассматриваться только периодические постоянные потоки платежей, то есть постоянные ренты. Будем сначала полагать, что число платежей m раз в году и их момент (пренумерандо или постнумерандо) совпадают с числом и моментом начисления процентов, причем процентная ставка не меняется в течение всего срока операции.

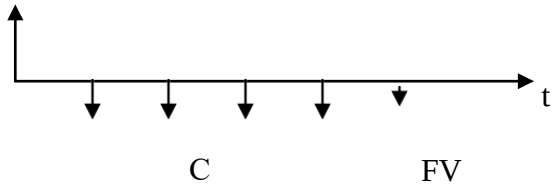
Существует три основных вида операций.

Срочным аннуитетом называется денежный поток с равными поступлениями C в течение ограниченного промежутка времени в конце каждого периода. Например, клиент вносит в банк первоначальную сумму, а в обмен получает серию периодических выплат в течение срока действия договора. В конце срока договора ему причитается получить сумму FV. Эту ситуацию можно записать (-PV, C, C,… C, FV) и изобразить графически

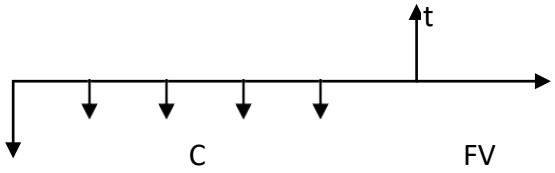


Банковский кредит - это аннуитет наоборот. Клиент получает денежную ссуду PV, а потом выплачивает свой долг равными платежами C в течение срока погашения кредита. В конце срока операции ему остается выплатить

сумму FV. Эту ситуацию можно записать (PV, -C, -C,…-C, -FV) и изобразить графически



Накопление периодическими взносами (формирование денежных фондов). В начале срока финансовой сделки вносится вклад в размере PV и через равные промежутки времени к нему добавляются суммы C. К концу срока сделки с учетом начисленных процентов накопится сумма FV. Эту ситуацию можно записать (-PV, -C, -C,…-C, FV) и изобразить графически



Анализ потока платежей предполагает решение

а) *прямой задачи*, когда проводится оценка с позиции будущего, т. е. вычисляется сумма всех платежей с начисленными процентами на конец срока проведения операции;

б) *обратной задачи*, когда проводится оценка с позиции настоящего, т. е. определяется современная стоимость всех платежей, приведенная на момент начала операции.

2.2 БУДУЩАЯ СУММА ПРЕНУМЕРАНДО И ПОСТНУМЕРАНДО БЕЗПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ СУММЫ

2.2.1 Рента пренумерандо

Пусть одинаковые платежи размером R осуществляются ***пренумерандо*** в течение n периодов. На них нарастают проценты по номинальной (ежегодной) процентной ставке **r**. За **n** периодов нарастает сумма, вычисляемая по формуле (1):

$$FV = R \cdot$$

$$\frac{}{r} \quad 2.1 \quad .$$

$$(1+r)\cdot\left[(1+r)^n-1\right] \qquad (\quad)$$

Если взносы осуществляются **m** раз в году в течение **t** лет, то число периодов сделки ***n=t·m***, а процентная ставка за период составляет ***r/m***. В этом случае

$$FV = R\cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)\cdot\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{r} \qquad (2.2)$$

Если число начислений процентов равно ***m***, а число платежей в году равно ***p***, то формула наращения принимает вид:

$$FV = R\cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\cdot\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (2.3)$$

Современная стоимость ренты при этом равна:

$$S_0 = R\cdot \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-t\,m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \qquad (2.4)$$

2.2.2 Рента постнумерандо

Те же условия, что и в предыдущем разделе, но рента вносится в конце каждого периода – ***постнумерандо***.

$$FV = R\cdot \frac{\left[(1+r)^n-1\right]}{r} \qquad (2.5)$$

Если взносы осуществляются m раз в году в течение k лет, то n=m·k

$$FV = R \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\frac{r}{m}} \qquad (2.6)$$

Если число начислений процентов равно ***m***, а число платежей в году равно ***p***, то формула наращения принимает вид соответственно формуле (2.3):

$$FV = R \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (2.7)$$

Современная стоимость ренты постнумерандо при этом равна:

$$S_0 = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-t\,m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (2.8)$$

Формулы (2) и (6) , а также (3) и (7) можно объединить в одну, введя переменную ***тип***. $тип = \begin{cases} 1, & если\ \ рента\ \ пренумерандо \\ 0, & если\ \ рента\ \ постнумерандо \end{cases}$.

Тогда

$$FV = R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m} \bullet тип\right) \cdot \left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\frac{r}{m}} \qquad (2.9)$$

$$FV = R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m} \bullet тип\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (2.10)$$

Очевидно, что при выплатах пренумерандо абсолютная величина будущей накопленной суммы больше.

Поскольку выплаты R и конечная сумма имеют, как правило, разные знаки, то их сводят в уравнение эквивалентности

$$FV + R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m \bullet mun}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} - 1\right]}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 0 \quad (2.11)$$

Напомним, что в выражениях (1)-(10) величина m – это число взносов и начислений процентов в году.

При ежемесячных взносах m=12;

при ежеквартальных взносах m=4;

при взносах раз в полгода m=2;

при ежегодных взносах m=1.

Пример 2.1. Сколько денег можно накопить в банке в течение года, внося ежемесячн

Решение

R=-300 руб.

r=0,18

t=1

m=12, p=12

FV=?

Первый случай – взносы постнумерандо (тип=0)

$$FV = -(-300)\frac{1+0,18/12)^{12}-1}{\frac{0,18}{12}} = 3912,36\,руб.$$

Второй случай –взносы пренумерандо (тип =1)

$$FV = -(-300)\ \frac{(1+0{,}18/12)^{12}-1}{\frac{0{,}18}{12}}(1+0{,}18/12)=3971{,}05\ \text{руб.}$$

Если бы мы копили эти деньги в банке из под кофе, то в конце года имели бы только

FV=300*12=3600 руб.

Таким образом, в обоих случаях за счет процентов банк нам приплачивает в конце года больше трехсот руб. Однако во втором случае (выплаты в начале каждого месяца) мы получим почти на 60 руб. больше.

2.3 УРАВНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

В повседневных финансовых операциях накопления денег, кредитования, аннуитета фигурируют как первоначальные, так и периодические взносы.

Все эти ситуации описываются общим эквивалентным уравнением, объединяющим уравнения (2.1)-(2.9) с учётом начальной суммы PV и её наращением:

$$FV + PV\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} + R\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\bullet mun\right)^{\frac{m}{p}}\cdot\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right]}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 0 \quad (2.12)$$

Из этого уравнения можно определить одну из величин как функцию остальных:

1. **FV=f(PV,R,r,m,t)** – будущую сумму в любой момент;
2. **PV=f(FV,R,r,m,t)** – текущую сумму, пересчитанную к любому моменту финансовой сделки;
3. **R=f(PV,FV,r,m,t)** – выплаты;

4. **t=f(PV,FV,R,r,m)** – срок договора;
5. **r=f(PV,FV,R,m,t)** – норму, годовую процентную ставку.

2.3.1 Определение будущей суммы

Пример 2.2 Изменим условия примера 2.1. Пусть в начале срока вложена сумма PV=1000 руб. Ежемесячно вносится еще по 300 руб. Годовая процентная ставка 18%. Как при этом изменятся суммы в конце года постнумерандо и пренумерандо.

Решение

PV=-1000 руб.

R=-300 руб.

r=0,18

t=1

m=12, p=12

FV=?

1) Взносы постнумерандо.

$$FV=-(-1000)(1+\frac{0,18}{12})^{12}-(-300)\frac{(1+\frac{0,18}{12})^{12}-1}{\frac{0,18}{12}}=5107,98\,руб.$$

2)Взносы пренумерандо.

$$FV=5107,98(1+\frac{0,18}{12})=5166,67\,руб.$$

2.4 Определение текущей суммы

Формулы (2.4) и (2.8) позволяют оценить современную текущую стоимость ренты

Пример 2.3. Пенсионер получил наследство и хотел бы заключить договор с пенсионным фондом с условием получения 500 руб. в конце (начале) каждого месяца на протяжении 5 лет. Какая сумма обеспечит получение такого дохода при процентной ставке 24% годовых?

Решение.

FV=0

R=500

r=0,24

t=5

m=12

p=12

PV=?

1) Выплаты в конце месяца (тип=0)

$$PV = -R\frac{1-(1+r/m)^{-t\ m}}{r/m} = -500\frac{1-(1+\frac{0,24}{12})^{-(5\cdot 12)}}{\frac{0,24}{12}} = -17\,380,44\,руб.$$

2) Выплаты в начале месяца (тип=1)

$$PV = -R\,\frac{\left[1-(1+r/m)^{-t\ m}\right](1+r/m)}{r/m} = -17\,728{,}05\,руб.$$

Как видим, во втором случае вклад должен быть значительнее почти на 350 руб. Знак минус показывает, что первоначальную сумму PV нужно отдать в банк.

Сколько денег пришлось бы пенсионеру положить в шкатулку, чтобы вынимать из нее по 500 руб. ежемесячно в течение 5 лет?

PV=500·12·5=30000 руб.

В обоих случаях банк за счет процентов доплачивает больше 12000 руб.

2.5 Определение периодических выплат

Какую сумму R нужно вносить регулярно в начале (в конце) периода, чтобы при первоначальном взносе PV и годовой процентной ставке r через n=m·t периодов накопить капитал FV? Из (2.5) имеем

$$R = -\frac{\left(FV + PV\cdot(1+r/m)^{m\cdot t}\right)\cdot r/m}{\left((1+r/m)^{m\cdot t}-1\right)\cdot(1+r/m\cdot mun)}. \qquad (2.8)$$

Пример 2.4 Родители решили накопить за 18 лет на образование ребенка 50000 руб. Банк обеспечивает 6% годовых по вкладу. Сколько денег нужновносить в конце каждого месяца?

Решение

FV=50000 руб.

PV=0

r=0,06

t =18

m=12

C=?

$$R = -\frac{FV\cdot r/m}{(1+r/m)^{m\cdot t}-1} = -\frac{50000\cdot 0{,}06/12}{(1+0{,}06/12)^{12\cdot 18}-1} = -129{,}08\,руб.$$

За 18 лет родители внесут в банк 129,08·18·12=27881,28 руб.

2.6 Расчет срока ренты

При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты. Решая уравнение (2.5) относительно числа лет k, получим

$$t = \frac{\ln\left(\frac{R\cdot(1+r/m\cdot mun)-FV\cdot r/m}{R\cdot(1+r/m\cdot mun)+PV\cdot r/m}\right)}{\ln(1+r/m)} \qquad (2.9)$$

Пример 2.5 Фирме нужно выплатить долг 300 млн. руб. ежегодными платежами по 111,52 млн. руб. Процентная ставка согласно договору между кредитором и фирмой установлена 12% годовых. Нужно определить срок платежа.

Решение

PV=300 млн. руб.

FV=0

C=-111,52 млн. руб.

r=0,12

m=1

тип=1

k=?

Фирма выплачивает долг, пока сумма его не станет равной нулю.По формуле (2.9)

$$k = \frac{\ln\left(\frac{-111{,}52\cdot(1+0{,}12)}{-111{,}52\cdot(1+0{,}12)+300\cdot 0{,}12}\right)}{\ln(1+0{,}12)} = 3{,}00\,года$$

За это время с учетом процентов фирма выплатит сумму

$$S=-111{,}52\cdot 3=-334{,}56 \text{ млн. руб.}$$

Переплата по процентам составит 34,56 млн. руб.

Пример 2.6 Акционерное общество решило создать резервный фонд в размере 600 млн. руб. Взносы в размере 66,834 млн. руб. вносятся в конце каждого года под годовую процентную ставку 16%. Сколько времени будет формироваться фонд?

Решение.

PV=0

FV=600 млн. руб.

По формуле (2.9)

$$t=\frac{\ln\left(\frac{-66{,}834-600\cdot 0{,}16}{-66{,}834}\right)}{\ln(1+0{,}16)}\approx 6\,лет$$

R=-66,834 млн. руб.

r=0,16

m=1

тип=0

t=?

Определение начальной суммы из уравнения эквивалентности (11):

$$PV = \left[-R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}-1\right)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} - FV \right] \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

2.7. Непрерывная рента

Формула для вычисления наращенной суммы p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов и силой роста δ определяется как:

$$FV\left(t \to \infty\right) = R\frac{e^{\delta t}-1}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)} \quad (1)$$

Формула для современной стоимости p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов и силой роста δ определяется по формуле:

$$S\left(t \to \infty\right) = R\frac{1-e^{-\delta t}}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)} \quad (2)$$

Пример 2.7..

В фонд ежегодно поступают средства по 30 000 руб. в течение 6 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 8 %годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются непрерывно. Определить величину фонда на конец срока и ее современную стоимость.

Дано: $R = 30000,\ t = 6,\ \delta = 0{,}08,\ p = 4$(*поквартальные выплаты*)

Решение:

По формуле (1) найдем величину фонда:

$$FV\left(t \to \infty\right) = 30000\ \frac{e^{0{,}08\cdot 6} - 1}{4 \cdot \left(e^{\frac{0{,}08}{4}} - 1\right)}\quad 30000\ \frac{1{,}6160744 - 1}{4 \cdot \left(1{,}02020134 - 1\right)} =$$

$$30000\ \frac{0{,}6160744}{0{,}08080536} = 30000 \cdot 7{,}62417741 = 228725{,}32\ \$$$

По формуле (2) определим современную стоимость ренты:

$$S\left(t \to \infty\right) = 30\,000\ \frac{1 - e^{-0{,}08\cdot 6}}{4 \cdot \left(e^{\frac{0{,}08}{4}} - 1\right)} = 30\,000\ .\ \frac{1 - 0{,}6187834}{0{,}08080536} =$$

$$= 30\,000\ \frac{0{,}3812166}{0{,}08080536} = 30\,000 \cdot 4{,}71771427 = 141\ 531{,}43\ \$$$

2.8. Приведенная стоимость бессрочного аннуитета.

Для оценки движения *финансовых потоков* во времени применяют различные формулы ф*инансовой математики*, в том числе и расчет приведенной стоимости бессрочного *аннуитета*.

Сущность расчета заключается в том, что *денежный поток,* состоящий из одинаковых по величине выплат и неограниченный по времени, имеет конечную сегодняшнюю стоимость, так как при инфляции больше нуля сегодняшняя стоимость периодической выплаты постоянно уменьшается и в бесконечности стремится к нулю.

Формула приведенной стоимости *бессрочного аннуитета*:

$$S(\infty) = \frac{R}{r},$$

где $S(\infty)$ — приведенная (текущая) стоимость;
R — величина равномерного поступления;
r — процентная ставка.

Пример 2.8.

Необходимо рассчитать стоимость бессрочного аннуитета при 3000 рублях ежегодных выплат и ставке 12%

Решение.

$S(\infty)$ = 3000 / 0,12 = 25000 руб. Для выполнения вышеприведённых условий необходимо инвестировать 25 000 руб.

При использовании данного финансового инструмента необходимо учитывать, что приемлемая ставка дисконтирования (процентная ставка) должна включать в себя безрисковую ставку и премию за риск.

В общей бессрочной ренте периоды начисления процентов не совпадают с периодами выплат. Если W — величина выплат общей обычной ренты, то

$$R = W \qquad r \quad \rightarrow$$

Найти текущее значение приведенной бессрочной ренты с выплатами по 230 000 руб. в начале каждого квартала и эффективной ставкой 10 % годовых.

Решение. Определим величину выплат эквивалентной простой обычной ренты

$$R = W\frac{i}{1-(1+i)^{-\frac{m}{p}}} = 230\frac{0{,}1}{1-(1{,}1)^{-0{,}25}} = 976\ 815 \text{ руб. } 10 \text{ коп.}$$

Тогда

$$S(\infty) = \frac{R}{i} = \frac{976\ 815{,}1}{0{,}1} = 9\ 768\ 151 \text{ руб.}$$

2.9. Погашение долга.

Планирование погашения задолженности, *кредита* или ссуды заключается в определении периодических расходов по займу, т. е. размеров *срочных уплат.* Срочные уплаты охватывают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного долга.

Параметры плана погашения долга:

T — срок займа в годах;

r — годовая ставка процентов, начисляемых на сумму задолженности;

y_i — срочные уплаты (периодические расходы по займу);

d_i — размер погашения основной суммы долга на i-м периоде;

D_i — остаток задолженности на начало t-го периода;

P_i — выплаченные проценты на t-м периоде.

Количественный анализ долгосрочной задолженности (займа) применяется для достижения сбалансированности, т. е. адекватности его параметров принятым условиям финансового соглашения, путем планирования погашения долга.

Рассмотрим различные способы погашения задолженности, поскольку в зависимости от выбора способа погашения стоимость кредита (сумма выплачиваемых процентов) будет различной. Здесь возможны два варианта:

а) погашение *единовременным платежом*, т. е. возврат всей суммы в срок;

б) погашение *долга в рассрочку*, т. е. частями.

2.10. Погашение долга единовременным платежом

2.10.1. Погашение основной суммы долга единовременным платежом вконце срока с постоянной выплатой процентов.

Рассмотрим *погашение единовременным платежом.* В простейшем случае кредит погашается единым платежом в конце срока:

$$y = D(1+r)^t,$$

где y — срочная уплата;
D — сумма долга.

Этот платеж, как наращенная сумма долга, состоит из двух частей:

— возврата основной суммы долга (D);

— выплаты процентов по долгу (P), где $P = D(1+r)\,n - D$.

В финансовой практике встречаются случаи, когда у кредитора возникает необходимость вернуть часть денег досрочно. В таких случаях возникает риск невозврата, поскольку требуемой суммы на такой момент времени может и не быть.

При значительной сумме долга разовый платеж требует создания так называемого фонда погашения путем периодических взносов. Фонд погашения аккумулирует денежные средства,

Направленные на погашение задолженности. Наиболее эффективно размещение фонда погашения с начислением на взносы процентов, например, на специальном счете в банке. Не трудно заметить, что такие платежи по своей сути являются финансовой рентой (аннуитетом), поэтому задача сводится к определению одного из параметров финансовой ренты — члена ренты.

Здесь возможны два варианта.

1) *выплата процентов по мере их начисления*, а основная сумма денег возвращается в конце срока займа.
2) *Погашение основной суммы долга и процентов по нему единовременным платежом в конце срока ссуды*. Погашение долга единовременным платежом состоит в *выплате процентов одновременно с погашением долга*.

Рассмотрим первый вариант:

Если проценты выплачиваются ежегодно, тогда величина срочной уплаты (расходов должника по погашению долга) равна

$$y = P + R = Dq + \frac{Di}{(1+r)^t - 1}.$$

где D — первоначальная сумма долга;
q — ставка процентов по условиям займа;
t — срок долга в годах;
r — ставка процентов при создании фонда погашения.

Здесь фигурируют две ставки процентов: r — определяет скорость роста суммы фонда погашения, q — сумму выплачиваемых за заем процентов.

Пример 2.9.

По долговому обязательству выдана сумма \$100 000 под 10 % годовых на 3 года с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга единовременным платежом создается фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы, на которые начисляются проценты по ставке 11 %. Найти ежегодные расходы должника.

Решение. Ежегодные расходы должника составляют величину срочной уплаты:

$$y = P + R,$$

$$P = Dq = 100\,000 \times 0{,}1 = \$10\,000;$$

$$R = \frac{Di}{(1+i)^n - 1} = \frac{100\,000Ч0{,}11}{(1+0{,}11)^3 - 1} = 29\,921 \text{ дол. } 31 \text{ цент.}$$

Отсюда

y = 10 000 дол. + 29 921 дол. 31 цент = 39 921 дол. 31 цент.

Таким образом, ежегодные расходы должника по обслуживанию долга составят 39 921 дол. 31 цент.

Более наглядным и эффективным способом планирования долга является составление таблицы, в которой отражают все основные характеристики обслуживания долга.

Такой план погашения долга единовременным платежом с ежегодной выплатой процентов и созданием погасительного фонда представлен таблицей.

План погашения долга единовременным платежом

Год	Долг (D)	Выплата процентов ($P = Dq$)	Взносы в погасительный фонд, R	Величина срочной уплаты ($Y=P+R$)	Накопленная сумма долга $[D_{t+1}=D_t(1+r)+R]$
1	100 000	10 000	29 921,31	39 921,31	29 921,31
2	100 000	10 000	29 921,31	39 921,31	63 133,96
3	100 000	10 000	29 921,31	39 921,31	100 000,00
Итого	—	30 000	89 763,93	119 763,93	—

Таким образом, из приведенной таблицы видно: ежегодные расходы по обслуживанию долга составят \$39 921,31 , что в целом за 3 года составит сумму \$119 763,93 , причем выплата процентов за 3 года \$30 000 , а на погашение основного долга в размере \$100 000 приходится всего лишь \$89 763,93 , т. е. \$10 236,07 является набежавшими процентами на размещенные средства в фонде погашения.

Таким образом, создание фонда погашения является необходимым элементом составления плана погашения долга, так как позволяет не только снизить риск не возврата денежных средств, но и сократить расходы по обслуживанию суммы долга.

Второй вариант:

В этом случае взносы в фонд погашения являются одновременно и величиной срочной уплаты (членом финансовой ренты):

$$y = \frac{D(1+r)^t r}{(1+r)^t - 1},$$

где D — первоначальная сумма долга;
q — ставка процентов по условиям займа;
t — срок долга в годах;
r — ставка процентов при создании погасительного фонда.

Пример 2.10.

Рассмотрим предыдущий пример, изменив условия: погашение единовременным платежом, как суммы основного долга, так и выплаты процентов.

Решение. Величина срочной уплаты равна

$y = 100\,000(1 + 0{,}11)3 : 3{,}3421000 = 39\,825{,}26.$

Таким образом, величина ежегодных расходов по обслуживанию долга составит \$39 825,26 , что несколько меньше аналогичного показателя в предыдущем примере, следовательно, меньше и общая сумма расходов по обслуживанию долга, составляющая величину \$119 475,78 .

План погашения долга единовременным платежом

Год	Долг (D)	Взносы в погасительный фонд ($R = y$)	Накопленная величина в погасительном фонде (S)	Проценты по долгу (P)	Величина погашения текущего долга ($S - P$)
1	100 000	39 825,26	39 825,26	10 000	29 825,26
2	110 000	39 825,26	84 031,30	11 000	84 020,30
3	121 000	39 825,26	133 100,00	12 100	121 000,00
Итого	133 100	119 475,78	—	33 100	—

Как видно из таблицы, происходит ежегодное увеличение суммы долга за счет присоединения к нему процентов, поэтому к концу срока долг возрастет до \$133 100 , из которых выплата процентов составит \$33 100 . Однако за счет увеличения размера взносов в погасительный фонд общая величина обслуживания долга уменьшается.

2.11. Задачи для самостоятельной работы.

ВАРИАНТ 1.

1	В фонд ежегодно поступают в конце года средства по 16 000 руб. в течении 5 лет, на которые начисляются проценты по ставке 9% годовых ежеквартально. Определить коэффициент наращения ренты, величину фонда на конец срока, коэффициент приведения ренты и современную стоимость ренты.
2	Сколько лет продолжается рента стоимостью 160 000 руб., ежегодные платежи которой равны 12 000руб , если рента рассчитана по 10 %?
3	В фонд ежегодно поступают средства по 40 000 руб в течении 15 лет , на которые начисляются проценты по силе роста 8% годовых, причем выплаты производятся раз в полгода, а проценты начисляются непрерывно. Определить величину фонда на конец срока и ее современную стоимость.
4	По долговому обязательству выдана сумма 600 000 $ под 12% годовых на 3года с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга единовременным платежом создаётся фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы, на которые начисляются проценты по ставке 9%. Найти ежегодные расходы должника.
5	Сколько денег нужно положить в банк сегодня, чтобы при ежемесячных вложениях по 3 000 рублей и процентной ставке 9% в год через 5 лет накопить сумму 500 000 рублей?

ВАРИАНТ 2.

1	В фонд ежегодно поступают в конце года средства по 5 000 руб. в течениив6 лет, на которые начисляются проценты по ставке 16 % годовых ежемесячно с ежеквартальным начислением процентов. Определить коэффициент наращения ренты, величину фонда на конец срока, коэффициент приведения ренты и современную стоимость ренты.
2	Сколько лет продолжается рента стоимостью 156 000 руб., платежи которой равны 13 000 руб , если рента рассчитана по 8%?
3	В фонд ежегодно поступают средства в течение 15 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 9 % годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются непрерывно. Современная стоимость ренты составляет 450 000 руб. Определить ежегодную выплату.
4	По долговому обязательству выдана сумма 500 000 $ под 12% годовых на 3года с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга единовременным платежом создаётся фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы, на которые начисляются проценты по ставке 9%. Найти ежегодные расходы должника. Погашение идет единовременным платежом, как суммы основного долга, так и выплаты процентов. Составить план погашения.
5	Ваша фирма собирается дать кредит в размере 1 000 000 рублей сроком на 5 лет с ежегодным погашением по 200 000 руб. Под какой процент следует дать кредит, чтобы в конце срока получить обратно в общей сложности 1 500 000 рублей?

ВАРИАНТ 3.

1	В фонд ежегодно поступают в конце года средства по 14 000 руб. в течении 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12 % годовых сежемесячным начислением процентов. Определить коэффициент наращения ренты, величину фонда на конец срока, коэффициент приведения ренты и современную стоимость ренты.
2	Сколько лет продолжается рента стоимостью 180 000 руб., ежеквартальныеплатежи которой равны 12 000 руб , если рента рассчитана под 8% и проценты начисляются ежеквартально?
3	Квартирант платит за квартиру 85 000 руб. в год и желает заменить такой способ расчета уплатой по кварталам года. Домохозяин соглашается на такое предложение, но с тем условием, чтобы расчет ежеквартальных взносов был сделан из 1 % процентов в квартал. Сколько должен платить квартирант в начале каждого квартала?
4	Вы берете в банке ипотечную **ссуду** на покупку квартиры 1 200 000 рублей. Первый взнос составляет 15% от стоимости квартиры. Годовая ставка банка 6,5%. Срок погашения 10 лет. Каковы должны быть ежемесячные взносы в банк, общая сумма, которую Вам придется заплатить, и Ваша переплата банку? Составить план погашения.
5	Рассматриваются два варианта покупки квартиры: заплатить сразу 250 тыс. руб. или платить ежемесячно по 800 руб. в течение 10 лет при ставке 8% годовых. Что лучше?

ВАРИАНТ 4.

1	В фонд ежегодно поступают в конце года средства по 8 000 руб. в течении12 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12 % годовых с ежемесячным начислением процентов. Определить коэффициент наращения ренты, величину фонда на конец срока, коэффициент приведения ренты и современную стоимость ренты.
2	Сколько лет продолжается рента стоимостью 95 000 руб., ежеквартальныеплатежи которой равны 10 000 руб , если рента рассчитана под 7 % и проценты начисляются ежегодно?
3	Квартирант платит за квартиру 85 000 руб. в год и желает заменить такой способ расчета уплатой по кварталам года. Домохозяин соглашается на такое предложение, но с тем условием, чтобы расчет ежемесячных взносов был сделан из 1 % процентов в месяц. Сколько должен платить квартирант в начале каждого месяца?
4	Кредит на сумму 6 000 000 руб. открыт на 2 года при процентной ставке, равной 12 % годовых. Погашение кредита должно осуществляться равными взносами. Определить стоимость кредита, погашаемую сумму и размер взносов, если погасительные платежи осуществляются в конце каждого года. Составить план погашения.
5	При аварии на химическом заводе в Бхопале (Индия). Корпорация «ЮнионКарбайд» предложила в качестве компенсации пострадавшим $200 000 000 выплачиваемых в течение 35 лет. Чему равна компенсация, выплаченная единовременно, при условии, что выплаты производятся ежемесячно с 10 % годовой ставкой.