

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**
**«Пермский государственный национальный исследовательский
университет»**

Колледж профессионального образования

МАТЕМАТИКА

Методические указания по практической работе
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Утверждено на заседании ПЦК
Сетевого и системного администрирования
Протокол № 10 от «25» мая 2022 г.

Пермь 2022

Составитель:

Журавлева А.В., преподаватель КПО ПГНИУ

Математика: методические указания по практической работе для студентов Колледжа профессионального образования специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения / сост. А.В. Журавлева; Колледж проф. образ. ПГНИУ. – Пермь, 2022. – 82 с.

Методические указания «Математика» разработаны на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения для оказания помощи студентам специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения по дисциплине «Математике». Содержат типичные практические задания по всем разделам дисциплины.

Предназначены для студентов Колледжа профессионального образования ПГНИУ специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения (СПО) всех форм обучения.

Практические задания для текущего контроля по учебной дисциплине

Практическое занятие №1. Входной контроль

Практическое занятие №2. Вычисление определителей

Определители и их свойства

Определение: Определителем n – го порядка называется квадратная таблица чисел, состоящая из n строк и n столбцов.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} - элементы определителя, где i – номер строки, а j – номер столбца,

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - элементы главной диагонали

Побочная диагональ идет из левого нижнего угла в правый верхний.

Определение: Определителем второго порядка называется число, определяемое для чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Определение: Определителем третьего порядка называется число, определяемое девятью числами по правилу треугольника (звезда):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Только для определителей третьего порядка существуют более наглядные правила вычисления определителя. Полезно пользоваться правилом треугольника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$

Свойства определителей:

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. Если все элементы столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю.

Свойство 3. Постоянный множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) выносится за знак определителя.

Свойство 4. Если поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. Определитель, имеющий две равные строки (или столбца), равен 0.

Свойство 6. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то величина определителя равна нулю.

Свойство 7. Определитель не изменится, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить(вычесть) элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, не равное нулю.

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определение: Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный вычеркиванием i - той строки и j - го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Определение: Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента M_{ij} умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

Пример: $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$

Минор $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$. (вычеркнули первую строку и второй столбец) = -3.

Минор $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$. (вычеркнули вторую строку и третий столбец) = -17.

Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (строки) на их алгебраические дополнения.

Запишем разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Пример: Вычислить определитель $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, разлагая его по первой

строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = -5 +$$

$$18 + 6 = 19.$$

Практические задания по теме

Задание 1. Вычислить определители второго порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 13 & 41 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 5 & 37 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 15 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Вычислить определители по правилу треугольников.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 7 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 3 & 21 & 17 \\ 0 & 5 & 52 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad 7) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 3. Решить уравнения:

$$1) \begin{vmatrix} \sqrt{x} & x^2 \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix} = 0;$$

$$2) \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3) \begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Практическое занятие №3 Действия с матрицами. Обратная матрица.

Цель работы: развитие умений и навыков по выполнению действий с матрицами.

Основной теоретический материал

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность m -и n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B . В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij} : первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или *строковой*), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0) , или просто 0 . Например,

$$0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B , стоящие на тех же местах.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C , которая определяется по правилу

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц на примере матриц 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

- матрицы складываются поэлементно (складываем числа на одинаковых местах)

!!! Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковый размер (т.е. одинаковое число строк и столбцов)

Пример 1: Найти сумму матриц:

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \text{нельзя, т.к. размеры матриц различны.}$$

$$3. \quad (1 \ 2 \ 3) + (0 \ -1 \ 1) = (1 \ 1 \ 4).$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ 21 & 34 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 11 & 5 & 6 \\ 28 & 40 & 14 \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$ и $a_{22}=b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A , а переход от A к B *транспонированием*.

Транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A , обычно обозначают A^T .

Пример 2: Найти матрицу транспонированную данной.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, B^T = (1 \quad -2 \quad 3).$$

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Пример 3:

$$1. \quad -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \text{Найти } 4A - B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4A - B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы A на матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

✓ Чтобы найти элемент первой строки и первого столбца c_{11} , нужно каждый элемент первой строки матрицы A (a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (b_{11} и b_{21}) и полученные результаты сложить, т.е. $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$

✓ Чтобы найти элемент первой строки и второго столбца c_{12} , нужно каждый элемент первой строки матрицы A (a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент второго столбца матрицы B (b_{12} и b_{22}) и полученные результаты сложить, т.е. $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$

✓ Аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22} .

Пример 4:

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$. Найти элементы c_{12} , c_{23} и c_{21} матрицы C .

$$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1; c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1; c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$c_{11} = 3 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 6$$

$$c_{21} = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 6$$

$$c_{31} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 8$$

$$c_{12} = 3 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 2$$

$$c_{22} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$$

$$c_{32} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$$

$$c_{13} = 3 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = -1$$

$$c_{23} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$$

$$c_{33} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 4$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

!!! Матрицы не перестановочны друг с другом, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Поэтому при умножении матриц нужно тщательно следить за порядком множителей.

Обратной A^{-1} по отношению к матрице A называется такая матрица, для которой выполняется равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. (E – единичная матрица).

Матрица, которая имеет обратную называется обратимой или не особенной.

Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы она была бы невырожденной, т.е. $\det A \neq 0$.

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

- 1) Находят определитель матрицы A
- 2) Находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу
- 3) Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют)
- 4) Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Пример 5: Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и выполнить проверку.

$$1) \text{ Вычисляем } D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

следовательно, обратная матрица существует.

2) Найдем присоединенную матрицу A^* . Для этого вычислим все *миноры* второго порядка матрицы A и *алгебраические* дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

3) Составим новую матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 1 \\ -1 & 16 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ и транспонируем

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -12 & 16 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4) Найдем по формуле обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -12 & 16 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20} \\ -\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{Проверка } A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20} \\ -\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$c_{11} = 4 \times \frac{7}{20} + 1 \times \left(-\frac{12}{20}\right) + 4 \times \frac{1}{20} = 1$$

$$c_{21} = 3 \times \frac{7}{20} + 2 \times \left(-\frac{12}{20}\right) + 3 \times \frac{1}{20} = 0$$

$$c_{31} = 1 \times \frac{7}{20} + 1 \times \left(-\frac{12}{20}\right) + 5 \times \frac{1}{20} = 0$$

$$c_{12} = 4 \times \left(-\frac{1}{20}\right) + 1 \times \frac{16}{20} + 4 \times \left(-\frac{3}{20}\right) = 0$$

$$c_{22} = 3 \times \left(-\frac{1}{20}\right) + 2 \times \frac{16}{20} + 3 \times \left(-\frac{3}{20}\right) = 1$$

$$c_{32} = 1 \times \left(-\frac{1}{20}\right) + 1 \times \frac{16}{20} + 5 \times \left(-\frac{3}{20}\right) = 0$$

$$c_{13} = 4 \times \left(-\frac{5}{20}\right) + 1 \times 0 + 4 \times \frac{5}{20} = 0$$

$$c_{23} = 3 \times \left(-\frac{5}{20}\right) + 2 \times 0 + 3 \times \frac{5}{20} = 0$$

$$c_{33} = 1 \times \left(-\frac{5}{20}\right) + 1 \times 0 + 5 \times \frac{5}{20} = 1$$

$$\text{Задание 1. } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Задание 2. } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 \\ (-4) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} (5 \ 1 \ 0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \quad 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)) = (11 \ -7).$$

Задание 4.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 373 & 118 \\ 59 & 19 \end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Найти обратную матрицу для матрицы A .

$$\text{Пусть дана матрица } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие №4 Решение систем линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса.

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению систем линейных уравнений с тремя неизвестными.

Основной теоретический материал.

Простейшие матричные уравнения и их решение. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные запишем в виде матриц-столбцов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда *матричным уравнением* называется уравнение вида $A \cdot X = B$.

План решения матричных уравнений:

- 1) Найти обратную матрицу A^{-1}
- 2) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на столбец свободных членов B ,

т.е. $A^{-1} \cdot B$

- 3) Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Решение типовых заданий:

Пример 1: Решить матричное уравнение $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$.

Составим матричное уравнение $A \cdot X = B$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

- 1) Найдем обратную матрицу A^{-1}

Вычислим определитель

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4+1) + 1 \cdot (-8-2) = 5 \neq 0$$

Запишем все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21}=(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{31}=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32}=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23}=(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33}=(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Запишем новую матрицу и транспонируем:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$2) \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + \frac{12}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \text{Итак, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } x_1=2, x_2=1, x_3=3.$$

Теорема: Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой $\neq 0$, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A , а из свободных членов – матрицу-столбец B , т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Если в определителе системы заменить столбцы коэффициентов при неизвестных на столбец свободных членов, то получим:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Тогда для решения системы запишется так:

$$X = \frac{D_x}{D}, Y = \frac{D_y}{D}, Z = \frac{D_z}{D}.$$

Решение типовых заданий:

Пример 1: Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и из свободных членов $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

Вычислим определители при неизвестных:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -25$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

Найдем значения $X = \frac{D_x}{D} = \frac{25}{25} = 1$, $Y = \frac{D_y}{D} = -\frac{25}{25} = -1$, $Z = \frac{D_z}{D} = \frac{50}{25} = 2$

Ответ: (1; -1; 2)

Задания:

- | | |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 5x + y + 3z = -4 \end{cases}$ | $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 16 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ | $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ |

Пример 2. Решить систему методом Гаусса и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: (0; -7; 5)

Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

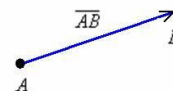
Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

Практическое занятие № 5. Векторная алгебра

Цель работы: развитие умений и навыков по применению скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

Основной теоретический материал

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец. В данном случае началом отрезка является точка A , концом отрезка – точка B . Сам вектор обозначен через \overrightarrow{AB} или \overline{AB} .



Направление имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор \overrightarrow{BA} , и это уже совершенно другой вектор. Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым нулевым вектором $\vec{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

!!! Примечание: Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.

Способы записи векторов:

- 1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} ... и так далее. При этом первая буква обязательно обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.
- 2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ... В частности, наш вектор \overrightarrow{AB} можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой \vec{a} .

Длиной или модулем ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB . Длина нулевого вектора $\vec{0}$ равна нулю. Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Действия с векторами в координатах

1. Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор \overrightarrow{AB} имеет следующие координаты: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор \overline{AB} имеет следующие координаты: $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Пример 1: Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора \overline{AB}

Решение: по соответствующей формуле: $\overline{AB} = (-2-2; 3-1) = (-4; 2)$.

Ответ: $\overline{AB}(-4; 2)$.

Пример 2:

а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы \overline{AB} и \overline{BA} .

б) Даны точки $A(2; 0)$, $B(-7; 1)$ и $C(4; 1)$. Найти векторы \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{BC} .

в) Даны точки $F(-2; -1; 0)$ и $E(0; -1; -2)$. Найти векторы \overline{FE} и \overline{EF} .

г) Даны точки $A_1(10; 5; -4)$, $A_2(-8; 6; 3)$, $A_3(1; 1; -1)$, $A_4(0; 0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

2. Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 3: Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB .

Решение: по соответствующей

формуле: $|AB| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$.

Пример 4: Даны точки $A(2; 3; -1)$ и $B(-5; 3; 0)$. Найти длину отрезка AB .

3. Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\vec{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, то его длина вычисляется по формуле $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 5: Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора \overline{AB}

Решение: Сначала найдём вектор \overline{AB} : $\overline{AB} (1 - (-3); -3 - 5) = (4; -8)$. По формуле $\overline{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора: $|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$.

4. Действия с векторами в координатах

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) *Правило сложения векторов.* Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$ и $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо сложить их соответствующие координаты: $\overline{v} + \overline{\omega} = (v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2)$.

Если даны векторы $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2; \omega_3)$, то их суммой является вектор $\overline{v} + \overline{\omega} = (v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2; v_3 + \omega_3)$.

2) *Правило умножения вектора на число.* Для того чтобы вектор $\overline{v}(v_1; v_2)$ умножить на число μ , необходимо каждую координату данного вектора умножить на число μ : $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, правило такое же: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2; \mu v_3)$.

Пример 6: Даны векторы $\overline{a}(1; -2)$ и $\overline{b}(2; 3)$. Найти $2\overline{a}$, $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$.

Решение:

$$2\overline{a} = 2(1; -2) = (2; -4)$$

$$\overline{a} + \overline{b} = (1; -2) + (2; 3) = (1 + 2; -2 + 3) = (3; 1)$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (1; -2) - (2; 3) = (1 - 2; -2 - 3) = (-1; -5)$$

$$\text{Ответ: } 2\overline{a} = (2; -4), \overline{a} + \overline{b} = (3; 1), \overline{a} - \overline{b} = (-1; -5)$$

Пример 7: Даны векторы $\overline{a}(0; 4; -7)$ и $\overline{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $-\overline{a} + 4\overline{b}$.

$$\text{Решение: } 3\overline{a} - 2\overline{b} = 3(0; 4; -7) - 2(7; -9; 1) = (0; 12; -21) - (14; -18; 2) = (-14; 30; -23).$$

$$-\overline{a} + 4\overline{b} = -(0; 4; -7) + 4(7; -9; 1) = (0; -4; 7) + (28; -36; 4) = (28; -40; 11)$$

$$\text{Ответ: } 3\overline{a} - 2\overline{b} = (-14; 30; -23), -\overline{a} + 4\overline{b} = (28; -40; 11)$$

5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

Пример 8: Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 9: Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение: Сначала проясним ситуацию с вектором $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$. Сумма векторов $-2\vec{a}$ и \vec{b} представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через \vec{c} . Итак, по условию требуется найти скалярное произведение $\vec{c} \cdot \vec{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу $\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \angle(\vec{c}; \vec{d})$, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов \vec{c} , \vec{d} и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов \vec{a} , \vec{b} , поэтому мы пойдём другим путём:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (-2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = -2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = \\ &= -2\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = -2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = -2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (4\sqrt{2}) \cdot 8 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 8^2 = \\ &= -64 + 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32. \end{aligned}$$

Пример 10: Найти длину вектора $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение будет следующим:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |-\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(-\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$.

6. Угол между векторами

Рассмотрим нашу формулу $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части: $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — это число. Длины векторов $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ — числа. Значит, дробь $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ тоже является некоторым числом X . А если известен косинус угла:

$\cos \angle (\vec{a}; \vec{b}) = X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол:

$$\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \arccos X.$$

Пример 11: Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$.

Решение: Используем формулу:

$$\cos \angle (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Итак, если $\cos \angle (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то: $\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по тригонометрической таблице.

Ответ: $\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Задания

а) Даны точки $A(0; 2; 5)$ и $B(-4; 7; 15)$. Найти длину вектора $|\overrightarrow{BA}|$.

б) Даны векторы $\vec{a}(-2; 6)$, $\vec{b}(-4\sqrt{2}; 2; 0)$. Найти их длины.

в) Даны векторы $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(2; 0)$ и $\vec{c}(-4; 2)$. Найти $3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ и $-2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b}$.

г) Найти $\vec{c} \cdot \vec{d}$, если $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен 135° .

д) Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 8\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

е) Найти длину вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$, $\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

ж) Даны $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ — длины векторов \vec{a} , \vec{b} и угол между ними $\angle (\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Найти угол между векторами $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Практическое занятие № 6. Прямая на плоскости

Цель: закрепление навыков составления уравнений прямых, нахождения угла между прямыми, расстояния от точки до прямой.

Теоретическая часть

Уравнения прямой:

1. $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = \{A, B\}$.

2. $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой.

3. $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a} = \{l, m\}$ (каноническое уравнение прямой).

4. $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ – параметрические уравнения прямой.

5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ox и Oy соответственно.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

7. $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, k – угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox .

8. $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k ; b – величина отрезка, отсекаемого прямой к положительному направлению оси Ox .

9. $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

10. $k_1 = k_2$ и $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ – условия параллельности и перпендикулярности двух прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

11. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

12. $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $\lambda \neq -1$ – координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок

M_1M_2 в отношении λ , $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

13. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ – координаты середины отрезка M_1M_2 , $M_1(x_1, y_1)$,

$M_2(x_2, y_2)$.

Задания:

1. Составить уравнение прямой, проходящей:

I. через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

II. через точку $A(3, 5)$ и начало координат.

2. Определить угол между прямыми:

I. $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

II. $y = 2x + 2$; $y = 5x + 3$.

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(-2, 3)$, $B(1, 12)$, $C(11, 6)$.

Найти:

1) уравнение стороны AB ;

2) уравнение высоты CD , опущенной из вершины C на сторону AB ;

3) уравнение медианы AE ;

4) уравнение окружности, для которой медиана AE служит диаметром.

4. В треугольнике с вершинами $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(4, 1)$ найти длину высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .

Практическое занятие № 7. Кривые второго порядка

Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости.

Цель работы: развитие умений и навыков по решению.

Основной теоретический материал

Представителями *линий второго порядка* являются окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Канонический вид уравнения - это общепринятый стандартный вид уравнения, когда в считанные секунды становится ясно, какой геометрический объект оно определяет.

Классификация линий второго порядка:

1. Окружность и её уравнение

Каноническое уравнение окружности с центром $O(a;b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Пример 1: Составить уравнение окружности с центром $O(3; -2)$ и $R=5$.

Решение: Подставим $a=3$, $b=-2$ и $R=5$ в каноническое уравнение окружности

$$(x-3)^2+(y+2)^2=5^2,$$

Используя формулу сокращённого умножения $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ получим:

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=25,$$

$$x^2-6x+y^2+4y+9+4-25=0,$$

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0 \text{ — каноническое уравнение}$$

окружности.

Пример 2: Построить окружность $x^2+y^2+6x-4y-3=0$.

Решение: Для построения окружности нужно найти центр $O(a;b)$ и радиус R , а так же привести к каноническому уравнению. Для этого:

1) Сгруппируем выражения содержащие одинаковые аргументы: $(x^2+6x) + (y^2 - 4y) = 3$,

2) Дополним до полного квадрата обе части уравнения: $(x^2+6x+9) + (y^2 - 4y+4) = 3+9+4$, т.е. $(x+3)^2+(y-2)^2 = 16$.

Из этого уравнения видно, что $a=-3$, $b=+2$ и $R=4$

2. Эллипс и её уравнение

Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1F_2 , называемых *фокусами* эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$. При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2| < 2a$.

✓ **Каноническое уравнение эллипса** имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$.

✓ **Эксцентриситет эллипса** - это отношение расстояния между фокусами к длине большой оси: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$, где a, b и c связаны между собой соотношением: $c^2 = a^2 - b^2$ (при $a > b$) или $c^2 = b^2 - a^2$ (при $b > a$); причем $0 \leq \varepsilon < 1$.

✓ **Фокусы F_1 и F_2** – заданные точки с координатами: $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, если $a > b$;

$F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, если $b > a$.

✓ **Фокусное расстояние:** $|F_1F_2| = 2c$.

✓ **Большая ось:** $|A_1A_2| = 2a$.

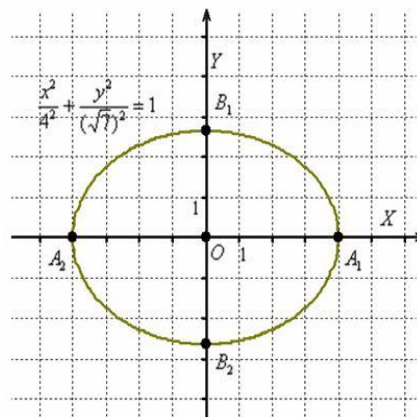
✓ **Малая ось:** $|B_1B_2| = 2b$.

Пример 3: Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Решение: Сначала приведём уравнение к

каноническому виду: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

Одно из преимуществ канонического уравнения заключается в том, что оно позволяет моментально определить вершины эллипса, которые находятся в точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$.



Легко заметить, что координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению.

В данном случае: $A_1(4; 0)$, $A_2(-4; 0)$, $B_1(0; \sqrt{7})$, $B_2(0; -\sqrt{7})$

Пример 4: Найти координаты F_1 и F_2 , длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2 + y^2 = 32$.

Решение: 1) Приведем уравнение к каноническому виду: $\frac{2x^2}{32} + \frac{y^2}{32} = \frac{32}{32}$,

$\frac{2x^2}{32} + \frac{y^2}{32} = 1$. Следовательно: $a^2=16$, $a=4$; $b^2=32$, $b=\sqrt{32}=8\sqrt{2}$. Так как $b>a$, то $c^2=b^2-a^2=32-16=16$, $c=4$.

- ✓ Итак: $F_1(0;4)$, $F_2(0; -4)$.
- ✓ Большая ось: $|A_1A_2| = 2a = 2 \cdot 4 = 8$.
- ✓ Малая ось: $|B_1B_2| = 2b = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
- ✓ Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{4\sqrt{2}} \approx 0,705$.

Пример 5: Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось $2b=6$, а расстояние между фокусами $|F_1F_2|=8$.

Решение: Так как $2b=6$, то $b=3$; $|F_1F_2|=2c$, следовательно $c=4$; $a^2=c^2+b^2=16+9=25$, $a=5$.

Каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3. Гипербола и её уравнение

Гипербола – это множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называется *фокусами*) есть величина постоянная.

- ✓ Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ где a , b и c связаны между собой равенством $c^2 = a^2 + b^2$.
- ✓ Фокусы F_1 и F_2 – заданные точки с координатами: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, если $a>b$, $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, если $b>a$.
- ✓ Фокусное расстояние: $|F_1F_2| = 2c$.
- ✓ Действительная ось: $|A_1A_2| = 2a$.
- ✓ Мнимая ось: $|B_1B_2| = 2b$.
- ✓ Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$
- ✓ У гиперболы две симметричные ветви.
- ✓ У гиперболы две асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Как построить гиперболу?

1. Прежде всего, находим асимптоты – это прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$
2. Теперь находим две вершины гиперболы, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$. Выводится элементарно: если $y=0$, то

каноническое уравнение превращается в $\frac{x^2}{a^2} = 1$, откуда и следует, что $x^2 = a^2 \rightarrow x = a, x = -a$

3. Ищем дополнительные точки. Обычно хватает двух-трёх. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей, поэтому вычисления достаточно провести для 1-й координатной четверти.

Пример 6: Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$.

Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = \frac{20}{20}, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, \quad \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

Находим асимптоты: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ и $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$

Находим две вершины гиперболы $A_1(2;0)$, $A_2(-2;0)$.

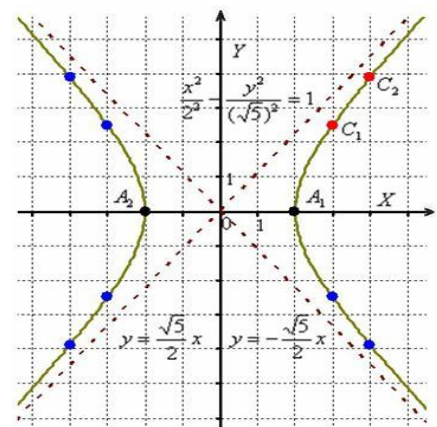
Ищем дополнительные точки: $\frac{y^2}{5} = \frac{x^2}{4} - 1$,

$$y^2 = \frac{5}{4}(x^2 - 4),$$

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5(x^2 - 4)},$$

$$C_1: x=3, y = \frac{1}{2}\sqrt{5(3^2 - 4)} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$C_2: x=4, y = \frac{1}{2}\sqrt{5(4^2 - 4)} = \frac{\sqrt{60}}{2} \approx 3,87$$



Пример 7: Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, заданного уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Решение: Приведём к каноническому виду $\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}, \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1,$

$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$. Следовательно, $a=5, b=4, c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41, c = \sqrt{41}, a > b$

✓ $F_1(\sqrt{41}; 0), F_2(-\sqrt{41}; 0)$

✓ Действительная ось: $|A_1A_2| = 2a = 10$.

✓ Мнимая ось: $|B_1B_2| = 2b = 8$.

✓ Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{5}$

✓ Уравнение асимптоты: $y = \pm \frac{4}{5}x$.

Пример 8: Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусом на оси абсцисс, если известно, что эксцентриситет равен 1,5, а фокусное расстояние равно 6.

Решение: $|F_1F_2| = 6$, следовательно, $2c = 6$, $c = 3$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ следовательно, $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{1,5} =$

2.

Зная a и c , найдём $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.

Каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

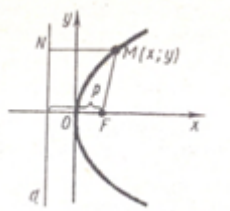
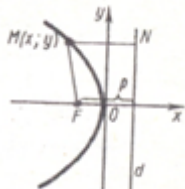
4. Парабола и её уравнение

Парабола – это множество точек плоскости, равноудалённых от заданной точки (называемой *фокусом*) и данной прямой (называемой *директрисой* d).

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px.$$

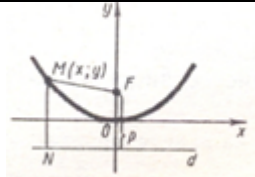
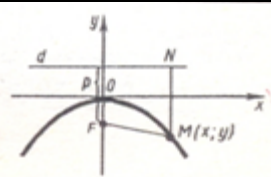
Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F(\frac{p}{2}; 0)$	$F(-\frac{p}{2}; 0)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид:

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py.$$

Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F(0; \frac{p}{2})$	$F(0; -\frac{p}{2})$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$

Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
--------------------	-------------	--------------

Пример 9: Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение: Каноническое уравнение $y^2 = 2px$, следовательно $2p = 8$, $p = 4$. $F = \frac{p}{2} = 2$, следовательно $F(2;0)$ – фокус параболы. Уравнение директрисы $d: x = -\frac{p}{2} = -2$.

Пример 10: Найти каноническое уравнение параболы и уравнение её директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты $(0; -3)$.

Решение: Согласно условию фокус параболы расположен на отрицательной полуоси Oy , следовательно, $x^2 = -2py$.

Так как $-\frac{p}{2} = -3$, то $p=6$, $2p=12$.

Уравнение параболы: $x^2 = -12py$.

Уравнение директрисы $y = \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$ или $y - 3 = 0$.

Пример 11: Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной оси Ox и проходящей через точку $A(-3; -6)$.

Решение: Уравнение параболы: $y^2 = -2px$, $(-6)^2 = -2p \cdot (-3)$, $36 = 6p$, $p = 6$; $y^2 = -12x$.

Задания:

- 1) Составить уравнение окружности с центром $O(-2; -5)$ и $R=\sqrt{3}$; $O(-5; 0)$ и $R=3$.
- 2) Построить окружность: а) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$; б) $x^2+y^2-10x+9=0$; в) $x^2+y^2+8x+7=0$.
- 3) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением: а) $16x^2+25y^2=400$; б) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.
- 4) Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого $F_1(-4;0)$, $F_2(7;0)$, а эксцентриситет $e=0,28$.
- 5) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси координат, эксцентриситет $e=0,6$ и малая ось равна 10.

- 6) Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\sqrt{3}; 0)$ и $(-\sqrt{3}; 0)$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.
- 7) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, заданного уравнением: $7x^2 - 9y^2 = 63$.
- 8) Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси ординат, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- 9) Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 10, а уравнения асимптот имеют вид $y = \pm \frac{5}{3}x$.
- 10) Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ординат равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что $2b = 10$.
- 11) Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы точка $A(-2; 0)$.
- 12) Парабола задана уравнение $x^2 = -32y$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.
- 13) Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Oy и проходит через точку $A(-5; 2)$. Составить каноническое уравнение параболы.
- 14) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

Практическое занятие № 8. Предел функции

ТЕМА: Предел последовательности, предел функции.

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению пределов элементарных функций.

Основной теоретический материал

Основные теоремы о пределах

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A \qquad \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) = B$$

Сформулируем основные теоремы о пределах:

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$
3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (c \cdot \varphi(x)) = c \cdot B$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения. Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x \rightarrow \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

Пример 1: Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$

Решение: Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени. Старшая степень в числителе равна двум. Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени. Старшая степень знаменателя равна двум. Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке. Итак, метод решения

следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}.$$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения. Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 2: Решить предел: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$

Решение: Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$. В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$. *Общее правило:* если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для её раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0}$

Разложим числитель на множители:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$ (Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка)

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{3-7}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1. \quad x_2 = \frac{3+7}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1)(x - \frac{5}{2}) = (x + 1)(x - 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = -2 - 5 = -7. \quad \text{Ответ: } -7.$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

Пример 3: Найти предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Решение: Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела. Это первое, что нужно выполнять для любого предела.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10 \cdot 3-21}}{5 \cdot 3-15} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15} = \frac{0}{0}.$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять. Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют метод умножения числителя и знаменателя на

сопряженное выражение. Вспоминаем формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3) \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5 \cdot (\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5 \cdot (\sqrt{3+6}+\sqrt{10 \cdot 3-21})} = -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Решение типовых заданий:

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+6n-1}{4n^2+1}$.

$$\text{Решение. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+6n-1}{4n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{4n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x+1) = 1+1+1=3.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2+3x+2)}{2x^2+x-6}$

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2+3x+2)}{2x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)}{2(x-3)} = \frac{-2+1}{2(-2-3)} = \frac{1}{7}.$$

Задания: Вычислите предел

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3x^3+2}{4-2x^3+x}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-7x^2+1}{2x^2+3}$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x^2+1}{7x-3x^4+2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x}{3-x^3}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x-5}$	6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x^2}{2-x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x^2}{x^3-7}$	8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^4}{x^5+2x^2}$	9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x^2}{x^5+7}$
10. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$	11. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)$	12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+2}{3x-7}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$	15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$	17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$	18. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11}{x}$	20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x}$	21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x}$

Замечательные пределы. Непрерывность функции

Цель: закрепление навыков нахождения пределов с использованием двух замечательных пределов.

Теоретическая часть

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел.
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ - второй замечательный предел.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ - замечательный логарифмический предел.
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ - замечательный показательный предел.
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ - замечательный степенной предел.

Задание: Найти предел функции с помощью двух замечательных пределов:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 4x)^{\frac{1}{4x}}$

Непрерывность функции.

Цель: закрепление навыков нахождения пределов с использованием двух замечательных пределов.

Теоретическая часть

Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на его концах, т.е. в точках a и b , непрерывна соответственно справа и слева.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Разрывы функции

Определение. Точки, где функция $f(x)$ не является непрерывной, называются **точками разрыва** функции $f(x)$.

Для классификации точек разрыва рассмотрим предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ функции $f(x)$.

Тогда имеет место следующая классификация точек разрыва.

1. Устранимый разрыв.

Он имеет место, когда выполнено условие $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

В данном случае достаточно изменить значение функции в точке x_0 , чтобы разрыва не стало.

2. Разрыв первого рода (скачок).

Разрыв первого рода (скачок) получается тогда, когда односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют, конечны, но **не равны между собой**, то есть $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

3. Разрыв второго рода.

Если хотя бы один из $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ равен $\pm\infty$ или не существует, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода.

Задание: Исследовать функцию и построить график.

$$\text{I. } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

$$\text{II. } y = \frac{x}{x^2 - 9}$$

$$\text{III. } y = x^2 - \frac{8}{x}$$

$$\text{IV. } y = \frac{x^3 + 3}{x^2}$$

$$\text{V. } y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

Практическое занятие № 9. Дифференцирование сложной функции

Цель работы: научиться вычислять производные сложных функций

Краткая теория:

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется отношение приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, если этот предел существует, и обозначается $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Производную функции $y = f(x)$, $x \in (a; b)$ в точке x обозначают $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{df}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$, причём все эти обозначения равноправны. Операция нахождения

производной называется **дифференцированием функции**. Функция, имеющая производную в точке x_0 , называется **дифференцируемой в этой точке**.

Функция, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется **дифференцируемой на этом интервале**; при этом производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию на $(a; b)$.

Таблица производных элементарных функций

1. $C' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$8. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$10. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$11. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$12.. (e^x)' = e^x$$

$$13. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$14. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Правила дифференцирования

На практике применяют следующие правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x,$$

$$2. (uv)'_x = u'_x v + v'_x u, \quad (Cu)'_x = Cu'_x;$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x v - v'_x u}{v^2},$$

где u и v обозначают дифференцируемые функции переменной x , C - константа.

Дифференцирование сложной функции

Теорема. Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$. Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 , а функция $y = g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке x_0 имеет производную, которая находится по формуле

$$y'_x(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = (x^3 - 5x + 7)^9$.

Решение:

$$f'(x) = ((x^3 - 5x + 7)^9)' = \left| \text{обозначим за } z = x^3 - 5x + 7 \right| = (z^9)'_z \cdot z'_x = 9z^8 \cdot (3x^2 - 5) = 9(x^3 - 5x + 7)^8 \cdot (3x^2 - 5).$$

Пример 2. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{(5 + 3x - 2x^2)^2}$.

Решение:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{(5 + 3x - 2x^2)^2})' = \left| t = 5 + 3x - 2x^2 \right| = (t^{\frac{2}{3}})'_t \cdot t'_x = \frac{2}{3} \cdot t^{-\frac{1}{3}} \cdot (5 + 3x - 2x^2)'_x = \\ = \frac{2(3 - 4x)}{3 \sqrt[3]{5 + 3x - 2x^2}}.$$

Пример 3. Вычислить $f'(x)$, если 1) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$;

2) $f(x) = (\ln(\arccos x^2))$;

Решение:

$$1) f'(x) = (\sqrt{\arcsin x})' = \left| t = \arcsin x \right| = (\sqrt{t})'_t \cdot t'_x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}};$$

2) данная функция является суперпозицией трех функций, поэтому имеем

$$f'(x) = (\ln(\arccos(x^2)))' = \left| \text{положим } t = \arccos x^2 \right| = (\ln t)'_t \cdot (\arccos x^2)'_x = \\ = \left| \text{положим } z = x^2 \right| = \frac{1}{t} \cdot (\arccos z)'_z \cdot z'_x = \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right) \cdot 2x = -\frac{2x}{\arccos x^2 \sqrt{1-x^4}}$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить производные следующих функций:

$$1) y = (7x^2 - 5x + 9)^6; \quad 2) y = \sqrt{5 \sin x - 8 \cos x}; \quad 3) y = 2^{x^2 - 5x + 2};$$

$$4) y = \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad 5) y = \arcsin x^2 \quad 6) y = \arctg \sqrt{x};$$

2. Вычислить $f'(\sqrt{2})$, если $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$;

3. Вычислить $f'(2\sqrt{2})$, если $f(x) = \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Вариант 2

1. Вычислить производные следующих функций:

$$1) y = (2x^3 - 4x + 5)^4; \quad 2) y = \ln(2 \cos x - 9 \sin x); \quad 3) y = 7^{5 \lg x + 3};$$

$$4) y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \quad 5) y = (\arcsin x)^2; \quad 6) y = \sqrt{\arctg x};$$

2. Вычислить $f'(\frac{1}{3})$, если $f(x) = \arccos \sqrt{x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$.

Вариант 3

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = (4x^3 + 2x^2 + 1)^5$; 2) $y = \cos(1 - 7x + 4x^2)$; 3) $y = 3^{6 \sin x + \cos x}$

4) $y = \ln \frac{x}{5+x}$; 5) $y = \arccos \sqrt{x}$; 6) $y = \operatorname{arctg} x^3$;

2. Вычислить $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1}$.

Вариант 4

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = (2 + 3x - 8x^2)^7$; 2) $y = \ln \operatorname{ctg} x$; 3) $y = e^{6 \arcsin x - 2}$;

4) $y = \sqrt{\frac{x}{7+x}}$ 5) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 6) $y = 2 \arcsin x^3$;

2. Вычислить $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{\arccos x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{2})$, если $f(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 1}$.

Полное исследование функции. Построение графиков

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Полное исследование функции. Построение графиков»

Схема исследования функции и построения графика:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.

7. Построить график функции.

Задача. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f) = R$.

2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

Наклонных асимптот так же нет, так как $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x}{x} = \infty$.

3. Функция нечетная, т.к. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$.

Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

4. Точки пересечения графика с осью OX : $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm\sqrt{3} \end{cases}$;

Точки пересечения графика с осью OY : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$$

Функция возрастает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; функция убывает на $[-1; 1]$.

$x = -1$ - точка максимума, $x = 1$ - точка минимума.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	возраст.	2	убывает	-2	возраст.
		макс.		мин.	

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

$$f''(x) = 6x, f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

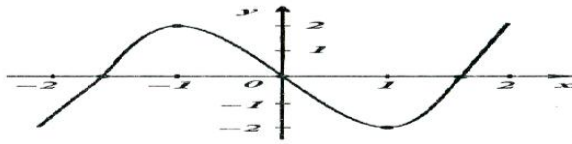
Функция вогнута на $[0; +\infty)$, выпукла на $(-\infty, 0]$.

$x = 0$ - точка перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	вогнута	0	выпукла
		перегиб	

7. Построим график функции:



3.Порядок выполнения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

Содержание работы

1.Найдите критические точки функции:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x$

a) $f(x) = 2 + 18x^2 - x^4$

б) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$

2.Исследуйте функцию на выпуклость:

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

3.Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

Практическое занятие № 10. Неопределенный интеграл

Цель: закрепление навыков нахождения неопределенного интеграла.

Теоретическая часть

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом можно записать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (8.3)$$

$f(x)$ — подынтегральная функция;

$f(x)dx$ — подынтегральное выражение;

\int — знак неопределенного интеграла;

x — переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого в отдельности, т.е.:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$$

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad |x| \neq a$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Основные методы вычисления неопределенного интеграла

Пусть требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x) dx$, причем непосредственно подобрать первообразную не представляется возможным, но известно, что она существует. В этом случае применяются различные методы интегрирования, благодаря которым исходный интеграл можно привести к интегралу табличного вида. Рассмотрим некоторые из этих методов.

1. *Метод непосредственного интегрирования.* Используя свойства неопределенного интеграла, а также выполняя элементарные математические

преобразования подынтегральной функции, исходный интеграл можно привести к неопределенному интегралу табличного вида.

Задание: Найти неопределенный интеграл:

I. Методом непосредственного интегрирования

1. $\int (4x^2 + 1)dx$

2. $\int \frac{x^3 + \sqrt{x} - x^4}{x^2} dx$

3. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$

4. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

5. $\int \frac{2 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

6. $\int (\sqrt{x} + 5)^2 dx$

7. $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить: $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$.

Решение:

$$1) \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5 \int x^4 dx - 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C;$$

Пример 2. Вычислить: $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x}$;

Решение:

$$\int \frac{(x+2)^3 dx}{x} = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} dx = \int (x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x}) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$$

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

1) $\int (2x^2 + 7x - 1)dx$; 2) $\int \frac{(2-3x)^2}{x^3} dv$ 3) $\int (6^x - \frac{4}{\sqrt{x}})dx$

4) $\int \left(3\sin x + \frac{4}{x^4} \right) dx$; 5) $\int \left(\frac{8}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$; 6) $\int \frac{dx}{121+x^2}$;

$$7) \int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2} dx;$$

$$8) \int \frac{\sin 2x + \sqrt[3]{x} \cos x}{x \cos x} dx;$$

$$9) \int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$10) \int \frac{x^2+7x+12}{x+3} dx$$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

$$1) \int (4x^4 - 8x^3 + \sqrt{x}) dx; \quad 2) \int \frac{(1-4x)^2}{x^4} dx; \quad 3) \int \left(10 \cos x - \frac{2}{x^3} \right) dx;$$

$$4) \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{12}{81+x^2} \right) dx; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}; \quad 6) \int \left(6^{2x} - \frac{4}{x} \right) dx$$

$$7) \int \frac{x^2-5x-24}{x+3} dx; \quad 8) \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x};$$

$$9) \int (2+x)x^2\sqrt[3]{x} dx; \quad 10) \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$$

Вариант 3

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

$$1) \int (-x^3 - 8x^2 + 4) dx; \quad 2) \int \frac{(4x+x^2)^2}{x^5} dx; \quad 3) \int (\sqrt[3]{x^2} - 5^x) dx$$

$$4) \int \left(\frac{4}{\sqrt{49-x^2}} + \frac{1}{2\sin^2 x} \right) dx; \quad 5) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx; \quad 6) \int \frac{dx}{25+16x^2};$$

$$7) \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx \quad 8) \int \frac{2+\sqrt{x^8-x^5}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$9) \int \frac{x^2-5x+6}{x-2} dx \quad 10) \int \frac{x^2+2}{1+x^2} dx$$

Вариант 4

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

$$1) \int (9x^5 + 3x^2 - 8) dx; \quad 2) \int \frac{(x-2x^2)^2}{x^2} dx; \quad 3) \int (2^{3x} - 9\sqrt{x} + 5) dx;$$

$$4) \int \left(\frac{8}{100+x^2} - \frac{1}{4\cos^2 x} \right) dx; \quad 5) \int \left(\frac{5}{x^4} + 4\cos x \right) dx; \quad 6) \int \frac{3dx}{\sqrt{4-49x^2}}.$$

$$7) \int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx \quad 8) \int \frac{2x\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$9) \int \frac{3+2x-x^2}{x} dx \quad 10) \int \frac{x^2-3x-10}{x-5} dx$$

Практическая работа №11. Вычисление неопределенных интегралов

методом подстановки и интегрирования по частям

Цель работы: научиться вычислять неопределённые интегралы, применяя метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Краткая теория:

Сущность интегрирования методом подстановки заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. Для нахождения $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x = \varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получаем $dx = \varphi'(u)du$.

Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du , имеем

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du \quad (1)$$

После того, как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u = \phi(x)$ он приводится к переменной x .

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$d(uv) = u'vdx + uv'dx$. Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства,

$$\int d(uv) = \int u'vdx = \int uv'dx, \quad \text{или} \quad \int d(uv) = \int vdu + \int u dv, \quad \text{но} \quad \int d(uv) = uv + C,$$

следовательно

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$

В правой части формулы (2) постоянную интегрирования C не пишут, т.к. она фактически присутствует в интеграле $\int v du$. Формула (2) называется **формулой интегрирования по частям**.

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv ; при этом dx обязательно входит в dv . В результате

получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int v du$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных двух интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv . Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако, для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

1. В интегралах вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$,

где $P(x)$ – многочлен относительно x , a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители за dv .

2. В интегралах вида $\int P(x)\ln|ax| dx$, $\int P(x)\arcsin ax dx$, $\int P(x)\arccos ax dx$, $\int P(x)\arctg ax dx$, $\int P(x)\text{arcctg} ax dx$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители за u .

3. В интегралах вида $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$, где a и b числа, за u можно принять любую из функций e^{ax} или $\sin bx$ (или $\cos bx$).

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $\int (1+x)^5 dx$;

Решение: положим $1+x = z$. Продифференцируем это неравенство: $d(1+x) = dz$ или $dx = dz$. Заменив в интеграле переменную интегрирования,

получим: $\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (1+x)^6 + C$.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2}$

Решение: пусть $1-e^x = z$, тогда $d(1-e^x) = dz$; $-e^x dx = dz$; $\Rightarrow e^x dx = -dz$; С учетом полученного имеем

$$\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2} = -2 \int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C;$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{\ddot{o}^2 + 1}{\ddot{o} + 2} dx$

Решение: $x + 2 = t$; $\Rightarrow x = t - 2$; $\Rightarrow dx = d(t - 2) = dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x + 2} dx &= \int \frac{(t - 2)^2 + 1}{t} dt = \int \frac{t^2 - 4t + 5}{t} dt = \int \left(t - 4 + \frac{5}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 5 \ln|t| + C = \\ &= \frac{(x + 2)^2}{2} - 4(x + 2) + 5 \ln|x + 2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 + 5 \ln|x + 2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \ln|x + 2| + C_1,\end{aligned}$$

где $C_1 = C - 6$;

Пример 4. Вычислить $\int x \cdot \sqrt{x - 3} dx$

Решение: сделав замену $\sqrt{x - 3} = t$, получим $x = t^2 + 3$, $dx = 2t dt$. Поэтому

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sqrt{x - 3} dx &= \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{(x - 3)^5} + 2 \sqrt{(x - 3)^3} + C;\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить $\int \sin 8x \cos 2x dx$

Решение: этот интеграл решается с помощью формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\text{Поэтому, имеем } \int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) dx = -\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{12} \cos 6x + C;$$

Пример 6. Вычислить $\int x \sin x dx$;

Решение: положим $u = x$, $dv = \sin x dx$; тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x dx$, т.е. $v = -\cos x$.

Используя формулу (2), получим

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int x \ln x dx$;

Решение: положим $u = \ln x$, $dv = x dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

$$\text{Используя формулу (2), получим: } \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Методом подстановки вычислить:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int (7+3x)^5 dx ; & \text{б)} \int 3 \sin 5x dx ; & \text{в)} \int \frac{5dx}{1+9x^2} ; & \text{г)} \int \sqrt[3]{(2-5x)^2} dx ; \\ \text{д)} \int \sqrt{e^x-1} \cdot e^x dx & \text{е)} \int \frac{3dx}{1+2x} ; & \text{ж)} \int \frac{\ln^2 x dx}{x} ; & \text{з)} \int \sin 5x \cos 3x dx ; \end{array}$$

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

$$\text{a)} \int (1-x) \sin x dx \qquad \text{б)} \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

Вариант 2

1. Методом подстановки вычислить:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int (5-4x)^6 dx ; & \text{б)} \int 7 \cos 6x dx ; & \text{в)} \int \frac{4dx}{3-4x} ; & \text{г)} \int \frac{7dx}{\sqrt{1-16x^2}} ; \\ \text{д)} \int \sqrt[3]{x^2-3} \cdot x dx ; & \text{е)} \int \frac{e^x dx}{e^x+1} ; & \text{ж)} \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x} ; & \text{з)} \int \sin 2x \sin 6x dx ; \end{array}$$

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

$$\text{a)} \int x \cos x dx ; \qquad \text{б)} \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Вариант 3

1. Методом подстановки вычислить:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int (2-7x)^4 dx ; & \text{б)} \int 6 \cos 2x dx ; & \text{в)} \int \frac{5dx}{3-4x} ; & \text{г)} \int \frac{2dx}{1+16x^2} ; \\ \text{д)} \int \sqrt[4]{(7x+4)^3} dx ; & \text{е)} \int e^x \cos(e^x) dx ; & \text{ж)} \int \frac{\sin x dx}{5-2\cos x} ; & \text{з)} \int \cos 4x \cos 5x dx ; \end{array}$$

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

$$\text{a)} \int x e^x dx ; \qquad \text{б)} \int \arcsin x dx ;$$

Практическое занятие № 12. Вычисление определенных интегралов

методом подстановки и интегрирования по частям

Цель работы: научиться вычислять определённые интегралы методом подстановки и методом интегрирования по частям.

Краткая теория: Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется *определённым интегралом от a до b от функции $f(x)$* :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Числа a и b называются *пределами интегрирования*, a – *нижним*, b – *верхним*.

Отрезок $[a; b]$ называется *отрезком интегрирования*. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Формула (1) называется *формулой Ньютона - Лейбница*.

Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. Если функция $f(x)$ неотрицательная на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0;$$

5. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, где $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на

отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

7. (Теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной u . При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1 , которые находятся из исходной подстановки: $a_1 = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(b)$.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Решение: сделаем подстановку $5x-1 = t$. Тогда $d(5x-1) = dt \Rightarrow 5dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$.

Новые пределы интегрирования: $t_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$ $t = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_4^9 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{5} \int_4^9 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{5} t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{5} (9^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

Решение: Положим $x = 2 \sin t$. Тогда $dx = 2 \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$, если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \sqrt{4-4\sin^2 t} 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) dt = 2(t - \frac{1}{4} \sin 4t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(4 \cdot \frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$

Пример 4. Вычислить $\int_e^4 x \ln x dx$

Решение: положим $u = \ln x$, $dv = x dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int_e^4 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^4 - \frac{1}{2} \int_e^4 x^2 \frac{dx}{x} = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_e^4 = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} =$$

$$= 8 \ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}$$

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

$$1) \int_{-2}^1 (5-2x)^2 dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3-\cos x} dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}} dx; ;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx; \quad 5) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3+4x^2}; \quad 6) \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$7) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan^3 x dx}{\cos^2 x} \quad 8) \int_0^1 \frac{e^u du}{5+e^u}$$

2. Вычислить методом интегрирования по частям:

$$1) \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx;$$

Вариант 2

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

$$1) \int_2^3 (2x-1)^2 dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3e^{x^2} x dx;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx; \quad 5) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5} dx; \quad 6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$$

$$7) \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{2x^3 + 3}$$

$$8) \int_0^1 \frac{z dz}{z^4 + 1}$$

2. Вычислить методом интегрирования по частям:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$2) \int_0^1 \arccos x dx;$$

Вариант 3

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

$$1) \int_4^5 (4-x)^3 dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}; \quad 3) \int_0^{\frac{n}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx; \quad 5) \int_0^1 e^{x^2} x dx; \quad 6) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - u\right) du$$

$$7) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$8) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z dz}{\sin^3 z}$$

2. Вычислить методом интегрирования по частям:

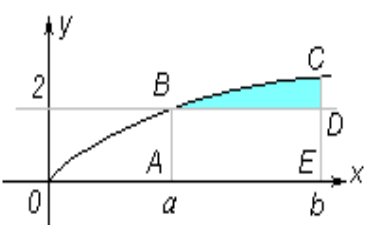
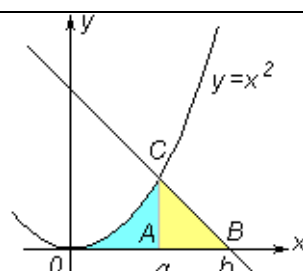
$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx;$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx;$$

Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью определённого интеграла

Цель работы:

применить умения по нахождению геометрического смысла интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения

№ шага	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение плана	
		а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$	б) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		

2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} =$ $= \int_a^b \sqrt{x} dx - \int_a^b 2 dx$	$S = S_{OAC} + S_{ACB} =$ $= \int_0^a x^2 dx + \int_a^b (2 - x) dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4,$ $a = x_A = 4, b = x_B = 9$	$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2; 1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле (*)	$S = \int_4^9 \sqrt{x} dx - \int_4^9 2 dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big _4^9 -$ $- 2x \Big _4^9 = \frac{2}{3} (27 - 8) - 2(9 - 4) =$ $= \frac{8}{3},$ $S = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$	$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^2 = \frac{1}{3} +$ $+ \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6},$ $S = \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$

Практическое занятие № 13. Дифференциальные уравнения первого

порядка с разделёнными переменными

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению дифференциальных уравнений первого порядка с разделёнными переменными.

Основной теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы. Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – данные функции, называется *уравнением с разделёнными переменными*. (2).

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Каждая часть уравнения с разделёнными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Например, $x dx + y dy = 0$, $2y dy = 3x^2 dx$, $ds = (3t^2 - 2)dt$, $2y dy = (1 - 3x^2)dx$, $e^x dx = y dy$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ – уравнения с разделёнными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Решение типовых заданий:

Пример 1: Решить уравнение $x dx + y dy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим $\int x dx + \int y dy = C$;

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $x^2 + y^2 = 2C$. Так как C произвольно, то можно обозначить $2C$ через C^2 , учитывая, что левая часть последнего равенства положительна. Тогда это равенство примет вид $x^2 + y^2 = C^2$. Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения. С геометрической точки зрения мы получили семейство (совокупность) концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом,

равным C (сравните полученное уравнение с известным уравнением окружности вида $x^2 + y^2 = R^2$).

Пример 2: Решить уравнение $2ydy = 3x^2 dx$.

Решение. Здесь $\varphi(x)=2y$, $f(x)=3x^2$. Интегрируя обе части уравнения, имеем $\int 2ydy = \int 3x^2 dx$, $y^2 = x^3 + C$. Получили общее решение дифференциального уравнения. Это решение можно записать в явной форме: $y = \sqrt{x^3 + C}$.

Пример 3: Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Решение. Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$.

Итак, получаем ответ: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

Пример 4: Решить уравнение $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}; \ln(y+1) = \ln(x-1) + C$$

Произвольную постоянную C можно обозначить через $\ln C$; тогда $\ln(y+1) = \ln(x-1) + \ln C$. Представив в правой части равенства сумму логарифмов в виде логарифма произведения, получим $\ln(y+1) = \ln(x-1)C$, откуда $(y+1) = C(x-1)$. Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными*. (3)

Например, $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$, $1 + y - xy' = 0$, $2dx - 3dy + xdx + y^2dy = 0$, $1 + y' + y + xy' = 0$ являются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

Уравнение (3) можно привести к виду (2), если разделить все его члены на произведение $\varphi(x)\Phi(y)$.

Пример 5: Решить уравнение $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$, получим $\frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0$. Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$\int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{y dy}{y^2-1} = C_1$; $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(y^2-1) = \frac{1}{2} \ln C$. Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2} \ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$). Сокращая все члены равенства на $1/2$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1) = \ln C$, откуда $(x^2+1)(y-1) = C$. Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 6: Найти все решения дифференциального уравнения $y' = xy^2$.

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y \neq 0$. Тогда $\frac{dy}{y^2} = x dx$ и, следовательно $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$. Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y = -\frac{2}{x^2 + C}$, где C - произвольная постоянная. Заметим, что решение не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C .

Пример 7: Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0$.

Интегрируя это уравнение, находим

$\ln|y| - \ln(1+x^2) = \ln|C|$ или $\ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right) = \ln|C|$ откуда получаем общее решение $y = C(1+x^2)$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy .
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

Пример 8: Найти общее решение уравнения $1 + y' + y + xy' = 0$.

Решение. 1. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$: $1 + \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$

2. Умножим все члены равенства на dx : $dx + dy + ydx + xdy = 0$. Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx , и запишем полученные выражения в разных частях равенства: $(1+x)dy = -(1+y)dx$.

3. Разделим обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$: $\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$

4. Интегрируя обе части равенства, имеем

$$\int \frac{dy}{1+y} = - \int \frac{dx}{1+x}; \ln|1+y| = \ln \left| \frac{C}{1+x} \right|; 1+y = \frac{C}{1+x}; y = \frac{C}{1+x} - 1.$$

Пример 9: Найти частное решение уравнения $2ydx = (1+x)dy$, если $y=4$ при $x=1$.

Решение. Разделяем переменные: $\frac{2dx}{1+x} = \frac{dy}{y}$. Интегрируя, получим $\int \frac{2dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y}$;

$2\ln(1+x) = \ln y + C$ или $2\ln(1+x) = \ln y + \ln C$. $(1+x)^2 = C \cdot y$ - общий интеграл данного дифференциального уравнения. Найдём теперь частное решение данного уравнения по заданным начальным условиям. Полагая в общем решении $x=1, y=4$ имеем $2^2 = 4C$, $C=1$.

Следовательно $y = (1+x)^2$.

Пример 10: Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 2+y$, если $y=3$ при $x=0$.

Решение. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$, а затем умножим на dx , получим $dy = 2dx + ydx$,

т.е. $dy = (2+y)dx$. Разделим обе части уравнения на $2+y$ и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{2+y} = dx; \int \frac{dy}{2+y} = \int dx; \ln(2+y) = x + \ln C. \text{ Выразим } x \text{ через логарифм: } x = \ln e^x.$$

Тогда получим: $\ln(2+y) = \ln e^x + \ln C$. Потенцируя, получим: $2+y = Ce^x, y = Ce^x - 2$.

2. Это общее решение данного уравнения. Чтобы найти частное решение, подставим в общее решение $x=0$ и $y=3$.

Получим: $3 = C \cdot e^0 - 2; e^0 = 1; C=5$. Итак, $y = 5e^x - 2$.

Задания: Решить уравнения:

1) $xdy + 2ydx = 0$.

2) $x^2dy = y^2dx$.

- 3) $y' = x$.
- 4) $y' + 2x^2 y' + 2xy - 2x = 0$.
- 5) Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx = x y dy$, если $y = 1$ при $x = 2$.
- 6) Найти частное решение уравнения $(1+x^3)dy = 3x^2 y dx$, если $y = 2$ при $x = 0$.
- 7) Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)dy - 2xy dx = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y = 4$ при $x = -1$.

Практическое занятие № 14-15. Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению дифференциальных уравнений второго порядка.

Основной теоретический материал

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением*.

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'' , имеет вид $y''=f(x,y,y')$. Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида $y''= f(x)$. Такое уравнение решается двукратным интегрированием: $dy'=f(x)dx$, откуда $y'=\int f(x)dx$. Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от $f(x)$, которую обозначим через $F(x)$.

Таким образом $y'=F(x)+C_1$; $\frac{dy}{dx}=F(x)+C_1$; $dy=(F(x)+C_1)dx$.

Интегрируем ещё раз $y=\int(F(x)+C_1)dx=\int(F(x)+C_1]dx$ или $y=\Phi(x)+C_1x+C_2$.

Итак, получили общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2 .

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y''+py'+qy=f(x)$, где p и q —постоянные величины, а $f(x)$ —непрерывная функция x . Если правая часть уравнения равна нулю, т.е. $y''+py'+qy=0$, то оно называется *однородным уравнением*.

Для практического использования *алгоритм решения* таких уравнений удобно оформить в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант $D = p^2 - 4q$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$	$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Решение типовых заданий

Пример 1: Найти общее решение уравнения $y''=4x$.

Решение: $\frac{dy'}{dx}=4x$; $dy'=4x dx$; $y'=4\int x dx=2x^2 + C_1$;

$$\frac{dy}{dx}=2x^2 + C_1; dy=(2x^2 + C_1) dx;$$

$$y=\int(2x^2 + C_1) dx=2\int x^2 dx+C_1\int dx=\frac{2x^3}{3}+ C_1x+C_2.$$

Пример 2: Найти общее решение уравнения $y''= \sin 2x$.

Решение: Умножим обе части уравнения на dx и затем проинтегрируем:

$$dy'=\sin 2x dx; \int dy'=\int \sin 2x dx; y'=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1. \text{ Обе части последнего}$$

уравнения умножим на dx и проинтегрируем: $dy=-\frac{1}{2}\cos 2x dx+C_1 dx$;

$$\int dy=-\frac{1}{2}\int \cos 2x dx+C_1\int dx+C_2.$$

Итак, $y=dy=-\frac{1}{4}\sin 2x dx+C_1x+C_2$ - общее решение уравнения.

Пример 3: Решить уравнение $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$.

$$D = p^2 - 4q = 2^2 - 4(-8) = 4 + 32 = 36 > 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1 = -4$, $k_2 = 2$. Находим частные решения данного дифференциального уравнения: $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{2x}$.

Общее решение данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$.

Задания: Найти общее решение дифференциального уравнения:

1 вариант

$$y''=0$$

$$y''=x$$

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$y'' - 2y' - 8y = 0$$

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$y'' + 4y = 0.$$

2 вариант

$$y''=5$$

$$y''=x^3$$

$$y'' - 6y + 9 = 0$$

$$y'' - 8y + 16 = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y'' + 6y = 0$$

Практическое занятие № 16. Основные теоремы теории вероятностей и математической статистики

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению вероятности.

Случайные явления. Алгебра событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайного эксперимента. Так называют эксперимент, исходы которого невозможно предсказать. Предполагается, что результатом случайного эксперимента может быть только один какой-то исход. Чтобы подчеркнуть это предположение, исходы случайного эксперимента называют элементарными. Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента будем обозначать буквой Ω . Любое событие, связанное со случайным экспериментом, называется случайным событием. Случайному событию можно сопоставить множество элементарных исходов A , которое является подмножеством множества Ω . Элементарный исход $\omega \in A$ тогда и только тогда, когда случайное событие, которому сопоставлено множество A , наступает, если в случайном эксперименте наступает исход ω .

Суммой случайных событий A и B называется случайное событие, обозначаемое $A + B$, которое наступает, если наступает хотя бы одно из этих событий.

Произведением случайных событий A и B называется случайное событие, обозначаемое $A \cdot B$, которое наступает, если наступают оба эти события.

Противоположным событием случайному событию A называется случайное событие, обозначаемое \bar{A} , которое наступает, если событие A не наступает.

Достоверным событием называется событие, которое происходит при каждом проведении случайного эксперимента и обозначается Ω . Противоположное событие к достоверному называется невозможным и обозначается \emptyset .

Случайные события A и B называются несовместными, если они не наступают одновременно, т.е. $A \cdot B = \emptyset$.

Каждому случайному событию A можно сопоставить по некоторому правилу число, которое называется вероятностью этого события и обозначается $P(A)$. Вероятность, как функция, определённая на множестве всех случайных событий, должна удовлетворять трём аксиомам:

A1) вероятность любого случайного события неотрицательна;

A2) вероятность достоверного события равна единице;

A3) вероятность суммы конечного или счётного числа попарно несовместных случайных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Запишем аксиому A3 для двух случайных событий: если случайные события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Используя аксиомы, можно доказать следующие свойства вероятности:

- 1) $P(\emptyset) = 0$;
- 2) $P(\overline{A}) + P(A) = 1$;
- 3) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 4) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Классическое определение вероятности

Если случайный эксперимент имеет конечное число равновозможных исходов, то вероятность случайного события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(A)$ – число элементарных исходов случайного эксперимента, при которых случайное событие A наступает, $m(\Omega)$ – число всех элементарных исходов случайного эксперимента.

Формулы комбинаторики

При подсчёте числа исходов полезны формулы комбинаторики. Пусть из n элементов выбирают k элементов. Сколькими способами это можно сделать? Ответ зависит от двух условий:

1) возвращаются выбираемые элементы в исходное множество или не возвращаются;

2) учитывается порядок выбираемых элементов или не учитывается.

Если выбираемые элементы не возвращаются в исходное множество и учитывается порядок выбора элементов (говорят, что выборка без возвращения и упорядоченная), то число способов выбора k элементов из n элементов называют числом размещений из n элементов по k и обозначают A_n^k . Это число вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Если же выборка без возвращения и неупорядоченная, то число способов выбора k элементов из n элементов называют числом сочетаний из n элементов по k и обозначают C_n^k . Это число вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k},$$

где $1 \leq k \leq n$, при $k = 0$ число $C_n^0 = 1$.

Имеется свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример. В ящике 10 деталей, из которых 6 окрашенные. Наугад взяли 5 деталей. Найти вероятность того, что среди взятых деталей две детали окрашенные.

Решение. Случайный эксперимент состоит в том, что наугад из 10 деталей берут 5 деталей. Слово «наугад» означает, что все исходы этого случайного эксперимента равновозможны, и поскольку число их конечно, то для нахождения вероятности случайного события $A = \{\text{среди пяти взятых деталей две детали окрашенные}\}$ используем классическое определение вероятности.

Число $m(\Omega)$ всех элементарных исходов этого случайного эксперимента равно числу способов выбора 5 деталей из 10. Поскольку выбор без возвращения и неупорядоченный, то

$$m(\Omega) = C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9 \cdot 4 \cdot 7.$$

Случайное событие A наступит, если будут взяты две окрашенные и три неокрашенные детали. Число способов выбора двух окрашенных деталей из 6 окрашенных равно C_6^2 , а число способов выбора трёх неокрашенных деталей из 4 неокрашенных равно C_4^3 . Способы выбора окрашенных и неокрашенных деталей комбинируются друг с другом и, значит, число $m(A) = C_6^2 \cdot C_4^3$.

Учитывая, что $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, а $C_4^3 = C_4^1 = 4$, получим

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{15 \cdot 4}{9 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{21}.$$

Ответ: $\frac{5}{21}$.

Геометрическое определение вероятности

Если случайный эксперимент имеет бесконечное число равновозможных исходов, то вероятность случайного события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(A)$ – мера множества элементарных исходов, при которых случайное событие A наступает, $m(\Omega)$ – мера множества всех элементарных исходов случайного эксперимента.

В качестве меры множества на плоскости возьмём площадь этого множества, в пространстве – объём.

Пример. В прямоугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$ наугад выбирается точка. Найти вероятность того, что наименьшая из координат выбранной точки не превосходит 1.

Решение. Случайный эксперимент состоит в том, что наугад выбирается точка в прямоугольнике $OABC$. Поскольку точка выбирается наугад, то все исходы

такого случайного эксперимента равновозможны. Для нахождения вероятности случайного события

$$H = \{(x; y) \in OABC: \min \{x; y\} \leq 1\}$$

используем геометрическое определение, в качестве меры множества взяв площадь этого множества (рис. 1).

$$m(\Omega) = SOABC = 8,$$

$$\min \{x; y\} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ или } y \leq 1,$$

$$m(H) = 5.$$

Следовательно,
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{5}{8}.$$

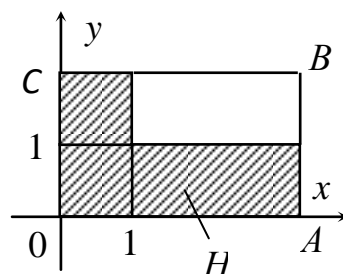


Рис. 1

Ответ: $\frac{5}{8}.$

Условная вероятность. Независимость событий

Если $P(A) > 0$, то условной вероятностью случайного события В при условии, что случайное событие А наступило, называется отношение $\frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$ и обозначается $P(B|A)$.

Из формулы $P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$ получается формула

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

которая называется формулой умножения вероятностей. Формулу умножения вероятностей можно записать для большого числа случайных событий, например, для трёх:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A \cdot B) P(C|A \cdot B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cdot B).$$

Пример. В ящике 8 окрашенных деталей и две неокрашенные. Найти вероятность того, что три наугад взятые детали будут окрашенными.

Решение. Рассмотрим случайные события:

$A = \{\text{три взятые детали окрашенные}\},$

$A_1 = \{\text{первая взятая деталь окрашенная}\},$

$A_2 = \{\text{вторая взятая деталь окрашенная}\},$

$A_3 = \{\text{третья взятая деталь окрашенная}\}.$

Поскольку $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, то $P(A)$ можно вычислить, используя формулу умножения вероятностей:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cdot A_2).$$

По условию детали берут наугад, поэтому для вычисления вероятностей в правой части формулы можно использовать классическое определение

вероятности: $P(A_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; после того, как взяли одну окрашенную деталь, в ящике осталось 9 деталей, из которых 7 деталей окрашенные. Значит,

$$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{9} \text{ и, аналогично рассуждая, получим, что } P(A_3 | A_2) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{15}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{15}.$$

Случайные события A и B называются независимыми, если

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B).$$

Случайные события A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми, если для любого набора событий A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $2 \leq k \leq n$, вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей этих событий. Из этого определения следует, что вероятность произведения любого числа независимых случайных событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример. Стрелки стреляют по одному разу в мишень. Вероятности попадания в мишень у первого, второго и третьего стрелка соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что будет только два попадания в мишень.

Решение. Рассмотрим случайные события:

$A = \{\text{только два попадания в мишень}\},$

$A_i = \{i\text{-ый стрелок попал в мишень}\},$

$B_i = \{\text{промахнулся только } i\text{-ый стрелок}\}, i = 1, 2, 3.$

$$A = B_1 + B_2 + B_3, \quad B_1 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3, \quad B_2 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3, \quad B_3 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}.$$

Случайные события $\overline{A_1}, A_2, A_3$ являются независимыми, так как связаны с независимыми случайными экспериментами, поэтому $P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$. Аналогично получим, что $P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)$ и $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})$.

Поскольку сумма вероятностей противоположных случайных событий равна 1, то $P(\overline{A_1}) = 0,3$; $P(\overline{A_2}) = 0,2$ и $P(\overline{A_3}) = 0,1$. Следовательно,

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,378.$$

Ответ: 0,378.

Формула полной вероятности и формулы Байеса

Пусть наступление случайного события A влечёт наступление одного из попарно несовместных случайных событий H_1, H_2, \dots, H_n , и $P(H_i) > 0, i = 1, \dots, n$, тогда справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n),$$

а также формулы Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

в которых $P(A)$ вычисляется по формуле полной вероятности.

Пример. В ящике пять деталей, изготовленных на заводе №1, и четыре детали, изготовленных на заводе №2. Каждая деталь завода №1 не имеет дефектов с вероятностью 0,8, а каждая деталь завода №2 – с вероятностью 0,9. Наугад взятая деталь не имеет дефектов. Найти вероятность того, что взятая деталь изготовлена на заводе №1.

Решение. Рассмотрим случайные события

$A = \{\text{взятая деталь не имеет дефектов}\},$

$H_1 = \{\text{взятая деталь изготовлена на заводе №1}\},$

$H_2 = \{\text{взятая деталь изготовлена на заводе №2}\}.$

Нужно найти вероятность того, что взятая деталь изготовлена на заводе №1 при условии, что она не имеет дефектов, т.е. найти условную вероятность $P(H_1|A)$.

Случайные события H_1 и H_2 несовместны и образуют полную группу, т.е. в случайном эксперименте (наугад берут деталь) всегда наступает одно из этих событий. Значит, условную вероятность $P(H_1|A)$ можно найти по формуле Байеса, а вероятность случайного события A по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Используя классическое определение вероятности, найдем

$$P(H_1) = \frac{5}{9}, \quad P(H_2) = \frac{4}{9}.$$

Из условия задачи $P(A|H_1) = 0,8$ и $P(A|H_2) = 0,9$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot 0,8 + \frac{4}{9} \cdot 0,9 = \frac{38}{45}, \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot 0,8}{\frac{38}{45}} = \frac{10}{19}.$$

Ответ: $\frac{10}{19}$.

Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин
 Случайная величина X – это функция, определенная на множестве элементарных исходов Ω случайного эксперимента, и принимающая значения во множестве действительных чисел.

$$X = X(\omega), \omega \in \Omega.$$

Если случайная величина, имеет конечное или счетное число значений, то она называется дискретной. Чтобы задать закон распределения дискретной случайной величины X , нужно указать все значения x_i этой случайной величины и вероятности $p_i = P(X = x_i)$ наступления случайных событий $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Если все эти вероятности заданы правильно, то их сумма равна 1.

Пусть случайная величина X имеет конечное число значений x_1, x_2, \dots, x_n и $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогда математическим ожиданием случайной величины X называется число, обозначаемое $M(X)$ и определяемое формулой

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание случайной величины X определяет центр, около которого расположены значения этой величины. Разброс значений относительно этого центра характеризуется другой числовой характеристикой, которая называется дисперсией и определяется формулой

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Для вычисления дисперсии можно использовать формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

где число $M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$ называется вторым моментом случайной величины X . Значит, дисперсия случайной величины равна разности второго момента и квадрата математического ожидания этой случайной величины.

Пример. На одной грани кубика написано число 3, на двух – число 2 и на трех – число 1. Кубик бросили три раза. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших чисел.

Решение. Пусть случайная величина X_i – это число, выпавшее при i -ом бросании кубика, $i = 1, 2, 3$, а случайная величина X – это сумма выпавших чисел. Тогда $X = X_1 + X_2 + X_3$. Найдем закон распределения случайной величины X_i . Случайная величина X_i может принимать значения 1, 2 и 3. Используя классическое определение вероятности, найдем вероятности

$$p_1 = P(X_i = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad p_2 = P(X_i = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p_3 = P(X_i = 3) = \frac{1}{6}$$

Следовательно,

$$M(X_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3},$$

$$M(X_i^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3},$$

$$D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин, поэтому

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5.$$

Случайные величины X_1, X_2, X_3 связаны с независимыми экспериментами, поэтому эти случайные величины являются независимыми, а дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин. Используя это свойство дисперсии, получим, что

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $M(X) = 5, \quad D(X) = \frac{5}{3}.$

Функцией распределения случайной величины X называется функция

$y = F(x)$ такая, что $F(x) = P(X < x)$ для всех $x \in R$.

Случайная величина X называется абсолютно непрерывной, если ее функция распределения $y = F(x)$ дифференцируема во всех точках за исключением, быть может, конечного числа точек, при этом функция $f(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения случайной величины X .

Пусть $y = f(x)$ – плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины X , тогда

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

$$2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{– функция распределения случайной величины } X;$$

$$3) M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{– математическое ожидание случайной величины } X \text{ при условии, что несобственный интеграл сходится;}$$

$$4) M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \quad \text{– второй момент случайной величины } X \text{ при условии, что несобственный интеграл сходится;}$$

$$5) D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad \text{– дисперсия случайной величины } X;$$

любое решение уравнения $F(x) = \frac{1}{2}$, где $y = F(x)$ – функция распределения случайной величины X , является медианой случайной величины X и обозначается $Me(X)$.

Пример. Дана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & , \quad x \in (-1; 0), \\ c & , \quad x \in (0; c), \\ 0 & , \quad x < -1 \text{ или } x > c \end{cases}$$

случайной величины X . Найти неизвестный параметр c , а также функцию распределения, медиану, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение. Найдем неизвестный параметр c из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{4}dx + \int_0^c cdx = \frac{3}{4}x \Big|_{-1}^0 + cx \Big|_0^c = \frac{3}{4} + c^2 \quad ; \quad \frac{3}{4} + c^2 = 1; \quad c = \pm \frac{1}{2}.$$

Поскольку плотность распределения должна быть неотрицательной, то $c = \frac{1}{2}$.

Найдем функцию распределения. Для этого рассмотрим несколько случаев.

$$1) \quad x \leq -1; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0;$$

$$2) \quad -1 \leq x \leq 0; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^x \frac{3}{4}dt = \frac{3}{4}t \Big|_{-1}^x = \frac{3}{4}(x+1);$$

$$3) \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^0 \frac{3}{4}dt + \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{3}{4}t \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}t \Big|_0^x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x;$$

$$4) \quad x \geq \frac{1}{2}; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{3}{4}dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dt = \frac{3}{4}t \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{4}(2x+3), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдем медиану. Если $x \leq -1$ или $x \geq \frac{1}{2}$, то уравнение $F(x) = \frac{1}{2}$ решений не

имеет. Пусть $-1 \leq x \leq 0$, тогда $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)$,

$$\frac{3}{4}(x+1)=\frac{1}{2} \quad ; \quad x=-\frac{1}{3} \in [-1; 0] \quad .$$

Следовательно, $Me(X)=-\frac{1}{3}.$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^0 x \cdot \frac{3}{4} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{3}{8} x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} = -\frac{5}{16} \quad .$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 \cdot \frac{3}{4} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} x^3 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48} \quad .$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{13}{48}-\left(\frac{5}{16}\right)^2=\frac{133}{768}\approx 0,173 \quad .$$

Ответ: $c=\frac{1}{2}; \quad Me(X)=-\frac{1}{3}, \quad M(X)=-\frac{5}{16}, \quad D(X)\approx 0,173,$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{4}(2x+3), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $p \in (0; 1)$ и $n \in N$, если ее значения $0, 1, 2, \dots, n$ и вероятность $P(X=k)=P_n(k)$ вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } q=1-p \quad .$$

Случайную величину X , имеющую биномиальное распределение с параметрами p и n , можно рассматривать как число наступлений случайного события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых случайное событие A наступает с вероятностью p и не наступает с вероятностью $q=1-p$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами p и n , где $0 < p < 1$, то при большом числе испытаний n и малой вероятности p для вычисления вероятности $P(X = k)$ применяется формула Пуассона

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Абсолютная погрешность формулы Пуассона не превосходит λp . Если это число не является малым, то для вычисления вероятности $P(X = k)$ нужно использовать локальную теорему Муавра – Лапласа, согласно которой

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность распределения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа дает формулу для приближенного вычисления вероятности $P(k_1 \leq x < k_2)$:

$$P(k_1 \leq x < k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Заметим, что функция Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ для любого x .

Функция Лапласа табулирована. Ее значения можно найти в таблице, приведенной в соответствующей литературе.

Пример. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий:

а) 90 изделий,

б) не более 95 изделий

окажутся изделиями первого сорта, если каждое проверяемое изделие является первосортным с вероятностью 0,9.

Решение. Пусть X – число изделий первого сорта из 100 проверенных изделий. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $p = 0,9$ и $n = 100$.

а) Для нахождения вероятности $P(X = 90)$ используем локальную теорему Муавра-Лапласа

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $k = 90$, $n = 100$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$.

Следовательно, $n \cdot p = 90$, $\sqrt{npq} = 3$ и $P(X = 90) \approx \frac{1}{3} f(0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,133$.

б) Для нахождения вероятности $P(X \leq 95)$ используем интегральную теорему Муавра-Лапласа.

$$P(X \leq 95) = P(0 \leq X < 96) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{0 - 90}{3} = -30$, $x_2 = \frac{96 - 90}{3} = 2$, $\Phi(-30) = -\Phi(30) \approx 0$, $\Phi(2) \approx 0,4772$.

Следовательно, $P(X \leq 95) \approx 0,4772$.

Ответ: а) 0,133; б) 0,4772

Вопросы для текущего контроля по учебной дисциплине

Линейная алгебра

Матрицы и определители

1. Что называется матрицей? Как установить размеры матрицы?
2. Назовите линейные операции над матрицами. Как они производятся?
3. Какие матрицы можно перемножать? Как это делается?
4. Что называется определителем? Как вычисляются определители второго и третьего порядков?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением для произвольного элемента a_{ij} определителя?

Системы линейных уравнений

1. Что называется решение СЛАУ?
2. Какие случаи могут представиться при решении СЛАУ?
3. Какие СЛАУ называются совместными, несовместными?
4. Напишите формулу Крамера. В каком случае они применимы?
5. При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
6. Что можно сказать о СЛАУ, если ее определитель равен нулю?
7. Дайте определение эквивалентных (равносильных) СЛАУ.
8. Назовите элементарные преобразования, не нарушающие равносильности СЛАУ.
9. В чем состоит сущность метода Жордана – Гаусса для решения СЛАУ? Как осуществляется этот метод? Когда он применим?
10. Что называется общим решение СЛАУ?
11. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?
12. Как найти частное решение СЛАУ? Сколько частных решений имеет СЛАУ?

Основы математического анализа

Функция

1. Что называется функцией?
2. Что такое естественная область определения функции?

3. Какая функция называется четной, нечетной?
4. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?

Пределы и непрерывность

1. Что называется пределом функции?
2. Каким образом определяется число e ?
3. Сформулируйте основные теоремы вычисления пределов.
4. Запишите формулы соответствующие первому и второму замечательным пределам.
5. Какие приемы используются при раскрытии неопределенностей?
6. Дайте определение непрерывной функции.
7. Что называется точкой разрыва?
8. На какие два типа делятся точки разрыва? Дайте определение.
9. Какие пределы называются односторонними?
10. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?
11. Какая точка называется точкой скачка? Что называется скачком?

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила нахождения производной функции.
3. Какие функции называются дифференцируемыми?
4. Какая функция называется сложной?
5. Как найти производную сложной функции?
6. Что называется производной второго порядка?
7. Что называется производной n – го порядка?
8. Дайте определение возрастания и убывания функции.
9. Дайте определение экстремума функции.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции?
11. Выпуклость функции. Точки перегиба.
12. Сформулируйте определение асимптоты. Перечислите основные виды асимптот.
13. Сформулируйте общую схему исследования функции для построения графика.

Интегральное исчисление функций одной переменной

1. Что называется первообразной? Перечислите свойства первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
4. Перечислите основные формулы интегрирования.
5. Какие методы интегрирования вы знаете? В чем заключается их сущность?
6. Дайте определение определенного интеграла.
7. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
8. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?
9. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся над осью Ox ?
10. По какой формуле вычисляется площадь фигуры прилегающей к оси Oy ?
11. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся под осью Ox ?
12. По какой формуле вычисляется площадь фигуры расположенной по обе стороны оси Ox ?
13. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной двумя пересекающимися кривыми?

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей и математическая статистика

1. Элементы комбинаторики.
2. Случайное, достоверное и возможное события. Сумма и произведение событий.
3. Вероятность события (классическое определение вероятности).
4. Совместность и несовместность событий. Вероятность противоположного события; суммы событий.
5. Условная вероятность.
6. Зависимые и не зависимые события. Вероятность произведения событий.
7. Формула полной вероятности.

8. Формула Байеса.
9. Случайные события как подмножества множества простейших исходов.
10. Понятие дискретной случайной величины.
11. Ряд распределения.
12. Функция распределения и ее свойства
13. Числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).
14. Формула Бернулли.
15. Биномиальный закон распределения.
16. Распределение Пуассона.